UNIVERSIDAD AUTÓNOMA
DE SAN LUIS POTOSÍ
Facultad de Economía

Maestría en Economía Matemática

Consumir Verde o Marrón, la Paradoja de los Consumidores Verdes. Acciones de la Industria y el Gobierno

TESIS

Para obtener el grado de:
Maestra en Economía Matemática

Presenta:

Belia Gissel Suazo Mejía

Director: Dr. Elvio Accinelli

Codirector: Dr. Humberto Muñiz

Marzo del 2025, San Luis Potosí, S.L.P, México

Folio No. 049

"Consumir verde o marrón, la paradoja de los consumidores verdes. Acciones de la industria y el gobierno" © 2024 by **Belia Gissel Suazo Mejía** is licensed under Creative Commons Attribution-NonCommercial-NoDerivatives 4.0 International

Agradecimientos

La culminación de este trabajo ha sido posible gracias al respaldo de diversas personas e instituciones a lo largo del proceso formativo.

Agradezco a la Universidad Autónoma de San Luis Potosí y al Posgrado en Economía Matemática por proporcionar el entorno académico y los recursos necesarios para el desarrollo de esta investigación.

Reconozco el apoyo del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT), cuya beca fue fundamental para llevar a cabo los estudios de maestría.

Expreso mi agradecimiento al Dr. Elvio Accinelli, director de esta tesis, y al Dr. Humberto Muñiz, codirector, por su orientación, guía académica y valiosos comentarios durante el desarrollo del presente trabajo. Asimismo, agradezco al cuerpo académico del programa por sus aportaciones durante el proceso formativo.

Extiendo también mi reconocimiento al personal administrativo por su disposición y acompañamiento a lo largo de la trayectoria académica.

Finalmente y no menos importante, agradezco a Dios por concederme la oportunidad y la fortaleza necesarias para completar este proceso.

Resumen

En este trabajo se utilizan elementos de la teoría de juegos no cooperativos para explicar como una economía tradicional puede evolucionar hacia una economía verde sin dejar de ser competitiva. Se entiende por economía tradicional (o marrón) aquella que produce y consume bienes sin considerar las repercusiones de estas actividades sobre el medio ambiente. Mientras que, por economía verde se hace referencia a que consumidores y productores buscan consumir y producir, respectivamente, productos amigables con el entorno. En ambos casos se considera que tanto los consumidores como los productores actúan racionalmente procurando niveles de producción y consumo que bajo determinadas circunstancias les permita maximizar sus utilidades y/o beneficios.

Más detalladamente, se considera un modelo evolutivo, en el marco de equilibrio general, para una economía en la que gobernantes, productores y consumidores, respectivamente, deben elegir entre políticas públicas y planes de producción y consumo verdes o marrones. Para analizar la evolución de las decisiones de cada uno de estos agentes, se propone la dinámica del replicador, la cual describe cómo con el tiempo las estrategias exitosas se propagan en una población, basándose en principios de la biología matemática, entendiendo que tales estrategias son aquellas que tienen asociado un mayor valor esperado en términos de utilidades o beneficios de manera que los participantes se verán tentados a optar por ellas.

Palabras clave: Diversificación, Macroeconomía conductual; Juegos evolutivos; Trampas ambientales; Consumo verde; Finanzas verdes.

JEL clasificación: C72; C73; D90; H30; O44.

Abstract

This work uses elements of non-cooperative game theory to explain how a traditional economy can evolve towards a green economy while remaining competitive. The traditional (or brown) economy is understood as one that produces and consumes goods without considering the repercussions of these activities on the environment. The green economy, on the other hand, refers to consumers and producers seeking to consume and produce, respectively, environmentally friendly products. In both cases, it is considered that both consumers and producers act rationally, seeking levels of production and consumption that, under certain circumstances, allow them to maximize their profits and/or benefits.

In more detail, an evolutionary model is considered, within the framework of general equilibrium, for an economy in which rulers, producers and consumers, respectively, must choose between green or brown public policies and production and consumption plans. To analyze the evolution of the decisions of each of these agents, the replicator dynamics is proposed, which describes how successful strategies spread over time in a population, based on principles of mathematical biology, understanding that such strategies are those that have a higher expected value in terms of utilities or benefits such that participants will be tempted to opt for them.

Keywords: Diversification, Behavioral macroeconomics; Evolutionary games; Environmental traps; Green consumption; Green finance.

JEL classification: C72; C73; D90; H30; O44.

Índice general

Agradecimientos **3**

Resumen **4**

Abstract **5**

1. Introducción **8**

1.1. Contexto 8

1.2. Objetivos de investigación 13

2. Antecedentes **14**

2.1. Teoría de juegos, juegos evolutivos y dinámica del replicador 14

2.2. Marco conceptual: definiciones y teoremas 19

2.3. Nota sobre la relación entre los equilibrios de Nash y los equilibrios dinámicos 29

2.4. Nota sobre el modelo seguidor-líder de Stackelberg 30

2.4.1. Formalización del modelo 30

2.4.2. Aplicaciones 31

2.5. Revisión de la literatura 31

3. El juego, los jugadores, sus alternativas y el mercado **34**

3.1. El juego 34

3.2. Gobierno 36

3.3. Empresas 39

3.4. Consumidores 42

3.5. Los mercados 44

4. Cómo juegan los jugadores **49**

4.1. El gobierno y la política fiscal 49

4.2. Consumidores e incentivos 51

4.3. Empresas e incentivos: corto y largo plazo 53

4.4. Una nota sobre impuestos, eficiencia y equilibrio 60

5. Matrices de pago **63**

5.1. Pago del gobierno 63

5.2. Pago de los consumidores 66

5.3. Pago de las firmas 69

6. La evolución de la economía **71**

6.1. Dinámica del replicador 74

6.2. Los equilibrios de Nash en el juego 77

7. Dinámica evolutiva y estabilidad **89**

7.1. Ciclos de consumo alternativos: del marrón al verde y viceversa 91

8. Conclusiones **95**

Conclusiones 95

1 Introducción

1.1 Contexto

La contaminación ambiental es uno de los desafíos globales más graves en la actualidad (Pandey and Singh, 2019). Esta problemática no es exclusiva de los países desarrollados o en vías de desarrollo, es un problema que ambos comparten (Nishat et al., 2022). Sin embargo, las respuestas a este desafío en cada país pueden ser diferentes, incluso inexistentes.

La concienciación sobre la contaminación ambiental y la imposición de leyes para suavizarla en los países desarrollados, realmente ha contribuido de manera decisiva a la protección de su medio ambiente (Ukaogo et al., 2020). Por ello, mejorar la sensibilización y conocimiento público sobre estos temas es esencial para reducir sus efectos nocivos (Gaur et al., 2024), pero no es suficiente.

Para combatir los problemas provocados por la contaminación ambiental, en algunos países, el gobierno, los productores y los consumidores tienden a favorecer el uso de energías renovables, que permitan facilitar el proceso de transición de una economía lineal[1] hacia una circular[2] que sea sostenible en el tiempo.

Los procesos de producción verdes, así como las políticas gubernamentales dirigidas a promover el consumo de este tipo de productos, han surgido como una alternativa

[1]La economía lineal es un modelo de producción y consumo caracterizado por la secuencia "extraer-producir-consumir-desechar", donde los recursos naturales se utilizan para fabricar productos que, tras su uso, se convierten en residuos sin considerar su reutilización o reciclaje. Este enfoque implica un uso intensivo de recursos naturales y genera una elevada presión sobre el medio ambiente debido a la enorme generación de residuos, emisiones de gases de efecto invernadero y contaminación de suelos y agua (García, 2022).

[2]La economía circular es un sistema regenerativo en el que los productos y materiales mantienen su utilidad y valor en todo momento, minimizando la generación de residuos y la extracción de nuevos recursos (Ellen MacArthur Foundation, 2013).

viable para la protección del entorno (Cai et al., 2020; Liang et al., 2023). No obstante, aún cuando los beneficios de la producción verde son enormes, en otros países el uso de energías no renovables es mayoritario, esta diversidad de políticas no sólo depende de las preferencias de consumidores y productores, existen cuestiones estructurales que llevan a la elección de una u otra alternativa. Por otro lado, la formulación y ejecución de políticas gubernamentales orientadas al cuidado ambiental no siempre dan los resultados esperados, ello se debe a que los agentes económicos son racionales, en el sentido de que buscan maximizar sus beneficios dadas las restricciones presupuestarias o tecnológicas existentes, es decir que, toman sus decisiones comparando las ganancias que puedan obtener, con los costos asociados.

Aunque los mejores deseos no siempre conducen al éxito, si se quiere detener la degradación del ambiente es necesario implementar actividades proambientales conjuntas entre el gobierno, las empresas y los consumidores (Bhate, 2005). En la promoción de la producción sustentable y el uso de energías renovables, los gobiernos tienen un papel importante; a través de la creación y ejecución de medidas regulatorias, el gobierno puede intentar encaminar a las industrias hacia la producción verde (Jänicke and Jacob, 2004; Ashford and Hall, 2011). Las políticas a favor de la producción verde suelen incluir medidas de reducción de impuestos y subsidios que faciliten la adquisición de tecnología verde para que industrias produzcan de forma más amigable con el medio ambiente, así como penalizaciones para aquellas que decidan seguir produciendo de forma menos sostenible (Stevens, 2010; Osman et al., 2021). Estas medidas, además de intentar orientar a las industrias hacia una producción ambientalmente amigable, también buscan reducir la brecha entre los precios (más altos) de los productos verdes y sus correspondientes contrapartes tradicionales con el propósito de motivar el consumo verde (Stevens, 2010).

Un ejemplo sobre cómo se refleja esta problemática en la actualidad, se observó en los países de la Unión Europea (UE), los cuales se han enfrentado a cuestiones ambientales complejas, que van desde el cambio climático y la pérdida de biodiversidad hasta el agotamiento de los recursos y la contaminación. Teniendo en cuenta estos desafíos, la política ambiental europea sigue los principios de precaución, prevención, rectificación de la contaminación en la fuente y el principio de “quien contamina paga”. En 2019, la Comisión lanzó el Pacto Verde Europeo, colocando las preocupaciones ambientales al frente de la

formulación de políticas de la UE (Van Themaat and Reuder, 2018).

Teniendo en cuenta lo anterior, en este trabajo se presenta un modelo que analiza la posible evolución de una economía hacia una producción verde, respetuosa con el medio ambiente, o hacia una producción marrón, es decir, hacia una economía que no presta atención a los efectos que el consumo y la producción pueden provocar sobre el entorno. Considerando que esta evolución será el resultado de la elección de estrategias de consumo y producción de tres agentes económicos; el gobierno, que puede o no promover un tipo de producción y consumo a través de políticas públicas, las empresas son maximizadoras de beneficios y optarán por aquella forma de producción que les permita obtener mayores ingresos, decisión que se verá afectada por las políticas gubernamentales y las decisiones de los consumidores, finalmente los consumidores forman el tercer participante, contemplando su consumo en conjunto, todos ellos iguales y maximizando sus preferencias, su decisión se verá afectada por los incentivos que el gobierno pueda ofrecer para el consumo y producción de bienes verdes.

Resulta paradójico que, incluso cuando los agentes manifiestan una preferencia individual por una economía verde, la interacción estratégica entre ellos pueda derivar en una economía predominantemente marrón. Las decisiones no responden únicamente a las preferencias aisladas de cada agente, sino que también dependen de las decisiones de los demás. Por ejemplo, un consumidor que valora los productos verdes puede optar por consumir bienes marrones si los precios de los productos ecológicos resultan demasiado elevados. De manera similar, los directivos de las empresas no eligen su tipo de producción exclusivamente con base en consideraciones ambientales, sino que responden a las señales del mercado. Una alta demanda por bienes marrones puede incentivar la producción de estos, incluso si ello implica deteriorar el medio ambiente. Este tipo de comportamiento colectivo puede entenderse mejor a través de la dinámica del replicador, donde las estrategias que generan mayores beneficios relativos tienden a expandirse en la población, aunque dichas estrategias no necesariamente reflejen las preferencias sociales agregadas o sostenibles en el largo plazo (Weibull, 1995).

En definitiva, la evolución hacia una economía verde dependerá de la interacción entre los diversos grupos que conforman la economía. En este caso, gobierno, empresas y consumidores. Es así que, en este análisis se muestra que ninguno de estos sectores por sí

solo es capaz de determinar la evolución de la economía.

Este enfoque permite introducir la teoría de juegos evolutivos como herramienta para modelar la dinámica de transformación de una economía, ya sea hacia una economía verde —comprometida con la sostenibilidad ambiental— o, alternativamente, hacia una economía marrón, más centrada en los beneficios sectoriales que en el impacto ambiental de sus actividades. Esta teoría, cuyo desarrollo se remonta al trabajo seminal de Maynard Smith (1982) con su concepto de Evolutionarily Stable Strategies (ESS), permite analizar cómo ciertas estrategias económicas pueden prevalecer en el tiempo, dependiendo de su desempeño relativo dentro del entorno competitivo.

Como es típico en los modelos de equilibrio general, los precios de equilibrio, las asignaciones de consumo y los planes de producción serán el resultado de la acción conjunta de todos los implicados. Pero, estos modelos son básicamente estáticos. La introducción de la dinámica del replicador permitirá analizar la evolución de la composición de los planes de consumo y producción a lo largo del tiempo, distinguiendo entre consumo y producción verde y marrón.

Inicialmente, en la sección 3 se plantea un juego en forma normal de tres jugadores con dos estrategias y se analizan los resultados para cada participante en función de la estrategia seguida por los contrincantes. Considerando entonces que las decisiones de los agentes económicos dependerán del valor esperado de sus estrategias, que a su vez depende de la distribución de los posibles comportamientos de los demás jugadores. De esta forma, el trabajo se organiza de la siguiente manera; en la sección 2 se presentan y describen los modelos y bases teóricas sobre las cuales se fundamenta este trabajo. En la sección 3 se introduce el juego teniendo en cuenta los jugadores y sus estrategias, así como el mercado. En la sección 4 se estudia el comportamiento de los jugadores. En la sección 4.4 se examinan los precios, y los planes de consumo y producción en equilibrio, en función de la política fiscal seguida por el gobierno. En la sección 5 se detallan los beneficios que cada grupo obtiene en equilibrio, en función de sus propias estrategias y de las de sus oponentes. En la sección 6 se asume que el juego se repite de forma continua y que los jugadores definen sus estrategias en función de los valores esperados asociados a ellas. Para ello, cada participante considerará la probabilidad con la que sus oponentes casuales se comportarán de una forma u otra. En esta sección se introduce la dinámica

del replicador. Una vez dadas las condiciones iniciales, es decir, una vez establecidas las distribuciones sobre el conjunto de estrategias puras de cada participante, la solución del sistema dinámico asociado muestra la evolución de la economía como una tendencia de largo plazo. En la sección 7, se realiza el análisis cuantitativo del sistema de ecuaciones diferenciales que se ha derivado en la sección previa. Finalmente, en la sección 8 se ofrecen algunas consideraciones adicionales y conslusiones sobre el modelo.

1.2 Objetivos de investigación

Objetivo general

Analizar la evolución de la política fiscal del gobierno hacia una economía verde, a la luz de las expectativas de las empresas y consumidores a través de la dinámica del replicador.

Objetivos específicos

- Representar formalmente el espacio estratégico de los jugadores (gobierno, empresas y consumidores) mediante una estructura tridimensional que permita visualizar las posibles combinaciones de estrategias puras.
- Construir matrices de pago que incorporen los elementos fiscales, tecnológicos y distributivos que influyen en las decisiones de los actores, evaluando sus efectos sobre los beneficios privados y públicos.
- Determinar las condiciones bajo las cuales existen equilibrios de Nash puros en el modelo, y analizar su relevancia económica en términos de sostenibilidad ambiental.
- Evaluar el papel de la política fiscal como mecanismo de incentivo o desincentivo para la adopción de estrategias verdes, considerando las expectativas estratégicas de los jugadores.
- Identificar cómo las decisiones individuales, influenciadas por los incentivos fiscales y las preferencias sociales, pueden dar lugar a trayectorias evolutivas en la distribución de tecnologías y patrones de consumo.

2 Antecedentes

En ésta sección se presentan y describen los modelos y bases teóricas sobre las cuales se fundamenta este trabajo.

2.1 Teoría de juegos, juegos evolutivos y dinámica del replicador

La teoría de juegos es una disciplina matemática que analiza las decisiones estratégicas entre agentes interdependientes, donde el resultado para cada participante depende de las acciones de los demás (Osborne and Rubinstein, 1994). Su desarrollo ha sido fundamental en campos como la economía, la biología, la informática y las ciencias sociales (Myerson, 1991).

Orígenes y desarrollo histórico

- En 1838, Antoine Augustin Cournot publica "Recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses", donde analiza un duopolio y presenta una solución que anticipa el concepto de equilibrio de Nash (Cournot, 1838).

- La Teoría de Juegos surge formalmente en 1944 con la publicación del libro "Theory of Games and Economic Behavior" por John Von Neumann y Oskar Morgenstern (von Neumann and Morgenstern, 1944), donde se establecen los fundamentos matemáticos del análisis estratégico en situaciones de interacción entre agentes racionales.

- En 1950, John Nash introduce el concepto de equilibrio, luego llamado en su honor de Nash (equilibrio de Nash), el que corresponde a una situación en la que ningún jugador puede mejorar su estrategia si los demás mantienen la suya (Nash, 1950).

Este concepto se convierte en una piedra angular de la teoría y tiene aplicaciones en economía, política y biología.

- En la década de 1970, el biólogo John Maynard Smith adapta la teoría de juegos a la biología con el concepto de Estrategia Evolutivamente Estable (ESS, por sus siglas en inglés), permitiendo entender la evolución de comportamientos en poblaciones. La idea clave de la **ESS** es simple pero poderosa: si una estrategia domina en una población, ninguna nueva estrategia "mutante" podrá desplazarla fácilmente. Esto ayudó a entender fenómenos como la estabilidad de ciertos comportamientos en el reino animal y en las sociedades humanas.(Smith and Price, 1973).

  En la teoría de juegos evolutivos, el concepto de ESS, desempeña un papel análogo al del equilibrio de Nash en la teoría de juegos clásica (Accinelli, 2011).

- En 1973, John Maynard Smith y George R. Price introdujeron en su trabajo seminal, los juegos evolutivos, que son un marco teórico que combina la teoría de juegos con la biología evolutiva para estudiar cómo las estrategias de comportamiento evolucionan en una población a lo largo del tiempo (Smith and Price, 1973).

  En los juegos evolutivos, el concepto de racionalidad es diferente al de la teoría de juegos clásica. Mientras que en la teoría de juegos tradicional los jugadores son agentes racionales que toman decisiones deliberadas para maximizar su utilidad, en los juegos evolutivos la "racionalidad" está asociada a la selección natural y al éxito reproductivo (Smith and Price, 1973; Hofbauer and Sigmund, 1998).

  Racionalidad en los juegos evolutivos (Maynard Smith, 1982)

  1. **Selección natural como mecanismo de racionalidad:**
     - En los juegos evolutivos, las estrategias no son elegidas deliberadamente, sino que son el resultado de procesos evolutivos.
     - Las estrategias que maximizan el *fitness* (éxito reproductivo) tienden a predominar en la población, incluso si no son "óptimas" en un sentido tradicional.
  2. **Estrategias Evolutivamente Estables (ESS):**

- Una estrategia es evolutivamente estable si, una vez que es adoptada por la mayoría de la población, ninguna estrategia alternativa puede invadirla.
- Esto no implica que los individuos sean racionales, sino que la selección natural favorece estrategias que son robustas frente a mutaciones o invasiones.

3. **Dinámica del replicador:**
   - La dinámica del replicador describe cómo cambian las frecuencias de las estrategias en una población en función de su éxito relativo.
   - No hay racionalidad individual, sino un proceso mecánico de selección basado en el *fitness*.
4. **Racionalidad acotada:**
   - En algunos modelos, se introduce una forma de racionalidad acotada, donde los individuos imitan estrategias exitosas o aprenden de su entorno.
   - Esto se acerca más a la racionalidad humana, pero sigue siendo un proceso guiado por reglas simples en lugar de una maximización consciente.

- A finales de los 70 y durante los 80 y 90, la teoría de juegos evolutivos se volvió aún más matemática con el desarrollo de la dinámica del replicador, una ecuación propuesta por (Smith and Price, 1973). Este modelo describe cómo cambian las frecuencias de las estrategias en una población a lo largo del tiempo, la tasa de crecimiento de una estrategia es proporcional a la diferencia entre su rendimiento y el rendimiento promedio de la población. Esto implica que las estrategias con un desempeño superior a la media aumentarán su frecuencia, mientras que aquellas con menor rendimiento disminuirán. La dinámica del replicador es clave para entender la selección natural y la evolución de estrategias en sistemas biológicos, económicos y sociales. Fue formalizada por Peter Taylor y Leo Jonker en 1978 y se basa en la idea de que las estrategias más exitosas se reproducen más rápidamente, mientras que las menos exitosas tienden a desaparecer (Taylor and Jonker, 1978). Utilizada para estudiar la evolución de estrategias en el tiempo (Hofbauer and Sigmund, 1998).

  Durante este período, el trabajo de Axelrod (1980) también fue crucial. A través de experimentos computacionales, estudió la evolución de la cooperación utilizando

el famoso **dilema del prisionero iterado**, un juego que demuestra cómo las estrategias cooperativas pueden surgir y mantenerse en poblaciones competitivas. Sus estudios mostraron que, en muchas situaciones, comportamientos como la cooperación y el altruismo no son solo posibles, sino que pueden ser una estrategia óptima para la supervivencia a largo plazo.

- Desde los 2000, la teoría de juegos se ha expandido a campos como la inteligencia artificial, economía del comportamiento y redes sociales, mostrando su versatilidad en problemas del mundo real (Pacheco et al., 2006).

Ramas de la teoría de juegos

Asimismo, la teoría de juegos se divide en varias ramas, cada una con sus propios enfoques y formalismos, pero las dos principales son:

1. **Teoría de juegos cooperativos:** se enfoca en coaliciones de jugadores y cómo pueden formar acuerdos vinculantes para lograr beneficios colectivos. Analiza la distribución óptima de ganancias entre los miembros de una coalición (Osborne and Rubinstein, 1994).
2. **Teoría de juegos no cooperativos:** estudia cómo los individuos toman decisiones de manera independiente, considerando las posibles acciones de los demás sin formar alianzas vinculantes. El equilibrio de Nash es un concepto central en esta rama (Nash, 1950), porque se enfoca en el análisis de equilibrios estratégicos de Nash, donde cada jugador selecciona su estrategia óptima dadas las estrategias de los demás. Los juegos no cooperativos se representan comúnmente en forma normal (ver la Definición 1) o forma extensiva, dependiendo de la estructura de la interacción (Nash, 1951).

Sin embargo, la rama que atañe a este trabajo es la teoría de juegos no cooperativos, ya que en este estudio el juego se presenta en forma normal y se analiza de manera no cooperativa.

Aplicaciones y avances

- La teoría de juegos ha demostrado ser una herramienta invaluable en diversas áreas. En economía, se utiliza para modelar comportamientos en mercados y subastas (von Neumann and Morgenstern, 1944). En biología, ayuda a explicar estrategias de supervivencia y reproducción (Maynard Smith, 1982). En informática, es fundamental en el diseño de algoritmos y redes (Osborne and Rubinstein, 1994).

- Asimismo,la teoría de juegos se ha consolidado como una herramienta analítica esencial para evaluar y diseñar políticas públicas. Esta disciplina permite modelar y analizar las interacciones estratégicas entre diversos actores involucrados en la formulación e implementación de políticas, facilitando la comprensión de cómo las decisiones de un agente pueden influir en las de otros y en los resultados colectivos. Este enfoque es particularmente útil para prever comportamientos y diseñar intervenciones más efectivas en contextos gubernamentales (Tarifa et al., 2011).

  De la misma forma, uno de los enfoques destacados en este ámbito es la Teoría del Juego Social propuesta por Carlos Matus. Esta teoría ofrece una perspectiva integral del proceso social, enfatizando la importancia de considerar las dinámicas de poder y las interacciones estratégicas en el análisis de políticas públicas. Matus argumenta que, para abordar eficazmente los problemas públicos, es necesario comprender el "juego social" en el que participan múltiples actores con intereses y recursos diversos (Matus, 2007).

  De acuerdo con lo anterior, en este trabajo es posible analizar la interacción entre los tres participantes implicados y evaluar las políticas que formula y ejecuta el gobierno según su afiliación hacia una economía verde o marrón.

- Finalmente, ha influido en campos como la política, la sociología y la psicología, proporcionando marcos para entender interacciones estratégicas complejas. (Myerson, 1991).

2.2 Marco conceptual: definiciones y teoremas

En esta sección se presentan las definiciones formales y los teoremas que son necesarios y útiles para el desarrollo de este trabajo, cada uno acompañado de una breve descripción, sobre el "por qué" de su utilidad.

Definiciones fundamentales

Es importante conocer la definición formal de un juego no cooperativo en forma normal, ya que en este trabajo, inicialmente se analiza el juego de tres jugadores con dos estrategias cada uno, de esta manera. A continuación se muestra esta definición.

Observación 1 (Notación matemática)**.** *De aquí en adelante, en todo el trabajo se utilizará:*

- $\Re$ *para denotar el conjunto de los números reales.*
- *De igual forma, se empleará de manera indiferente, la notación* $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \dot{x}_i$*, para indicar la derivada de la variable* x *respecto al tiempo.*

Definición 1. *[Juego no cooperativo en forma normal*[1] *(Osborne and Rubinstein, 1994)] Un* ***juego no cooperativo en forma normal*** *está definido por la terna:*

$$G = (N, (S_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N}),$$

donde:

- N *es el conjunto finito de jugadores.*
- S_i *es el conjunto de estrategias*[2] *del jugador* $i \in N$*.*

[1]De acuerdo con Osborne and Rubinstein (1994), un **juego finito** es aquel en el que hay un número finito de jugadores y cada jugador tiene un número finito de estrategias disponibles. Mientras que, un **juego infinito**, es aquel en el que al menos uno de los siguientes elementos es infinito:

- El número de jugadores.
- El conjunto de estrategias de al menos un jugador.
- El número de etapas en juegos dinámicos.

En esta definición solo se consideran juegos finitos.

[2]Asimismo, para Osborne and Rubinstein (1994), una **estrategia** en teoría de juegos es un plan de acción completo que determina la elección de un jugador en cada situación posible en la que deba tomar

Donde n es un número entero positivo. Para cada jugador $i \in N$, sea S_i su conjunto finito de estrategias puras. Para mayor comodidad en la notación, se etiquetaran las estrategias puras de cada jugador con enteros positivos. Así, el conjunto de estrategias puras de cualquier jugador $i \in N$ se escribe como

$$S_i = \{1, 2, \ldots, m_i\},$$

para algún entero $m_i \geq 2$.

Un vector σ^* de estrategias puras,

$$\sigma^* = (\sigma_1^*, \sigma_2^*, \ldots, \sigma_n^*),$$

*donde σ_i^* es una estrategia pura para el jugador i, se llama un **perfil de estrategias puras**. Formalmente, si se considera un juego con n jugadores, donde cada jugador i tiene un conjunto de estrategias S_i, entonces el conjunto de perfiles de estrategias es*

$$S = S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_n.$$

*de los conjuntos de estrategias puras de los jugadores, el cual a veces se denomina el **espacio de estrategias puras** del juego.*

Las estrategias σ_i viven en el conjunto de estrategias S_i de cada jugador i, es decir, $\sigma_i \in S_i$.

Entonces, el perfil de estrategias de equilibrio de Nash $\sigma^* = (\sigma_1^*, \sigma_2^*, \ldots, \sigma_n^*)$ pertenece al producto cartesiano de los conjuntos de estrategias de todos los jugadores:

$$\sigma^* \in S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_n = S.$$

Por lo tanto, las estrategias σ^* viven en S, el espacio de estrategias de todos los jugadores.

una decisión dentro del juego. Puede ser:

- **Estrategia pura**: especifica una única acción determinista en cada decisión.
- **Estrategia mixta**: asigna una distribución de probabilidad sobre las acciones posibles.

Si se consideran estrategias mixtas, cada jugador i elige una distribución de probabilidad sobre su conjunto de estrategias puras S_i. Se denota por $\Delta(S_i)$ el símplex de estrategias mixtas del jugador i, es decir, el conjunto de todas las distribuciones de probabilidad sobre S_i:

$$\sigma_i \in \Delta(S_i)$$

Así, un perfil de estrategias mixtas en el juego es un elemento del producto cartesiano de los símplex de todos los jugadores:

$$\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) \in \Delta(S_1) \times \Delta(S_2) \times \cdots \times \Delta(S_n) = \Delta(S).$$

El equilibrio de Nash en estrategias mixtas $\sigma^* = (\sigma_1^*, \sigma_2^*, \ldots, \sigma_n^*)$ pertenece a este espacio:

$$\sigma^* \in \Delta(S).$$

Es decir, cada σ_i^* es una distribución de probabilidad sobre S_i, y el conjunto de todas las estrategias mixtas forma un producto de símplex.

- $u_i : S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_n \to \Re$ *es la función de utilidad del jugador i, que asigna un pago a cada combinación de estrategias.*

Posteriormente, en la sección 6.2, se analizan los equilibrios de Nash del juego, debido a ello, se presenta la definición formal.

Definición 2. *[Equilibrio de Nash (Nash, 1950)]*

Un ***equilibrio de Nash*** *es un perfil de estrategias $\sigma^* = (\sigma_1^*, \sigma_2^*, \ldots, \sigma_n^*)$ tal que para todo jugador $i \in N$ y para toda estrategia alternativa $\sigma_i \in S_i$, se cumple:*

$$u_i(\sigma_i^*, \sigma_{-i}^*) \geq u_i(\sigma_i, \sigma_{-i}^*),$$

donde σ_{-i}^* representa las estrategias de todos los jugadores excepto el jugador i.

Un juego evolutivo no es más que un juego no cooperativo en forma normal que incluye una dinámica que rige la evolución de las estrategias. Dado que al juego en forma normal que se presenta en este análisis se le aplica una dinámica, este se convierte en un juego evolutivo, por ello es relevante conocer la definición formal del mismo.

Definición 3. *[Juego evolutivo (Maynard Smith, 1982)]*

*Un **juego evolutivo** está caracterizado por una población de agentes que juegan repetidamente un juego, donde la frecuencia de las estrategias cambia en el tiempo de acuerdo con su éxito relativo. Se modela mediante:*

$$G = (S, u, \mathcal{D}),$$

donde:

- S *es el conjunto de estrategias disponibles.*
- $u : S \times S \to \Re$ *es la función de pago.*
- $\mathcal{D}$ *es una dinámica poblacional que rige la evolución de las estrategias.*

Anteriormente se mencionó que una ESS en juegos evolutivos es el concepto análogo a un equilibrio de Nash en teoría de juegos clásica, debido a ello se define formalmente una ESS en la **Definición 4**

Definición 4. *[Estrategia Evolutivamente Estable (ESS) (Maynard Smith, 1982)]*

*Una estrategia $\sigma^* \in S$ es **evolutivamente estable** si para toda estrategia mutante $\sigma \neq \sigma^*$ se cumple:*

$$u(\sigma^*, \sigma^*) > u(\sigma, \sigma^*) \quad o \quad (u(\sigma^*, \sigma^*) = u(\sigma, \sigma^*) \text{ y } u(\sigma^*, \sigma) > u(\sigma, \sigma)).$$

Debido a que, el modelo principal de este trabajo es un sistema de ecuaciones diferenciales autónomo y este es un caso particular de un sistema dinámico, a continuación se definen de manera formal estos conceptos.

Definición 5. *[Sistema dinámico (Strogatz, 1994)]*

*Un **sistema dinámico** es una pareja (X, φ_t), donde:*

- *X es un espacio de estados, usualmente un subconjunto de $\Re^n$ o una variedad diferenciable.*
- *$\varphi_t : X \to X$ es una familia uniparamétrica de transformaciones que describe la evolución del sistema y satisface la propiedad de semigrupo:*

$$\varphi_0(x) = x, \quad \varphi_{t+s}(x) = \varphi_t(\varphi_s(x)), \quad \forall x \in X, \forall t, s \in \Re.$$

*Si φ_t es inducida por una ecuación diferencial, el sistema es de tipo **continuo**, mientras que si es una función de iteración discreta, es de tipo **discreto**.*

Definición 6. *[Sistema de ecuaciones diferenciales (Hirsch et al., 2012)]*

*Un **sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias** (EDO) de dimensión n está dado por:*

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t), \tag{2.1}$$

donde:

- *$\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))^\top \in \Re^n$ es el vector de variables dependientes.*
- *$t \in \Re$ es la variable independiente (normalmente el tiempo).*
- *$\mathbf{f} : \Re^n \times \Re \to \Re^n$ es una función que define la dinámica del sistema.*

*Si $\mathbf{f}$ no depende explícitamente de t, el sistema se llama **autónomo** y se representa como:*

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}). \tag{2.2}$$

La siguiente Definición 7 es de gran importancia, ya que presenta el modelo principal de este trabajo, el cual es desarrollado en la sección 6.1 y es el que permite establecer conclusiones de acuerdo con el objetivo del estudio.

Definición 7. *[Dinámica del replicador (Taylor and Jonker, 1978)]*

*La **dinámica del replicador** describe la evolución de la proporción x_i de una estrategia i en una población, y está dada por la ecuación diferencial:*

$$\dot{x}_i = x_i(u_i - \bar{u}),$$

donde:

- u_i *es el pago esperado de la estrategia* i.
- $\bar{u} = \sum_j x_j u_j$ *es el pago promedio en la población.*

Los puntos críticos de un sistema de ecuaciones diferenciales son esenciales en el análisis cualitativo del mismo, debido a ello se define formalmente en la siguiente **Definición 8** y posteriormente se relacionan con los equilibrios de Nash.

Definición 8. *[Punto crítico de un sistema de ecuaciones diferenciales (Strogatz, 1994)]*

Un ***punto crítico*** *o* ***punto de equilibrio*** *del sistema* (2.1) *es un punto* $\mathbf{x}^* \in \Re^n$ *tal que:*

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}^*) = 0. \tag{2.3}$$

En $\mathbf{x}^*$ *el sistema no evoluciona con el tiempo, lo que significa que es un estado estacionario.*

A continuación, se presentan algunas definiciones que ayudaran a comprender el concepto de sistema hiperbólico, ello es importante porque el sistema dinámico proveniente de la dinámica del replicador 6.3 es de este tipo.

Definición 9. *[Valor propio hiperbólico (Perko, 2001)]*

Sea $A \in \Re^{n\times n}$ *una matriz. Un valor propio* $\lambda \in \mathbb{C}$ *de* A *es hiperbólico si* $\mathrm{Re}(\lambda) \neq 0$*, es decir, si ninguna de sus partes reales es cero.*

Definición 10. *[Equilibrio hiperbólico (Perko, 2001)]*

Sea el sistema dinámico

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}), \tag{2.4}$$

donde $f : \Re^n \to \Re^n$ *es una función continuamente diferenciable. Un punto de equilibrio* $\mathbf{x}^* \in \Re^n$ *es hiperbólico si la matriz Jacobiana* $Df(\mathbf{x}^*)$ *no tiene valores propios con parte real igual a cero.*

Definición 11. *[Sistema hiperbólico (Perko, 2001)]*

Un sistema dinámico

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}) \tag{2.5}$$

es hiperbólico si todos sus puntos de equilibrio son hiperbólicos.

Finalmente, en la **sección 7.1**, se presenta un análisis de los ciclos de consumo alternativos: del marrón al verde y viceversa, como ciclos heteroclinicos, por ello es importante conocer la definición formal de un ciclo heteroclinico, que a continuación se presenta.

Definición 12. *[Ciclo heteroclínico (Guckenheimer and Holmes, 1983)]*

Sea el sistema dinámico continuo en $\Re^n$

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \tag{2.6}$$

un ***ciclo heteroclínico*** *es una trayectoria cerrada en el espacio de fases que está compuesta por un conjunto finito de órbitas heteroclínicas* $\gamma_i(t)$ *tales que:*

- *Existen al menos dos puntos de equilibrio* $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_m$ *distintos.*
- *Para cada* $i = 1, \ldots, m$*, la órbita* $\gamma_i(t)$ *conecta el punto de equilibrio* $\mathbf{x}_i$ *con* $\mathbf{x}_{i+1}$*, es decir:*

$$\lim_{t\to-\infty} \gamma_i(t) = \mathbf{x}_i, \quad \lim_{t\to+\infty} \gamma_i(t) = \mathbf{x}_{i+1}.$$

- *La última órbita* $\gamma_m(t)$ *cierra el ciclo conectando* $\mathbf{x}_m$ *con* $\mathbf{x}_1$*.*

Un ciclo heteroclínico representa una trayectoria que recorre múltiples estados de equilibrio de manera cíclica y juega un papel clave en el análisis de bifurcaciones y transiciones en sistemas dinámicos.

Teoremas fundamentales

A continuación se presentan dos teoremas fundamentales[3] que se utilizan en este trabajo.

El **Teorema 1**, es necesario para el análisis cualitativo del sistema de ecuaciones diferenciales que constituye la dinámica del replicador (véase el **Capítulo 7)**. Por ello y para tener una mejor comprensión, se presenta este teorema.

Teorema 1. *[Teorema de Hartman-Grobman (Perko, 2001)]*

Sea $\mathbf{x}^*$ *un punto crítico del sistema autónomo*

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}),$$

[3]Por simplicidad, no se presenta ninguna demostración de los mismos, si se quiere profundizar en ello, ver (Hartman, 2002) para el Teorema 1 y (Coddington and Levinson, 1955) para el Teorema 2.

y sea $D\mathbf{f}(\mathbf{x}^*)$ la matriz Jacobiana en $\mathbf{x}^*$. Si $D\mathbf{f}(\mathbf{x}^*)$ no tiene valores propios con parte real cero, entonces existe un difeomorfismo[4]*, local que transforma el sistema original en su* ***linealización****:*

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = D\mathbf{f}(\mathbf{x}^*)\mathbf{y}.$$

Este teorema implica que el comportamiento local del sistema cerca de $\mathbf{x}^*$ está completamente caracterizado por la matriz Jacobiana.

El siguiente **Teorema 2**, garantiza la existencia y unicidad de soluciones de un sistema de ecuaciones diferenciales, necesario para el análisis cualitativo de la dinámica del replicador, que posteriormente se presenta.

Teorema 2. *[Teorema de existencia y unicidad de Picard-Lindelöf (Coddington and Levinson, 1955)]*

Dado el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t),$$

con $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ continua en una región $D \subseteq \Re^n \times \Re$ y lipschitziana[5] *en $\mathbf{x}$, entonces para cada condición inicial $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ existe un único intervalo $I \subseteq \Re$ en el que el problema de valor inicial tiene una única solución.*

[4]Sea $U \subseteq \mathbb{R}^n$ y $V \subseteq \mathbb{R}^n$ conjuntos abiertos. Una función $f : U \to V$ se dice un **difeomorfismo** si es *bijectiva*, *diferenciable* (de clase C^1 o superior), y su inversa $f^{-1} : V \to U$ también es diferenciable (de la misma clase). En otras palabras, un difeomorfismo es una función suave con inversa suave, lo que implica que *preserva la estructura diferenciable* de los espacios involucrados.

Esta noción es fundamental en el análisis matemático y la teoría de sistemas dinámicos, ya que garantiza una equivalencia suave entre espacios o sistemas (Guillemin and Pollack, 1974; Hirsch, 1976).

[5]Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Se dice que f es **Lipschitziana** (o satisface una condición de **Lipschitz**) si existe una constante $L > 0$, llamada constante de Lipschitz, tal que para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$ se cumple:

$$\|f(x) - f(y)\| \leq L\|x - y\|.$$

Esta condición implica que la función no puede crecer más rápido que linealmente con respecto a la distancia entre los puntos de su dominio. La continuidad Lipschitz es más fuerte que la continuidad uniforme, y garantiza propiedades importantes como la existencia y unicidad de soluciones en ecuaciones diferenciales ordinarias (Coddington and Levinson, 1955).

Ejemplos ilustrativos

Con el objetivo de facilitar la comprensión del enfoque teórico desarrollado en esta tesis, a continuación se presentan algunos ejemplos sencillos que permiten visualizar los conceptos fundamentales de la teoría de juegos aplicada. Estos ejemplos muestran, de manera simplificada, cómo se estructuran las decisiones estratégicas entre jugadores en contextos no cooperativos y cómo pueden evolucionar las estrategias a lo largo del tiempo en entornos dinámicos. Si bien se trata de situaciones estilizadas, su inclusión resulta útil para resaltar los mecanismos básicos de interacción estratégica que subyacen en el modelo general.

Ejemplo ilustrativo de juego no cooperativo

Para facilitar la comprensión de la lógica detrás de las decisiones estratégicas, se presenta un ejemplo sencillo de juego no cooperativo en forma normal con dos jugadores: A y B, cada uno con dos estrategias posibles: Verde (V) y Marrón (M). La matriz de pagos se muestra a continuación:

	V (B)	M (B)
V (A)	(3,3)	(1,4)
M (A)	(4,1)	(2,2)

En este juego, si ambos jugadores eligen Verde (V), ambos obtienen un beneficio moderado (3). Sin embargo, existe un incentivo a desviarse hacia Marrón (M), ya que un jugador puede mejorar su ganancia si el otro elige Verde. Este tipo de estructura refleja un dilema típico en el cual el comportamiento cooperativo no es necesariamente el equilibrio, lo cual motiva la necesidad de diseñar incentivos adecuados para fomentar decisiones sostenibles.

Ejemplo ilustrativo de dinámica evolutiva

Una forma alternativa de analizar los comportamientos estratégicos en el tiempo es a través de juegos evolutivos. A continuación, se expone un ejemplo básico en el que los jugadores pertenecen a una población que puede adoptar una de dos estrategias: Verde (V) o Marrón (M). La matriz de pagos es la siguiente:

	V	M
V	4	2
M	5	3

Sea x la proporción de individuos en la población que eligen la estrategia Verde (V). Entonces, el pago esperado para cada estrategia se calcula como:

$$\pi_V = 4x + 2(1-x) = 2 + 2x$$
$$\pi_M = 5x + 3(1-x) = 3 + 2x$$

La dinámica replicadora se puede expresar como:

$$\dot{x} = x(\pi_V - \bar{\pi}), \quad \text{donde } \bar{\pi} = x\pi_V + (1-x)\pi_M$$

Este tipo de dinámica permite analizar cómo las proporciones de estrategias en la población evolucionan con el tiempo, dependiendo de los pagos relativos. A diferencia del enfoque clásico, aquí los jugadores no son perfectamente racionales sino que las estrategias exitosas tienden a replicarse más.

Simulación numérica simplificada

A continuación se muestra una tabla ilustrativa de la evolución de la proporción de individuos con estrategia Verde (x) para distintos valores iniciales, asumiendo pasos pequeños en el tiempo ($\Delta t = 0{,}1$):

t	$x(t)$	π_V	π_M
0.0	0.20	2.4	3.4
0.1	0.19	2.38	3.38
0.2	0.18	2.36	3.36
0.3	0.17	2.34	3.34

Se observa que, bajo estos parámetros, la estrategia Marrón tiende a dominar la población, desplazando progresivamente a la estrategia Verde. Esto refuerza la necesidad de políticas que aumenten el retorno relativo de las estrategias sostenibles.

2.3 Nota sobre la relación entre los equilibrios de Nash y los equilibrios dinámicos

Los equilibrios de Nash y los puntos críticos de un sistema dinámico están estrechamente relacionados en el contexto de la teoría de juegos y los sistemas dinámicos. Un equilibrio de Nash representa un estado en el que ningún jugador tiene incentivos para desviarse unilateralmente de su estrategia, mientras que un punto crítico en un sistema dinámico es un punto donde la derivada de la función que describe la dinámica del sistema se anula, es decir, donde el sistema puede alcanzar un estado de equilibrio.

En muchos modelos dinámicos de teoría de juegos, los equilibrios de Nash corresponden a puntos críticos del sistema dinámico que describe la evolución de estrategias en el tiempo. Específicamente, en dinámicas de replicador y otros procesos de aprendizaje en juegos, los equilibrios de Nash a menudo coinciden con puntos de equilibrio del sistema dinámico. Sin embargo, no todos los puntos críticos de un sistema dinámico son equilibrios de Nash, ya que algunos pueden ser inestables o representar ciclos en lugar de equilibrios.

En el análisis moderno de juegos, los equilibrios de Nash se interpretan frecuentemente como puntos estacionarios de ciertos procesos dinámicos. Diversas teorías de aprendizaje y ajuste estratégico han mostrado que, bajo determinadas condiciones, las estrategias de los jugadores tienden hacia un equilibrio de Nash como resultado del proceso adaptativo. Es decir, el equilibrio de Nash puede verse como un estado dinámicamente estable en el que las estrategias ya no se modifican porque ningún jugador tiene incentivos para desviarse unilateralmente (Fudenberg and Levine, 1998; Hofbauer and Sigmund, 1998).

No obstante, el hecho de que un estado sea estable en términos dinámicos no implica necesariamente que sea un equilibrio de Nash. Existen trayectorias o puntos fijos en dinámicas evolutivas o de aprendizaje que no satisfacen las condiciones de racionalidad estratégica exigidas por la definición de Nash (Samuelson, 1997; Weibull, 1995). Por ejemplo, bajo la dinámica replicadora o el aprendizaje por refuerzo, pueden surgir estados estables donde los jugadores persisten en estrategias subóptimas o dominadas, especialmente cuando hay errores, mutaciones o comportamientos no racionales (Kandori et al., 1993; Young, 1998). En consecuencia, todo equilibrio de Nash puede entenderse como un

equilibrio dinámico en algunos procesos, pero no todo equilibrio dinámico corresponde a un equilibrio de Nash.

Esta distinción es relevante para modelos en los que las interacciones estratégicas ocurren de forma repetida o adaptativa, ya que permite diferenciar entre estabilidad conductual y estabilidad racional. Así, un análisis riguroso debe considerar que la convergencia hacia estados estables no garantiza la validez de las condiciones de optimalidad individual características del equilibrio de Nash.

2.4 Nota sobre el modelo seguidor-líder de Stackelberg

En esta sección se presenta de manera breve el modelo seguidor-líder de Stackelberg, ya que en el modelo que se analiza en este trabajo, se presentan dos tipos diferentes de empresas y se asume que bajo determinadas circunstancias que posteriormente se mencionan, estas pueden actuar como líder o seguidor.

El modelo de Stackelberg es un modelo de competencia económica en el que dos empresas interactúan en un mercado, asumiendo roles asimétricos: una empresa actúa como **líder** y la otra como **seguidora**. Este modelo fue propuesto por Heinrich von Stackelberg en su obra *Marktform und Gleichgewicht* (1934) (Stackelberg, 1934).

En este modelo, el líder toma decisiones primero (por ejemplo, fijando su nivel de producción o precio), y el seguidor observa la decisión del líder antes de tomar su propia decisión. Esta estructura secuencial se modela utilizando la teoría de juegos, específicamente en el marco de juegos dinámicos con información perfecta.

2.4.1 Formalización del modelo Suponiendo un duopolio donde:

- El líder elige su cantidad de producción q_1.
- El seguidor observa q_1 y elige su cantidad de producción q_2.

El equilibrio de Stackelberg se encuentra resolviendo el problema de optimización del seguidor primero (dada la decisión del líder) y luego resolviendo el problema del líder, anticipando la reacción del seguidor. Matemáticamente, el seguidor maximiza su beneficio

$\pi_2(q_1, q_2)$, mientras que el líder maximiza su beneficio $\pi_1(q_1, q_2^*(q_1))$, donde $q_2^*(q_1)$ es la función de reacción del seguidor.

2.4.2 Aplicaciones El modelo de Stackelberg se utiliza ampliamente en economía industrial, teoría de juegos y estrategias empresariales. Por ejemplo, se aplica en mercados donde una empresa dominante fija precios y las empresas más pequeñas ajustan su comportamiento en consecuencia (Fudenberg and Tirole, 1991).

2.5 Revisión de la literatura

En este apartado se presentan algunos estudios relevantes que han sido publicados sobre modelos matemáticos aplicados a diversas problemáticas de la vida real. Estos trabajos han resultado de gran utilidad como base para la formulación e inspiración del modelo que se desarrolla a continuación en este trabajo.

- Accinelli et al. (2021), en el artículo "Firms, technology, training and government policies: An evolutionary approach", siguiendo el enfoque introducido en (Accinelli et al., 2015) demuestran que la distribución de empresas innovadoras y trabajadores calificados en diferentes países depende de los costos de innovación y de los costos de actualización de los trabajadores calificados. En este trabajo se consideró la participación de un gobierno que debería elegir una política en materia de innovación. De esta manera, se amplió el modelo considerando un juego de forma normal de tres poblaciones, donde el gobierno, las empresas y los trabajadores juegan un juego repetido, modelado por un sistema dinámico evolutivo.

- Por su parte, Wang and Shi (2019), publicaron el estudio denominado "An Evolutionary Game Model for Industrial Pollution Management under Two Punishment Mechanisms". Este artículo construye un modelo de juego evolutivo para la contaminación industrial entre los gobiernos locales y las empresas, de esta forma se estudia la trayectoria de evolución dinámica de un sistema de juego y la estrategia estable evolutiva bajo dos mecanismos de castigo. Los resultados muestran que, en un mecanismo de castigo estático (SPM), la estrategia entre los gobiernos y las empresas es incierta. Además, la trayectoria evolutiva entre los gobiernos y las empresas es

incierta. Sin embargo, bajo el mecanismo de castigo dinámico (DPM), la trayectoria de evolución entre los gobiernos y las empresas tiende a converger hacia un valor estable. Por lo tanto, el DPM es más propicio que el SPM para el control de la contaminación industrial.

- Asimismo, Accinelli et al. (2015), en el trabajo "Nash Equilibrium in Evolutionary Competitive Models of Firms and Workers under External Regulation", estudiaron el mercado laboral utilizando la teoría de juegos evolutiva como marco. Las entidades de este modelo competitivo son las empresas y los trabajadores, con y sin regulación externa. Las empresas pueden innovar o no, mientras que los trabajadores pueden ser calificados o no. En el modelo más simple, llamado modelo normal, la economía se encuentra en una trampa de pobreza, donde los trabajadores no son calificados y las empresas no son innovadoras. Este equilibrio de Nash es estable incluso cuando ambas entidades siguen la estrategia óptima de manera intermitente. Este hecho sugiere la necesidad de un agente externo que promueva la economía para no caer en una trampa de pobreza. Por lo tanto, se introduce un modelo competitivo evolutivo, donde un regulador externo proporciona préstamos para alentar a los trabajadores a ser calificados y a las empresas innovadoras. Este modelo incluye trampas de pobreza, pero otro equilibrio de Nash, donde las empresas y los trabajadores son conjuntamente innovadores y calificados. El regulador externo, en un proceso de tres fases (préstamos, impuestos e inactividad) logra una riqueza común, con una economía próspera, con empresas innovadoras y trabajadores cualificados.

- De igual manera, Accinelli and Carrera (2011), a través del trabajo titulado "Strategic complementarities between innovative firms and skilled workers: The poverty trap and the policymaker's intervention", estudian una economía que está poblada por dos tipos de empresas (innovadoras y no innovadoras) y dos tipos de trabajadores (calificados y no calificados). El objetivo es desarrollar un modelo que confirme la existencia de complementariedades entre las empresas innovadoras (actividades de I+D) y los trabajadores calificados (capital humano) y trace la dinámica óptima correspondiente. Los trabajadores siguen un comportamiento imitativo para elegir su tipo de acción (calificado o no calificado). Como la proporción de empresas

innovadoras es lo suficientemente grande, entonces la proporción de trabajadores calificados en equilibrio depende de la tasa de revisión (de imitación) para esos trabajadores no calificados. La intervención del responsable de la política se justifica solo por un cierto tiempo al reducir el umbral para alcanzar el equilibrio de alto nivel, pero una vez que la economía está en una trayectoria hacia un equilibrio de alto nivel, tal intervención puede detenerse.

- Finalmente, Accinelli and Carrera (2010) en el estudio "The Evolutionary Processes for the Populations of Firms and Workers", analizan la evolución cultural de las empresas y los trabajadores. Siguiendo una regla de imitación, cada empresa y trabajador decide adoptar si es innovador (o no) y calificado (o no calificado). Aplicando la teoría de juegos evolutivos para encontrar el sistema de la dinámica del replicador y caracterizar los equilibrios de bajo y alto nivel como estrategias evolutivamente estables (ESS) "contra el campo". Por lo tanto, se estudió cómo puede surgir un estado persistente de subdesarrollo en entornos estratégicos en los que los jugadores son imitadores en lugar de maximizadores racionales. También se demostró que cuando el estado actual de la economía está en la cuenca de atracción de la trampa de la pobreza, los jugadores deben jugar contra el campo si quieren cambiar el statu quo. El nivel umbral para superar la trampa de la pobreza se puede reducir si existe una política apropiada que utilice impuestos sobre la renta, costos de educación y primas por habilidades. Por ello, se analizó la dinámica del replicador con un subsidio y un impuesto a las ganancias para superar la trampa de la pobreza.

3 El juego, los jugadores, sus alternativas y el mercado

En este capítulo, se presenta una descripción generalizada del juego, los jugadores con sus respectivas estrategias y los mercados.

3.1 El juego

El análisis comienza considerando la economía en un momento inicial del tiempo, en el que interactúan tres participantes: el gobierno, las empresas y los consumidores, cada uno con intereses distintos pero complementarios. La interacción entre estos agentes puede representarse mediante un juego en forma normal, donde cada jugador dispone de dos estrategias puras y debe elegir una de ellas. En primer lugar, se estudia el juego en su versión estática. Posteriormente, se introduce el enfoque evolutivo, en el que el juego se repite de manera continua a lo largo del tiempo. En este tipo de modelos, el tiempo no se interpreta como un instante cronológico específico, sino como una sucesión de etapas en las que las estrategias pueden evolucionar gradualmente. Es decir, a medida que el juego se repite, los participantes pueden ajustar sus decisiones con base en los resultados obtenidos, lo que permite analizar cómo ciertas estrategias se difunden, se mantienen o desaparecen en el largo plazo.

Para los tres grupos de jugadores hay tres representantes, uno de cada grupo, los cuales se reúnen al azar para jugar una partida. Cada uno obtiene un beneficio que depende de su propio comportamiento y del de los oponentes.

Con el propósito de entender bien el juego y el resto del trabajo, es necesario conocer de manera general a que se refiere cada vez que se mencione gobierno, empresa,

consumidor, producto, política y consumo verde o marrón, en las siguientes secciones se verán más detallados los conceptos de gobierno, empresa y consumidor verde y marrón. A continuación se definen:

- **Gobierno verde.** En este trabajo, un gobierno verde hará referencia aquel que formula y ejecuta una política económica a favor del cuidado del medio ambiente.
- **Gobierno marrón.** Por su parte, un gobierno marrón formula y ejecuta una política económica que no está orientada al cuidado del medio ambiente.
- **Empresa verde.** En este juego se entiende por empresa verde, aquella que emplea una tecnología de producción orientada a minimizar los daños hacia el medio ambiente.
- **Empresa marrón.** Son aquellas que utilizan una tecnología de producción tradicional que no está orientada a minimizar los daños hacia el medio ambiente.
- **Consumidor verde.** Un consumidor verde es aquel que, consume bienes fabricados por empresas verdes.
- **Consumidor marrón.** Por el contrario, un consumidor marrón no consume bienes fabricados por empresas verdes.
- **Política verde.** Política formulada por un gobierno verde y que pretende cuidar el medio ambiente.
- **Política marrón.** Política formulada por un gobierno marrón y que es indiferente ante el cuidado del medio ambiente.
- **Producto verde.** Es aquel que es producido por una empresa verde.
- **Producto marrón.** Es aquel que es producido por una empresa marrón.
- **Consumo verde.** Es el consumo de un consumidor verde o sea el consumo de productos verdes.
- **Consumo marrón.** Es el consumo de un consumidor marrón o sea el consumo de productos marrones.

3.2 Gobierno

En este juego, el gobierno es un jugador importante, porque es el encargado de formular políticas económicas que generen incentivos para orientar la economía, ya sea hacia un consumo y producción verde o marrón en determinados rubros clave de la industria en un país, es decir, el gobierno analiza, según la estructura de su economía, a qué área de la industria proporcionar estímulos, de acuerdo con el impacto que estos puedan tener y el peso de tal actividad económica. Por ejemplo, diferentes países incluidos algunos de América Latina han obtenido éxitos importantes en la transformación de su matriz eléctrica, aumentando considerablemente el uso de energías renovables frente al uso de energías provenientes de fuentes fósiles. Es paradigmático el caso de Uruguay; el Ministerio de Industria, Energía y Minería presentó su Balance Energético Nacional 2022, en el cual mostró que la participación de las fuentes de energía renovable alcanzó el 56 % en la matriz de abastecimiento y el 91 % en la matriz de generación eléctrica. Estos resultados cumplen con las expectativas de ser mayores que 50 % y 90 %, respectivamente, y se vieron reflejados en las emisiones de CO_2, que disminuyeron 5 % respecto al año anterior. Estos datos son recogidos por el Trilemma, un reporte internacional que mide la seguridad, la equidad energética y la sustentabilidad ambiental. Uruguay es el país mejor posicionado de la región y ocupa el puesto 14 del ranking a nivel mundial (Ministerio de Industria, 2023).

Debe tenerse en cuenta que, en un proceso de transición hacia una economía verde, la oferta de bienes provenientes de producción sostenible no siempre resulta suficiente para satisfacer por completo la demanda de dicha categoría. Por ejemplo, en Uruguay, si bien la energía renovable desempeña un papel protagónico en la matriz de oferta, cuando esta no alcanza para cubrir toda la demanda, se recurre parcialmente al uso de energías fósiles para abastecer el consumo residual (Risso et al., 2023). Este caso evidencia que, en un mismo mercado, pueden coexistir bienes originados en procesos productivos verdes con bienes provenientes de tecnologías marrones.

De manera análoga, aunque en sentido inverso, es posible observar que, en mercados tradicionalmente dominados por tecnologías contaminantes, como el mercado automotriz comienza a emerger una oferta alternativa. A pesar de que los automóviles que utilizan

combustibles fósiles siguen siendo mayoritarios, se observa una presencia creciente, aunque aún incipiente, de vehículos eléctricos. El tipo de producto que llegue a predominar en estos mercados dependerá, como se analizará en este trabajo, en gran medida de las políticas públicas implementadas.

En este sentido, las políticas de incentivo adoptadas por algunos países han sido determinantes. Un ejemplo representativo es el caso de Alemania, donde el gobierno ha retomado con fuerza su compromiso con la movilidad eléctrica. Tras una caída significativa en las ventas de vehículos eléctricos, el Ejecutivo encabezado por Olaf Scholz aprobó un nuevo paquete de incentivos que contempla, entre otras medidas, una reducción fiscal estimada en 465 millones de euros anuales entre 2024 y 2028 (Lifona, 2024).

Asimismo, Horbach et al. (2012) muestran que las regulaciones ambientales implementadas en Alemania han contribuido a que las empresas reduzcan sus emisiones de CO_2, SO_2 y NO_x, lo cual también ha tenido efectos positivos sobre la calidad del agua. Además, dichas políticas han incentivado prácticas empresariales más responsables, como la reducción del ruido, la eliminación de sustancias peligrosas y el aumento del reciclaje de productos.

Por otro lado, Rubashkina et al. (2015) encuentran evidencia en el sector manufacturero de 17 países europeos de que el gasto para controlar y reducir la contaminación (como variable que mide la regulación ambiental) tiene un efecto positivo en la actividad innovadora de este sector.

Se entiende al representante gubernamental como un agente ficticio que representa a un gobierno que sigue una determinada política, es decir, este debe decidir una medida que fomente o sea indiferente al consumo y la producción verde. Asimismo, se supone que independientemente de su política hacia el medio ambiente, el gobierno actúa como un planificador benévolo. Por lo tanto, se considera que la política fiscal apunta a maximizar el bienestar social, es así que, el gobierno buscará entonces la medida que le permita maximizar sus ingresos.

Aunque los beneficios ambientales de la producción sostenible y el uso de energía renovable son grandes, muchos gobiernos de todo el mundo, principalmente en países en desarrollo, han priorizado el crecimiento económico e industrial basado en tecnologías convencionales, dichas tecnologías conducen a un consumo energético ineficiente y a emi-

siones de gases de efecto invernadero (sobre las repercusiones de las diferentes tecnologías en el medio ambiente, (véase (Masoudi and Zaccour, 2013; Khan et al., 2021)).

Algunos estudios como los desarrollados por Apergis and Payne (2009); Eggoh et al. (2011) y dos Santos Gaspar et al. (2017), sugieren que el uso de energía suele estar relacionado con el crecimiento, por lo que los países no tienen incentivos para detener el consumo energético. Así que, en este sentido la presión y sanciones de los organismos internacionales han llevado a los gobiernos de los países más contaminantes a ponerse al día en materia ambiental, llevándolos a adoptar políticas de reducción de emisiones de carbono (Eyland and Zaccour, 2014; Leal-Arcas et al., 2020; Khan et al., 2021).

Sin embargo, incluso cuando el gobierno está de acuerdo con avanzar hacia una producción sostenible, las medidas que se van a implementar deben analizarse con cautela. Una regulación ambiental más estricta, como la imposición de altos niveles de impuestos a las empresas que más contaminan, o la obligación de reducir las emisiones de carbono y el uso de energías más limpias, puede desincentivar la inversión en un país y hacer que las empresas se trasladen a países con leyes ambientales más laxas (hipótesis del paraíso de la contaminación (Eyland and Zaccour, 2014; Sheldon, 2006). Al mismo tiempo, medidas menos agresivas pueden causar malestar entre los ciudadanos preocupados por el medio ambiente.

En este trabajo se se asume que existen acuerdos internacionales que exigen el cumplimiento de ciertos objetivos en el cuidado del medio ambiente a los que un gobierno verde tiende a atender con mayor cuidado que uno marrón, entre otras cosas, porque entiende que los ciudadanos se verán favorecidos por este tipo de regulaciones, y esto a su vez le permitirá permanecer en el poder en los siguientes periodos electorales.

Un gobierno que busque un mayor crecimiento económico optará por imponer políticas que le permitan obtener mayores ingresos. La creencia de que las tecnologías verdes generan más recursos que las tecnologías tradicionales puede no ser cierta, ya que las tecnologías limpias suelen ser más caras y a veces menos eficientes que las tecnologías no verdes. En otras palabras, aunque el gobierno sea consciente de las ventajas ambientales de una economía verde, no necesariamente tiene que decidir sobre una política pública que la promueva.

Por lo tanto, se asume que el gobierno tiene dos políticas posibles según promover o

no la producción y el consumo verde, cuando el gobierno asume la primera política se llamará gobierno verde y se denota por G_g, en cambio si el gobierno asume la segunda postura, se dirá que el gobierno es marrón y se indica esta estrategia por G_b.

3.3 Empresas

Las regulaciones ambientales cada vez más estrictas, especialmente en los países desarrollados, han llevado a las empresas a establecer planes de operación que les permitan instaurar procesos de producción amigables con el medio ambiente reduciendo la huella de carbono (Xu et al., 2013). Un proceso de producción amigable con el entorno es un modo de fabricación diseñado para minimizar el impacto ambiental en los procesos de producción (Chien and Shih, 2007), considerando que seguir este tipo de procedimientos no implica que el producto final obtenido no sea contaminante. Las industrias automotrices, por ejemplo, a partir de la década de 1980, han adoptado una actitud proactiva hacia la reducción del impacto ambiental de sus procesos productivos logrando importantes mejoras en esta línea (Orsato and Wells, 2007), sin embargo, sus productos que funcionan con combustibles fósiles contaminan el entorno. Para corregir este tipo de paradojas, las firmas han optado no solo por seguir procesos verdes, sino que también han buscado que su producto final también sea amigable con el medio ambiente, creando alternativas que no contaminen o lo hagan en una medida mucho menor que sus productos existentes. No obstante, en la mayoría de los casos esto no significa que una empresa, aun estando preocupada por el medio ambiente, deje por completo de producir un bien que contamina el ambiente, sino que ajuste sus procesos o reduzca la producción de aquellos bienes que son más contaminantes para cumplir con las medidas ambientales implementadas por los gobiernos verdes.

La creación o desarrollo de alternativas verdes implica regularmente una mayor inversión para las empresas, especialmente para aquellas cuya producción es menos ecológica, lo que típicamente repercute en el precio final de venta de este tipo de productos. Por otro lado, como se señala en (Yenipazarli and Vakharia, 2015), los productos verdes tienden a ser más caros que los productos marrones porque sus materias primas tienden a costar más que sus contrapartes más convencionales. Esto, sin duda, supone un desafío para

las empresas que, en busca de obtener los mayores beneficios posibles por su inversión, deben enfrentarse al dilema de elegir entre mantener su estilo de producción o avanzar hacia uno más sostenible. Esta decisión dependerá en gran medida de la actitud de los consumidores y de las regulaciones impuestas por el gobierno. Las políticas correctas del gobierno, así como la presión de la sociedad y otros organismos reguladores, pueden llevar a las empresas a implementar procesos más ecológicos en su metodología de producción, así como al desarrollo de alternativas ecológicas a los productos tradicionales (véase por ejemplo (Johnstone and Tan, 2015; Khan et al., 2021; Wu et al., 2022)), mientras que una legislación menos rígida, políticas incorrectas y/o bajos niveles de demanda de productos ecológicos pueden no tener un efecto positivo en los procesos de producción de las empresas (Wu et al., 2022).

En 2025 entra en vigor una nueva normativa de la UE sobre emisiones de CO_2, es la denominada CAFE, por sus siglas en inglés (Clean Air for Europe), que reduce de manera significativa el máximo de la media de emisiones que deben cumplir el conjunto de coches vendidos por cada fabricante. Si bien esta medida hace que las únicas empresas que ofrecen mayoritariamente vehículos eléctricos pueden evitar las multas que la comunidad europea impondrá a quien no cumpla con la normativa, la conversión no es fácil, ya que, para cumplir tales normas tiene que aumentar la venta de vehículos eléctricos y disminuir los térmicos. Si bien las empresas pueden considerar aumentar el precio de los coches térmicos para subsidiar el costos de los eléctricos, relativamente mas caros, debe también considerarse que los consumidores no se sentirán a gusto comprando vehículos eléctricos si no existe una oferta suficiente para la carga de energía.

En mayor o menor medida las empresas, independientemente de su posición frente al medio ambiente, son capaces de fabricar, producir y vender tanto bienes verdes como bienes marrones, especialmente cuando unos son sustitutos de los otros (un mismo fabricante puede vender vehículos eléctricos y coches convencionales, alimentos orgánicos y alimentos transgénicos o fuentes de energía térmicas o renovables (Mukherjee and Carvalho, 2020). En este contexto, el dilema productivo de las empresas va más allá de simplemente decidir si producir verde o marrón, el verdadero problema está en qué opción invertir más recursos y cuándo hacerlo. Incluso bajo buenas regulaciones gubernamentales, cuando el beneficio final obtenido por las ventas de estos productos -después de multas e impuestos- supera

el beneficio final esperado de su homólogo verde, una empresa puede decidir cargar su producción y/o proceso productivo en el lado marrón. De la misma forma, la ausencia de incentivos a la producción sostenible puede hacer que una empresa decida ir por el lado marrón incluso cuando la demanda de estos productos sea buena. Esto puede ser producto de unos costes de producción elevados que, sin el apoyo gubernamental adecuado, pueden desincentivar la producción sostenible.

Así, a los efectos de este trabajo y con el fin de modelar los escenarios más relevantes, se considera un modelo simplificado en el que, buscando maximizar beneficios, los directivos de las empresas tienen ante sí sólo dos posibles opciones de producción.

La primera, que según la literatura se denomina verde, asumiendo que engloba los procesos productivos que minimizan el uso de recursos no renovables y evitan el uso de materiales tóxicos, así como que incorporan estrategias de reciclaje, reducción de contenido reciclado y de envases, mientras que el uso de recursos renovables se realiza en función de su tasa de reposición (Albino et al., 2009; D'souza et al., 2006). La alternativa es la técnica de producción marrón, es decir, aquella en la que una empresa sigue una forma tradicional de producción, sin prestar mucha atención al uso de materiales contaminantes ni a la obtención de un producto cuyo consumo sea amigable con el medio ambiente.

Para simplificar la exposición, se asume que todas las empresas de cada grupo son iguales, utilizan la misma tecnología y, por tanto, una vez fijados los precios, ofrecerán el mismo producto y obtendrán los mismos beneficios, así, se considera la oferta agregada de una empresa representativa.

Sólo después de presentar las matrices de pago, se considera la oferta y el beneficio individual. El producto y el beneficio agregados en cada mercado serán entonces iguales al producto o beneficio individual multiplicado por el número de empresas verdes y marrones, respectivamente, que operan en el mercado en un momento dado. Aunque a lo largo del trabajo se plantea que el número total de empresas en la economía es constante, la distribución de empresas por tipos puede cambiar con el tiempo. Es decir, cada gerente, en un momento dado, puede elegir producir de acuerdo con una u otra tecnología, suponiendo que esto puede hacerse sin costos adicionales y que la tecnología es gratuita.

En este modelo, se asume que cada empresa puede ofrecer productos verdes o marrones, sin embargo existe una diferencia, ya que, las empresas verdes son aquellas que optaron

por una tecnología más avanzada que les permite ser líderes en los mercados de productos verdes. Aunque una empresa verde puede ofrecer productos marrones, solo lo hará como empresa seguidora en el mercado de bienes marrones. Esto es, solamente en el caso de que la empresa líder en el mercado marrón no complete la demanda correspondiente. Análogamente, las empresas marrones podrán ofrecer productos verdes en el mercado verde, como seguidoras, ya que su tecnología no es en principio adecuada para este tipo de mercado, y solamente si las empresas verdes eligen, o no pueden, satisfacer la demanda del mercado. Entendiendo aquí que la oferta residual es la que corresponde a una empresa seguidora en un modelo de Stackelberg.

Se diferencian a las firmas solo por la tecnología elegida; las que eligen una tecnología verde son todas iguales, lo mismo para las que siguen una tecnología marrón. Con el tiempo pueden decidir mantener la tecnología que las caracteriza o cambiarla por la alternativa.

Se denota por F_g la tecnología de producción verde y por F_b la tecnología marrón. En cualquier momento dado habrá $N_g^F(\mathrm{t})$ empresas produciendo según F_g y $N_b^F(\mathrm{t})$ produciendo según la tecnología F_b, pero en todo momento $N^F = N_g^F(\mathrm{t}) + N_b^F(\mathrm{t})$. La posibilidad de cambio en la tecnología de producción será importante a la hora de introducir dinámicas en el modelo.

3.4 Consumidores

Las preferencias de los consumidores hacia los tipos de productos existentes juegan un papel decisivo, aunque no definitorio, en sus elecciones de consumo. En cuanto a la decisión de consumir productos verdes o marrones, la historia no es muy diferente a la de la correspondiente decisión de las empresas. Mientras que más allá de las preferencias personales de los directivos, las empresas acaban decidiendo qué producir en función de los costes y beneficios, los consumidores, en función de sus gustos o preferencias, determinan qué comprar y en qué cantidades, sujetos a su restricción presupuestaria. Incluso para los consumidores que dicen preferir consumir productos fabricados de forma sostenible, existe un problema de los costes asociados a esta decisión.

La misma paradoja que se da en el caso de las empresas que prefieren productos verdes pero terminan produciendo productos marrones se da en el caso de los consumidores.

En esta ocasión, la paradoja se caracteriza por el hecho de que los consumidores que dicen preferir productos sostenibles y respetuosos con el medio ambiente pueden acabar consumiendo regularmente alternativas marrones (Johnstone and Tan, 2015).

Se considera una población de consumidores con funciones de utilidad idénticas. Estos consumidores elegirán una cesta de consumo en su restricción presupuestaria, que en principio puede contener tanto bienes verdes como marrones. Se dirá que una cesta de consumo es estrictamente verde cuando está compuesta únicamente por productos producidos por empresas verdes. Mientras que, una cesta de consumo es estrictamente marrón cuando está compuesta exclusivamente por productos marrones. Esto solo puede suceder si hay un solo tipo de empresa en el mercado, se asume que hay ambos tipos de empresas en actividad, de modo que, un consumidor elige un paquete que resulta ser una combinación convexa de ambos tipos extremos de consumo, que se representan por c_g las cestas estrictamente verdes, mientras que por c_b las cestas estrictamente marrones.

Dado que, en determinadas condiciones, una empresa verde puede producir bienes marrones y una empresa marrón puede producir bienes verdes, los paquetes estrictamente verdes pueden estar compuestos de bienes verdes y marrones, pero sólo si estos últimos son producidos por empresas verdes. De manera similar, un paquete de consumo estrictamente marrón puede contener tanto bienes verdes como marrones, pero los primeros son producidos por empresas marrones. Para simplificar el modelo, se considera la demanda agregada de bienes verdes o marrones en cada mercado como la demanda de un agente representativo cuya función de utilidad es igual a la de cada uno de los consumidores.

Cabe destacar que, en muchos contextos reales, aunque los consumidores sean conscientes del impacto ambiental negativo de ciertos productos, su consumo puede ser difícil de evitar en el corto plazo. Por ejemplo, en países donde el gobierno sigue promoviendo la producción de combustibles fósiles, el acceso a fuentes de energía amigables con el medio ambiente puede estar limitado. Esta observación, aunque no constituye un supuesto formal del modelo, ayuda a contextualizar algunos de los desafíos prácticos de la transición hacia una economía verde. Por lo tanto, en ausencia de políticas gubernamentales adecuadas, incluso cuando los consumidores son conscientes de la importancia de cuidar el medio ambiente y buscan alternativas de consumo sostenible, pueden terminar generando beneficios para los sectores productores de bienes marrones cuando la alternativa verde

está disponible.

En cuanto al representante del jugador, se considera un consumidor cuya demanda es la demanda agregada de la sociedad, de bienes verdes y marrones. Siendo así que los consumidores poseen dos estrategias puras que se corresponden con sus dos opciones disponibles de elección; se denota por C_g el consumo de cestas verde y por C_b el de cestas marrones.

De igual manera que las empresas, en cualquier momento dado habrá $N_g^C(\mathrm{t})$ consumidores que consumen según C_g y $N_b^C(\mathrm{t})$ que consumen según C_b, pero en todo momento $N^C = N_g^C(\mathrm{t}) + N_b^C(\mathrm{t})$.

3.5 Los mercados

Se consideran tres tipos de mercado en los que participan los tres grupos de actores. El primer mercado es para bienes llamados "bienes de categoría 1"; este corresponde básicamente a bienes que son producidos por empresas verdes y solo en menor medida por empresas marrones. Por ejemplo, el consumo de energía renovable: las empresas pueden comprarla en el mercado energético y solo consumir energía residual proveniente del uso de recursos no renovables. El mercado de "bienes de categoría 2"; es un mercado de bienes producidos de manera tradicional, por ejemplo el mercado de autos usados, eventualmente las empresas verdes pueden proveer este tipo de vehículos, pero solo de manera residual. Finalmente el mercado de "bienes de categoría 3"; en este mercado hay bienes que provienen de ambos tipos de empresas, verdes y marrones, por ejemplo el mercado de verduras, estos bienes solo son ofertados por las empresas correspondientes, es decir, los productos verdes para este mercado son ofrecidos solo por empresas verdes, análogas a las marrones.

Las dos primeras categorías están formadas por aquellos bienes que, si bien pueden ser producidos por ambos tipos de empresas, verdes y marrones, en su mayoría se producen de una de estas dos formas posibles. Esto sucede porque no hay demanda de la forma alternativa. Ambos tipos de empresas, verdes o marrones, tienen la capacidad de producir bienes de un tipo u otro. Sin embargo, las empresas verdes actúan como líderes en el mercado verde y las marrones como seguidoras. Recíprocamente, en el mercado de bienes marrones.

Así, la oferta en los mercados de bienes de categoría 1 o 2 la realizan ambos tipos de empresas. Es decir, en determinadas condiciones[1], las empresas marrones podrán ofrecer productos de la categoría 1, por ejemplo si los insumos que requiere la tecnología verde son escasos o tienen precios muy elevados. Recíprocamente, en determinadas condiciones bien definidas las empresas verdes pueden ofrecer productos marrones si predominan (por ejemplo si los impuestos a la producción marrón resultan muy elevados).

En países donde existen incentivos para el consumo de energía fósil, el consumo de autos eléctricos es muy bajo. En este caso, aunque en el país existen empresas capaces de producir autos eléctricos, mayoritariamente se fabricarán solo autos de gasolina. En este mercado, las firmas con capacidad para producir autos eléctricos actuarán como seguidores, ya que se verán obligadas a producir siguiendo una tecnología que consideran obsoleta. Por otro lado, en países donde se prioriza el uso de energías renovables, la demanda de productos que utilizan energías no renovables es muy baja. En este caso, estos bienes solo se consumen en su forma verde y conforman la categoría 1.

El mercado de bienes de la categoría 1 es un mercado de bienes verdes, y el mercado de la categoría 2 es un mercado de bienes marrones. La categoría 3 está formada por aquellos bienes para los cuales existe demanda de ambos tipos de versiones, esto es la alternativa verde y la alternativa marrón. Considerando que la demanda de productos en este mercado está satisfecha por ambas firmas, de tal manera que; la demanda de productos verdes de la categoría 3 está satisfecha en su totalidad por la oferta de las empresas verdes y análogamente para las marrones.

Aquí es importante remarcar que esta clasificación no significa que los bienes de las categorías 1 y 2 existan únicamente en versiones verde y marrón, lo que se quiere decir es que, si bien ambas alternativas pueden existir en cualquier momento, el consumidor típico, al menos en el corto o mediano plazo no consumirá las otras alternativas existentes. Mientras que un consumidor típico, independientemente de sus preferencias, optará por consumir la alternativa verde o marrón considerando las circunstancias del momento que favorezcan el consumo de una u otra versión del mismo producto.

[1]Por ejemplo, en los casos en que las empresas tecnológicamente avanzadas no pueden encontrar en el mercado la cantidad necesaria de insumos para producir la cantidad demandada, en este caso, las empresas marrones, que utilizan tecnología menos avanzada, pero ciertamente contaminante, podrían completar la demanda si la relación entre la demanda restante y los costos es satisfactoria.

Cada empresa puede, en principio, producir los tres tipos de bienes, es decir, los bienes correspondientes a cada una de estas categorías. Mientras que los bienes de las dos primeras categorías sólo se producirán de una única manera, puesto que no hay demanda para la alternativa, cada empresa considerará qué tipo de alternativa producirá para los bienes de la categoría 3. Esta decisión se tomará en función de la demanda y considerando la existencia o no de incentivos gubernamentales y sus repercusiones en los beneficios de la empresa.

A fin de sintetizar las características distintivas de los tres tipos de mercado considerados en el presente trabajo, se presenta a continuación un cuadro resumen. En él se detallan los elementos más relevantes de cada mercado: la composición de la oferta, el rol que desempeñan los distintos tipos de empresas (verdes y marrones), las preferencias del consumidor y algunos ejemplos representativos. Esta clasificación permite visualizar de manera estructurada cómo interactúan los actores en función de la naturaleza del bien y de las condiciones institucionales o tecnológicas que prevalezcan en el entorno económico. Asimismo, el cuadro facilita la comparación entre los distintos mercados en términos de liderazgo empresarial, dinámica competitiva y posibles escenarios de sustitución tecnológica o adaptación productiva.

Categoría de bienes	**Características principales**	**Oferta empresarial**	**Ejemplos**	**Demanda del consumidor**	**Participación de empresas verdes y marrones**
Categoría 1 (Bienes verdes)	Bienes ofertados principalmente por empresas verdes. Las empresas marrones pueden participar solo residual o excepcionalmente, si hay problemas de oferta verde (ej. insumos caros o escasos).	Ambas empresas pueden producirlos, pero predominan las verdes. Las marrones actúan solo si es rentable o necesario.	Energía renovable, transporte limpio, etc.	Consumidores prefieren bienes verdes, sobre todo si hay incentivos o políticas verdes.	Empresas verdes = líderes. Empresas marrones = seguidoras (ocasionales).
Categoría 2 (Bienes marrones)	Bienes ofertados principalmente por empresas marrones. Las empresas verdes participan residualmente, si los costos o políticas las obligan a producir marrón.	Ambas pueden producir, pero predominan las marrones. Las verdes actúan solo si es inevitable.	Autos usados, bienes tradicionales con alta huella ambiental.	Consumidores prefieren bienes marrones, especialmente si existen incentivos a combustibles fósiles o políticas laxas.	Empresas marrones = líderes. Empresas verdes = seguidoras (ocasionales).
Categoría 3 (Bienes mixtos)	Bienes ofertados en ambas versiones: verde y marrón. Cada empresa produce solo su tipo correspondiente.	Cada tipo de empresa produce su versión del bien (verde o marrón).	Verduras, productos agrícolas, alimentos procesados, etc.	Hay demanda para ambas versiones. El consumidor elige según precio, política, conciencia ecológica, etc.	Ambas empresas participan plenamente y paralelamente. No hay predominio claro.

Cuadro 3.1. Cuadro resumen de los mercados

Notas importantes:

- La categoría del bien no está determinada por el tipo de producto, sino por las condiciones del mercado, es decir, por cuál versión tiene mayor demanda en el contexto actual.
- Cada empresa puede producir cualquier tipo de bien, pero lo hará en función de rentabilidad, demanda e incentivos gubernamentales.

- En categorías 1 y 2, el consumidor típicamente no consume la versión alternativa, aunque exista. En cambio, en categoría 3, sí hay coexistencia y competencia directa.
- La participación de empresas de un tipo en un mercado donde predominan las del otro tipo ocurre solo bajo ciertas condiciones específicas de mercado o políticas públicas.

4 Cómo juegan los jugadores

La existencia de la paradoja antes considerada muestra que, la decisión entre consumo verde o marrón, muchas veces, va más allá de la voluntad y la conciencia de la necesidad de cuidar el medio ambiente, recae en la existencia de políticas públicas adecuadas, que en mayor incidencia pueden ir acompañadas de campañas publicitarias.

Se asumirá que las políticas gubernamentales que incluyen la recaudación de impuestos y transferencias a empresas y consumidores tienen como objetivo maximizar el bienestar social, de acuerdo con lo que significa bienestar para el gobierno de turno. Es decir, se supone la existencia de un planificador benévolo, lo que en principio no significa que su definición de bienestar sea la más favorable al cuidado del medio ambiente.

4.1 El gobierno y la política fiscal

Se considera que con el objetivo de ejecutar políticas públicas, el gobierno impone un impuesto a las utilidades de las empresas. Un gobierno que no considera una prioridad el cuidado del medio ambiente fija una tasa de recaudación $\tau \in (0, 1)$ sobre las utilidades de las empresas independientemente del tipo de producción. Cuando el gobierno adopta políticas para promover e incentivar la producción y el consumo sostenibles, impone tasas diferenciales a las empresas en función de las políticas ambientales que lleven a cabo. En este caso, realiza reducciones en las tasas de recaudación de aquellas empresas que cumplan criterios de producción sostenible. Mientras que para una empresa tradicional impone una tasa τ para las empresas que cuidan el medio ambiente esta tasa será igual a τ_g donde $0 \leq \tau_g < \tau \leq 1$ e impone un impuesto pigouviano $P > 0$ (un impuesto al carbono por ejemplo) para las empresas marrones. Al mismo tiempo, ofrecerá una reducción del Impuesto al Valor Agregado (IVA) a los productos de consumo verde igual a s_g. De esta

manera, el IVA diferenciado será igual a v para los productos marrones e igual a $v - s_g$ para los productos verdes.

Adicionalmente, se debe considerar que las políticas a favor de promover el consumo sustentable no suelen limitarse a incentivos a la producción, generalmente los gobiernos verdes tratan de estimular este tipo de consumo y ofrecen estímulos o incentivos a los consumidores para que decidan consumir productos verdes (ver (Stevens, 2010; Yang and Thøgersen, 2022)). De acuerdo con este principio, se asume que un gobierno interesado en el consumo verde ofrece a los consumidores que lo eligen un premio al consumo igual a $s_g > 0$ que, por ejemplo, corresponde a un descuento en el IVA del producto verde.

También es importante considerar que las políticas favorables a la protección del medio ambiente en la actualidad tienden a dar prestigio al gobierno que las promueve. Por ello, además de desarrollar políticas de incentivos, los gobiernos firman acuerdos internacionales que les obligan a tomar medidas a favor del medio ambiente. El grado de satisfacción que obtiene un gobierno comprometido con la protección del medio ambiente se medirá mediante los parámetros α y β. Donde el primero de estos indica el nivel de satisfacción que una empresa verde ofrece al gobierno comprometido con la protección del medio ambiente, mientras que β es el grado de satisfacción que dicho gobierno obtiene del consumo verde.

Resumiendo, se tienen en cuenta tres tipos de elementos para caracterizar la política económica del gobierno verde. Un incentivo a la producción, uno al consumo y una penalización a las empresas contaminantes, por unidad de producto producido o consumido.

$$0 \leq \tau_g < \tau \leq 1; \;\; 0 < P \;\text{ y }\; 0 < s_g < v. \tag{4.1}$$

Se puede considerar

$$\tau_g = \begin{cases} \tau, & \text{si } G^b \\ 0 \leq \tau_g < \tau; & \text{si } G^g \end{cases} \quad \text{y} \quad s_g = \begin{cases} 0, & \text{si } G^b \\ 0 < s_g < v, & \text{si } G^g \end{cases}$$

Dado que, el gobierno puede intervenir en la economía a través de subsidios e impuestos a las empresas y a los consumidores, las opciones de consumo dependerán en gran medida de las acciones gubernamentales. Un subsidio a la producción y al consumo verde tiene como objetivo aumentar el consumo de este tipo de productos. En cierta medida, este tipo de acciones pretende reducir el precio al consumidor de los bienes verdes, lo que

indirectamente puede considerarse como un aumento de la restricción presupuestaria, pero esto no significa necesariamente un aumento del consumo de bienes verdes. El consumidor puede ahorrar en el consumo de estos bienes sin disminuir su consumo y aumentar el consumo de bienes marrones.

Más allá de su concienciación y responsabilidad con el medio ambiente, los ciudadanos tienden a consumir tanto productos verdes como marrones, quizás no por elección, sino por las circunstancias que los rodean. Por ejemplo, un consumidor con un automóvil tradicional, aunque preocupado por el medio ambiente, demandará gasolina incluso cuando sea consciente de los problemas ambientales que este consumo conlleva.

4.2 Consumidores e incentivos

Se supondrá que el gobierno impone un impuesto al consumo final (IVA), de modo que el precio pagado por los consumidores corresponde al precio de equilibrio más el impuesto. Denotamos:

- p_i^e: precio de equilibrio en el mercado i, sin impuestos;
- p_i^c: precio final al consumidor en el mercado i, es decir, el precio con impuesto incluido.

En el caso del gobierno marrón, este no distingue entre el consumo de bienes verdes o marrones, por lo que el precio al consumidor se determina simplemente como:

$$p_i^c = p_i^e(1+v), \quad \text{para todo } i = 1, 2, 3, \tag{4.2}$$

donde v representa la tasa del IVA aplicada uniformemente.

Cuando el gobierno adopta una postura favorable al medio ambiente (estrategia G_g), ofrece un incentivo al consumo verde mediante una reducción del IVA. Este incentivo se representa por un parámetro $s_g > 0$, que indica una disminución efectiva del impuesto aplicado al consumo verde. Se supone que $s_g \in (0, v)$, es decir, la reducción no elimina completamente el impuesto, pero lo disminuye parcialmente.

Así, en el caso del gobierno verde, el precio al consumidor en los mercados con bienes verdes será:

$$p_1^c(s_g) = p_1^e(1 + v - s_g), \quad \text{y} \quad p_{g3}^c(s_g) = p_{g3}^e(1 + v - s_g), \tag{4.3}$$

donde:

- p_1^e: precio de equilibrio de los bienes comercializados en el mercado 1 (predominantemente bienes verdes),
- p_{g3}^e: precio de equilibrio de los bienes ecológicos en el mercado 3 (bienes verdes ofrecidos exclusivamente a consumidores verdes),
- $p_{g3}^c(s_g)$: precio final al consumidor verde en el mercado 3.

La existencia de este subsidio hace una diferencia en los precios al consumidor de los bienes verdes y marrones. De ello se deduce que, $\dfrac{dp_1^c}{ds_g} < 0$ y $\dfrac{dp_{g3}^c}{ds_g} < 0$.

Si el gobierno no ofrece incentivos al consumo, es decir, si $s_g = 0$, el precio al consumidor verde en el mercado 3 se determina como:

$$p_{g3}^c(0) = p_{g3}^e(1 + v). \tag{4.4}$$

El hecho de que un gobierno verde ofrezca incentivos para los bienes de consumo verdes afectará a las decisiones de las empresas, ya que un aumento de la demanda de producción verde puede llevar a las empresas a decidirse por la producción exclusiva (o mayoritaria) de este tipo de bienes.

Considerando el consumo agregado de una economía en la que todos los consumidores son iguales. El consumo se desagrega en tres tipos de bienes; bienes verdes de la categoría 1 (que se comercializan en el mercado 1), bienes marrones de la categoría 2 (que se comercializan en el mercado 2), y bienes verdes y marrones de la categoría 3 (que se comercializan en el mercado 3).

Por tanto, el consumo agregado de cada tipo de bien, será el resultado de maximizar una función de utilidad $u : \Re_+^3 \to \Re_+$ definida por la ley $(y_1, y_2, y_3) \to u(y_1, y_2, y_3)$ donde $y_3 = y_{g3} + y_{b3}$ en la restricción presupuestaria:

$$B(p^c) = \{(y_1, y_2, y_3); p_1^c y_1 + p_2^c y_2 + p_3^c \cdot y_3 \leq I\} \tag{4.5}$$

donde I es la riqueza agregada y $p_3^c \cdot y_3 = p_{g3}y_{g3} + p_{b3}y_{b3}$.

Por lo tanto, dado un sistema de precios $p^c = (p_1^c, p_2^c, p_3^c(s_g)) \in \Re \times \Re \times \Re^2$ donde $p_3^c(s_g) = (p_g(s_g), p_b^c)$ y el ingreso I, el consumidor debe elegir un paquete de consumo $y = (y_1, y_2, y_3)$, donde $y_j \geq 0$ denotar cantidades de bien $j = 1, 2$ y $y_3 = (y_{g3}, y_{b3})$ la demanda agregada en el mercado 3 que resuelve el siguiente problema de maximización:

$$\begin{aligned} &\text{máx}_{x \in \Re_+ \times \Re_+ \times \Re_+} \, u(y_1, y_2, y_3) \\ &s.t: \; p^c \cdot y = p_1^c y_1 + p_2^c y_2 + p_3^c y_3 = p_1^c y_1 + p_2^c y_2 + (p_{g3}^c(s_g) y_{g3} + p_{b3}^c y_{b3}) \leq I. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Donde $y_i \in \Re_+ \;\; i = 1, 2$ representa la demanda de bienes de la categoría 1 y 2, mientras que $y_3 = y_{g3} + y_{b3}$ representa la demanda de los consumidores en el mercado de bienes de la categoría 3. Donde y_{g3} corresponde a la demanda de bienes verdes y y_{b3} a la demanda de bienes marrones.

Se supondrá que los consumidores son idénticos y que sus funciones de utilidad son estrictamente cuasi-cóncavas y crecientes en sus argumentos y también verifican que

$$u(y_1, y_2, \bar{y}_3) = u(y_1, y_2, \tilde{y}_3) \text{ para todo par } \bar{y}_3, \tilde{y}_3 \text{ tal que } \bar{y}_{g3} + \bar{y}_{b3} = \tilde{y}_{g3} + \tilde{y}_{b3}.$$

Por ende, una reducción del IVA sobre el consumo de bienes verdes de categoría 3 implica un aumento del consumo del bien verde en el mercado de bienes de categoría 3 o en bienes de categoría 1 o 2. Para una economía en equilibrio en la que la oferta y la demanda de bienes está equilibrada, dicha reducción del IVA supondrá un cambio en la oferta de las empresas. Además, tanto los precios de equilibrio como la oferta de las empresas y la demanda de los consumidores dependerán de la reducción del IVA que aplique el gobierno.

4.3 Empresas e incentivos: corto y largo plazo

Se consideran empresas que maximizan sus ganancias y que utilizan tecnología convexa para producir en cualquiera de los mercados en los que operan. En este caso, para todos los p estrictamente positivos, existe al menos un plan de producción x_0 que satisface los $px \leq px_0$ para todos los $x \in Y$.

Cada tipo de empresa puede producir, utilizando la tecnología disponible, bienes para cada uno de los tres mercados. Pero las tecnologías de cada tipo de empresa son distintas, así como los insumos empleados. Es importante señalar que, en muchos casos, los insumos contaminantes son menos costosos y más abundantes en el mercado que sus contrapartes verdes y no contaminantes, esto significará que, por ejemplo, una empresa verde no puede satisfacer toda la demanda de bienes de la categoría 1.

A diferencia de lo que ocurre con los bienes de la categoría 1 y 2 que pueden ser producidos por ambos tipos de empresas, los bienes verdes o marrones de la categoría 3 solo serán producidos por la empresa correspondiente. Es decir, los bienes verdes de la categoría 3 solo serán producidos por empresas que tengan tecnología verde, mientras que los bienes marrones solo serán producidos por empresas marrones. Cada empresa solo produce un tipo de bien de la categoría 3, según su clase.

Dado que los consumidores siempre demandarán bienes de la categoría 1 en su forma verde y bienes de la categoría 2 en su forma marrón, las empresas abastecerán los mercados correspondientes de una de dos maneras. La empresa mejor equipada para abastecer el producto demandado en cada mercado (la empresa líder) elegirá la cantidad que va a ofrecer, y la empresa siguiente podrá abastecer la diferencia entre la demanda y la oferta de la empresa líder, si, por supuesto, existe tal diferencia.

El precio de equilibrio de largo plazo p^e, independientemente de la política gubernamental seguida, representado por $h \in \{g, b\}$, hará coincidir la oferta agregada de las empresas con la demanda de bienes en cada mercado, es decir, bajo los precios de equilibrio de largo plazo $p^e = (p_1^e, p_2^e, p_{g3}^e, p_{b3}^e)$ en el largo plazo se obtiene:

$$y_1^{*h} = x_{g1}^{h*},\ y_2^{*h} = x_{b2}^{h*},\ y_{g3}^{*h} = x_{g3}^{h*},\ y_{b3}^{h*} = x_{b3}^{h*}. \tag{4.7}$$

Sin embargo, es necesario considerar que cada empresa tiene una curva de costo total de corto plazo diferente para cada posible circunstancia de corto plazo. Esto puede provocar que la oferta de corto plazo sea menor que la oferta de equilibrio. La falta de suficientes insumos en el mercado para una producción óptima por parte de las empresas verdes puede provocar que no puedan lograr una producción óptima, o que se enfrenten a costos tan altos que el precio de equilibrio de largo plazo no sea suficiente para que la empresa

verde obtenga beneficios positivos en el corto plazo, lo que llevaría a que la empresa verde solo acceda a una parte del mercado verde[1]. En ambos casos, la insuficiencia de insumos verdes o los altos precios de los mismos hacen que los costos que afrontan las empresas verdes cubran todo el mercado. La empresa seguidora ofrecerá la cantidad restante en caso de que la tecnología disponible le permita obtener beneficios no negativos.

Ya que, se considera un modelo de líder y seguidor en los mercados de bienes de la categoría 1, el problema de maximización de la empresa líder en el mercado 1 a largo plazo se representa de la siguiente forma:

$$\max_{z \in \Re_+^H} \pi_{g1}^h(p_1^2, w) = p_1^2 f_g(z) - w \cdot z, \tag{4.8}$$

Donde $f_g : \Re_+^H \to \Re$ corresponde a la tecnología de la firma verde disponible para la producción de productos de categoría 1. El vector $z = (z_1, ..., z_H) \in \Re_+^H$ corresponde a los insumos utilizados para tal fin por la empresa, a precios $w = (w_1, ..., w_H) \in \Re_{++}^H$. Por lo tanto, $w \cdot z = \sum_{i=1}^H w_i z_i$.

La solución de este problema es la oferta de largo plazo que ofrece la empresa verde en este mercado de bienes de la categoría 1. Esta solución óptima estará representada por x_{g1}^*.

Nótese que la tasa τ_g no afecta la decisión de la empresa maximizadora, aunque reduce claramente el beneficio final de la empresa que después de pagar impuestos corresponderá a la cantidad $(1 - \tau_g)\pi^h(p)$.

En el corto plazo, el problema de maximización es ligeramente más complicado, porque la empresa puede no ser capaz de encontrar en el mercado algún insumo necesario para producir con la tecnología avanzada que implica la producción verde. Por ejemplo, mano de obra calificada o algún tipo de materia prima que no esté suficientemente disponible en el mercado, como el litio. Esto hará que la empresa se enfrente a una restricción adicional a la hora de calcular su oferta de corto plazo y en consecuencia no pueda satisfacer la demanda del mercado.

En este caso, la elección de la empresa será el resultado del siguiente problema de

[1]La producción verde puede requerir mayores costos iniciales en tecnología, infraestructura, investigación y desarrollo, capacitación y certificación.

maximización:

$$\pi(p_1, w) = \text{máx}_{z \in \Re_+^H} p_1^2 f_g(z_{-k}, z_k)) - \sum_{i=1}^{H} w_i z_i$$
$$z_k \leq \bar{z}_k. \tag{4.9}$$

Se representa por $z_k \in \Re_+^K$ el vector de insumos cuya existencia en el mercado está limitada por $\bar{z}_k$. Por $z_{-k} \in \Re_+^{H-K}$ el vector que describe los insumos necesarios para producir el bien verde con excepción de aquellos considerados en z_{-k}. Los precios de los insumos están dados y se simbolizan mediante $w_i, i = 1, ..., H$.

Como es usual, $f : \Re_+^H \to \Re$ representa la función tecnológica, que se supone estrictamente cóncava y suave [2]

En muchos casos, los costos asociados con las tecnologías más avanzadas son altos y los costos marginales son más altos que los costos marginales correspondientes que enfrentan las empresas marrones. Los insumos para las tecnologías verdes suelen ser más caros o más difíciles de encontrar en el corto plazo que los sustitutos marrones. Mientras que el costo a largo plazo es el resultado del siguiente programa de minimización:

$$c(w, y) = \text{mín}\, wz : \ s.t. : y = f(z),$$

El costo a corto plazo supone restricciones adicionales. Según la notación anterior, el resultado es

$$c_s(w, \bar{z}_k, y) = \text{mín}\, w_h z_k + w_{-k} z_{-k}$$
$$s.t. : y = f(z_k, z_{-k}),$$
$$z_k \leq \bar{z}_k.$$

Las restricciones sobre los insumos implican que el costo de producir una determinada cantidad no sea inferior al costo de largo plazo asociado a esa misma cantidad de producto. Por ello, en este tipo de circunstancias, las empresas innovadoras pueden no estar dispuestas a suministrar (en el corto plazo) la cantidad demandada. En tales casos, las empresas seguidoras podrían cubrir la demanda insatisfecha. Cabe recordar que

[2]Se recuerda que una empresa que maximiza sus beneficios solo estaría dispuesta a producir una cantidad determinada de su producto si y solo si, el precio unitario del producto no es menor que el costo promedio de producir esa cantidad. Dados los precios p la empresa verde con costo c_g^h estaría dispuesta a producir cantidades inferiores a $x_{g2} < x_{g2}^m$ donde x_{g2}^m verifica $p^e = c_h(x_{g2}^m)/x_{g2}^m$. Para cantidades mayores a x^m los beneficios serían negativos.

las empresas marrones pueden, si así lo desean, producir bienes verdes, aun cuando su tecnología sea menos desarrollada y más contaminante. Esto ocurrirá siempre que obtengan beneficios no negativos. No obstante, altos impuestos a la contaminación podrían desincentivar esta producción, incluso si la oferta existente no cubre completamente la demanda del mercado. En este caso, o bien aumenta el precio del mercado, o bien puede entrar la empresa seguidora, ofreciendo una cantidad de producto $x^*_{sb1} =\leq y^*_{g1} - x^*_{sg1}$., lo que mantendrá el precio del mercado en su valor de equilibrio. Donde x^*_{sg1} representa la oferta a corto plazo de la empresa verde. Mientras que x^*_{sb1} corresponde a la oferta de corto plazo de la empresa marrón en el mercado de bienes de la categoría 1. Es decir, la solución al problema de maximización:

$$p^e_1 x^{h*}_{b1} - c_b(x^{h*}_{b1}) \geq p^e_1 x^h_{b1} - c_b(x^h_{b1}) \text{ para todo } x^h_{b1} \leq y^*_{g1}(p_1) - x^{h*}_{g1} : \pi^h_b(x^2_{b1}) \geq 0.$$

En los mercados de bienes de categoría 2, las empresas verdes actuarán como seguidoras, mientras que las empresas marrones actuarán como líderes. La oferta de la empresa marrón, líder en el mercado de bienes de tipo 2, resultará entonces de resolver el siguiente problema de maximización:

$$\max_{x^h_{b2} \geq 0} \pi^h_{b2} = p^e_2 x^h_{b2} - c_b(x^h_{b2}) \tag{4.10}$$

Donde $y^*_{b2}(p^2)$ es la demanda agregada de bienes de consumo en el mercado 2 bajo precios p_2.

El precio de equilibrio de largo plazo en este mercado es la solución de la ecuación $x^*_{b2}(p^e_2) = y^*_{b2}(p^e_2)$.

Se recuerda que, $c^g_b(x^h_{b2}) = c_b(x^g_{b2}) + P x^g_{b2}$ en caso de un gobierno verde. Esta situación podría darse si un gobierno verde impusiera un impuesto P a la producción de productos contaminantes lo suficientemente alto como para hacer que la empresa marrón deje de producir más allá de cierta cantidad, dejando parte de la demanda sin cubrir. Nótese que la empresa marrón no ofrecerá cantidades mayores que $x^m_{b2} :\ p^e_2 = (c(x^m_{b2}) + P)/x^m_{b2}$. Desde entonces para todos $x_{b2} > x^m_{b2}$ el resultado será $\pi^b(x_{b2}) < 0$.

Si, por ejemplo, debido a la imposición de altos impuestos a la contaminación, las empresas marrones prefieren no producir el total demandado, es decir, si $x^*_{b2}(p^2_2) < y^*_2(p^e)$,

las empresas verdes podrían, en principio, producir la cantidad restante, lo que sólo ocurriría si obtuvieran beneficios positivos. Ya que, el coste de producir con tecnología verde, incluso produciendo bienes marrones, es más alto que el coste asociado a la tecnología marrón. Es decir, $c_g(x) \geq c_b(x)$. La empresa seguidora (en este caso la verde) optará por producir $x^*_{g2} \leq y^*_{h2}(p_2) - x^*_{b2}$ tal que

$$p_2 x^{h*}_{g2} - c_g(x^{h*}_{g2}) \geq p_2 x^h_{g2} - c_g(x^h_{g2}) \text{ para todo } x^h_{g2} \leq y^*_{g1}(p_1) - x^{h*}_{g1} : \pi^h_g(x^2_{g2}) \geq 0.$$

En el mercado de bienes correspondientes a la categoría 3, las empresas verdes ofrecerán el producto en su alternativa verde y las empresas marrones ofrecerán la alternativa marrón, buscando maximizar sus beneficios. Considerando que el mercado de bienes de tipo 3 es lo suficientemente pequeño como para que las empresas puedan ofrecer cantidades iguales a las demandadas. Por lo tanto, las empresas verdes resolverán el problema,

$$\max_{x^b_{g3}} \pi^h_{3g} = p^2_{g3} x^h_{g3} - c_g(x^h_{g3}). \tag{4.11}$$

mientras que las empresas marrones resolverán el problema

$$\max_{x^h_{b3}} \pi^h_{b3} = p^e_{b3} x^h_{b3} - c_b(x^h_{b3}). \tag{4.12}$$

Así, en ausencia de una política de incentivos por parte del gobierno, los beneficios de las empresas de tipo $h \in \{g, b\}$ será:

$$\pi^{b*}_h = (1-\tau)\left[\pi^b_{h1}(x^{b*}_{h1}) + \pi^b_{h2}(x^{b*}_{h2}) + \pi^b_{g3}(x^{b*}_{h3})\right], \tag{4.13}$$

Bajo un gobierno verde G^g, la elección de empresas resultará de maximizar sus beneficios pero, teniéndo en cuenta los incentivos gubernamentales, que se consideran parte del costo asociado a la producción de las empresas, es decir

$$c_b(x^g_{b3}, P) = c_b(x^g_{g3}) + P x^g_{b3}$$

$$c_g(x^g_{g3}) = c_g(x^g_{g3}).$$

Por lo tanto, para una empresa verde bajo un gobierno G^g, las ganancias totales después de impuestos serán:

$$\pi_g^{g*} = (1-\tau_g)\left[\pi_{g1}^g(x_{g1}^{g*}) + \pi_{h2}^g(x_{g2}^{g*}) + \pi_{g3}^g(x_{g3}^{b*})\right], \tag{4.14}$$

y para una empresa marrón:

$$\pi_b^{g*} = (1-\tau)\left[\pi_{b1}^g(x_{b1}^{g*}) + \pi_{b2}^g(x_{g2}^{g*}) + \pi_{g3}^b(x_{h3}^{b*})\right] - P(x_{b1}^{g*} + x_{b2}^{g*} + x_{b3}^{g*}). \tag{4.15}$$

Donde la notación $\pi_j^h(x_i^{h*})$ se refiere a los beneficios que se obtienen una vez resueltos los problemas de maximización correspondientes en cada mercado $i = (1,2,3)$ y para cada tipo de empresa bajo un gobierno de tipo G^h $j,h \in \{g,b\}$.

En conclusión, bajo ciertas circunstancias (por ejemplo, inexistencia en el mercado de algunos insumos requeridos) las empresas marrones podrán ofertar en el mercado de bienes de categoría 1 en el corto plazo, mientras que las empresas verdes podrán ofertar en el mercado de bienes de categoría 2, si por ejemplo las tasas impositivas sobre la producción marrón son muy altas. En consecuencia, para el corto plazo se tiene que la demanda en los mercados 1 y 2 será el resultado de la oferta de la empresa líder más la de la seguidora en dichos mercados. Es decir, bajo los precios de equilibrio $p^e = (p_1^e, p_2^e, p_{g3}^e, p_{b3}^e)$ en el corto plazo se obtendrá que:

$$y_1^{*h} = x_{g1}^{sh*} + x_{b1}^{sh*},\ y_2^{*h} = x_{b2}^{sh*} + x_{g2}^{sh*},\ y_{g3}^{*h} = x_{g3}^{h*},\ y_{b3}^{h*} = x_{b3}^{h*}. \tag{4.16}$$

Obsérvese que si, independientemente del tipo de gobierno, la empresa verde puede resolver su oferta óptima de largo plazo bajo precios de equilibrio, entonces la empresa marrón no ofrecerá en el mercado bienes de este tipo, para los cuales $\pi_{b1}^* = 0$. Esta situación dependerá en gran medida de la existencia en el mercado de la cantidad requerida de insumos verdes. Análogamente, la empresa verde no producirá para el mercado de bienes del tipo 2, si la empresa marrón es capaz de resolver la demanda en este mercado. Es decir, en este caso $\pi_{g2}^* = 0$, lo que dependerá en gran medida del impuesto P que el gobierno imponga a la producción contaminante (véase la ecuación 4.7).

4.4 Una nota sobre impuestos, eficiencia y equilibrio

Se supone que tanto un gobierno verde como uno marrón aplican un impuesto al consumo igual a v que difiere solo en la reducción del IVA, en un porcentaje igual a s_g, que el gobierno verde aplica a los bienes de consumo ecológicos. Entonces, la política fiscal de un gobierno marrón se caracteriza por un vector impositivo (τ, v). Donde τ es el impuesto a las ganancias corporativas y v el IVA al consumo.

La política fiscal más compleja del gobierno verde se caracteriza por (τ_g, s_g, P). Donde $0 \leq \tau_g < \tau$ corresponde al impuesto a las ganancias, que el gobierno impone a la producción de las empresas verdes. Siendo $\tau_g = \tau$ para las empresas marrones y en todos los casos en los que el gobierno no ofrezca incentivos a la producción verde. Este tipo de impuesto no modifica la decisión maximizadora de las empresas. Es decir, no genera ineficiencia. Utilizando s_g se indica la reducción del IVA, que solo es positiva para los gobiernos verdes e igual a cero cuando el gobierno sigue una política indiferente al cuidado del medio ambiente. Finalmente P es un impuesto a la contaminación. Siendo $P = 0$ en el caso de un gobierno marrón.

La existencia de un impuesto al consumo implica que el consumidor verá un precio superior al precio que recibe el productor. Esto implica una demanda menor a la correspondiente al equilibrio walrasiano. A su vez, el plan de producción óptimo en presencia de impuestos al consumo implica que la empresa maximizadora de beneficios ofrecerá una cantidad menor que la correspondiente a la oferta de equilibrio walrasiano. En resumen, la existencia de un impuesto al consumo implica ineficiencia, reflejada en una disminución de la demanda y la oferta de los bienes sujetos a dicho impuesto, así como un aumento en los precios respecto de las cantidades correspondientes al equilibrio walrasiano.

Se define un **equilibrio walrasiano gravado** por un triplete

$$(p^*(s_g, P), y^*(s_g, P).x^*(s_g, P)) \in \Re^4 \times \Re^4 \times \Re^4$$

que corresponde a

1. Sistema de precios $p^*(s_g, P)$ eso depende de los impuestos s_g y P

2. Un paquete de consumo

$$y^*(s_g, P) = (y_1^*(s_g), y_2^*(s_g), y_{g3}^*(s_g), y_{b3}^*(s_g))$$

maximiza las preferencias del consumidor dentro de la restricción presupuestaria $B(p^*(s_g, P)$.

3. Un plan de producción

$$x^*(s_g, P) = x_1^*(s_g), x_2^*(s_g), x_{g3}^*(s_g), x_{g3}^*(s_g)$$

Verificando que $x_i^*(s_g, P) = y_i^*(s_g, P)$ donde $y_i^*(s_g, P) = y_{gi}(s_g, P) + y_{bi}(s_g),\ i = 1, 2$ mientras que $y_{g3}^*(s_g)$ corresponde a la oferta de empresas verdes en el mercado de bienes de categoría 3, y $x_{g3}^*(s_g, P) = y_{g3}^*(s_g, P)$ y $x_{b3}^*(s_g, P) = y_{b3}^*(s_g, P)$ al suministro de productos marrones por parte de empresas del mercado de bienes de la categoría 3.

En consecuencia, una vez establecido el impuesto al consumo, el precio que pagará el consumidor por los bienes es mayor que el precio de equilibrio, lo que hará que la cesta de consumo sea menor que la correspondiente a la cesta de equilibrio (ver ecuación 4.5). Es decir, la demanda de bienes es menor que la demanda de equilibrio, lo que lleva a las empresas a definir planes de producción que implican una oferta menor que la demanda de equilibrio. De manera similar, P será exclusivamente positiva si el gobierno sigue una política verde y en este sentido se integra en el costo de producción, siendo una fuente de ineficiencia adicional.

Observación 2. (Una observación sobre incentivos y eficiencia) *Aunque el objetivo del gobierno es el bienestar social, es importante señalar que la existencia de un impuesto al consumo, que sólo es percibido por los consumidores, implica una pérdida de eficiencia en la economía. Mientras que la tasa τ impuesta sobre las ganancias de la empresa no produce ineficiencia, el IVA sí lo hace. Un gobierno verde, al reducir el impuesto al consumo de los bienes verdes, reduce pero no elimina la ineficiencia. Por otro lado, el gobierno verde impone un impuesto P por unidad de bien producido a los productores marrones.*

Este impuesto es considerado por el productor como parte del costo de producir este tipo de bienes y en consecuencia también crea ineficiencias.

No se extenderá en la consideración de este punto, sin embargo se entiende que resulta de interés a la hora de pensar las políticas públicas y sus repercusiones en el bienestar tener en cuenta esta contradicción entre eficiencia y cuidado del medio ambiente.

5 Matrices de pago

Los cuadros que se presentan a continuación indican los rendimientos en términos monetarios asociados a cada una de las estrategias según el jugador cuando se enfrentan a los otros dos oponentes. Estos cuadros corresponden a los resultados de una partida en forma normal con tres jugadores, cada uno de los cuales adopta una posible estrategia. Se presentan tres cuadros, el primero (Cuadro 5.1) en el que se especifican los rendimientos del gobierno según la política pública escogida por éste (verde o marrón). En el segundo Cuadro 5.2 se consideran las utilidades que reciben los consumidores según si el paquete de consumo es verde o marrón. Finalmente, el Cuadro 5.3 corresponde a los ingresos y gastos de las empresas en función del plan de producción elegido por ellas.

Los rendimientos asociados dependerán de las cantidades consumidas y ofertadas por las firmas, así como de los precios de equilibrio, por lo que la oferta y la demanda de bienes en cada mercado coincidirán. A su vez, estos precios de equilibrio dependerán de los incentivos ofrecidos por el gobierno. Hay que tener en cuenta que bajo un gobierno verde el precio que recibe el consumidor y el precio que recibe el productor difieren en el IVA, que se supone que solo paga el consumidor final.

5.1 Pago del gobierno

El gobierno, para mejorar el bienestar social, recauda fondos del IVA y del impuesto a las ganancias empresariales y puede otorgar, cuando lo considere oportuno, subsidios al consumo o a la producción. Se recalca que se asumió que el gobierno es siempre un gobierno benévolo, es decir, su objetivo es maximizar el bienestar social. Teniendo en

cuenta esto, un gobierno marrón recaudará

$$R^b(t) = \tau(\pi_g^b(t) + \pi_b^b)(t) + v(y_1^b + y_2^b + y_{g3}^b + y_{b3}^b).$$

Los ingresos recaudados por un gobierno verde serán iguales a

$$R^g(t) = \tau_g \pi_{g1}^g + \tau \pi_b^b + (v - s_g)(y_1^b + y_{g3}^b) + v(y_2^b + y_{b3}^b) + P(x_{b1}^g + x_{b2}^g + x_{b3}^g).$$

Donde π_j^h corresponde al beneficio total obtenido por las empresas del tipo j bajo un gobierno del tipo h. Como se supone que todas las empresas dentro de cada grupo son iguales, el resultado es $\pi_j^h = \Pi_j^h N_j(t)$ donde Π_j^h es el beneficio de cada empresa que utiliza tecnología $j \in \{g, b\}$. bajo un gobierno que sigue la política $h \in \{g, b\}$. La demanda de los consumidores dependerá únicamente de la política gubernamental en materia de consumo y no del número de empresas existentes en un momento dado. Análogamente, x_{bi}^h corresponde a la producción total de las empresas marrones en cada mercado, como cada empresa produce la misma cantidad, resulta $x_{bi}^h = N_b(t)\xi_{ni}^h$ donde ξ_{ni}^h representa la producción individual de cada empresa marrón en el mercado respectivo, $i = 1, 2, 3$.

El Cuadro 5.1 resume los ingresos y gastos del gobierno considerando el tipo de política seguida por el gobierno y los tipos de consumidores y empresas a los que se enfrentan.

Debido a que, se considera que las empresas dentro de cada tipo son iguales entre sí, el beneficio de cada empresa individual será $\Pi_j^{h*} = \pi_j^{h*}/N_h$ donde N_h corresponde al número de empresas del tipo h existentes en un momento dado. Análogamente, x_{b1}, x_{b2}, x_{b3} corresponde a la producción agregada de las empresas marrones. Se representa por $\xi_{bj} = x_{nj}/N_b$ la producción de cada empresa marrón individualmente, $j \in \{1, 2, 3\}$.

G \ F C	$F^g\ C^g$	$F^g\ C^b$	$F^b\ C^g$	$F^b\ C^b$
G^g	$\tau^g\Pi^g+$ $+(v-s_g)(y_1^g+y_2^g+y_{g3}^g)$ $+(\alpha+\beta)$	$\tau^g\Pi^g+$ $+v(y_1^b+y_2^b+y_{b3}^b)$ $+\alpha$	$\tau\Pi^b + P(\xi_{b1}+\xi_{b_2}+\xi_{b3})$ $+(v-s_g)(y_1^g+y_2^g+y_{g3}^g)$ $+\beta$	$\tau\Pi^b$ $+P(\xi_{b1}+\xi_{b_2}+\xi_{b3})$ $+v(y_1^b+y_2^b+y_{b3}^b)$
G^b	$\tau\Pi^g+$ $+v(y_1^g+y_2^g+y_{g3}^g)$	$\tau\Pi^g+$ $+v(y_1^b+y_2^b+y_{b3}^b)$	$\tau\Pi^b+$ $+v(y_1^g+y_2^g+y_{g3}^g)$	$\tau\Pi^b+$ $+v(y_1^b+y_2^b+y_{b3}^b)$

Cuadro 5.1: Matriz de pagos del gobierno

El valor esperado de cada estrategia gubernamental dependerá de la probabilidad con

la que las empresas y el consumo se distribuyan entre sus posibles tipos. Se representa por $n_g^F(t) = N_g^F(t)/N^F$ el porcentaje de empresas que utilizan la estrategia verde. En consecuencia, $n_b^F(t) = 1 - n_g^F(t)$ corresponderá al número de empresas que utilizan una tecnología marrón. Se denota la distribución de las empresas sobre el conjunto de tecnologías disponibles por $n^F(t) = \left\{n_g^F(t), n_b^F(t)\right\}$. De manera similar, $n_g^C(t) = N_g^C(t)/N^C$ representa el porcentaje que corresponde al consumo verde, mientras que $n_b^C(t) = 1 - n_g^C(t)$ corresponde al porcentaje del consumo marrón sobre el consumo total. Se indica la distribución del consumo por $n^C(t) = \left\{n_g^C(t), n_b^C(t)\right\}$. Aunque estos porcentajes varían con el tiempo, para simplificar la notación no se explicará la variable tiempo.

De esta forma, para cada tiempo t después de algún cálculo algebraico, se obtienen las siguientes igualdades:

$$E(G^g \mid n^F, n^C) - E(G^b s \mid n^F, n^C) = n_g^F B_G + n_g^C C_G + D_G \tag{5.1}$$

Donde

$$\begin{aligned} B_G &= (\tau^g - \tau)\,\pi^g + \alpha - P\,(\xi_{b1} + \xi_{b2} + \xi_{b3}) \\ C_G &= \beta - s_g \left(y_1^g + y_2^g + y_{g3}^g\right) \\ D_G &= P(\xi_{b1} + \xi_{b2} + \xi_{b3}) \end{aligned} \tag{5.2}$$

Por Π^h se presenta el beneficio agregado de una firma de tipo $h \in \{g, b\}$. Es decir, la suma de los beneficios en cada uno de los mercados obtenidos por la firma de tipo h. O más precisamente $\Pi^h = \Pi_h(x_{h1}) + \Pi_h(x_{h2}) + \Pi_h(x_{h3})$. se recuerda que un consumidor verde sólo consume productos verdes de la categoría 3, y un consumidor marrón sólo consume productos marrones de esta categoría.

Por ende, hay que tener en cuenta que en equilibrio el consumo en los mercados de bienes de tipo 1 y 2 será igual a la oferta agregada de ambas firmas, es decir: $y_h = x_{gh} + x_{bh}^h$ para $h = 1, 2$. Mientras que en el mercado 3 $y_{g3} = x_{g3}$; $y_{b3} = x_{b3}$, lo que significa que solo las empresas de tipo verde producirán bienes verdes de esta categoría y solo las empresas de tipo marrón producirán este tipo de bienes en este mercado.

Como se indicó anteriormente (ver sección 4), los parámetros α y β miden los niveles

de satisfacción que la producción o el consumo verde, respectivamente, proporcionan a un gobierno verde. Las políticas verdes suelen dar prestigio al gobierno y, al mismo tiempo, darle mayor prominencia internacional, en particular en momentos en que el cuidado del medio ambiente se vuelve de interés universal.

5.2 Pago de los consumidores

Los consumidores tomarán sus decisiones de consumo maximizando sus funciones de utilidad dentro de sus restricciones presupuestarias. En el caso de un gobierno verde, el consumo de productos verdes se verá doblemente favorecido. En primer lugar, por una reducción del IVA. Diferenciación que no existirá si el gobierno opta por políticas marrones. Un factor a tener en cuenta a la hora de definir el tipo de consumo es la importancia de la bonificación del IVA. Sin embargo, es posible que, incluso con esta bonificación, los precios al consumidor de los productos verdes sean muy elevados, lo que desincentivará claramente su consumo. Por otro lado, las empresas marrones pagarán un impuesto adicional por unidad de producto, lo que reducirá la producción de este tipo de productos ya que, este impuesto será considerado por el productor como un incremento de sus costes.

En definitiva, las decisiones de los consumidores serán las que fomenten una economía de uno u otro tipo. Estas decisiones dependerán en gran medida de las tasas de descuento del consumo verde que adopte el gobierno.

El siguiente Cuadro refleja los niveles de satisfacción que puede ofrecer cada tipo de consumo en función del tipo de producción de las empresas y de las políticas gubernamentales.

C \ G F	$G^g\ F^g$	$G^g\ F^b$	$G^b\ F^g$	$G^b\ F^b$
C^g	$u(y_{g1}, y_{g2}, y_{g3}) + s_g y^g$	$u(y_{g2}, 0, 0)$	$u(y_{g1}, y_{g2}, y_{g3})$	$u(y_{g2}, 0, 0)$
C^b	$u(0, y_{b1}, 0)$	$u(y_{b1}, y_{b2}, y_{b3})$	$u(0, y_{b1}, 0)$	$u(y_{b1}, y_{b2}, y_{b3})$

Cuadro 5.2: Matriz de beneficios de los consumidores

Donde $y^g = y_{g1} + y_{g2} + y_{g3}$.

Se considera que la función de utilidad es de tipo neoclásico, lo que supone que el consumidor prefiere consumir dentro del cono positivo (ver (Aliprantis et al., 1990)). Es decir, si la cesta $y \in \Re^3_+$ tiene cualquier coordenada igual a cero, entonces para todo $x \in \Re^3_{++}$ (tal que todas sus coordenadas u sean estrictamente positivas) se verificará lo siguiente: $u(x) > u(y)$. Por ende, bajo este supuesto, se sigue que:

1. La utilidad asociada al consumo marrón verificará la desigualdad, $u(y_{b1}, y_{b2}, y_{b3}) > u(y_{g2}, 0, 0)$, dado que; porque en el caso en que no existan empresas marrones, el consumo marrón corresponde a una cesta de consumo cuya única coordenada positiva será la que corresponde a la oferta marrón de empresas verdes en el mercado de bienes de categoría 2.

2. De manera análoga en el caso del consumo verde cuando no hay empresas verdes en el mercado se tiene que: $u(y_{g1}, y_{g2}, y_{g3}) > u(0, y_{b_1}, 0)$.

A continuación, se presenta un esquema que ilustra de forma jerárquica y simplificada cómo se construye un pago típico en la matriz de los consumidores. Este esquema permite visualizar la conexión entre los mercados en los que participan los consumidores, los bienes ofertados en cada uno, el tipo de empresa que produce dichos bienes y el motivo por el cual la función de utilidad del consumidor solo se activa en determinados mercados, en función del tipo de consumo realizado.

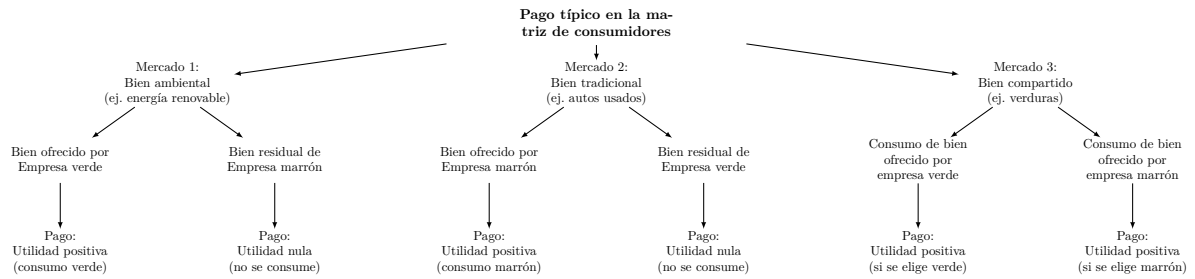


Figura 5.1: Esquema de formulación de pagos en la matriz de consumidores según el mercado y tipo de empresa

Interpretación:

- El pago de los consumidores en el juego depende de si acceden o no a bienes producidos por empresas verdes.

- La utilidad de consumir verde se obtiene únicamente en el mercado en el que se ofrece efectivamente una opción verde, o donde el consumidor decide optar por esa opción.

- Este desglose permite construir la función de utilidad del consumidor basada en los incentivos del gobierno y las opciones disponibles.

Como es evidente, el consumo de tipo $h \in \{g, b\}$ sólo será posible si existe al menos una empresa que lo produzca. La demanda de un bien determinado por parte de los consumidores dependerá no sólo del precio y de las preferencias de los consumidores, sino también de la posibilidad de encontrarlo en el mercado. Por ejemplo, la probabilidad de encontrar el producto correspondiente en el mercado respectivo dependerá del número de empresas que lo produzcan. Por ello, se supone que el consumo de tipo $h \in \{g, b\}$ sólo ofrece cierto nivel de beneficio si se puede encontrar en el mercado. Es así que, cuando no hay empresas del tipo g, la utilidad del consumo C^g es igual a $u(y_{g2}, 0, 0)$ donde y_{g2} corresponde a la cantidad de bien de la categoría 1, que la empresa marrón está dispuesta a ofrecer en el mercado de bienes de la categoría 1. Mientras que si no hay empresas del tipo marrón, la utilidad del consumo marrón C^b corresponderá a $u(0.y_{b1}, 0)$, donde y_{b1} corresponde a la cantidad de producto que la empresa del tipo 1, está dispuesta a producir para el mercado de la categoría 2.

La utilidad esperada asociada al consumo de cada tipo dependerá de los incentivos que ofrezca el gobierno al consumo y especialmente de la existencia de empresas que produzcan este tipo de productos. Se representa por $n_g^G(t)$ la probabilidad de que el gobierno defina una política económica verde. En consecuencia $n_b^G(t) = 1 - n_g^G(t)$ será la probabilidad de que dicha política sea marrón. La distribución de probabilidad sobre el conjunto de políticas económicas disponibles se denotará por $n^G(t) = \left(n_g^G(t), n_b^G(t)\right)$. Dada la distribución de las empresas sobre el conjunto de tecnologías $n^F(t) = \left(n_g^F(t), n_b^F(t)\right)$

Después de un poco de álgebra se obtiene

$$E(C^g \mid n^G, n^F) - E(C^b \mid n^G, n^F) = n_g^G n_g^F A_C + n_g^F C_C + D_C \tag{5.3}$$

$$A_C = s_g y^g > 0$$

$$C_C = u(y_{g1}, y_{g2}, y_{g3}) + u(y_{b1}, y_{b2}, y_{b3}) - u(0, y_{b1}, 0) - u(y_{g2}, 0, 0) > 0 \tag{5.4}$$

$$D_C = u(y_{g2}, 0, 0) - u(y_{b1}, y_{b2}, y_{b3}) < 0$$

Como ejemplo, se debe pensar en el mercado de automóviles. La satisfacción que un coche eléctrico puede ofrecer a un consumidor dependerá en gran medida de la posibilidad de encontrar cargadores eléctricos, esto significa que, aunque el consumidor sea consciente del impacto que el consumo de combustibles fósiles tiene sobre el medio ambiente, si no hay suficientes cargadores eléctricos, el consumidor se verá obligado a utilizar un coche que utilice este tipo de combustible.

5.3 Pago de las firmas

A continuación, se resumen en el Cuadro 5.3 los beneficios que puede obtener una empresa, dependiendo de su forma y considerando los diferentes tipos de gobierno y consumidores a los que se enfrenta.

F \ C G	$C_g\ G_g$	$C_b\ G_g$	$C_g\ G_b$	$C_b\ G_b$
F^g	$(1-\tau^g)\Pi^g$	$(1-\tau^g)\Pi^g$	$(1-\tau)\Pi^g$	$(1-\tau)\Pi^g$
F^b	$(1-\tau)\Pi^b - P(\xi_{b1}+\xi_{b2}+\xi_{b3})$	$(1-\tau)\Pi^b - P(\xi_{b1}+\xi_{b2}+\xi_{b3})$	$(1-\tau)\Pi^b$	$(1-\tau)\Pi^b$

Cuadro 5.3: Matriz de pagos de las empresas

Los valores esperados asociados a cada tecnología dependerán de la distribución del consumo y de la probabilidad de que el gobierno elija uno u otro tipo de política. En consecuencia, con la notación ya introducida y realizando previamente algún cálculo algebraico, se pueden escribir las siguientes igualdades.

$$E(F^g \mid n^G, n^C) - E(F^b \mid n^G, n^C) = n_g^G B_F + D_F \tag{5.5}$$

$$
\begin{aligned}
B_F &= (1-\tau^g)\Pi^g - (1-\tau)\Pi^b + P(\xi_{b1} + \xi_{b2} + \xi_{b3}) \\
D_F &= (1-\tau)\left[\Pi^g - \Pi^b\right]
\end{aligned}
\tag{5.6}
$$

Dado que se supone que los gerentes tratan de maximizar las ganancias, si las políticas gubernamentales no son lo suficientemente buenas para promover la producción verde, o la demanda asociada a este tipo de productos es baja, el gerente de la firma optará por producir productos marrones, aun cuando basado en su conciencia de la necesidad de cuidar el medio ambiente hubiera preferido producir productos verdes.

6 La evolución de la economía

Según la teoría de Von - Neumann Morgenstern, un jugador racional elegirá su estrategia según la que ofrezca el mayor beneficio esperado, resultando indiferente entre alternativas siempre que ofrezcan el mismo valor esperado. Entonces, cada agente racional elegirá la estrategia verde si y solo si $E(K_g) - E(K_b) > 0$ y optará por seguir la estrategia marrón si $E(K_g) - E(K_b) < 0$, mientras que será indiferente en la elección de una u otra alternativa en el caso en que $E(K_g) - E(K_b) = 0, \quad K \in \{G, F, C\}$.

En consecuencia la elección de cada individuo no será sólo función de la recompensa asociada a cada estrategia, sino también de la distribución sobre los comportamientos posibles de los individuos que componen las poblaciones antagónicas. Si bien se considera que el objetivo del gobierno es mejorar el bienestar social, debe tenerse en cuenta que la posibilidad de lograrlo, puede depender de la recaudación fiscal. Hecho que muchas veces es contradictorio con la voluntad de transformar la economía. Así, aunque gobiernos de países productores de combustibles fósiles, tengan consciencia ecológica, el bienestar actual de los ciudadano puede llevarlo a posponer todo cambio pues, en definitiva, las ventajas de la transición al verde solo serán observables en el largo plazo el que puede ser mayor que la diferencia entre períodos electorales.

En resumen, se concibe al gobierno como un planificador benévolo. Por ello, se entiende que el gobierno busca un mayor nivel de bienestar que depende en gran medida de la recaudación de impuestos, (que se asume se utiliza para mejorar el bienestar de la población), así como del grado de satisfacción que una política de cuidado del medio ambiente encuentre entre los consumidores y los directivos de las empresas. Se miden estos estos niveles por los parámetros α y β, respectivamente, las cuales no son negativas y su valor será cero si el gobierno no presta atención al medio ambiente.

Los consumidores elegirán el consumo con mayor utilidad esperada asociada dada la

restricción presupuestaria, que se verá afectada por la política que siga el gobierno respecto al consumo. Recordando que, se considera un consumidor representativo cuya demanda corresponde a la demanda agregada en cada mercado.

Como se supone que las empresas maximizan sus beneficios y son iguales entre sí dentro de cada grupo (verde o marrón), la elección de cada empresa en cada momento es sobre si utilizar una tecnología verde o marrón. Esta elección será el resultado de considerar el valor esperado asociado a cada una de estas variantes de producción. La tecnología es, como se ha dicho, gratuita y se supone además que el cambio tecnológico no tiene coste asociado (estos supuestos no implican una pérdida de generalidad del modelo). Esta elección es estratégica, en el sentido de que debe considerar necesariamente el comportamiento de los oponentes.

Para simplificar el modelo, se supondrá que el número total de empresas existentes en la economía es constante e igual a N. Sin embargo, en la medida en que se considere a las empresas como instituciones racionales, se cree que pueden cambiar su estrategia de producción, lo que harán en función del valor esperado de las ganancias asociadas a cada una de sus posibilidades tecnológicas de producción. Por lo tanto, el número de empresas de cada tipo puede cambiar con el tiempo. La expresión $N_g(t) + N_b(t) = N$ para todo $t > 0$ resume estos supuestos.

Hasta ahora se ha hecho referencia básicamente a un juego estático, en el que las tablas 5.1 y 5.2 y 5.2 corresponden a las matrices de pagos correspondientes a cada estrategia pura según el jugador en función de la estrategia elegida por cada uno de los otros 2 participantes a los que se enfrenta.

Ahora es necesario considerar estrategias mixtas porque el juego se repetirá continuamente. El gobierno no tiene por qué seguir una determinada política pública en todo momento, ésta puede cambiar con el tiempo y en principio las empresas y los consumidores sólo pueden saber la probabilidad con la que el gobierno elija una estrategia u otra en el próximo periodo. Esto se representa mediante

$$n^G(t) = \left\{(n_g^G(t), n_b^G(t)) \in \Re_+^2 : n_g^G(t) + n_b^G(t) = 1\right\}$$

el conjunto de distribuciones de probabilidad sobre sus estrategias en el momento t. Es decir, $n_g^G(t)$ es la probabilidad con la que el gobierno sigue una política verde,

análogamente para las políticas marrones. Conjunto que corresponde al de las estrategias mixtas del gobierno.

Antes de definir las expresiones de distribución tecnológica y de consumo, es importante aclarar algunas suposiciones estructurales del modelo. En primer lugar, se asume que las elecciones estratégicas de los jugadores (gobierno, empresas y consumidores) son estadísticamente independientes entre sí. Es decir, la probabilidad de que el gobierno adopte una política verde o marrón es independiente de la proporción de empresas verdes o marrones en el mercado, así como de las decisiones de consumo. Esta hipótesis permite analizar las estrategias de manera separada y facilita la construcción de expectativas sobre los resultados del juego. En segundo lugar, se supone que el número total de empresas permanece constante a lo largo del tiempo; por tanto, los cambios en la composición tecnológica de las firmas se reflejan únicamente como variaciones en su proporción relativa, sin alterar el tamaño agregado del sector productivo. Bajo estas premisas, la distribución tecnológica de las empresas puede representarse mediante probabilidades agregadas, como se detalla a continuación.

$$n^F(t) = \left\{(n_g^F(t), n_b^F(t)) \in \Re_+^2 : n_g^F(t) + n_b^F(t) = 1\right\}$$

la distribución porcentual de las empresas en sus posibles tecnologías.

Al mismo tiempo se representa por

$$n^C(t) = \left\{(n_g^C(t), n_b^C(t)) \in \Re_+^2 : n_g^C(t) + n_b^C(t) = 1\right\}$$

la distribución porcentual del consumo verde y marrón.

Como $n_b^H(t) = 1 - n_g^H(t)$, la distribución de la población $H \in \{G, C, F\}$ sobre sus posibles comportamientos está definida por $n_g^H(t)$.

Cabe destacar que la dinámica del juego se ve influida directamente por los valores que adopten las distribuciones $n^F(t)$ y $n^C(t)$. Es decir, si cambian las proporciones de empresas verdes y marrones o las preferencias de consumo hacia uno u otro tipo de cesta, también cambian los incentivos, los beneficios esperados y, por tanto, las condiciones bajo las cuales se elige una estrategia óptima. Dicho de otro modo, las decisiones estratégicas de los jugadores no son estáticas, sino que dependen del entorno compuesto por estas

distribuciones. Por ello, el análisis del equilibrio y de las estrategias dominantes debe considerar cómo las configuraciones tecnológicas y de consumo impactan los pagos y los resultados del juego.

Invarianza del espacio estratégico

El espacio estratégico puede representarse como el producto cartesiano de los espacios de decisiones individuales de cada tipo de jugador, es decir, $S = S^G \times S^F \times S^C$, donde $S^G = \{g, b\}$, $S^F = \{g, b\}$ y $S^C = \{g, b\}$ denotan los conjuntos de estrategias posibles para el gobierno, las empresas y los consumidores, respectivamente. Esta estructura define un cubo tridimensional cuyos vértices corresponden a todas las combinaciones posibles de estrategias. El espacio S es invariante en el tiempo, en el sentido de que su configuración no depende de la distribución relativa de tecnologías $n^F(t) = \{n_g^F(t), n_b^F(t)\}$ ni del tipo de consumo $n^C(t) = \{n_g^C(t), n_b^C(t)\}$. Lo que varía dinámicamente son las probabilidades asociadas a cada vértice del espacio estratégico, determinadas por la evolución de las distribuciones $n^F(t)$ y $n^C(t)$. Por tanto, el análisis se realiza dentro de un marco estratégico fijo, en el que los cambios relevantes se reflejan en los pagos esperados y en los equilibrios inducidos por las decisiones de los jugadores bajo distintas distribuciones.

La evolución de la economía estará representada por la dinámica del replicador. Esta elección de la dinámica se basa en que, se entiende que la estrategia que tiene en cada momento un valor esperado mayor es la que tiende a ser imitada.

6.1 Dinámica del replicador

La teoría de juegos evolutiva se originó como una aplicación de la teoría de juegos a contextos biológicos, basada en la comprensión de que la aptitud introduce un aspecto estratégico a la evolución.

Entendiendo la aptitud como conducta exitosa, y dado que es posible considerar la conducta racional como aquella que imita lo que se considera más exitoso en cada momento, la teoría de juegos evolutiva ha adquirido un creciente interés para economistas y ecólogos. De esta manera, la teoría de juegos evolutiva, como teoría explícitamente dinámica, aporta un elemento importante que falta en la teoría económica tradicional. La dinámica del replicador es la piedra angular de la dinámica evolutiva y es a partir de ella

que se hace posible modelizar matemáticamente la evolución de las decisiones estratégicas de individuos racionales o grupos de individuos (ver (Li, 2022; Alexander, 2023)).

Como ya se dijo, se considera que, dada la conducta probable de los oponentes, cada jugador elegirá la estrategia con mayor valor esperado. De acuerdo con estas consideraciones, la dinámica del replicador se caracteriza por el siguiente sistema dinámico:

$$\begin{cases} \dot{n}_g^G &= n_g^G \left(E(G^g) - \bar{E}_G \right) \\ \dot{n}_g^C &= n_g^C \left(E(C^g) - \bar{E}_C \right) \\ \dot{n}_g^F &= n_g^F \left(E(F^g) - \bar{E}_F \right) \end{cases} \tag{6.1}$$

La notación $n_{h_g},\ h \in \{G, F, C\}$ indica la probabilidad de encontrar un individuo del sector h que siga el comportamiento verde. En consecuencia, la probabilidad del comportamiento marrón será $n_{h_b} = 1 - n_{h_g}$. El punto en la variable n_{h_g} indica su derivada con respecto al tiempo.

Para simplificar la notación se representa por $E(H^g) = E(H^g/n_g^K, n_g^L)$ el valor esperado de la estrategia verde g, seguido de la población H, dadas las distribuciones caracterizadas por n_g^K, n_g^L seguido de los grupos $K, L \neq H \in \{G, C, F\}$. Se evita el uso de la variable temporal t, pero debe tenerse en cuenta que todas las variables son temporalmente dependientes.

Nótese que los valores esperados de cada población asociada a las estrategias elegidas se modifican a lo largo del tiempo, en función de los cambios en las distribuciones de los posibles comportamientos de cada uno de los grupos participantes. Por otro lado, también hay que tener en cuenta que la evolución del comportamiento marrón dentro de cada población se define una vez conocida la evolución del comportamiento verde, ya que $n_b^H(t) = 1 - n_g^H(t)$.

Según el Teorema de Existencia y Unicidad de Picard (ver Teorema 2) de la solución de un sistema dinámico, una vez establecidas las condiciones iniciales, este sistema tendrá una única solución. Las condiciones iniciales corresponden a las distribuciones de probabilidad que caracterizan inicialmente el comportamiento de cada grupo.

Como cada grupo sólo tiene dos estrategias posibles, se deduce que

$$\bar{E}_H = n_H^g E(H^g) - (1 - n_H)^g E(H^b), \quad H \in \{G, C, F\},$$

por consiguiente, el sistema 6.1 puede escribirse en la forma:

$$\begin{cases} \dot{n}_g^G &= n_g^G(1-n_g^G)\left(E(G^g)-E(G^b)\right) \\ \dot{n}_g^C &= n_g^C(1-n_g^C)\left(E(C^g)-E(C^b)\right) \\ \dot{n}_g^F &= n_g^F(1-n_g^F)^F\left(E(F^g)-E(F^b)\right). \end{cases} \tag{6.2}$$

Considerando las expresiones 5.1, 5.3 y 5.5 y sustituyendo en el sistema 6.2, después de un poco de algoritmo, se obtienen las siguientes expresiones:

$$\begin{cases} \dot{n}_g^G &= n_g^G(1-n_g^G)\left(n_g^F B_G + n_g^C C_G + D_G\right) \\ \dot{n}_g^C &= n_g^C(1-n_g^C)\left(n_g^G n_g^F A_C + n_g^F C_C + D_C\right) \\ \dot{n}_g^F &= n_g^F(1-n_g^F)\left(n_g^G B_F + D_F\right) \end{cases} \tag{6.3}$$

donde A_h, B_h, C_h, D_h, $h = G, F, C$, están definidos en (5.2), (5.4) y (5.6).

Si bien es cierto que las condiciones de corto plazo pueden cambiar de un momento a otro, y con ellas la oferta y los beneficios de las empresas, para simplificar la dinámica del replicador se considera que éstas se mantienen constantes, al menos, durante el periodo de tiempo considerado, que se supone finito pero incierto. La evolución de la economía en dicho periodo dependerá entonces de los parámetros del modelo, fundamentalmente de las tasas aplicadas por el gobierno, así como de las condiciones iniciales. Una vez establecidas éstas, la solución del sistema dinámico es única.

Inmediatamente establecidas las condiciones iniciales, $n_0 = \left(n^G(t_0), n^C(t_0), n^F(t_0)\right)$, el sistema de ecuaciones 6.1 tendrá una solución única: $\xi(\cdot, n_0) : [t_0, T] \to \mathcal{C}$ donde $\mathcal{C} = [0,1]^3$ y para cada t se tiene $\xi(t, n_0) = (\xi^G(t, n_0), \xi^C(t, n_0), \xi^F(t, n_0))$ a lo largo del cual, cada grupo puede evolucionar a una velocidad distinta, dada por las respectivas derivadas respecto del tiempo.

El intervalo $[t_0, T]$ se refiere al tiempo considerado entre el momento inicial t_0 en el que se evalúan las distribuciones correspondientes sobre los comportamientos de los grupos participantes y un tiempo T que, aunque finito, no se sabe cuándo termina, por lo que en principio se puede considerar $T = \infty$.

Nótese que la solución analítica de este sistema generalmente no es posible, ya que entre otras cosas el sistema está acoplado, y como ya se dijó, los valores esperados de cada población asociada a las estrategias elegidas se modifican a lo largo del tiempo,

en función de los cambios en las distribuciones de los posibles comportamientos de cada uno de los grupos participantes. Sin embargo, es posible obtener soluciones numéricas para el sistema, obviamente estas dependerán del valor que se le de a los parámetros que necesariamente serán arbitrarios. También es posible estudiar el sistema en primera aproximación lo que permitirá caracterizar la estabilidad en primera aproximación de los equilibrios dinámicos.

Como es bien sabido, cada equilibrio de Nash del juego corresponde a un equilibrio dinámico. Se analizará primero la existencia de estos equilibrios y luego su estabilidad. Esto permitirá conocer la posible evolución de la economía en el periodo de tiempo que se este considerando, que se entiende finito, pero cuyo momento final se desconoce.

6.2 Los equilibrios de Nash en el juego

En este apartado interesa caracterizar los equilibrios de Nash del juego, es decir, aquellas combinaciones de estrategias (perfiles estratégicos en términos de teoría de juegos) que hacen que ningún participante obtenga beneficios desviándose del perfil considerado. Para jugar a este juego se elige al mismo tiempo y de forma aleatoria un representante de cada grupo (gobierno, consumidores y empresas).

El resultado del juego para cada uno de estos tres jugadores representativos dependerá de su propia estrategia o (comportamiento) y de las estrategias o comportamientos seguidos por cada uno de los dos oponentes en el momento en el que se encuentren en el juego, y obviamente de los valores indicados para cada caso en los respectivos cuadros de rentabilidad (ver apartado 5).

Se recuerda que, John Nash (1950) demostró que si se permiten estrategias mixtas (es decir, si a cada jugador se le permite elegir una distribución de probabilidad entre sus diversas estrategias puras posibles), entonces todo juego con un número finito de jugadores, en el que cada uno puede elegir entre un número finito de estrategias puras, tiene al menos un equilibrio de Nash. Un equilibrio de este tipo puede contener una estrategia pura para cualquiera de los jugadores o, alternativamente, una distribución de probabilidad sobre estrategias para cada jugador (véase (Nash, 1951)).

Asimismo, una estrategia pura corresponde a una distribución de probabilidad sobre el

conjunto de estrategias puras que es degenerada, es decir, concentrada en dicha estrategia. Cuando esto no sucede, se dice que, la estrategia seguida por el jugador es mixta, y estrictamente mixta si corresponde a una distribución de probabilidad soportada por cada una de las estrategias puras de que dispone el jugador.

Distintos supuestos sobre los valores indicados en los cuadros de pagos (véase el apartado 5) caracterizarán el juego y, en consecuencia, los posibles equilibrios de Nash del juego, tal y como muestra el siguiente teorema:

Teorema 3. *[Sobre la existencia de equilibrios de Nash puros]*

Suponiendo que

(1) $\Pi^b < \Pi^g$ *y*

(1.1) $\alpha + \beta - s_g(y_1^g + y_2^g + y_{g3}^g) > (\tau - \tau^g)\Pi^g$, *entonces* $(1, 1, 1)$ *es el único equilibrio de Nash puro.*

(1.2) $\alpha + \beta - s_g(y_1^g + y_2^g + y_{g3}^g) < (\tau - \tau^g)\Pi^g$, *entonces* $(0, 1, 1)$ *es el único equilibrio de Nash puro.*

(2) $\Pi^b > \Pi^g$ *si*

(2.1) $(1-\tau)\Pi^b - P(\xi_{b1}+\xi_{b2}+\xi_{b3}) > (1-\tau^g)\Pi^g$, *entonces* $(1, 0, 0)$ *es el único equilibrio de Nash puro.*

(2.2) $(1 - \tau)\Pi^b - P(\xi_{b1} + \xi_{b2} + \xi_{b3}) < (1 - \tau^g)\Pi^g$ *y* $(\alpha + \beta) - s_g\left(y_1^g + y_2^g + y_{g3}^g\right) > (\tau - \tau^g)\Pi^g$, *entonces* $(1, 1, 1)$ *es el único equilibrio de Nash puro.*

Demostración. Toda estrategia pura puede ser considerada como una estrategia mixta degenerada, es decir, una distribución de probabilidad con la que, con probabilidad 1, se elige dicha estrategia pura. En lo que sigue se utilizará la notación

$$E(A^i \mid B^j, C^k), A \neq B \neq C \in \{G, C, F\} \text{ y } i, j, k \in \{g, b\}\,.$$

donde se indica que el jugador A está eligiendo con probabilidad 1, su estrategia pura i, mientras que los demás eligen, también con probabilidad 1, sus estrategias j y k, respectivamente. En consecuencia, el perfil de estrategia pura (G^i, C^j, F^k), se corresponde con

el perfil de estrategia mixta en el que con probabilidad 1 cada jugador elige la estrategia, $i, j, k.$, respectivamente.

Suponiendo que se cumplen las condiciones ***(1)*** y ***(1.1)***, es decir, que se satisfacen las desigualdades $\Pi^b < \Pi^g$ y $\alpha + \beta - s_g(y_1^g + y_2^g + y_{g3}^g) > (\tau - \tau^g)\Pi^g$, entonces los rendimientos asociados según la estrategia pura de gobierno, G^g o G^b, relacionado a cada una de las posibles combinaciones de comportamientos (estrategias puras) de ciudadanos y empresas verifican las siguientes desigualdades

$$\begin{aligned}
&(a) \qquad E(G^g \mid F^g, C^g) - E(G^b \mid F^g, C^g) > 0,\\
&(b) \qquad E(G^g \mid F^g, C^b) - E(G^b \mid F^g, C^b),\\
&(c) \qquad E(G^g \mid F^b, C^g) - E(G^b \mid F^b, C^g),\\
&(d) \qquad E(G^g \mid F^b, C^b) - E(G^b \mid F^b, C^b) > 0.
\end{aligned} \tag{6.4}$$

Los signos de las expresiones (b) y (c) de (6.4) dependerán de los valores que asuman los parámetros del modelo. Como se verá, estos serán de gran importancia a la hora de analizar la existencia de equilibrios de Nash en estrategias mixtas, ver más abajo el Teorema 4.

De manera similar, los retornos asociados a cada estrategia pura de ciudadanos C^g o C^b ante cada una de las posibles combinaciones de comportamientos de gobierno y empresa verifican las siguientes desigualdades

$$\begin{aligned}
&(a) \qquad E(C^g \mid G^g, F^g) - E(C^b \mid G^g, F^g) > 0,\\
&(b) \qquad E(C^g \mid G^g, F^b) - E(C^b \mid G^g, F^b) < 0,\\
&(c) \qquad E(C^g \mid G^b, F^g) - E(C^b \mid G^b, F^g) > 0,\\
&(d) \qquad E(C^g \mid G^b, F^b) - E(C^b \mid G^b, F^b) < 0.
\end{aligned} \tag{6.5}$$

Finalmente, para cada estrategia pura de las firmas se tiene un retorno asociado de acuerdo al comportamiento del gobierno y del ciudadano con el que se enfrentan.

$$\begin{aligned}
&(a) \qquad E(F^g \mid G^g, C^g) - E(F^b \mid G^g, C^g) > 0,\\
&(b) \qquad E(F^g \mid G^g, C^b) - E(F^b \mid G^g, C^b) > 0,\\
&(c) \qquad E(F^g \mid G^b, C^g) - E(F^b \mid G^b, C^g) > 0,\\
&(d) \qquad E(F^g \mid G^b, C^b) - E(F^b \mid G^b, C^b) > 0.
\end{aligned} \tag{6.6}$$

Luego usando (6.4)-(a),(6.5)-(a) y (6.6)-(a)

$$\begin{aligned}
&E(G^g \mid F^g, C^g) - E(G^b \mid F^g, C^g) > 0,\\
&E(C^g \mid G^g, F^g) - E(C^b \mid G^g, F^g) > 0,\\
&R(F^g \mid G^g, C^g) - R(F^b \mid G^g, C^g) > 0.
\end{aligned} \tag{6.7}$$

Por lo tanto, se puede concluir que (G^g, C^g, F^g) es un equilibrio de Nash puro.

A partir de un cálculo sencillo, se aprecia que combinando cualquier otra tríada de desigualdades (una de cada grupo de (6.4),(6.5) y (6.6)) al menos una desigualdad tiene un signo opuesto, por ello, al menos un jugador tiene incentivos para desviarse del perfil considerado. Y por consiguiente, se puede concluir que no existen otros equilibrios de Nash puros. Con esto concluye esta parte de la demostración.

De manera análoga, se concluye el resto de los resultados, estimando los valores esperados apropiados utilizando las hipótesis planteadas en cada caso.

La condición 1.1 del Teorema 3 muestra la importancia que la evaluación del gobierno sobre el cumplimiento de los acuerdos internacionales puede tener para la evolución de la economía. Valores relativamente altos de α y β pueden determinar la evolución de la economía, ya que en el caso en que los beneficios de las empresas verdes sean mayores que los de las empresas marrones, el valor que el gobierno asigna a estos acuerdos puede ser de mayor importancia que los descuentos en el IVA y la reducción de impuestos que

el gobierno ofrece a las empresas verdes.

Gráficamente se puede analizar este resultado utilizando las figuras que se presentan a continuación. □

Interpretación lógica y económica del Teorema sobre la existencia de equilibrios de Nash puros

A continuación se interpreta de manera detallada las condiciones bajo las cuales se garantiza la existencia de equilibrios de Nash puros en el juego propuesto entre gobierno, empresas y consumidores. Más allá del formalismo matemático, es fundamental comprender el significado lógico y económico que subyace a cada una de las condiciones del teorema, ya que ello permite identificar los mecanismos de incentivos que moldean las decisiones estratégicas de los jugadores.

A partir de las condiciones teóricas derivadas, se analizan los escenarios posibles según las relaciones entre la rentabilidad de las tecnologías limpias y contaminantes, así como los incentivos gubernamentales y las preferencias de los consumidores. Se establecen así distintas configuraciones de equilibrio que reflejan tanto las restricciones económicas como las decisiones de política pública.

En lo que sigue, se presentan de manera sistemática las condiciones necesarias para la existencia de equilibrios puros, acompañadas de su correspondiente interpretación lógica y económica, con el propósito de vincular los resultados del modelo con las dinámicas reales de transición hacia economías sostenibles.

Condición (1): $\Pi^b < \Pi^g$

Interpretación económica: las empresas verdes son más rentables que las marrones. Es decir, producir con tecnologías limpias genera mayores beneficios por unidad de producción que las tecnologías contaminantes.

Implicación lógica: esta diferencia en beneficios genera un incentivo estructural hacia la adopción de estrategias verdes, pero la estabilidad del equilibrio depende también de los incentivos gubernamentales y del comportamiento del consumidor.

- **(1.1)** $\alpha + \beta - s_g(y_1^g + y_2^g + y_{g3}^g) > (\tau - \tau^g)\Pi^g$

  Interpretación lógica: el incentivo total que tiene un gobierno verde (valor que le aporta el consumo y la producción verdes, neto del costo fiscal de dar trato

preferencial al consumo verde) es suficientemente alto.

Interpretación económica: el gobierno está dispuesto a promover políticas verdes porque los beneficios en satisfacción social y ambiental superan la pérdida de recaudación por reducir impuestos a las empresas verdes.

Resultado: todos los jugadores eligen la estrategia verde: (Gobierno verde, Empresas verdes, Consumidores verdes), es decir, $(1, 1, 1)$ es el único equilibrio de Nash puro.

- **(1.2)** $\alpha + \beta - s_g(y_1^g + y_2^g + y_{g3}^g) < (\tau - \tau^g)\Pi^g$

  Interpretación lógica: el incentivo gubernamental verde no es suficiente para compensar el costo de aplicar un impuesto diferenciado favorable a empresas verdes.

  Interpretación económica: aunque las empresas verdes son más rentables, el gobierno prefiere políticas marrones por razones fiscales o porque el beneficio social de la producción/consumo verde es bajo.

  Resultado: solo los consumidores y empresas eligen verde, pero el gobierno mantiene una política marrón: $(0, 1, 1)$.

Condición (2): $\Pi^b > \Pi^g$

Interpretación económica: las empresas marrones obtienen mayores beneficios que las verdes. Esto puede deberse a menores costos de producción, mayores márgenes, o mayor demanda de bienes tradicionales.

- **(2.1)** $(1 - \tau)\Pi^b - P(\xi_{b1} + \xi_{b2} + \xi_{b3}) > (1 - \tau^g)\Pi^g$

  Interpretación lógica: aun considerando impuestos y penalizaciones, las empresas marrones siguen teniendo una rentabilidad superior.

  Interpretación económica: el sistema impositivo y los costos ecológicos no alcanzan a revertir la superioridad económica de las empresas marrones.

  Resultado: el equilibrio es casi completamente marrón: $(1, 0, 0)$ (Gobierno verde, pero empresas y consumidores optan por marrón porque el incentivo económico prevalece).

- **(2.2)** $(1-\tau)\Pi^b - P(\xi_{b1}+\xi_{b2}+\xi_{b3}) < (1-\tau^g)\Pi^g$ y $(\alpha+\beta) - s_g(y_1^g+y_2^g+y_{g3}^g) > (\tau-\tau^g)\Pi^g$

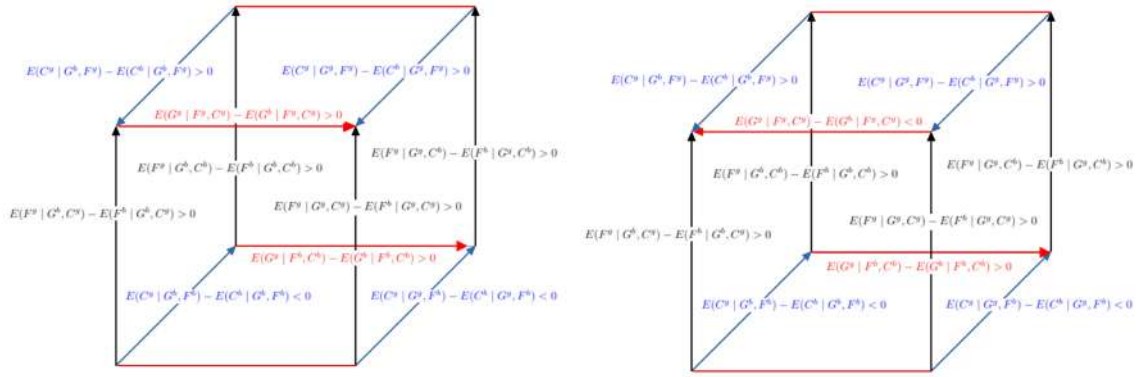
  Interpretación lógica: aunque las empresas marrones parecían más rentables, el ajuste por penalización ambiental hace que las verdes resulten más convenientes.

  Interpretación económica: si el gobierno también tiene fuertes incentivos sociales a favor de lo verde (por α y β altos), entonces se favorece un equilibrio completamente verde.

  Resultado: se sostiene nuevamente el equilibrio $(1, 1, 1)$.

Observación 3. (Una consideración sobre la importancia de los acuerdos ambientales internacionales) *La condición 1.1 (del Teorema 3) muestra la importancia de la evaluación del gobierno sobre el cumplimiento de los acuerdos internacionales para la evolución de la economía. Valores relativamente altos de α y β pueden determinar la evolución de la economía, ya que en el caso en que $\Pi^b < \Pi^g$ si $\alpha + \beta > s_g(y_1^g + y_2^g + y_{g3}^g) + (\tau - \tau^g)\Pi^g$ entonces la economía evolucionará hacia un equilibrio verde. Esto significa que, aunque el descuento del IVA sobre el consumo de productos verdes es alto y la diferencia entre los impuestos sobre las ganancias de las empresas marrones y verdes también es alta, un alto grado de compromiso gubernamental con los acuerdos internacionales impulsará la evolución hacia un equilibrio verde, aunque, al menos en principio, la reducción del IVA sobre el consumo verde y una tasa impositiva más baja para las empresas verdes pueden resultar en una menor recaudación de impuestos.*

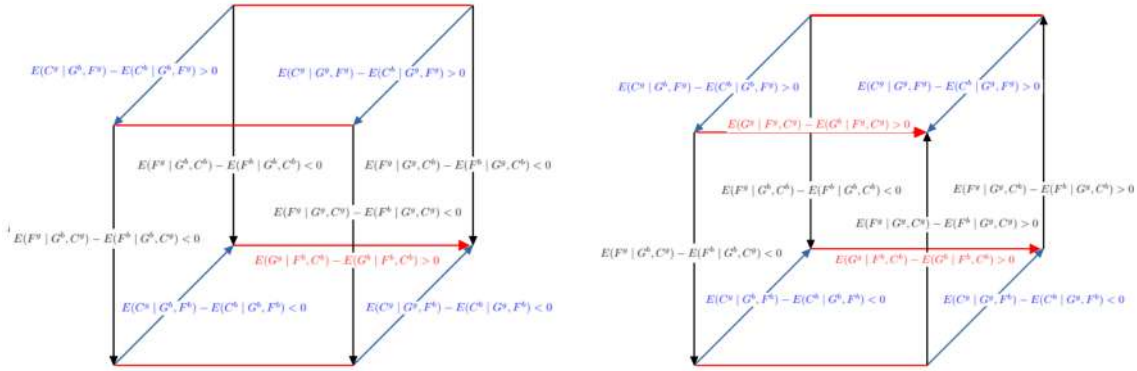
De lo contrario, mientras las empresas y los consumidores se muevan hacia el consumo y la producción verdes, el gobierno reducirá gradualmente los incentivos para el consumo y la producción verdes, ya que obtendrá un mayor retorno de la inversión comportándose como un gobierno marrón una vez que los consumidores y las empresas sean verdes. Es decir, $s_g \downarrow 0$ y $\tau_g \uparrow \tau$ cuando $t \to \infty$.



(a) En las condiciones ***(1)*** y ***(1.1)***, el equilibrio de Nash se encuentra en $(1, 1, 1)$.

(b) En las condiciones ***(1)*** y ***(1.2)***, el equilibrio de Nash se encuentra en $(0, 1, 1)$

Figura 6.1: Dirección de la diferencia en los valores esperados y los equilibrios de Nash bajo la condición **(1)**-**(1.1)** y **(1)**-**(1.2)** en el Teorema (3). En la representación gráfica, los equilibrios de Nash puros se determinan siempre que las tres flechas apunten al mismo vértice.



(a) En las condiciones ***(2)*** y ***(2.1)***, el equilibrio de Nash se encuentra en $(1, 0, 0)$

(b) En las condiciones ***(2)*** y ***(2.2)***, el equilibrio de Nash se encuentra en $(1, 1, 1)$

Figura 6.2: Dirección de la diferencia en los valores esperados y los equilibrios de Nash bajo la condición **(2)**-**(2.1)** y **(2)**-**(2.2)** en el Teorema (3). En la representación gráfica, los equilibrios de Nash puros se determinan siempre que las tres flechas apunten al mismo vértice.

Obsérvese que, si bien el equilibrio $(1, 0, 0)$ puede ser paradójico, ya que, las empresas y los consumidores prefieren ser marrones en las condiciones indicadas en (2,1), sin embargo el gobierno decide ser verde. Pero esta paradoja es solo aparente, porque un gobierno verde grava a las empresas marrones por contaminar, lo que en última instancia, de acuerdo con los rendimientos asociados con una estrategia verde por parte del gobierno y estrategias marrones por parte de los consumidores y las empresas, implica una mayor

recaudación fiscal. La transformación de las empresas marrones en verdes dependerá en última instancia de cambios en la función de ganancias de las empresas verdes, que está asociada con la mejora tecnológica o una mayor oferta de los insumos necesarios para este tipo de tecnología.

La condición 2.2 muestra que, aunque la ganancia de la empresa marrón es mayor que la de la empresa verde, una vez que el gobierno define su política fiscal, las ganancias después de impuestos son mayores para la empresa verde. Por otro lado, de manera similar a lo que ocurre con la condición 1.1, una alta valoración por parte del gobierno de los acuerdos internacionales hace que éste prefiera ser un gobierno verde, por lo que preferirá encontrar consumidores y empresas verdes, lo que, a su vez, impulsa su política fiscal verde.

En caso de que ***(2)*** no se cumpla, el segundo supuesto en ***(2.2)***, se obtiene el siguiente resultado

Corolario 1. *Bajo las condiciones del teorema anterior, los equilibrios de Nash son asintóticamente estables para la dinámica del replicador.*

Demostración. Debido a que, el segundo miembro del sistema (6.1) es una función continua de Lipschtiz de tasa de crecimiento regular (ver (Weibull, 1997)), los conjuntos de inecuaciones dados en (6.4), (6.5) y (6.6) muestran que el equilibrio de Nash puro (G^g, F^G, C^g) es asintóticamente estable. Puesto que, resulta ser el único equilibrio estable, resultará ser globalmente asintóticamente estable.

Los demás equilibrios pueden caracterizarse de forma similar, para convencerse de ello basta con considerar las figuras 6.1 y 6.2. □

El corolario anterior muestra que, independientemente de las distribuciones iniciales de los comportamientos posibles de los participantes, la economía evolucionará gradualmente, a lo largo del período considerado, hacia uno de los equilibrios de Nash indicados en el Teorema 3. La evolución hacia uno de ellos dependerá de los valores relativos que asuman los parámetros indicados en las tablas de retorno. Las condiciones 1.1 y 2.2 del Teorema 3 aseguran la evolución hacia una economía verde. La autoridad central puede definir condiciones de política económica que garanticen la evolución hacia uno u otro de estos estados.

Ahora se discutirá sobre la existencia de un equilibrio de Nash estrictamente mixto.

Teorema 4. *[Sobre la existencia del equilibrio de Nash estrictamente mixto]*

Suponiendo las desigualdades

$$\begin{aligned} &\Pi^b > \Pi^g, \\ &(1-\tau)\Pi^b - P(\xi_{b1}+\xi_{b2}+\xi_{b3}) < (1-\tau^g)\Pi^g \quad y \\ &(\alpha+\beta) - s_g\left(y_1^g + y_2^g + y_{g3}^g\right) < (\tau-\tau^g)\Pi^g, \end{aligned} \tag{6.8}$$

entonces el juego tiene un equilibrio de Nash mixto. Además, si se cumplen las siguientes condiciones

$$\begin{aligned} &2(1-\tau)\Pi^b < (\tau-\tau^g)\Pi^g + P(\xi_{b1}+\xi_{b2}+\xi_{b3}), \\ &\beta - s_g\left(y_1^g + y_2^g + y_{g3}^g\right) + P(\xi_{b1}+\xi_{b2}+\xi_{b3}) < 0 \quad y \\ &(\tau^g-\tau)\,\Pi^g + \alpha < 0 \end{aligned} \tag{6.9}$$

entonces

$$\begin{aligned} &\left(n^{G*}, n^{C*}, n^{F*}\right) = \left(\left(n^{G*}, 1-n^{G*}\right), \left(n_g^{C*}, 1-n_g^{C*}\right), \left(n_g^{F*}, 1-n_g^{F*}\right)\right) \\ &\textit{donde}\left(n_g^{G*}, n_g^{C*}, n_g^{F*}\right) = \left(-\frac{D_F}{B_F}, -\frac{D_C}{n_g^{G*}A_C + C_C}, -\frac{D_G - n_g^{C*}B_G}{C_G}\right) \in (0,1)^3 \end{aligned} \tag{6.10}$$

es el único equilibrio de Nash estrictamente mixto del juego. Aquí B_F, D_F, A_C, C_C, D_C, B_G, C_G *y* D_G *se definen por* (5.2), (5.4) *y* (5.6).

Demostración. Bajo las condiciones del teorema, utilizando los valores esperados correspondientes, se puede concluir que no hay equilibrios de Nash puros, porque el juego $G\&B$ descrito en este trabajo es un juego de 3 personas, en el que cada jugador tiene un número finito de estrategias (cada jugador tiene 2 estrategias posibles), entonces el juego necesariamente tiene al menos un punto de equilibrio $n^*(n_g^{G*}, n_g^{C*}, n_g^{F*}) \in [0,1]^3$, ya que por

las condiciones anteriores no hay equilibrio de Nash puro, entonces al menos una entrada de n^* pertenece al intervalo abierto $(0,1)$, lo que concluye la demostración de la primera parte del teorema.

Ahora se utilizará (5.1), (5.3) y (5.5), se puede concluir fácilmente que (6.10) es la única solución del sistema

$$E(G^g \mid n^F, n^G) - E(G^b \mid n^F, n^G) = 0$$

$$E(C^g \mid n^G, n^F) - E(C^b \mid n^G, n^F) = 0$$

$$E(F^g \mid n^G, n^C) - E(F^b \mid n^G, n^C) = 0.$$

Suponiendo que $\Pi^b > \Pi^g$, esta desigualdad, junto con la primera desigualdad en (6.9), implica que $n_g^G \in (0,1)$.

A partir de un cálculo directo utilizando (5.4), se tiene

$$n_g^{C*} = \frac{[u(y_{b1}, y_{b2}, y_{b3}) - u(y_{g2}, 0, 0)]}{n_g^G s_g y^g + u(y_{g1}, y_{g2}, y_{g3}) - u(y_{g2}, 0, 0) + [u(y_{b1}, y_{b2}, y_{b3}) - u(0, y_{b1}, 0)]}$$

ya que $u(y_{g1}, y_{g2}, y_{g3}) > u(y_{g2}, 0, 0)$, $u(y_{b1}, y_{b2}, y_{b3}) > u(0, y_{b1}, 0)$ y $s_g y^g > 0$, se concluye que $n_g^{G*} \in (0,1)$.

Finalmente, de la definición de B_G, C_G, D_G en (5.2) y del segundo y tercer supuesto en (6.9), también se concluye que $B_G < 0$, $C_G < 0$ y $D_G > 0$, ya que $n_g^{C*} > 0$

$$0 < n_g^{F*} = \frac{n_g^{C*} B_G - D_G}{C_G} < \frac{-D_G}{C_G} = \frac{-P(\xi_{b1} + \xi_{b2} + \xi_{b3})}{\beta - s_g \left(y_1^g + y_2^g + y_{g3}^g\right)} < 1$$

por consiguiente, se puede concluir que $\left(n^{G*}, n^{C*}, n^{F*}\right)$ es estrictamente solo un equilibrio de Nash mixto del juego $G\&B$. □

Las condiciones presentadas en el último teorema se representan gráficamente en la figura 6.3 a continuación. Además, esta figura muestra la dinámica en los bordes del cubo unitario cuando se cumplen las condiciones del Teorema 4.

La velocidad relativa de convergencia

La tasa de crecimiento relativo entre dos grupos, a lo largo de una solución, hacia el

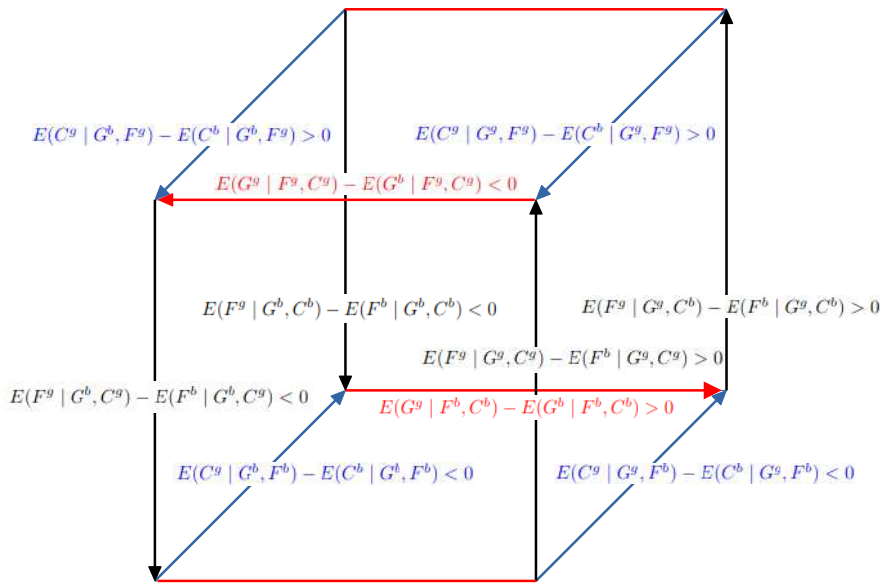


Figura 6.3: Representación gráfica de las condiciones del Teorema 4. No existen equilibrios de Nash puros.

estado estacionario (correspondiente a las condiciones dadas en los Teoremas 3 y 6.10), es para cada tiempo igual a

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\xi^h(t,n_0}{\xi^j(t,n_0)}\right] = \left[(E(H^g) - \bar{E}_H) - (E(J^g) - \bar{E}_J)\right]\frac{\xi^h(t,n_0)}{\xi^j(t,n_0)},\ H \neq J \in \{G, C; F\}\,. \quad (6.11)$$

En el caso de que se verifiquen las condiciones 1.1 y 2.2 del Teorema 3, la La ecuación 6.11 indicaría cuál de los tres grupos avanza más rápidamente hacia la economía verde, siendo así el motor de la transformación.

Dado un tiempo t, el peso del sector g crecerá más rápidamente en aquel grupo en el que en ese momento t el valor esperado asociado a la estrategia g esté más alejado del valor medio obtenido por el grupo.

7 Dinámica evolutiva y estabilidad

En esta sección, utilizando el Teorema 1 de Hartman-Grobman, se analizan las características dinámicas del equilibrio de estrategia mixta, que corresponde al equilibrio dinámico (6.10) del sistema (6.3). Para ello se estima la matriz jacobiana de este sistema en el punto $\left(n^{G*}, n^{C*}, n^{F*}\right)$.

Primero se consideran algunas propiedades bien conocidas de la dinámica del replicador y sus posibles soluciones en el cubo $\mathcal{C} = [0,1]^3$. Recordando que todo equilibrio dinámico dentro del cubo $C = [0,1]^3$, para la dinámica del replicador, es un equilibrio de Nash de estrategia mixta. Este punto, aunque en principio puede ser estable, nunca será asintóticamente estable, ya que esto requeriría que también fuera un equilibrio de Nash estricto, que ningún equilibrio mixto puede satisfacer (véase para este punto (van Damme, 1991)). Por lo tanto, la estabilidad asintótica sólo puede ser una propiedad de algunos de los puntos ubicados en las aristas del cubo.

Por otra parte, dado que el interior del cubo, así como sus caras y aristas, corresponden a conjuntos invariantes para la dinámica del replicador, una vez que las condiciones iniciales se encuentran en uno de estos conjuntos, la solución del sistema siempre permanecerá en el conjunto considerado.

$$J(n_g^{G*}, n_g^{C*}, n_g^{F*}) = \begin{bmatrix} 0 & n_g^{G*}(1-n_g^{G*})C_G & n_g^{G*}(1-n_g^{G*})B_G \\ n_g^{C*}(1-n_g^{C*})n_g^{F*}A_C & 0 & n_g^{C*}(1-n_g^{C*})\left[n_g^{C*}A_C + C_C\right] \\ n_g^{F*}\left(1-n_g^{F*}\right)B_F & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

es el jacobiano del sistema (6.3) evaluado en el punto de equilibrio.

A partir de un cálculo directo el polinomio característico de $J(n_g^{G*}, n_g^{C*}, n_g^{F*})$ esta dado por

$$P(\lambda) = -\lambda^3 + c\lambda + d, \tag{7.1}$$

donde

$$c = n_g^{G*}(1 - n_g^{G*})n_g^{C*}(1 - n_g^{C*})A_C C_G + n_g^{G*}(1 - n_g^{G*})n_g^{F*}(1 - n_g^{F*})B_G B_F < 0$$

$$d = n_g^{G*}n_g^{C*}n_g^{F*}(1 - n_g^{G*})(1 - n_g^{C*})(1 - n_g^{F*})C_G B_F\,(A_C + C_C) < 0$$

Teorema 5. *El punto de equilibrio de Nash estrictamente mixto* (6.10) *es un punto de silla del sistema dinámico* (6.3)*, con una variedad estable de* 1 *dimensión y una variedad inestable de* 2 *dimensiones.*

Demostración. Sean λ_1, λ_2 y λ_3 las tres raíces del polinomio característico (7.1) del sistema $J(n_g^{G*}, n_g^{C*}, n_g^{F*})$. Como $d \neq 0$, se puede concluir que, $\lambda_i \neq 0,\ i = 1, 2, 3$. Por otro lado, de la fórmula de Vieta[1] se sabe que estas raíces satisfacen

$$\begin{aligned} &\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0, \\ &\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 > 0, \\ &\lambda_1\lambda_2\lambda_3 < 0. \end{aligned} \tag{7.2}$$

[1]Según Viète (1970), la fórmula de Vieta establece una relación entre los coeficientes de un polinomio y sus raíces. Formalmente, si un polinomio de grado n es:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

cuyas raíces son $r_1, r_2, \ldots, r_n$, entonces las ecuaciones de Vieta se expresan como:

$$r_1 + r_2 + \cdots + r_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$$

$$r_1r_2 + r_1r_3 + \cdots + r_{n-1}r_n = \frac{a_{n-2}}{a_n}$$

$$\vdots$$

$$r_1r_2\ldots r_n = (-1)^n\frac{a_0}{a_n}$$

En particular, de la primera ecuación y la tercera desigualdad en (7.2) se deduce que exactamente una raíz, digamos λ_1, es negativa y las otras dos, λ_2 y λ_3, tienen parte real positiva. Por lo tanto, el Teorema 1 de Hartman-Grobman es aplicable y luego se concluye que el punto de equilibrio (Nash mixto) $\left(n^{G*}, n^{C*}, n^{F*}\right)$ del sistema (6.10) es una silla de montar y, por lo tanto, inestable. Además, dado que λ_2 y λ_3 son raíces reales, siempre que el discriminante $\Delta = 4c^3 - 27d$ de la ecuación cúbica (7.1) sea positivo, lo que no es el caso, entonces $\left(n^{G*}, n^{C*}, n^{F*}\right)$ es un punto de silla espiral. □

7.1 Ciclos de consumo alternativos: del marrón al verde y viceversa

En esta sección se muestra que el Teorema 4, además de llevar a la existencia de un equilibrio estrictamente mixto para el sistema (6.3), también lleva, en términos de dinámica, a la aparición de un ciclo heteroclínico estable. Estos ciclos son importantes desde la perspectiva aplicada del modelo, ya que en términos prácticos describen trayectorias y condiciones bajo las cuales cada uno de los participantes en el juego, gobierno, empresas y consumidores, alternan entre estrategias marrones y verdes.

El ciclo heteroclínico del modelo se describe por la situación en la que a partir de una economía situada en un contexto completamente marrón, el gobierno tiene como principal responsabilidad legislar a favor del medio ambiente, toma la iniciativa para incentivar el consumo y la producción verdes convirtiéndose en un gobierno verde (G^g), señal que lleva a las empresas a adoptar una producción verde (F^g), seguida de una postura de consumo verde por parte de los consumidores (C^g). Una vez que se llega a esta etapa en la que todos han adoptado estrategias verdes, el gobierno detiene su inversión en apoyo de la producción y el consumo verdes (G^b), lo que lleva a las empresas a adoptar procesos de producción menos respetuosos con el medio ambiente, volviendo a la producción marrón (F^b), lo que termina provocando que los consumidores elijan ser marrones (C^b).

El ciclo heteroclínico descrito anteriormente está determinado por el siguiente conjunto de desigualdades.

$$\begin{cases} \dot{n}_g^G &= n_g^G(1-n_g^G)D_G > 0 \\ \dot{n}_g^F &= n_g^F(1-n_g^F)\left(B_F + D_F\right) > 0 \\ \dot{n}_g^C &= n_g^C(1-n_g^C)\left(A_C + C_C + D_C\right) > 0 \\ \dot{n}_g^G &= n_g^G(1-n_g^G)\left(B_G + C_G + D_G\right) < 0 \\ \dot{n}_g^F &= n_g^F(1-n_g^F)D_F < 0 \\ \dot{n}_g^C &= n_g^C(1-n_g^C)D_C < 0 \end{cases} \tag{7.3}$$

El gobierno adopta una posición a favor de la producción y el consumo sostenibles cuando los niveles de producción y consumo verdes son inexistentes

$$\dot{n}_g^G = n_g^G(1-n_g^G)D_G > 0$$

Esta situación puede interpretarse como el contexto en el que el desarrollo y la producción sustentable de las empresas ha llegado a niveles demasiado bajos, quizás por la falta de incentivos hacia este tipo de producción (altos costos de fabricación y nulos subsidios), por lo que la intervención del Gobierno para impulsar la producción y el consumo sustentables es fundamental para encaminar la economía hacia un cambio favorable para el medio ambiente.

Las empresas comienzan a avanzar hacia una producción sostenible cuando el gobierno ofrece incentivos correctos a favor de este tipo de producción.

$$\dot{n}_g^F = n_g^F(1-n_g^F)\left(B_F + D_F\right) > 0$$

Esta situación se da cuando las políticas gubernamentales a favor de la producción sustentable logran permear en las industrias, dando buenas señales para que las empresas decidan avanzar hacia procesos más amigables con el medio ambiente. Esto puede deberse a incentivos como subsidios y reducciones de impuestos, que pueden ser percibidos positivamente por las empresas, encontrando este tipo de políticas favorables para aumentar sus ganancias.

Los consumidores favorecen el consumo verde sobre el marrón, cuando tanto el gobierno

como las empresas han adoptado estrategias verdes.

$$\dot{n}_g^C = n_g^C(1 - n_g^C)\,(A_C + C_C + D_C) > 0$$

Las señales del gobierno a favor de la producción y consumo verde han llegado a los consumidores, quienes al observar que las empresas han comenzado a producir de manera sustentable, cambian su tipo de consumo a uno verde, esto puede ser producto de los incentivos en forma de subsidio al consumo que ofrece el gobierno, así como de la mejora en la calidad de los productos que ofrecen las empresas.

Cuando las empresas y los consumidores siguen estrategias verdes:

$$\dot{n}_g^G = n_g^G(1 - n_g^G)\,(B_G + C_G + D_G) < 0$$

Una vez alcanzado el objetivo de altos niveles de producción y consumo sostenibles, el papel del gobierno en la promoción de la producción y el consumo verde pasa a ser secundario, por lo que los incentivos ofrecidos inicialmente comienzan a disminuir, dando lugar a una reducción de subsidios e incluso a un aumento de las tasas impositivas en busca de una mayor recaudación.

Las empresas comienzan a dejar de lado la producción verde, volviendo a procesos más tradicionales:

$$\dot{n}_g^F = n_g^F(1 - n_g^F)D_F < 0$$

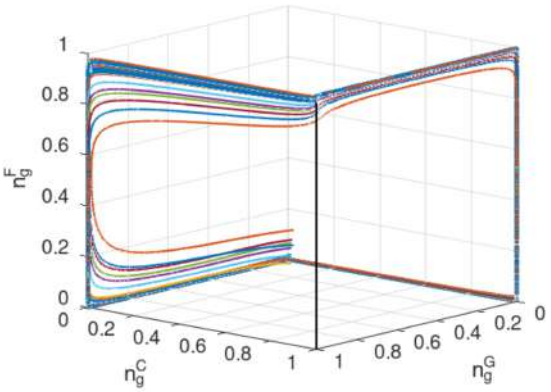
El retorno a la producción tradicional puede ser resultado de la falta de incentivos que reduzcan los costos de actualización tecnológica. Las altas inversiones en infraestructura para la producción sustentable pueden traer aparejado un descenso de los beneficios de las empresas, lo que podría desincentivar la producción verde, provocando un retorno a la producción con técnicas más contaminantes para intentar aumentar sus beneficios finales.

Los consumidores vuelven al consumo marrón debido a la falta de producción verde y de incentivos gubernamentales para su consumo:

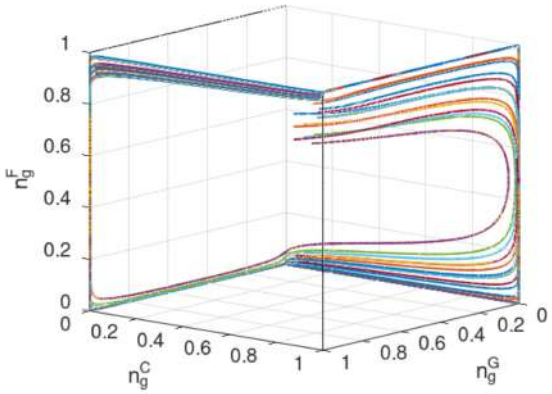
$$\dot{n}_g^C = n_g^C(1 - n_g^C)D_C < 0$$

Los consumidores, independientemente de sus convicciones hacia el consumo o no de productos verdes, terminan siendo víctimas de la falta de alternativas verdes, por lo que al tener pocas opciones de consumo sostenible, terminarán consumiendo productos marrones cuando estos son los que dominan el mercado. Esto puede ser consecuencia de factores externos, más allá de una decisión personal.

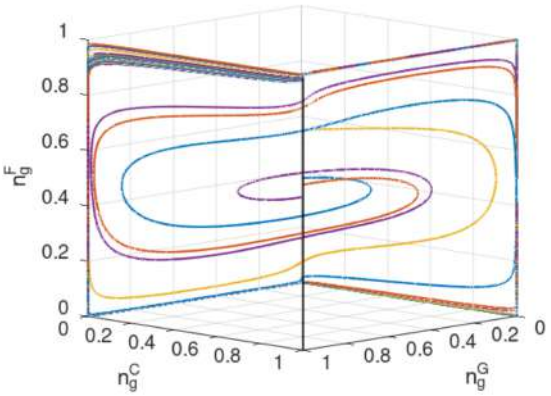
En la figura 7.1 se presentan algunas simulaciones que describen el ciclo heteroclínico.



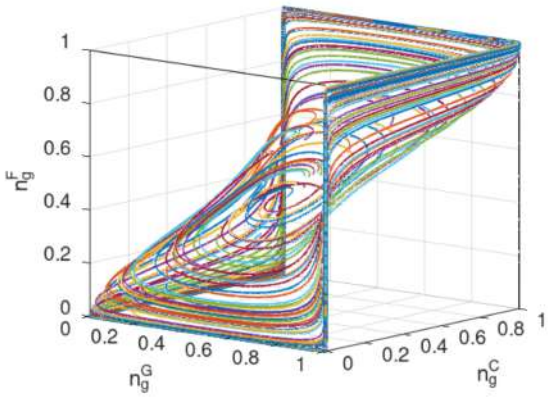
(a) Ciclo heteroclínico que comienza cerca del origen.



(b) Ciclo heteroclínico que comienza cerca de los equilibrios $(1, 1, 1)$.



(c) Ciclo heteroclínico.



(d) Ciclo heteroclínico.

Figura 7.1: Representación del ciclo heteroclínico

8 Conclusiones

El presente capítulo tiene como propósito sintetizar los principales hallazgos teóricos y económicos del modelo desarrollado a lo largo de este trabajo. A partir del análisis estratégico entre gobierno, empresas y consumidores en un entorno donde coexisten tecnologías verdes y marrones, se han derivado una serie de resultados que permiten comprender de manera más profunda las condiciones necesarias para promover una transición hacia una economía sostenible. Las conclusiones que se presentan a continuación destacan tanto los aportes del enfoque adoptado como las implicaciones que este tiene para el diseño de políticas públicas en contextos donde el crecimiento económico y la protección ambiental deben avanzar de manera conjunta.

- El modelo se construye sobre el supuesto realista de que las empresas, independientemente de su tipo tecnológico, pueden producir una variedad de bienes con distintos niveles de impacto ambiental. Por ejemplo, una misma fábrica puede producir tanto automóviles eléctricos como de gasolina. En este sentido, el comportamiento ambiental de las empresas está determinado más por los incentivos que por limitaciones tecnológicas intrínsecas.

- Esta observación motiva la necesidad de analizar la política fiscal del gobierno a la luz de las expectativas de empresas y consumidores. Aunque la política gubernamental puede fomentar prácticas sostenibles, en un mercado competitivo no basta con buenas intenciones. La transición hacia una economía verde requiere que las decisiones individuales de empresas y consumidores sean rentables desde su perspectiva de maximización de beneficios o utilidades.

- No obstante, las decisiones de producción y consumo no dependen únicamente de la política gubernamental. Empresas y consumidores toman decisiones estratégicas,

anticipando el comportamiento del resto de actores. Por su parte, el gobierno también enfrenta un dilema entre la necesidad de promover el cuidado ambiental y la obligación de mantener la recaudación tributaria, lo cual lo lleva a considerar las condiciones del mercado al definir su política fiscal.

- Bajo estas condiciones, cada elección de los agentes económicos se configura como una decisión estratégica. Esto justifica la utilización de la teoría de juegos para estudiar los posibles equilibrios del sistema, en el que cada jugador —gobierno, empresas y consumidores— elige racionalmente la estrategia que maximiza su valor esperado, dado el comportamiento probable de los demás participantes.

- La principal conclusión que se deriva de este trabajo es que la evolución hacia una economía verde no puede lograrse únicamente a través de mayores beneficios privados para las empresas verdes. Tal como se argumenta en la observación 3 del apartado 6.2, también es necesaria la existencia de un gobierno comprometido con la sostenibilidad ambiental, así como una masa crítica de consumidores y empresas que respalden dicha política mediante sus decisiones individuales.

- Dado que el modelo desarrollado en este trabajo, formulado en forma normal, permite representar de manera estructurada las interacciones estratégicas entre tres actores fundamentales: el gobierno, las empresas y los consumidores. La representación tridimensional del espacio de estrategias, junto con los parámetros fiscales, distributivos y de bienestar, permite capturar cómo las decisiones individuales afectan los resultados agregados del sistema. Uno de los aportes clave del modelo es la capacidad de representar explícitamente los incentivos y desincentivos que enfrentan los actores al optar por estrategias verdes o marrones. Las matrices de pago construidas muestran cómo los beneficios privados y públicos se ven alterados por la política fiscal, la estructura tecnológica del aparato productivo y la naturaleza del consumo.

- Se ha demostrado que, bajo ciertas condiciones, existen equilibrios de Nash puros que describen configuraciones estables donde los agentes adoptan consistentemente estrategias alineadas o desalineadas con la sostenibilidad. Este hallazgo ofrece funda-

mentos teóricos para diseñar políticas públicas que induzcan trayectorias ambientalmente deseables sin necesidad de imponer conductas, sino mediante la modificación del entorno de incentivos.

- Desde el punto de vista metodológico, el modelo integra herramientas de teoría de juegos, análisis económico y formulación dinámica, proporcionando una base analítica flexible para evaluar políticas públicas en contextos donde confluyen los objetivos de desarrollo económico y sostenibilidad ambiental. La formalización matemática permite expresar rigurosamente las relaciones entre variables, sin perder la capacidad de interpretar los resultados desde una perspectiva económica aplicada.

- En conjunto, este trabajo contribuye a enriquecer el debate sobre el papel de los incentivos fiscales, la relevancia de las preferencias sociales y la influencia de las decisiones individuales en la generación de equilibrios sostenibles. En particular, el modelo puede ser útil para reflexionar sobre las limitaciones estructurales que enfrentan las economías emergentes al abordar los desafíos ambientales.

Bibliografía

Accinelli, E. (2011). La teoría de juegos evolutivos, naturaleza y racionalidad. Technical report, University of Santiago de Compostela. Faculty of Economics and Business.

Accinelli, E., Bazzano, B., Robledo, F., and Romero, P. (2015). Nash equilibrium in evolutionary competitive models of firms and workers under external regulation. *Journal of Dynamics and Games*, 2(1):1–32.

Accinelli, E. and Carrera, E. J. S. (2010). The evolutionary processes for the populations of firms and workers. *Ensayos Revista de Economía*, 29(1):39–68.

Accinelli, E. and Carrera, E. J. S. (2011). Strategic complementarities between innovative firms and skilled workers: The poverty trap and the policymaker's intervention. *Structural Change and Economic Dynamics*, 22(1):30–40.

Accinelli, E., Martins, F., Muñiz, H., Oliveira, B. M., and Pinto, A. A. (2021). Firms, technology, training and government fiscal policies: An evolutionary approach. *Discrete & Continuous Dynamical Systems—Series B*, 26:5723–5754.

Albino, V., Balice, A., and Dangelico, R. M. (2009). Environmental strategies and green product development: an overview on sustainability-driven companies. *Business strategy and the environment*, 18(2):83–96.

Alexander, J. M. (2023). *Evolutionary Game Theory*. Cambridge University Press.

Aliprantis, C., Brown, D., and Burkinshaw, O. (1990). *Existence and Optimality of Competitive Equilibria*. Springer-Verlag Berlin ; · Heidelberg Springer.

Apergis, N. and Payne, J. E. (2009). Energy consumption and economic growth: evidence from the commonwealth of independent states. *Energy Economics*, 31(5):641–647.

Ashford, N. A. and Hall, R. P. (2011). The importance of regulation-induced innovation for sustainable development. *Sustainability*, 3(1):270–292.

Axelrod, R. (1980). Effective choice in the prisoner's dilemma. *Journal of conflict resolution*, 24(1):3–25.

Bhate, S. (2005). An examination of the relative roles played by consumer behaviour settings and levels of involvement in determining environmental behaviour. *Journal of Retailing and Consumer Services*, 12(6):419–429.

Cai, X., Zhu, B., Zhang, H., Li, L., and Xie, M. (2020). Can direct environmental regulation promote green technology innovation in heavily polluting industries? evidence from chinese listed companies. *Science of The Total Environment*, 746:140810.

Chien, M. and Shih, L.-H. (2007). An empirical study of the implementation of green supply chain management practices in the electrical and electronic industry and their relation to organizational performances. *International Journal of Environmental Science and Technology (IJEST)*.

Coddington, E. A. and Levinson, N. (1955). *Theory of ordinary differential equations*. McGraw-Hill.

Cournot, A. A. (1838). *Recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses*. L. Hachette, Paris.

dos Santos Gaspar, J., Marques, A. C., and Fuinhas, J. A. (2017). The traditional energy-growth nexus: A comparison between sustainable development and economic growth approaches. *Ecological Indicators*, 75:286–296.

D'souza, C., Taghian, M., and Lamb, P. (2006). An empirical study on the influence of environmental labels on consumers. *Corporate communications: an international journal*, 11(2):162–173.

Eggoh, J. C., Bangake, C., and Rault, C. (2011). Energy consumption and economic growth revisited in african countries. *Energy policy*, 39(11):7408–7421.

Ellen MacArthur Foundation (2013). La economía circular: una visión general. `https://www.ellenmacarthurfoundation.org`. Consultado el 22 de febrero de 2025.

Eyland, T. and Zaccour, G. (2014). Carbon tariffs and cooperative outcomes. *Energy policy*, 65:718–728.

Fudenberg, D. and Levine, D. K. (1998). *The Theory of Learning in Games*. MIT Press.

Fudenberg, D. and Tirole, J. (1991). *Game Theory*. MIT Press, Cambridge, MA.

García, A. C. (2022). Economía circular versus economía lineal: Propuestas normativas en españa y francia relativas al uso de envases y la información dirigida al consumidor sobre cualidades ambientales de los productos. *Revista CESCO de Derecho de Consumo*, (42):19–52.

Gaur, N., Sharma, S., and Yadav, N. (2024). Chapter 2 - environmental pollution. In Garg, V. K., Yadav, A., Mohan, C., Yadav, S., and Kumari, N., editors, *Green Chemistry Approaches to Environmental Sustainability*, Advances in Green and Sustainable Chemistry, pages 23–41. Elsevier.

Guckenheimer, J. and Holmes, P. (1983). *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*. Springer.

Guillemin, V. and Pollack, A. (1974). *Differential Topology*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ.

Hartman, P. (2002). *Ordinary Differential Equations*, volume 38 of *SIAM Classics in Applied Mathematics*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2 edition.

Hirsch, M. W. (1976). *Differential Topology*. Springer-Verlag, New York.

Hirsch, M. W., Smale, S., and Devaney, R. L. (2012). *Differential equations, dynamical systems, and an introduction to chaos*. Academic Press, 3rd edition.

Hofbauer, J. and Sigmund, K. (1998). *Evolutionary games and population dynamics*. Cambridge University Press, Cambridge, UK.

Horbach, J., Rammer, C., and Rennings, K. (2012). Determinants of eco-innovations by type of environmental impact—the role of regulatory push/pull, technology push and market pull. *Ecological economics*, 78:112–122.

Johnstone, M.-L. and Tan, L. P. (2015). Exploring the gap between consumers' green rhetoric and purchasing behaviour. *Journal of business ethics*, pages 311–328.

Jänicke, M. and Jacob, K. (2004). Lead markets for environmental innovations: A new role for the nation state. *Global Environmental Politics*, 4(1):29–46.

Kandori, M., Mailath, G. J., and Rob, R. (1993). Learning, mutation, and long run equilibria in games. *Econometrica*, 61(1):29–56.

Khan, S. J., Kaur, P., Jabeen, F., and Dhir, A. (2021). Green process innovation: Where we are and where we are going. *Business Strategy and the Environment*, 30(7):3273–3296.

Leal-Arcas, R., Malle, E., Kerestedjian, M., and Budak, G. (2020). The world trade organization and carbon market clubs. *Geo. J. Int'l L.*, 52:895.

Li, X. (2022). Evolutionary game analysis of green building development dynamic system under government regulation: From the perspective of the contractor. *Mathematical Problems in Engineering*, 2022(1):1987229.

Liang, P., Xie, S., Qi, F., Huang, Y., and Wu, X. (2023). Environmental regulation and green technology innovation under the carbon neutrality goal: dual regulation of human capital and industrial structure. *Sustainability*, 15(3):2001.

Lifona, D. G. (2024). Alemania rectifica con el coche eléctrico y recupera los incentivos tras el desplome de las ventas. *Expansión*. Accedido: 19 de enero de 2025.

Masoudi, N. and Zaccour, G. (2013). A differential game of international pollution control with evolving environmental costs. *Environment and Development Economics*, 18(6):680–700.

Matus, C. (2007). *Teoría del Juego Social*. Fundación Altadir, Caracas, Venezuela.

Maynard Smith, J. (1982). *Evolution and the theory of games.* Cambridge University Press, Cambridge, UK.

Ministerio de Industria, E. y. M. (2023). Uruguay logra más de 90 % de energías renovables en la matriz eléctrica en un contexto de más de tres años de sequía. Consultado el 19 de enero de 2025.

Mukherjee, A. and Carvalho, M. (2020). Pricing and quality investments in a mixed brown-green product market. In *Computational Logistics: 11th International Conference, ICCL 2020, Enschede, The Netherlands, September 28–30, 2020, Proceedings 11*, pages 715–732. Springer.

Myerson, R. B. (1991). *Game Theory: Analysis of Conflict.* Harvard University Press, Cambridge, MA.

Nash, J. (1951). Non cooperative games. *Annal Math*, 54:286–295.

Nash, J. F. (1950). Equilibrium points in n-person games. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 36(1):48–49.

Nishat, Y., Danish, M., Siddiqui, N., and Hussain, T. (2022). Chapter 9 - removal of emerging pollutants from the environment through microbes. In Samuel, J., Kumar, A., and Singh, J., editors, *Relationship Between Microbes and the Environment for Sustainable Ecosystem Services, Volume 2*, pages 181–203. Elsevier.

Orsato, R. J. and Wells, P. (2007). The automobile industry & sustainability.

Osborne, M. J. and Rubinstein, A. (1994). *A Course in Game Theory.* MIT Press.

Osman, M., Schwartz, P., and Wodak, S. (2021). Sustainable consumption: what works best, carbon taxes, subsidies and/or nudges? *Basic and Applied Social Psychology*, 43(3):169–194.

Pacheco, J. M., Traulsen, A., and Nowak, M. A. (2006). Active linking in evolutionary games. *Journal of theoretical biology*, 243(3):437–443.

Pandey, V. C. and Singh, V. (2019). Chapter 20 - exploring the potential and opportunities of current tools for removal of hazardous materials from environments. In Pandey, V. C. and Bauddh, K., editors, *Phytomanagement of Polluted Sites*, pages 501–516. Elsevier.

Perko, L. (2001). *Differential Equations and Dynamical Systems.* Springer.

Risso, C., Piccini, J., and Zimberg, B. (2023). Appraising the convenience of call-based dynamical hedging strtegy an oil-company. *Journal of dynamics and games*, pages 403–434.

Rubashkina, Y., Galeotti, M., and Verdolini, E. (2015). Environmental regulation and competitiveness: Empirical evidence on the Porter Hypothesis from European manufacturing sectors. *Energy Policy*, 83(C):288–300.

Samuelson, L. (1997). *Evolutionary Games and Equilibrium Selection.* MIT Press.

Sheldon, I. (2006). Trade and environmental policy: A race to the bottom? *Journal of agricultural economics*, 57(3):365–392.

Smith, J. M. and Price, G. R. (1973). The logic of animal conflict. *Nature*, 246(5427):15–18.

Stackelberg, H. v. (1934). *Marktform und Gleichgewicht.* Springer, Vienna.

Stevens, C. (2010). Linking sustainable consumption and production: The government role. In *Natural resources forum*, volume 34, pages 16–23. Wiley Online Library.

Strogatz, S. H. (1994). *Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering.* Westview Press, Boulder, CO.

Tarifa, E., Argañaraz, J., Astorga, F., Martínez, J., and Erdmann, E. (2011). Teoría de juegos aplicada a políticas públicas. *Caso de estudio: bienes públicos. Recuperado en: http://www. exeedu. com/publishing. cl/strategy_manag_bus_rev/2011/Vol2/3-SM08-11-full. pdf.*

Taylor, P. D. and Jonker, L. B. (1978). Evolutionary stable strategies and game dynamics. *Mathematical Biosciences*, 40(1-2):145–156.

Ukaogo, P. O., Ewuzie, U., and Onwuka, C. V. (2020). 21 - environmental pollution: causes, effects, and the remedies. In Chowdhary, P., Raj, A., Verma, D., and Akhter, Y., editors, *Microorganisms for Sustainable Environment and Health*, pages 419–429. Elsevier.

van Damme, E. (1991). *Stability and Perfection of Nash Equilbria.* Springer-Verlag.

Van Themaat, W. and Reuder, B. (2018). Treaty on the functioning of the european union (tfeu). *Eur. Compet. Law*, pages 25–26.

Viète, F. (1970). *In artem analyticam isagoge.*

von Neumann, J. and Morgenstern, O. (1944). *Theory of games and economic behavior.* Princeton University Press, Princeton, NJ.

Wang, C. and Shi, F. (2019). An evolutionary game model for industrial pollution management under two punishment mechanisms. *International Journal of Environmental Research and Public Health*, 16(15):2775.

Weibull, J. (1997). *Evolutionary game theory.* MIT press.

Weibull, J. W. (1995). *Evolutionary Game Theory.* MIT Press.

Wu, H., Sun, Y., Su, Y., Chen, M., Zhao, H., and Li, Q. (2022). Which is the best supply chain policy: carbon tax, or a low-carbon subsidy? *Sustainability*, 14(10):6312.

Xu, L., Mathiyazhagan, K., Govindan, K., Haq, A. N., Ramachandran, N. V., and Ashokkumar, A. (2013). Multiple comparative studies of green supply chain management: pressures analysis. *Resources, Conservation and Recycling*, 78:26–35.

Yang, X. and Thøgersen, J. (2022). When people are green and greedy: A new perspective of recycling rewards and crowding-out in germany, the usa and china. *Journal of Business Research*, 144:217–235.

Yenipazarli, A. and Vakharia, A. (2015). Pricing, market coverage and capacity: Can green and brown products co-exist? *European Journal of Operational Research*, 242(1):304–315.

Young, H. P. (1998). *Individual Strategy and Social Structure: An Evolutionary Theory of Institutions*. Princeton University Press.