UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE SAN LUIS POTOSÍ

FACULTAD DE ECONOMÍA

APORTACIONES SOBRE SOLUCIONES AL PROBLEMA DE ÁRBOL DE EXPANSIÓN DE MÍNIMO COSTO

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE

MAESTRA EN ECONOMÍA MATEMÁTICA

PRESENTA:

PAOLA CUEVAS RODRÍGUEZ

DIRECTOR DE TESIS:

DR. JOSS ERICK SÁNCHEZ PÉREZ

No.048 San Luis Potosí. Marzo 2025.

"Aportaciones sobre soluciones al problema de árbol de expansión de mínimo costo" © 2024 by **Paola Cuevas Rodríguez** is licensed under Creative Commons Attribution-NonCommercial-NoDerivatives 4.0 International

Dedicatoria

Dedico este trabajo a mis padres Silvia y Antonio, quienes siempre han confiado en mis capacidades para alcanzar mis sueños y han puesto todo el esfuerzo de su parte para que lo haga. Este logro es tan suyo como mío.

A mis hermanos, crecer con ustedes ha sido, por mucho, el regalo más valioso de mi vida.

A mi hermana, Valeria, quien ha soportado mi ausencia y siempre ha sido el faro que guía mi regreso a casa.

A Felipe, por su paciencia, cariño y constante apoyo con los cuales transformó un lugar lejano en un nuevo hogar.

A mis compañeros silenciosos de cuatro patas, cuya tranquila presencia muchas veces me otorgó la calma necesaria para seguir. Especialmente a Chata, que desde el otro lado siempre será mi guía.

Agradecimientos

A mi director de tesis Dr. Joss Erick Sánchez Pérez, cuya guía y dedicación incansables fueron esenciales para la realización de este trabajo. Su experiencia y paciencia fueron determinantes para mi crecimiento académico y para la calidad de esta investigación. Igualmente, mi gratitud al Dr. Jorge Zazueta y al Dr. Leobardo Plata, cuyas sugerencias mejoraron significativamente la legibilidad de este documento. Su atención al detalle aseguró una presentación clara y efectiva de la investigación.

A la SECIHTI por financiar mis estudios de maestría.

Al cuerpo académico de la Maestría en Economía Matemática, en especial a los doctores Joss Sánchez, Iván Téllez, William Olvera y Pedro González por su excepcional dedicación a la enseñanza de calidad que ha marcado profundamente mi trayectoria académica.

Resumen

Se desarrollan y analizan nuevas reglas de asignación de costos para el problema de árbol de expansión de mínimo costo, empleando principios de problemas de bancarrota. Los esquemas de asignación se diseñan priorizando la racionalidad individual y la estabilidad grupal. La investigación propone reglas de asignación de costos basadas en soluciones clásicas de problemas de bancarrota y las evalúa con axiomas que aseguran que las soluciones propuestas no solo sean válidas desde un punto de vista matemático, sino que también sean lógicas y coherentes dentro del marco teórico del problema. Además, se describen clases específicas de problemas de árbol de expansión de mínimo costo para las cuales estas soluciones cumplen con selección de núcleo, ampliando la relevancia de los métodos de asignación de costos propuestos. Los resultados ofrecen alternativas prácticas para la asignación de costos que buscan ser equitativas.

Palabras clave: Problema de árbol de expansión de mínimo costo, problema de bancarrota, reglas de asignación de costos, racionalidad individual, selección de núcleo.

Índice general

1. Introducción **1**

2. Problema de árbol de expansión de mínimo costo (*mcstp*) **5**
2.1. Definición del Problema 5
2.2. Construcción del Árbol de Mínimo Costo 7
2.2.1. Algoritmo de Kruskal 7
2.2.2. Algoritmo de Prim 7
2.2.3. Ejemplo Ilustrativo 7
2.3. Reglas de asignación de costos y propiedades 8
2.3.1. Propiedades de una regla de asignación de costos 9
2.4. Algunas asignaciones clásicas 11
2.4.1. La regla de Bird 11
2.4.2. La regla de Dutta-Kar 11
2.4.3. Solución serial 11
2.4.4. La regla de Kar 13
2.4.5. Propiedades de las asignaciones clásicas 14

3. Problemas de Bancarrota **15**
3.1. Definición formal del Problema de Bancarrota 15
3.2. Soluciones clásicas 16
3.3. Propiedades de las soluciones clásicas 17

4. Asignaciones de costos basadas en problemas de bancarrota **22**
4.1. Asignación natural basada en costos de conexión directa 24
4.1.1. Propiedades de las asignaciones $\boldsymbol{\eta_1^R(N_0, C)}$ y $\boldsymbol{\eta_1^{Ig}(N_0, C)}$ 26
4.2. Asignación de costos alternativa basada en costos de conexión indirecta . . . 35
4.2.1. Propiedades de las asignaciones $\eta_2^{\mathbf{R}}(\mathbf{N_0}, \mathbf{C})$ y $\eta_2^{\mathbf{Ig}}(\mathbf{N_0}, \mathbf{C})$ 37

5. Algunas clases de *mcstp* relevantes **43**
5.1. Clase de *mcstp* con una asignación que satisface Racionalidad individual y Ordenamiento por contribuciones marginales 43
5.2. Clases de *mcstp* tal que $\eta^{\mathbf{R}}(\mathbf{N_0}, \mathbf{C})$ cumplen Selección de núcleo 46
5.2.1. *mcstp* lineales 47
5.2.2. Clase de *2-mcstp* 53

6. Dos asignaciones basadas en distribución equitativa de excedentes **54**
6.1. Propiedades de las asignaciones basadas en distribución equitativa de excedentes 55
6.2. Clases de *mcstp* para los cuales las asignaciones basadas en distribución equitativa de excedentes cumplen Selección de núcleo 59

7. Comentarios finales **61**

Capítulo 1

Introducción

Consideremos la siguiente problemática. Un conjunto de agentes necesita acceder a una fuente común que proporciona un servicio. Cada agente tiene la opción de conectarse directamente a la fuente o mediante otros agentes. El objetivo principal del grupo es no solo reducir al mínimo el costo total requerido para establecer estas conexiones, sino también asegurar que este costo se comparta de manera que todos los participantes se beneficien.

Este desafío se conoce formalmente como el *problema de árbol de expansión de mínimo costo*. Resolver este problema implica identificar un conjunto óptimo de enlaces que conecten a todos los agentes con la fuente y desarrollar un método para distribuir el costo total entre los agentes involucrados.

El problema de árbol de expansión de mínimo costo es uno de los pilares fundamentales en la teoría de optimización y podría aplicarse en diversos contextos. Por ejemplo, en el diseño de redes de telecomunicaciones, puede utilizarse para determinar una distribución eficiente de cables de fibra óptica o torres de transmisión inalámbrica, minimizando los costos de infraestructura. En el sector energético, podría ser útil para planificar redes eléctricas y conectar plantas generadoras con comunidades de manera costo-efectiva. En logística y transporte, su aplicación permitiría optimizar la construcción de carreteras y la planificación de rutas de distribución de mercancías, reduciendo la inversión en infraestructura y mejorando la eficiencia del transporte. De manera similar, en sistemas de abastecimiento de agua potable o redes de gasoductos y oleoductos, este enfoque ayudaría a minimizar la inversión en tuberías y garantizar la conectividad entre centros de distribución y puntos de consumo. Finalmente, en la planificación de rutas de transporte público, optimizando la conectividad entre estaciones y reduciendo costos operativos.

Este problema resulta especialmente relevante en situaciones donde la eficiencia económica debe equilibrarse con la equidad en la asignación de costos. La cooperación entre agentes es fundamental en escenarios como la provisión de servicios compartidos y la planificación de infraestructura, donde un reparto inadecuado podría desalentar la participación o generar conflictos. Por ello, es indispensable desarrollar reglas de asignación que sean justas y aceptables para todas las partes involucradas.

A lo largo del tiempo, se han desarrollado distintos enfoques para abordar este problema, que pueden agruparse en cuatro grandes bloques:

1. **Construcción del árbol óptimo.**
   La literatura en cuanto al problema de árbol de expansión de mínimo costo comienza

con el diseño de algoritmos para la construcción de un árbol óptimo. Se pueden mencionar por ejemplo los artículos presentados por Borůvka [1926], Kruskal [1956] y Prim [1957]. Es importante notar estos algoritmos no siempre resultan en un único árbol óptimo. La posibilidad de múltiples árboles óptimos puede surgir debido a variaciones en los costos de conexión. En tales casos, los algoritmos pueden requerir un criterio de desempate adicional para seleccionar entre soluciones equivalentes en términos de costo.

Aunque estos estudios iniciales establecen métodos fundamentales para la identificación de árboles óptimos, en éstos no se trata la segunda parte del problema, es decir, la repartición del costo total entre los agentes. Este último aspecto ha sido abordado posteriormente en distintos marcos ampliando así el enfoque más allá de la construcción de un árbol óptimo.

2. **Reglas de asignación mediante enfoque directo.**
   Una vez que se ha construido el árbol óptimo, el siguiente paso es definir una regla de asignación de costos. Los primeros en abordar este aspecto fueron Claus and Kleitman [1973] donde se proponen algunas asignaciones basadas en contribuciones marginales o proporcionalidades. Bird [1976] introdujo la *regla de Bird*, que asigna a cada agente el costo de la conexión que lo vincula directamente a la red óptima de acuerdo al algoritmo de Prim. Posteriormente, Dutta and Kar [2004] definieron y caracterizaron la *regla de Dutta-Kar*, que distribuye los costos de manera secuencial, asegurando que cada agente pague en función del orden en que se integra a la red.

3. **Reglas de asignación con enfoque indirecto a través de juegos cooperativos.**
   Los trabajos dentro de este bloque, asocian a un problema de árbol de expansión de mínimo costo un juego cooperativo, cuyas soluciones clásicas como el valor de Shapley se emplean para definir reglas de asignación. Este enfoque permite capturar las conexiones entre los agentes de manera más completa, ofreciendo soluciones que trascienden las perspectivas individuales.
   Aunque no es el objetivo realizar un recuento completo de las contribuciones en esta área, se pueden destacar algunos de los trabajos más relevantes, éstos y otros se encuentran revisados a detalle en Bergantiños and Vidal-Puga [2020].

   - Bird [1976] asocia el juego cooperativo pesimista al problema y mostró que cierta restricción del valor de Shapley pertenece al núcleo y que, cuando el árbol óptimo es único, la regla de Bird coincide con dicho valor. El juego cooperativo pesimista supone que cada coalición de agentes asume el costo mínimo necesario para conectarse a la fuente sin beneficiarse de las conexiones que otros agentes fuera de la coalición ya hayan establecido. Es decir, este juego mide el costo de la coalición suponiendo un escenario donde los agentes no cooperan con los que no pertenecen a ella.
   - Kar [2002] Presentó una caracterización axiomática del valor de Shapley del juego cooperativo pesimista utilizando axiomas apropiados en el marco de los problemas de árbol de expansión de mínimo costo.
   - Bergantiños and Vidal-Puga [2007] propusieron el juego cooperativo optimista

y caracterizaron axiomáticamente el valor de Shapley de este juego con un solo axioma. El juego cooperativo optimista asociado a un problema de árbol de expansión de mínimo costo plantea que cada coalición de agentes asume que puede beneficiarse de las conexiones establecidas por los agentes fuera de la coalición. Es decir, la coalición supone que los nodos externos ya están conectados a la fuente y pueden conectarse a través de ellos sin costo alguno.

- Bogomolnaia and Moulin [2010] introdujeron el juego cooperativo público, en éste se supone el *no derecho a propiedad privada*, lo que quiere decir que cada coalición de agentes puede beneficiarse de las conexiones establecidas por los agentes fuera de la coalición siempre que pague por ellas.

4. **Reglas de asignación con enfoque indirecto a través de problemas de bancarrota.**
   Este enfoque es más reciente, consiste en asociar un problema de bancarrota al problema de árbol de expansión de mínimo costo y utilizar reglas clásicas de bancarrota para definir la asignación de costos. Estas reglas permiten incorporar nociones de equidad basadas en restricciones específicas y ofrecen una forma alternativa de analizar el reparto de costos. Giménez Gómez et al. [2014,2020,2022] hicieron aportaciones de este tipo que se detallarán en el capítulo 4.

En esta línea, esta tesis desarrolla nuevas reglas de asignación de costos para problemas de árbol de expansión de mínimo costo, utilizando un enfoque indirecto basado en problemas de bancarrota. Aunque esta conexión ha sido considerada previamente en la literatura, su estudio sigue siendo limitado. Hasta ahora, solo se han identificado las contribuciones de Driessen [1993] y Giménez Gómez et al. [2014, 2020, 2022], quienes han explorado distintas formas de asociar ambos problemas. Esta tesis amplía dicha línea de investigación al formalizar nuevos esquemas de asignación de costos basados en principios axiomáticos, con especial énfasis en la racionalidad individual y la estabilidad grupal, proporcionando un marco riguroso para su análisis y comparación dentro del contexto de los problemas de árbol de expansión de mínimo costo.
Con ello, se contribuye al desarrollo de reglas de asignación de costos fundamentadas en propiedades clave, aprovechando características de soluciones clásicas de problemas de bancarrota para la distribución de costos en problemas de árbol de expansión de mínimo costo.

El contenido de este trabajo está conformado como a continuación se describe. En el capítulo 2 se introduce formalmente el problema de árbol de expansión de mínimo costo y dos algoritmos clásicos utilizados para encontrar árboles óptimos, además de la definición de algunas soluciones clásicas y sus propiedades. En el capítulo 3 se definen los problemas de bancarrota, sus soluciones clásicas y axiomas fundamentales que éstas satisfacen. En el capítulo 4 se exponen las distintas asociaciones entre un problema de árbol de expansión de mínimo costo y un problema de bancarrota, incluidas en los trabajos de Giménez Gómez et al. [2014, 2020, 2022]. Se evalúan los axiomas que verifican dos asignaciones propuestas. Además se exploran propiedades heredadas por las soluciones de bancarrota y su impacto en las reglas de asignación. En el capítulo 5 se propone una clase específica de problemas con una regla de asignación que satisface racionalidad individual y ordenamiento por contribu-

ciones marginales. También se definen clases de problemas para los cuáles las asignaciones propuestas en el capítulo 4 satisfacen selección de núcleo, Finalmente en el capítulo 6 se exponen dos soluciones basadas en distribución equitativa de excedentes en el contexto de problemas de árbol de expansión de mínimo costo y se evalúan axiomáticamente.

Capítulo 2

Problema de árbol de expansión de mínimo costo (*mcstp*)

Consideremos un grupo de agentes situados en distintos lugares, cada uno requiere conectarse a una fuente común de servicios como agua potable, electricidad o internet. El objetivo principal es conectar a todos los agentes a esta fuente al menor costo posible, ya sea directamente o a través de otros agentes. Es esencial no solo minimizar el costo total para establecer estas conexiones, sino también determinar cómo distribuir dicho costo entre todos los agentes involucrados.

Este desafío técnico es conocido formalmente como el *problema de árbol de expansión de mínimo costo* (*Minimum Cost Spanning Tree Problem*), a partir de aquí *mcstp* por simplicidad. La solución a este problema requiere identificar un subconjunto de enlaces óptimo en términos de costo total y, a su vez, diseñar un método efectivo para la asignación de tal costo entre los agentes.

Este problema tiene aplicaciones prácticas en diversos campos, tales como el diseño de redes de telecomunicaciones, la planificación de rutas de transporte y la distribución de recursos. Su importancia radica en la necesidad de crear conexiones eficientes y económicas, que optimicen el uso de recursos y minimicen los costos operativos.

En este capítulo se introducirá formalmente el problema, se discutirá la estructura de la matriz de costos y se analizarán diferentes métodos para la distribución de costos entre los participantes de la red.

2.1. Definición del Problema

Sea $\mathcal{N} = \{1, 2, ...\}$ el conjunto de todos los posibles agentes. Dado un conjunto finito $N \subset \mathcal{N}$, estamos interesados en redes cuyos nodos son elementos de $N_0 = N \cup \{0\}$. Usualmente $N = \{1, 2, ..., n\}$.

Una *matriz de costo* $C = (c_{ij})_{i,j \in N_0}$ en N representa el costo de la conexión directa entre cada par de nodos. Las características de esta matriz son las siguientes:

- $c_{ii} = 0$

- $c_{ij} = c_{ji}$ para todo $i, j \in N_0$, lo cual indica que el costo de conectar i con j es el mismo que conectar j con i.
- $c_{ij} \geq 0$ para todo $i, j \in N_0$. Un costo negativo no tendría sentido en este contexto.

Se denotará al conjunto de todas las matrices de costo sobre N como $\mathcal{C}^N$.

Definición. *Un mcstp es un par* (N_0, C) *donde* $N \subset \mathcal{N}$, $N_0 = N \cup \{0\}$ *y* $C \in \mathcal{C}^N$.

Se denotará por $\mathcal{T}^N$ al conjunto de *mcstp* con $|N|$ agentes.
La resolución del problema se puede dividir en dos pasos principales:

1. **Encontrar la estructura de conexión óptima:** Se busca la configuración que minimice el costo total de conexión, asegurando que todos los agentes estén conectados directa o indirectamente a la fuente representada por el nodo 0.
2. **Repartir el costo total:** Una vez establecida la estructura óptima de conexión, se debe repartir de manera justa el costo total entre todos los agentes.

En el siguiente ejemplo se muestra la aplicación sencilla de los dos pasos anteriores.
Ejemplo 1. Consideremos $N = \{1, 2\}$ y la siguiente matriz de costos:

Matriz de costos

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 6 \\ 4 & 0 & 3 \\ 6 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Construcción de la estructura óptima.

- 1 se conecta a 0 con costo 4.
- 2 se conecta a 1 con costo 3.

Costo total: $4 + 3 = 7$.

Reparto del costo total.
Algunos posibles repartos son:

- 1 y 2 pagan 3.5.
- 1 paga 4 y 2 paga 3.
- 1 paga 7 y 2 paga 0.

Dado un *mcstp* (N_0, C), definimos el *mcstp* inducido por C para $S \subset N$ como (S_0, C).
Una *red* g sobre N_0 es un subconjunto de $\{(i, j) : i, j \in N_0\}$. Los elementos de g son llamados *arcos*.
Dada una red g y un par de nodos i y j, un *camino* de i a j en g es una secuencia de diferentes arcos $\{(i_{h-1}, i_h)\}_{h=1}^{l}$ tal que $(i_{h-1}, i_h) \in g$ para todo $h \in \{1, 2, ..., l\}, i = i_0$ y $j = i_l$.
Un *árbol* es una red tal que para todo $i \in N$ hay un único camino de i hacia la fuente.
Sea $\mathcal{G}^N$ el conjunto de todas las redes sobre N_0. Sea $\mathcal{G}_0^N$ el conjunto de todas las redes donde cada agente $i \in N$ está conectada a la fuente, es decir, existe un camino de i a 0 en la red.
Dado un *mcstp* (N_0, C) y $g \in \mathcal{G}^N$, definimos el *costo* asociado con g como

$$c(N_0, C, g) = \sum_{(i,j) \in g} c_{ij}.$$

Si no hay ambigüedad, dicho costo se denotará simplemente por $c(g)$.

Un árbol de expansión de costo mínimo (mt a partir de ahora) para (N_0, C), es un árbol t sobre N_0 tal que

$$c(t) = \text{mín}_{\mathrm{g} \in \mathcal{G}_0^{\mathrm{N}}} \mathrm{c}(\mathrm{g}).$$

Dado un *mcstp* (N_0, C), denotamos el costo asociado con cualquier mt en (N_0, C) como

$$m(N_0, C) = \text{mín}_{\mathrm{g} \in \mathcal{G}_0^{\mathrm{N}}} \mathrm{c}(\mathrm{g}).$$

2.2. Construcción del Árbol de Mínimo Costo

Existen diversos algoritmos para encontrar un mt, entre ellos están el algoritmo de Kruskal y el algoritmo de Prim. A continuación se presenta un resumen de ambos algoritmos:

2.2.1. Algoritmo de Kruskal

1. Ordenar todos los arcos (i, j) crecientemente de acuerdo a su costo c_{ij}.
2. Inicializar el árbol T como el conjunto vacío.
3. Agregar arcos a T en orden creciente respecto al costo, evitando la formación de ciclos.
4. Repetir el proceso hasta que T conecte todos los nodos de N_0.

2.2.2. Algoritmo de Prim

1. Inicializar T con un nodo arbitrario $i \in N_0$.
2. Encontrar el arco de menor costo que conecte un nodo en T con un nodo fuera de T.
3. Agregar ese arco y el nuevo nodo a T.
4. Repetir el proceso hasta que todos los nodos estén conectados.

Ambos algoritmos garantizan encontrar un mt que conecta todos los nodos de N con la fuente 0.

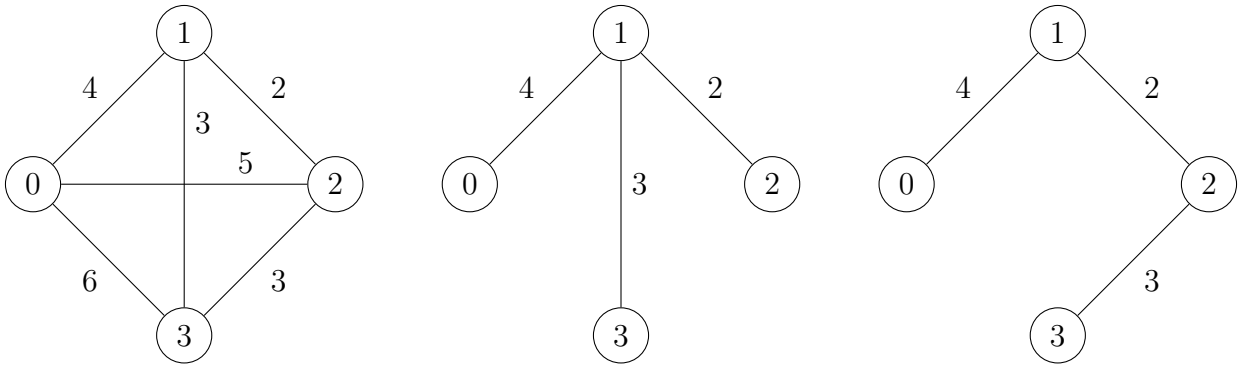
2.2.3. Ejemplo Ilustrativo

Ejemplo 2. Consideremos $N = \{1, 2, 3\}$ y la fuente 0. Los costos de conexión se representan en la siguiente matriz:

$$C = \begin{pmatrix} c_{00} & c_{01} & c_{02} & c_{03} \\ c_{01} & c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{02} & c_{12} & c_{22} & c_{23} \\ c_{03} & c_{13} & c_{23} & c_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 0 & 2 & 3 \\ 5 & 2 & 0 & 3 \\ 6 & 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

En este caso, el costo de conectar directamente al agente 1 con la fuente es 4, mientras que el costo de conexión del agente 2 es 5 y el del agente 3 es 6. El costo conjunto de conectar

a cada agente directamente con la fuente es 15. Sin embargo, al compartir conexiones, se puede reducir este costo. El costo mínimo de conexión es 9, el cual se alcanza realizando las conexiones $\{(0,1),(1,2),(1,3)\}$ o las conexiones $\{(0,1),(1,2),(2,3)\}$. En este ejemplo se puede observar que no siempre el *mt* es único. En la figura 2.1 se muestra visualmente la información del problema proporcionado por la matriz C, así como dos *mt*.



(a) Red completa sobre N_0. (b) *mt* del *mcstp* (N_0, C). (c) *mt* del *mcstp* (N_0, C).

Figura 2.1

El *mt* depende directamente de la matriz de costo C. Cualquier cambio en los elementos de esta matriz puede alterar la estructura del árbol y su costo total. Por ello, la matriz de costos contiene toda la información necesaria para determinar tanto la estructura óptima de conexión como las posibles distribuciones de costos entre los agentes.

2.3. Reglas de asignación de costos y propiedades

El costo total $m(N_0, C)$ del *mt* debe ser repartido entre los agentes de manera que se reflejen los beneficios individuales de participar en la red. Un reparto inadecuado puede generar conflictos entre los agentes y desalentar la cooperación. Algunas de las razones principales para definir un esquema de reparto son:

- **Evitar injusticias:** Sin un esquema de reparto claro, algunos agentes podrían terminar pagando más de lo que les corresponde, mientras que otros se benefician desproporcionadamente.
- **Fomentar la cooperación:** Un reparto justo incentiva a todos los agentes a participar en la red y compartir sus recursos, lo cual es esencial para mantener la eficiencia del sistema.

Una vez que se ha construido el *mt* para conectar a todos los agentes con la fuente, surge la cuestión de cómo repartir de manera justa el costo total del árbol entre todos los participantes.

Definición. *Una regla de asignación de costos es una función* $\psi : \mathcal{T}^N \to \mathbb{R}^n$ *tal que*

$$\sum_{i \in N} \psi_i(N_0, C) = m(N_0, C)$$

para todo $(N_0, C) \in \mathcal{T}^N$. *Donde* $\psi_i(N_0, C)$ *representa el costo asignado al agente* i.

2.3.1. Propiedades de una regla de asignación de costos

A continuación se mencionan algunos de los axiomas o propiedades más relevantes definidas por Bergantiños and Vidal-Puga [2008] para evaluar la calidad de una asignación de costos. Dada una regla de asignación ψ consideremos los siguientes axiomas:

Axioma de Selección de núcleo (CS) *Para todo* $(N_0, C) \in \mathcal{T}^N$ *y para cualquier* $S \subseteq N$, *se cumple que:*

$$\sum_{i \in S} \psi_i(N_0, C) \leq m(S_0, C).$$

Este axioma implica que ningún grupo de agentes estaría mejor si construyeran su propia red en lugar de pagar lo que la solución ψ les propone a cada uno de ellos.

Axioma de Racionalidad individual (IR) *Para todo* $(N_0, C) \in \mathcal{T}^N$ *y para todo* $i \in N$ *se cumple que:*

$$\psi_i(N_0, C) \leq c_{0i}.$$

Esto implica, que al cooperar ningún agente paga más de lo que pagaría al conectarse directamente a la fuente.

Axioma de Monotonía de costos (CM) *Para todo* $(N_0, C), (N_0, C') \in \mathcal{T}^N$ *tales que* $c_{ij} < c'_{ij}$ *para algunos* $i \in N$ *y* $j \in N_0$ *y, en caso contrario,* $c_{kl} = c'_{kl}$, *se cumple que:*

$$\psi_i(N_0, C) \leq \psi_i(N_0, C').$$

Este axioma indica que si el costo de conexión de un agente específico aumenta, entonces el costo que este agente debe pagar no puede disminuir.

Dadas dos matrices $C = (c_{ij})$ y $C' = (c'_{ij})$ de tamaño $n \times n$, se dice que $C \leq C'$ si $c_{ij} \leq c'_{ij}$ para todo i, j.

Axioma de Solidaridad (SOL) *Para todo* $(N_0, C), (N_0, C') \in \mathcal{T}^N$, *si* $C \leq C'$, *entonces*

$$\psi(N_0, C) \leq \psi(N_0, C').$$

Este axioma sugiere que, si los costos de conexión aumentan para algunos agentes, la contribución total de todos los agentes también debe aumentar o permanecer igual.

Axioma de Monotonía de la población (PM) *Para todo* $(N_0, C) \in \mathcal{T}^N$, $S \subseteq N$ *y* $i \in S$, *se cumple que:*

$$\psi_i(N_0, C) \leq \psi_i(S_0, C).$$

Esto es, si se añaden nuevos agentes a la red, ningún agente inicial debe quedar en una peor situación que antes de la llegada de los nuevos agentes.

Axioma de Continuidad (CON) *Para todo* $N \subset \mathcal{N}$, *la función* $\psi(N_0, \cdot)$ *es continua respecto a* C.

Esto significa que pequeños cambios en los costos de conexión no deben causar grandes variaciones en los pagos que cada agente debe realizar.

Axioma de Positividad (POS) *Para todo* $(N_0, C) \in \mathcal{T}^N$ *y todo* $i \in N$*, se cumple que:*

$$\psi_i(N_0, C) \geq 0.$$

Esto es, los agentes no deben obtener beneficios a partir de su participación en la red. Es decir, no deben recibir un pago negativo.

Axioma de Separabilidad (SEP) *Para todo* $(N_0, C) \in \mathcal{T}^N$ *y* $S \subset N$ *tal que* $m(N_0, C) = m(S_0, C) + m((N \setminus S)_0, C)$*, se tiene que:*

$$\psi_i(N_0, C) = \begin{cases} \psi_i(S_0, C) & \text{si } i \in S, \\ \psi_i((N \setminus S)_0, C) & \text{si } i \in N \setminus S. \end{cases}$$

Esto significa que si dos subconjuntos de agentes pueden conectarse independientemente sin ahorrar costos, la cantidad que debe pagar cada agente es la misma que si se conectan juntos.

Axioma de Simetría (SYM) *Para todo* $(N_0, C) \in \mathcal{T}^N$ *y todo par de agentes simétricos* $i, j \in N$*, se cumple que:*

$$\psi_i(N_0, C) = \psi_j(N_0, C).$$

Dos agentes son simétricos si tienen los mismos costos de conexión con todos los demás agentes y con la fuente.

Axioma Independencia de otros costos (IOC) *Para todo* $(N_0, C), (N_0, C') \in \mathcal{T}^N$ *y todo* $i \in N$*, si* $c_{ij} = c'_{ij}$ *para todo* $j \in N_0 \setminus \{i\}$*, entonces*

$$\psi_i(N_0, C) = \psi_i(N_0, C').$$

Dicho de otro modo, el pago de un agente depende únicamente de los costos de conexión en los que él mismo participa, y no de los costos de conexiones entre otros agentes.

Axioma de Reparto igualitario de costos extras (ESEC) *Para todo* $(N_0, C), (N_0, C') \in \mathcal{T}^N$ *tales que* $c_0, c'_0 \geq 0$ *con* $c_{0i} = c_0$ *y* $c'_{0i} = c'_0$ *para todo* $i \in N$*,* $c_0 < c'_0$ *y* $c_{ij} = c'_{ij} < c_0$ *para todo* $i, j \in N$*, se cumple que:*

$$\psi_i(N_0, C') = \psi_i(N_0, C) + \frac{c'_0 - c_0}{n}.$$

Concretamente cuando el costo de conexión a la fuente aumenta para todos los agentes de manera uniforme, el incremento en el costo total se reparte equitativamente entre todos.

Dos *mcstp* (N_0, C) y (N_0, C') son *árbol equivalentes* si existe un árbol m tal que es un *mt* para ambos problemas y además $c_{im(i)} = c'_{im(i)}$ para todo $i \in N$, donde $m(i)$ es el agente (o fuente) a quien i está conectado en su camino hacia la fuente.

Axioma de Independencia de árboles irrelevantes (IIT) *Para todo par de problemas* $(N_0, C), (N_0, C') \in \mathcal{T}^N$ *árbol equivalentes se cumple:*

$$\psi(N_0, C) = \psi(N_0, C').$$

Esto significa que la asignación de costos depende únicamente de la estructura mínima de costos que conecta a los agentes con la fuente, y no de árboles de costo superior.

2.4. Algunas asignaciones clásicas

A continuación describimos cuatro asiganciones clásicas para los *mcstp*: la **regla de Bird**, la **regla de Dutta-Kar**, la **solución serial** y la **regla de Kar**. Estas reglas distribuyen los costos de manera diferente y cumplen diversas propiedades deseables en el contexto de *mcstp*.

2.4.1. La regla de Bird

La **regla de Bird** fue introducida por Bird [1976] y se define a partir del algoritmo de Prim. La idea básica es que los agentes se conectan a la fuente de manera secuencial siguiendo el algoritmo de Prim, y cada agente paga el costo de la conexión que utiliza para conectarse al servicio. Asumiendo que existe un único *mt, t*, formalmente, la regla de asignación de Bird del agente i se define como

$$B_i(N_0, C) = c_{i_0 i},$$

donde i_0 es el primer nodo en el único camino en t de i a la fuente.

2.4.2. La regla de Dutta-Kar

La **regla de Dutta-Kar** definida por Dutta and Kar [2004] es una versión más elaborada que también se basa en el algoritmo de Prim. Nuevamente, asumimos que existe un único *mt, t* y que el orden de conexión de los agentes es $1, 2, \ldots, n$, deacuerdo al algoritmo de Prim. Primero el agente 1 se conecta a la fuente. Definimos $p^1 = c_{01}$. Ahora el agente 2 se conecta a 2^0 donde $c_{2^0 2} = min\{c_{02}, c_{12}\}$. Tomamos $x_1 = min\{p^1, c_{2^0 2}\}$ y $p^2 = max\{p^1, c_{2^0 2}\}$. Ahora el agente 3 se conecta a 3^0 donde $c_{3^0 3} = min\{c_{03}, c_{13}, c_{23}\}$. Tomamos $x_2 = min\{p^2, c_{3^0 3}\}$ y $p^3 = max\{p^2, c_{3^0 3}\}$. El proceso continúa hasta que llegamos al agente n. En cuyo caso $x_n = p^n$. Entonces la asignación final está dada por x, es decir

$$DK_i(N_0, C) = x_i$$

para todo $i \in N$.

2.4.3. Solución serial

La **solución serial** para *mcstp* se enfoca en asignar el costo del árbol secuencialmente según el *mt* construido repartiendo los costos de las aristas de manera equitativa entre los agentes que las utilizan. Suponiendo la unicidad del *mt*, el costo de cada arista se reparte entre los agentes que dependen de ella para estar conectados.

La asignación para cada agente se calcula de la siguiente manera:

$$S_k(N_0, C) = \sum_{(i,j) \in P(k)} \frac{c_{ij}}{n_{ij}}$$

donde:

- $P(k)$ es el conjunto de aristas que forman el camino que conecta al agente k con la fuente dentro del árbol.

- n_{ij} es el número de agentes en $k' \in N$ para los cuales $(i,j) \in P(k')$.

Este enfoque garantiza que cada agente pague en proporción al uso que hace de la red, reflejando la "longitud"de su camino hacia la fuente.

Ahora supongamos que existe más de un *mt*. En este caso, las tres reglas anteriores pueden definirse como un promedio sobre los árboles asociados al algoritmo de Prim.

Sea Π_N el conjunto de todas las permutaciones del conjunto N, para cada $\pi \in \Pi_N$ Dutta and Kar [2004] definen $B^\pi(N_0, C)$ como la asignación de Bird donde se resuelven las indiferencias entre agentes seleccionando el primer agente dado por π. Entonces

$$B(N_0, C) = \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in \Pi_N} B^\pi(N_0, C).$$

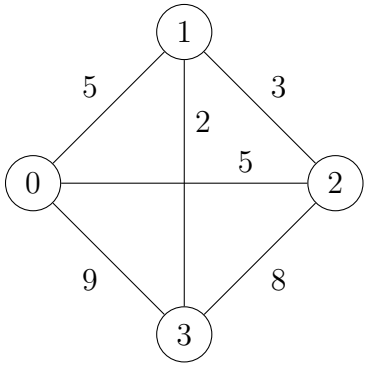
Y de manera similar:

$$DK(N_0, C) = \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in \Pi_N} DK^\pi(N_0, C).$$

Mientras que la solución serial se calculará como un promedio de las soluciones seriales tomando en cuenta todos los *mt*.
Estas soluciones garantizan que la variabilidad en la estructura del árbol no afecte injustamente a ningún agente, ya que todos los posibles árboles se consideran en el reparto.

Ejemplo 3. Consideremos el problema (N_0, C) con C definida a continuación, calcularemos las asignaciones dadas por las reglas de Bird, Dutta Kar y Serial.

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 5 & 9 \\ 5 & 0 & 3 & 2 \\ 5 & 3 & 0 & 8 \\ 9 & 2 & 8 & 0 \end{pmatrix}$$



Para este caso, hay dos *mt*

- $t_1 = \{(0,1),(1,2),(1,3)\}$
- $t_2 = \{(0,2),(1,2),(1,3)\}$

Según los órdenes π distintos, las asignaciones son:

π	$B^\pi(N_0, C)$	$DK^\pi(N_0, C)$
(1,2,3)	(5,3,2)	(2,5,3)
(1,3,2)	(5,3,2)	(2,5,3)
(2,1,3)	(3,5,2)	(2,3,5)
(2,3,1)	(3,5,2)	(2,3,5)
(3,1,2)	(5,3,2)	(2,5,3)
(3,2,1)	(3,5,2)	(2,3,5)

Como resultado, las asignaciones finales son:

$$B(N_0, C) = (4, 4, 2)$$

$$DK(N_0, C) = (2, 4, 4)$$

$$\begin{aligned} S(N_0, C) &= \frac{1}{2}\left(\left(\frac{5}{3}, \frac{5}{3} + 3, \frac{5}{3} + 2\right) + \left(\frac{5}{3} + \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{5}{3} + \frac{3}{2} + 2\right)\right) \\ &= \left(\frac{29}{12}, \frac{38}{12}, \frac{53}{12}\right) \end{aligned}$$

2.4.4. La regla de Kar

El enfoque de Teoría de Juegos también ha sido utilizado para definir reglas de asignación, en el cual se emplean juegos cooperativos en forma de función característica.

Un juego en forma de función característica es un modelo matemático en el que un conjunto de jugadores N puede formar coaliciones para obtener beneficios. Cada coalición $S \subseteq N$ se asocia con un valor característico $v(S)$, que indica el beneficio total que la coalición puede alcanzar actuando en conjunto. Formalmente, un juego en forma de función característica es un par (N, v) donde $N = \{1, 2, 3, ..., n\}$ es un conjunto finito de jugadores y v es una función $v : 2^N \to \mathbb{R}$ tal que $v(\emptyset) = 0$.

El valor de Shapley [1953] es una solución pionera y axiomática para juegos cooperativos que asigna a cada jugador $i \in N$ una parte del valor total $v(N)$, basada en su contribución marginal esperada al valor de las coaliciones en las que participa. Formalmente, para cada jugador $i \in N$, su asignación $Sh_i(N, v)$ se calcula como:

$$Sh_i(N, v) = \sum_{S \subseteq N \setminus \{i\}} \frac{|S|!(n - |S| - 1)!}{n!}(v(S \cup \{i\}) - v(S))$$

Bird [1976] asoció un juego (N, v_C) a cada *mcstp* (N_0, C) considerando que el valor de una coalición $S \subseteq N$ se define como el costo mínimo necesario para conectar todos los nodos de S al nodo fuente 0, asumiendo que los nodos en $N \setminus S$ no están disponibles para reducir costos. Formalmente:

$$v_C(S) = m(S_0, C) \quad \text{para todo } S \subseteq N.$$

Este juego asociado es conocido como *juego pesimista*.

La **solución de Kar**[2002] se define como el valor de Shapley del juego pesimista asociado:

$$K(N_0, C) = Sh(N, v_C).$$

Ejemplo 3 (continuación) Si consideramos el *mcstp* (N_0, C) del ejemplo 3. El juego pesimista está definido en el siguiente cuadro.

S	$v_C(S)$
$\emptyset$	0
$\{1\}$	5
$\{2\}$	5
$\{3\}$	9
$\{1,2\}$	8
$\{1,3\}$	7
$\{2,3\}$	13
$\{1,2,3\}$	10

Cuadro 2.1: Juego pesimista del ejemplo 3.

La solución de Kar resulta:

$$K_1(N_0, C) = \frac{5}{6}$$

$$K_2(N_0, C) = \frac{23}{6}$$

$$K_3(N_0, C) = \frac{32}{6}.$$

2.4.5. Propiedades de las asignaciones clásicas

A continuación, se presenta una tabla comparativa con los axiomas que cumplen o no las reglas de Bird, Dutta-Kar, Serial y Kar.

Axioma	$B(N_0, C)$	$DK(N_0, C)$	$S(N_0, C)$	$K(N_0, C)$
CS	Sí	Sí	No	No
CM	No	Sí	No	Sí
SOL	No	No	No	No
PM	No	No	No	No
CON	No	No	No	Sí
POS	Sí	Sí	Sí	No
SEP	No	No	No	No
SYM	Sí	Sí	No	Sí
ESEC	Sí	No	Sí	Sí
IIT	No	No	No	No

Cuadro 2.2: Axiomas de las reglas Bird, Dutta-Kar, Serial y Kar.

Capítulo 3

Problemas de Bancarrota

Dado que los problemas de bancarrota son un elemento fundamental en esta tesis, este capítulo se dedica a su estudio en detalle. Se presentan las definiciones formales, las principales soluciones propuestas en la literatura y las propiedades que estas satisfacen. El objetivo es proporcionar una base teórica sólida que permita comprender cómo estas soluciones pueden aplicarse en distintos contextos y especialmente en relación con los *mcstp*.

Los problemas de bancarrota surgen cuando los recursos disponibles no son suficientes para satisfacer las demandas de todos los participantes. Este tipo de problemas son comunes en situaciones como la distribución de una herencia entre herederos o cuando una empresa en quiebra debe pagar a sus acreedores pero el monto disponible es insuficiente para cubrir todas las deudas. En este contexto, es necesario establecer reglas que determinen cómo repartir los recursos de manera justa. Además de su importancia práctica, los problemas de bancarrota proporcionan un marco teórico sólido para analizar problemas de distribución bajo restricciones, lo que los hace relevantes en diversas áreas de la economía. Gran parte del contenido de este capítulo está basado en el trabajo de revisión de Thomson [2003], y se enfoca en las soluciones clásicas y las propiedades fundamentales que estas satisfacen.

3.1. Definición formal del Problema de Bancarrota

Un problema de bancarrota se define formalmente como una terna (N, E, c), donde:

- $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ es el conjunto de agentes o participantes que tienen derecho a recibir una parte de los recursos.
- $E \geq 0$ es el total de recursos disponibles para repartir, denominado "estado".
- $d = (d_1, d_2, \ldots, d_n)$ es el vector de demandas, donde cada $d_i \geq 0$ representa la cantidad que el agente i reclama.

El objetivo es encontrar una asignación $R = (R_1, R_2, \ldots, R_n)$ tal que:

$$\sum_{i \in N} R_i = E \quad \text{y} \quad 0 \leq R_i \leq d_i \quad \text{para todo } i \in N.$$

Una solución debe distribuir el recurso disponible E de manera que ningún agente reciba más de lo que reclama y la suma de las asignaciones sea exactamente E.

3.2. Soluciones clásicas

Regla igualitaria

La regla igualitaria distribuye el estado en partes iguales entre todos los agentes, sin considerar sus demandas individuales.

$$R_i = \frac{E}{|N|}.$$

Sin embargo, este reparto no representa una solución formal a un problema de bancarrota, ya que puede ocurrir que algunos agentes reciban una cantidad mayor a su demanda, lo que contradice la restricción fundamental de que ningún agente puede recibir más de lo que reclama. A pesar de esta limitación, la regla igualitaria es un criterio de referencia útil en la distribución de recursos y puede ser utilizada en contextos donde no se imponga esta restricción.

Por otra parte, existen soluciones clásicas ampliamente estudiadas y utilizadas para abordar problemas de bancarrota. A continuación se describirán brevemente las más conocidas.

Solución Proporcional

La solución proporcional asigna a cada agente una cantidad proporcional a su demanda. Formalmente, la asignación R_i para cada agente i se calcula como:

$$R_i = \frac{d_i}{\sum_{j \in N} d_j} \cdot E.$$

Esta regla asegura que cada agente recibe una parte de los recursos disponibles que es proporcional a su demanda relativa.

Solución CEA (Constrained Equal Awards)

La regla CEA (Premios Iguales Restringidos) asigna parte del recurso a cada agente tanto como sea posible de manera equitativa, hasta que su demanda se satisfaga. Formalmente, se define un valor común λ tal que:

$$R_i = \text{mín}\{d_i, \lambda\} \quad \text{para todo } i \in N,$$

donde λ se elige de manera que $\sum_{i \in N} \text{mín}\{d_i, \lambda\} = E$. Todos los agentes reciben un monto igual hasta que su demanda se satisface por completo.

Solución CEL (Constrained Equal Losses)

La regla CEL (Pérdidas Iguales Restringidas) distribuye las pérdidas de manera equitativa. Se reduce una cantidad igual a cada demanda hasta que los recursos se agotan o alguna demanda se reduce a cero. La asignación se define como:

$$R_i = \text{máx}\{0, d_i - \mu\} \quad \text{para todo } i \in N,$$

donde μ se elige de manera que $\sum_{i \in N} \text{máx}\{0, d_i - \mu\} = E$. La pérdida total se reparte de manera equitativa entre los agentes, respetando que ninguna asignación sea negativa.

Solución Talmud

La solución Talmud combina los enfoques de premios y pérdidas igualitarios. Primero, divide los recursos disponibles en dos partes: $E/2$. Luego, la primera mitad se reparte según la regla CEA y la segunda mitad según la regla CEL. Formalmente:

$$T(E,d) = \begin{cases} CEA\left(E, \frac{\mathbf{d}}{2}\right) & \text{si } E \leq \frac{\sum_{i=0}^{n} d_i}{2}, \\ \frac{\mathbf{d}}{2} + CEL\left(E - \frac{\sum_{i=0}^{n} d_i}{2}, \frac{\mathbf{d}}{2}\right) & \text{si } E \geq \frac{\sum_{i=0}^{n} d_i}{2} \end{cases}$$

La solución Talmud busca equilibrar tanto los premios como las pérdidas, brindando una distribución equitativa basada en las demandas individuales.

Ejemplo 4. Un propietario, dueño de una finca de 100 hectáreas, decide repartir su terreno entre sus tres hijos mediante un testamento. En su plan original, asigna 20 hectáreas al hijo mayor, quien ya tiene su vida resuelta; 30 hectáreas al segundo hijo, que también tiene una vida estable pero una familia más numerosa; y 50 hectáreas al hijo menor, cuyo futuro es más incierto. Sin embargo, un año después, el ayuntamiento expropia parte de la finca, reduciendo su extensión total a 80 hectáreas. Antes de que el propietario pueda modificar el testamento para ajustar la distribución de la propiedad, fallece. Esto plantea el problema de cómo dividir las 80 hectáreas entre los tres herederos, quienes reclaman 20, 30 y 50 hectáreas, respectivamente.
El problema de bancarrota (E, d) que modela esta situación es tal que $E = 80$ y las demandas son $d_1 = 20$, $d_2 = 30$ y $d_3 = 50$. Así, tenemos:

$$Prop(E,d) = Prop(80,(20,30,50)) = (16,24,40),$$
$$CEA(E,d) = CEA(80,(20,30,50)) = (20,30,30),$$
$$CEL(E,d) = CEL(80,(20,30,50)) = (\frac{40}{3}, \frac{70}{3}, \frac{130}{3}),$$
$$T(E,d) = T(80,(20,30,50)) = (\frac{40}{3}, \frac{70}{3}, \frac{130}{3}).$$

3.3. Propiedades de las soluciones clásicas

De las condiciones para las soluciones descritas en 3.1, se incluyen las propiedades básicas de *eficiencia, no negatividad y límite superior*. La siguiente propiedad es consecuencia de las tres anteriores, por lo que también será considerada como propiedad básica.
Derecho mínimo: Cada agente debe recibir al menos la diferencia entre el total disponible y la suma de las demandas de los demás, si es positivo. Es decir:

$$R_i(E,d) \geq \text{máx}\left\{E - \sum_{j \neq i} d_j, 0\right\}.$$

A continuación se enuncian algunas otras propiedades o axiomas de las soluciones del problema de bancarrota. Dada una solución R para problemas de bancarrota, consideremos los siguientes axiomas:
Axioma de Aseguramiento *Para todo (E,d) y para todo $i \in N$ se verifica que*

$$R_i(E,d) \geq \frac{1}{n} \text{mín}\{d_i, E\}.$$

Dicho de otra forma, cada agente tiene garantizado recibir al menos una cierta cantidad, independientemente de las demandas de los demás. Si su demanda es mayor que el total disponible, recibirá al menos E/n. Si es menor, recibirá al menos d_i/n.

Axioma de Independencia de escala *Para todo* (E, d) *y para todo* $\lambda > 0$,

$$R(\lambda E, \lambda d) = \lambda R(E, d).$$

En palabras, si se multiplican tanto la cantidad a repartir como las demandas por una constante positiva, las asignaciones también se multiplican por esa constante.

Axioma de Autodualidad *Para todo* (E, d) *se tiene:*

$$R(E, d) = d - R(D - E, d).$$

Axioma de Igualdad de trato *Para todo* (E, d), *si* $d_i = d_j$, *entonces*

$$R_i(E, d) = R_j(E, d).$$

Los agentes con las mismas demandas deben recibir la misma asignación.

Axioma de Anonimato *Para todo* (E, d), *toda permutación* π *de los agentes y todo* $i \in N$:

$$R_{\pi(i)}(E, d_{\pi(i)}) = R_i(E, d).$$

Las asignaciones dependen solo de las demandas y no de la identidad de los agentes.

Axioma de Preservación de orden *Para todo* (E, d), *si* $d_i \geq d_j$, *entonces*

$$R_i(E, d) \geq R_j(E, d) \quad y \quad d_i - R_i(E, d) \geq c_j - R_j(E, d).$$

Esto asegura una relación coherente entre las asignaciones y las demandas de los agentes, garantizando que los agentes con demandas más altas no recibirán menos que aquellos con demandas más bajas.

Axioma de Compensación completa *Para todo* (E, d), *si* $\sum_{j \in N} mín\{d_j, d_i\} \leq E$, *entonces* $R_i(E, d) = d_i$.

Un agente recibe todo lo que demanda si su demanda es sostenible.

Axioma de Exención *Para todo* (E, d) *y para todo* $i \in N$ *tal que* $d_i \leq \frac{E}{n}$ *se verifica que* $R_i(E, d) = d_i$.

Axioma de Compensación nula *Para todo* (E, d) *y para todo* $i \in N$ *tal que*

$$(E, (máx\{0, d_1 - d_i\}, ..., máx\{0, d_n - d_i\})),$$

se tiene que $R_i(E, d) = 0$.

Nos referimos al axioma de Compensación nula cuando se decide no asignar nada a los agentes con demandas demasiado pequeñas o residuales.

Axioma de Exclusión *Para todo* (E, d) *y* $i \in N$, *si* $d_i \leq \frac{D-E}{n}$, *entonces* $R_i(E, d) = 0$.

Si la demanda de un agente es más pequeña que la pérdida media, no se tomará en cuenta.

Axioma de Composición hacia arriba *Para todo par de problemas de bancarrota* (E, d), (E', d) *si* $E' > E$, *entonces*

$$R(E', d) = R(E, d) + R(E' - E, d - R(E, d)).$$

Si inicialmente se sobreestima el recurso disponible ($E' > E$) la regla debe ajustar las demandas y repartir la diferencia de la misma manera.

Axioma de Composición hacia abajo *Para todo par de problemas de bancarrota* (E, d), (E', d) *si* $E' < E$, *se tiene que*

$$R(E', d) = R(E', R(E, d)).$$

Axioma de Consistencia *Para todo* (E, d), $S \subseteq N$ *y para todo* $i \in N \setminus S$ *se cumple que:*

$$R_i(N, E, d) = R_i(N \setminus S, E - \sum_{j \in S} R_j(E, d), (d_j)_{j \in N \setminus S}).$$

Este axioma asegura que si algunos agentes se retiran con sus asignaciones iniciales, el problema restante con los agentes restantes debe ser resuelto de manera coherente. Esto significa que los agentes que se quedan deben recibir las mismas asignaciones que habrían recibido si solo hubieran estado ellos desde el principio.

En la literatura, varios autores han demostrado que diferentes combinaciones de axiomas caracterizan las soluciones clásicas:

La regla proporcional es la única que satisface las propiedades indicadas por:

- Young [1988]: Igualdad de trato, Composición hacia arriba y Autodualidad.
- Herrero and Villar [2001]: Igualdad de trato, Composición hacia abajo y Autodualidad.

La regla CEA se distingue por cumplir con los siguientes axiomas:

- Dagan [1996]: Igualdad de trato, Invarianza bajo truncaciones y Composición hacia arriba.
- Herrero and Villar [2002]: Compensación completa y Composición hacia abajo.
- Yeh [2001]: Compensación completa y Monotonía de demandas.
- Yeh [2008]: Aseguramiento, Composición hacia arriba y Consistencia.
- Herrero and Villar [2001]: Consistencia, Exención y Composición hacia abajo.

La regla CEL es única en cumplir con:

- Herrero and Villar [2002]: Compensación nula y Composición hacia arriba.
- Herrero and Villar [2001]: Consistencia, Exclusión y Composición hacia arriba.

La regla del Talmud es la única que verifica los axiomas de:

- Herrero and Villar [2001]: Consistencia, Autodualidad e Invarianza bajo truncamiento.

A continuación se muestra una tabla con las propiedades que cumplen las reglas clásicas de reparto en problemas de bancarrota:

Axioma	Proporcional	CEA	CEL	Talmud
Aseguramiento	No	Sí	No	Sí
Independencia de escala	Sí	Sí	Sí	Sí
Autodualidad	Sí	No	No	Sí
Trato igualitario	Sí	Sí	Sí	Sí
Anonimato	Sí	Sí	Sí	Sí
Preservación del orden	Sí	Sí	Sí	Sí
Compensación completa	No	Sí	No	No
Compensación nula	No	No	Sí	No
Composición hacia abajo	Sí	Sí	Sí	No
Composición hacia arriba	Sí	Sí	Sí	No
Consistencia	Sí	Sí	Sí	Sí

Cuadro 3.1: Axiomas que caracterizan a las reglas clásicas de reparto.

Después de haber definido las propiedades clásicas que caracterizan las soluciones a los problemas de bancarrota, es necesario introducir algunos axiomas más generales que serán útiles cuando traslademos nuevamente el problema de bancarrota al contexto original de un *mcstp*. Estos axiomas ayudan a garantizar que la solución resultante sea coherente en algunos sentidos con la estructura del *mcstp*, donde los agentes deben conectarse a una red minimizando los costos totales.
Sea R una solución para problemas de bancarrota, consideremos los axiomas siguientes:

Axioma de Monotonía de recursos *Para todo par de problemas de bancarrota* (E, d), (E', d) *y para todo* $i \in N$, *si* $\sum d_i \geq E' > E$, *entonces:*

$$R_i(E', d) \geq R_i(E, d).$$

Esto garantiza que el aumento del recurso disponible se traduzca en una asignación mayor o igual para todos los agentes.

Axioma de Monotonía de demandas *Para todo par de problemas de bancarrota* (E, d), (E, d') *y para todo* $i \in N$, *si* $d'_i > d_i$ *y* $d_j = d'_j$ *para todo* $j \neq i$, *entonces*

$$R_i(E, d') = R_i(E, (d_1, \ldots, d'_i, \ldots, d_n)) \geq R_i(E, d).$$

Con este axioma se establece que, si la demanda de un agente aumenta mientras las demandas de los demás permanecen constantes, el agente cuya demanda ha aumentado no debe recibir menos que antes.

Las cuatro reglas mencionadas cumplen con monotonía de demandas y monotonía de recursos.

Axioma de Invarianza bajo truncamiento *Para todo* (E, d),

$$R(E, d) = R(E, (\text{mín}\{d_i, E\})_{i \in N}),$$

Esto asegura que si las demandas de algunos agentes exceden el recurso total disponible, la asignación no debe depender de la parte de la demanda que supera el recurso disponible. Este axioma se cumple por las reglas CEA y Talmud; no se cumple por las reglas Proporcional y CEL.

Los problemas de bancarrota no solo son relevantes en sí mismos, sino que también permiten utilizar los axiomas que satisfacen sus soluciones clásicas como base para derivar propiedades en soluciones de otros problemas asociados, como los *mcstp*. En esta tesis, este enfoque será empleado para proponer reglas de asignación de costos, aprovechando las características de equidad inherentes a las soluciones de problemas de bancarrota.

Capítulo 4

Asignaciones de costos basadas en problemas de bancarrota

En este capítulo, se define una relación entre problemas de bancarrota y *mcstp*. Esta conexión se basa en la capacidad que poseen los problemas de bancarrota para modelar situaciones donde los recursos son limitados y deben asignarse entre agentes con demandas específicas. En lo que sigue de este capítulo se explora cómo asociar un problema de bancarrota a un *mcstp*, y se analizan las reglas de reparto resultantes en relación con axiomas clave.

Hasta donde se sabe, únicamente los trabajos de Driessen [1993] y Giménez Gómez et al. [2014, 2020, 2022] ligan ambos tipos de problemas. Driessen convierte un problema de bancarrota en un *mcstp*; Giménez-Gómez et al. proponen distintos modelos que transforman un *mcstp* en un problema de bancarrota y principalmente exploran si las asignaciones propuestas satisfacen cierta *selección de núcleo.*

En Giménez Gómez et al. [2014] se proponen dos enfoques, el optimista y el pesimista. De ellos surgen dos asignaciones.

- $(\alpha_O^\Phi)_i(N_0, C) = c_{i^*} + \Phi_i(E_O, r)$
- $(\alpha_P^\Phi)_i(N_0, C) = c_{i0} - \Phi_i(E_P, r)$

Donde $c_{i^*} = \text{mín}\{c_{ik} : k \in N_0\}$, $C^{\text{mín}} = \sum_i^n c_{i^*}$, $E_O = m(N_0, C) - C^{\text{mín}}$, $C_0 = \sum_i^n c_{i0}$, $E_P = C_0 - m(N_0, C)$. Adicionalmente r es un vector de demandas para el problema de bancarrota correspondiente y Φ es cualquier solución a dicho problema.

α_O^Φ es la asignación correspondiente al enfoque optimista: se asume que cada agente tiene esperanza en que la conexión más barata que lo involucra sea parte del *mt*, así que paga inicialmente dicho monto c_{i^*}. La suma de las aportaciones iniciales $C^{\text{mín}}$ por lo general no es suficiente para construir el *mt*, así que el recurso faltante E_O debe repartirse como un costo extra que cada agente debe asumir.

La asignación α_P^Φ corresponde al enfoque pesimista: se supone que cada agente es racional y paga inicialmente lo máximo que está dispuesto a pagar c_{i0}. La suma de estas aportaciones por lo general excede $m(N_0, C)$, por lo que el recurso sobrante E_P se reparte como un reembolso para cada agente.

Para el caso particular $s \equiv c_{i0} - c_{i^*}$ las asignaciones $(\alpha_O^\Phi)_i(N_0, C) = c_{i^*} + \Phi_i(E_O, s)$ y $(\alpha_P^\Phi)_i(N_0, C) = c_{i0} - \Phi_i(E_P, s)$ en general no cumplen *CS*, pero siempre cumplen con *POS* y *SYM* cuando Φ cumple con *Igualdad de trato*. Estos tres axiomas son los únicos mencionados en el trabajo citado.

Sean

$$c_{i0}^* = \min_{P_{i0}} \left\{ \sum_{(i,j) \in P_{i0}} c_{ij} \right\}$$

donde P_{i0} es un camino de i a la fuente y $C_0^* = \sum_{i \in N} c_{i0}^*$; en Giménez-Gómez et al. [2020] se propone asociar el problema de bancarrota (B, d) al *mcstp* (N_0, C). Donde $d_i = c_{i0}^*$, $B = C_0^* - m(N_0, C)$.

Se asume que cada agente paga el costo de su conexión (directa o indirecta) a la fuente c_{i0}^*, la suma de estas contribuciones excede la cantidad necesaria $m(N_0, C)$ para la construcción del *mt* y cada agente decide reclamar que toda su contribución inicial sea devuelta. La regla de asignación se modela esta situación es

$$\alpha_i^\Phi(N_0, C) = c_{i0}^* - \Phi_i(B, d).$$

En particular en dicho trabajo de investigación se estudian las propiedades de la regla de asignación $\alpha^{CEL}(N_0, C)$. El contenido de este artículo será discutido con mayor detalle más adelante.

Es importante mencionar que en el trabajo señalado se tiene un enfoque de *no derecho a propiedad privada* así que cualquier agente puede conectarse a través de otro, siempre y cuando pague las conexiones que utilice. Por lo que se redefinen los axiomas de *IR* y CS.

Dado un *mcstp* (N_0, C), en el enfoque de *no derecho a propiedad privada* para todo $S \subseteq N$ definimos el mínimo costo de conexión como:

$$m^*(S_0, C) = \min\{m(T_0, C) : S \subseteq T \subseteq N\}.$$

Es claro que $m(N_0, C) = m^*(N_0, C)$ y que $m(\{i\}, C) = c_{i0}^*$.

Racionalidad individual* (**IR***): *Una regla de asignación ψ cumple con IR^* si para todo mcstp (N_0, C) y para todo $i \in N$ se tiene que*

$$\psi_i(N_0, C) \leq c_{i0}^*.$$

Selección de núcleo* (**CS***)**:** *Una regla de asignación ψ cumple con CS^* si para todo mcstp (N_0, C) y para todo $S \subset N$ se tiene que*

$$\sum_{i \in S} \psi_i(N_0, C) \leq m^*(S_0, C).$$

Es claro que si ψ satisface CS* entonces también cumple con *CS*. De igual manera IR* implica *IR*.

En Giménez-Gómez et al. [2022] se definen dos reglas de asignación para el *mcstp* (N_0, C) con distintos enfoques. La primera regla de asignación, tiene un enfoque de *reparto de beneficios*, parte del costo máximo que cada agente racional estaría dispuesto a pagar para

conectarse a la fuente, considerando la diferencia entre estos costos racionales y el costo del *mt* como el beneficio de cooperación. Este beneficio es entonces repartido entre los agentes utilizando reglas clásicas de problemas de bancarrota, considerando que los agentes desean que su conexión más barata sea parte del *mt* y exigen que se les reembolse la diferencia d_* entre lo que pagaron inicialmente y su conexión más barata. La segunda regla de asignación sigue el enfoque de *reparto de costos adicionales*, asume que los agentes inicialmente pagan el costo de su conexión más barata (a la fuente o a otro agente). Sin embargo, dado que estas conexiones no siempre forman un árbol de expansión válido, el costo adicional necesario para construir el *mt* se distribuye entre los agentes, también mediante reglas de problemas de bancarrota, contemplando que su contribución adicional no puede ser mayor que la diferencia entre su costo de conexión a la fuente y su costo de conexión mínimo, anteriormente denotado por d_*.

Sean $E_1 = C_0^* - m(N_0, C)$, $E_2 = m(N_0, C) - C^{\text{mín}}$ y $d_* = c_{i0}^* - c_{i^*}$. Formalmente, las reglas de asignación de ambos enfoques se definen como:

- $(\kappa_1^\Phi)_i(N_0, C) = c_{i0}^* - \Phi_i(E_1, d_*)$
- $(\kappa_2^\Phi)_i(N_0, C) = c_{i^*} + \Phi_i(E_2, d_*)$

Los autores de estas propuestas presentan que $\kappa_1^\Phi(N_0, C)$ y $\kappa_2^\Phi(N_0, C)$ satisfacen los axiomas *Racionalidad individual, Continuidad* y *Positividad* para cualquier solución Φ al problema de bancarrota correspondiente. Además si Φ cumple con *Igualdad de trato* $\kappa_1^\Phi(N_0, C)$ y $\kappa_2^\Phi(N_0, C)$ cumplen con el axioma de *Simetría* y si Φ cumple con *Monotonía de demandas*, satisfacen el axioma de *Monotonía de costos*. Por otra parte, estas reglas de asignación no satisfacen *Monotonía de la población* ni *Selección de núcleo**.
Además es presentada una condición necesaria y suficiente sobre C para que $\kappa_1^\Phi(N_0, C)$ y $\kappa_2^\Phi(N_0, C)$ satisfagan *Selección de núcleo** para cualquier Φ y se proporcionan algunas clases de *mcstp* que cumplen esta condición.

Las reglas de asignación definidas en los tres trabajos de investigación citados proporcionan una visión intuitiva y sencilla para asignar costos en un *mcstp*, aprovechando las propiedades de las reglas de problemas de bancarrota. A continuación, exploraremos otra manera de adaptar esta idea para proponer soluciones en el contexto de *mcstp* y examinar sus propiedades.

4.1. Asignación natural basada en costos de conexión directa

Recordemos que en un *mcstp*, un conjunto de agentes debe conectarse a una fuente a través de una red de manera que el costo total de conexión sea mínimo. Cada agente i tiene un costo de conexión directa a la fuente, denotado como c_{i0}.

En este escenario, un problema de bancarrota que muy naturalmente se puede asignar al *mcstp* se define de la siguiente manera:

1. Cada agente demanda el costo de su conexión directa a la fuente, es decir, $c_i = c_{i0}$.

2. El recurso a repartir E es el costo total del mt, que es menor o igual a la suma de los costos de conexión directa de todos los agentes. Es decir $E = m(N_0, C)$.

El objetivo es repartir este costo total entre los agentes utilizando alguna de las reglas clásicas de bancarrota como Proporcional, CEA, CEL o Talmud.

Ejemplo 2 (continuación). Si consideramos el *mcstp* (N_0, C) del ejemplo 2:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 0 & 2 & 3 \\ 5 & 2 & 0 & 3 \\ 6 & 3 & 3 & 0 \end{pmatrix},$$

las demandas de los agentes serán los costos de conexión directa a la fuente:

$$c = (4, 5, 6)$$

El recurso a repartir es el costo total $m(N_0, C) = 9$

$$E = 9$$

Ahora calculamos las cuatro soluciones clásicas para este problema de bancarrota $(9, (4, 5, 6))$.

1. Solución Proporcional

$$Prop_i(E, c) = E \times \frac{c_i}{\sum c_i}$$

Calculamos la suma total de las demandas:

$$4 + 5 + 6 = 15$$

Y la asignación proporcional:

$$Prop(E, c) = \left(9 \times \frac{4}{15}, 9 \times \frac{5}{15}, 9 \times \frac{6}{15}\right) = (2.4, 3, 3.6)$$

2. Solución CEA (Constrained Equal Awards)

Recordemos que la regla CEA asigna recursos de manera equitativa hasta que se alcanzan las demandas de los agentes o el recurso total disponible. En este caso, debemos encontrar λ tal que:

$$CEA_i(E, c = \text{mín}(c_i, \lambda) \quad \text{y} \quad \sum CEA_i = 9$$

El valor de λ es 3, y la asignación es:

$$CEA(E, c) = (\text{mín}(4, 3), \text{mín}(5, 3), \text{mín}(6, 3)) = (3, 3, 3)$$

3. Solución CEL (Constrained Equal Losses)

Debemos encontrar el valor de μ tal que:

$$CEL_i(E, c) = \text{máx}(c_i - \mu, 0) \quad \text{y} \quad \sum CEL_i = 9$$

El valor de μ es 2 y la asignación resultante es:

$$CEL(E,c) = (\text{máx}(0,4-2), \text{máx}(0,5-2), \text{máx}(0,6-2)) = (2,3,4)$$

4. Solución Talmud

La solución del Talmud combina CEA y CEL. En este caso, calculamos la mitad de las demandas:

$$\frac{1}{2} \times (4,5,6) = (2, 2.5, 3)$$

Asignamos primero esas cantidades y luego aplicamos CEL al recurso y demandas restantes. El resultado es:

$$T(E,c) = (2,3,4).$$

Así, si definimos

$$\eta_1^R(N_0,C) = R(E,c) \quad \text{donde } E = m(N_0,C) \text{ y } c = (c_{0i})_{i\in N}$$

y R es alguna de las cuatro soluciones clásicas mencionadas, hemos encontrado 4 asignaciones para el problema (N_0, C) :

$$\eta_1^{\text{Prop}}(N_0,C) = (2.4, 3, 3.6)$$
$$\eta_1^{\text{CEA}}(N_0,C) = (3,3,3)$$
$$\eta_1^{\text{CEL}}(N_0,C) = (2,3,4)$$
$$\eta_1^{\text{T}}(N_0,C) = (2,3,4).$$

Nota importante: La regla de asignación $\eta_1^R(N_0,C)$ fue mencionada en el trabajo de Giménez Gómez et al. [2014], sin embargo únicamente es mostrado que no cumple con el axioma de *Selección de núcleo*, pero no se cuestiona si existe alguna clase de *mcstp* para la cual esta asignación cumpla *CS* y tampoco son inspeccionados otros axiomas.
A continuación se examinarán los axiomas cumplidos por $\eta_1^R(N_0,C)$ tomando ventaja de la propiedades cumplidas por las soluciones $R(E,c)$ aquí consideradas. Además en el capítulo 5 se presentarán algunas clases de *mcstp* para los cuáles $\eta_1^R(N_0,C)$ cumple con *selección de núcleo*.

4.1.1. Propiedades de las asignaciones $\eta_1^R(N_0,C)$ y $\eta_1^{Ig}(N_0,C)$

Al aplicar una regla clásica de bancarrota al problema problema de bancarrota asociado a un *mcstp*, varias propiedades mencionadas en Thomson [2003] tienen una traducción al contexto de interés y pueden ser heredadas de manera natural. A continuación, revisamos cuáles de estas propiedades tienen sentido en este nuevo contexto:
Sean (N_0,C) un *mcstp*, (E,c) el problema de bancarrota donde $E = m(N_0,C)$ y $c = (c_{01}, c_{02}, ..., c_{0n})$, y una solución $R(E,c)$ a éste. Se analizarán las siguientes propiedades.

Eficiencia: Esta propiedad en problemas de bancarrota es una de las incluídas en la definición de solución. Así, al definir $\eta_1^R(N_0,C) = R(E,c)$ se obtiene una regla de asignación para el *mcstp* (N_0,C).

No negatividad: La no negatividad, implícita en la definición de $R(E,c)$, asegura el cumplimiento de *Positividad (POS)* para la regla de asignación $\eta_1^R(N_0,C)$. Esta propiedad es relevante en el *mcstp*, ya que ningún agente debería pagar una cantidad negativa.

Límite superior: Esta propiedad básica de $R(E,c)$ implica directamente que la asignación $\eta_1^R(N_0,C)$ cumpla con *Racionalidad Individual (IR)*. En un *mcstp*, ningún agente debería pagar más que su costo de conexión directa c_{i0}, ya que este representa la máxima cantidad que podría haber pagado si se conectara directamente a la fuente. Esta propiedad es importante para asegurar que las asignaciones no sean excesivas.

Igualdad de trato: Esta propiedad, cumplida por las cuatro soluciones del problemas de bancarrota mencionadas hereda a $\eta_1^R(N_0,C)$ el axioma de *Simetría (SYM)*, ya que siempre que los agentes $i,j \in N$ sean simétricos, se cumplirá particularmente que $c_{0i} = c_{0j}$ y por tanto

$$\eta_{1_i}^R(N_0,C) = R_i(E,c) = R_j(E,c) = \eta_{1_j}^R(N_0,C)$$

Monotonía de recursos: Esta propiedad en $R(E,c)$ exige que si (N_0,C) y (N_0,C') son tales que $c_{0i} = c'_{0i}$ para todo $i \in N$ y además $m(N_0,C') > m(N_0,C)$, entonces

$$\eta_{1_i}^R(N_0,C') \geq \eta_{1_i}^R(N_0,C)$$

para todo $i \in N$.

Monotonía de demandas: Esta propiedad en $R(E,c)$ se traduce directamente en que si el costo de conexión directa del agente i aumenta, manteniendo el costo del resto de conexiones y $m(N_0,C)$ sin alterar, entonces este agente no pagará menos de lo que pagaba originalmente.

Invarianza bajo truncamiento: Implica que

$$\eta_1^R(N_0,C) = \eta_1^R(N_0,C')$$

donde $c'_{0i} = \text{mín}\{c_{0i}, m(N_0,C)\}$.
Es decir, si el costo de conexión directa c_{0i} de algún agente i excede $m(N_0,C)$, se puede considerar $c'_{0i} = m(N_0,C)$ sin alterar la asignación original.

Preservación del orden: En un problema de bancarrota, esta propiedad garantiza que si un agente tiene una demanda mayor que otro, debe recibir al menos tanto como el otro agente. En el contexto de un *mcstp*, esta propiedad se traduce en que, si un agente tiene un costo de conexión directa mayor $c_{i0} \geq c_{j0}$, su asignación de costos debe ser al menos tan grande como la del agente con el costo de conexión más bajo.

Formalmente, si $c_{i0} \geq c_{j0}$, entonces:

$$\eta_{1_i}^R(N_0,C) \geq \eta_{1_j}^R(N_0,C).$$

Esto asegura que los agentes con mayores costos de conexión directa contribuyan al menos tanto como aquellos con menores costos de conexión.

Por otra parte, algunas propiedades clásicas de las reglas de bancarrota no tienen una traducción natural al contexto de *mcstp*. Por ejemplo:
Compensación completa y compensación nula: Estas propiedades, que están más relacionadas con la asignación completa o nula en ciertos casos, no tienen un análogo claro en un *mcstp*, ya

que siempre se busca repartir el costo total del árbol, y no se consideran casos de demandas excesivas o extremadamente pequeñas.

En resumen, las propiedades de eficiencia, no negatividad, límite superior, tratamiento igual de iguales, monotonía de recursos, monotonía de demandas, igualdad de trato, invarianza bajo truncamiento y consistencia son propiedades relevantes que se pueden traducir y heredar al contexto de un *mcstp* al resolver un problema de bancarrota asociado. Sin embargo, otras propiedades, como la compensación total, compensación nula y la autodualidad, no tienen una traducción directa y pueden considerarse como no son necesarias en este contexto.

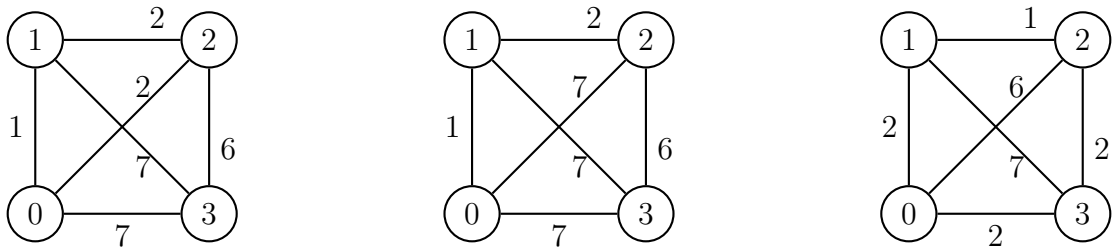
Reparto igualitario.
Además de las cuatro asignaciones $\eta_1^R(N_0, C)$ correspondientes, definimos

$$\eta_1^{Ig}(N_0, C) = \frac{m(N_0, C)}{|N|}.$$

Procederemos a evaluar el cumplimiento de las propiedades definidas en la sección 2.3.1 en las asignaciones $\eta_1^R(N_0, C)$, con $R \in \{T, Prop, CEA, CEL\}$ y en la asignación $\eta_1^{Ig}(N_0, C)$.

Consideremos los *mcstp* (N_0, C) correspondientes a las siguientes matrices, los cuáles serán de utilidad para la verificación de algunos axiomas sobre $\eta_1(N_0, C)$.

$$C_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 7 \\ 1 & 0 & 2 & 7 \\ 2 & 2 & 0 & 6 \\ 7 & 7 & 6 & 0 \end{pmatrix}, \quad C_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 7 & 7 \\ 1 & 0 & 2 & 7 \\ 7 & 2 & 0 & 6 \\ 7 & 7 & 6 & 0 \end{pmatrix}, \quad C_3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 6 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 7 \\ 6 & 1 & 0 & 2 \\ 6 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$



(a) Grafo de (N_0, C_1) (b) Grafo de (N_0, C_2) (c) Grafo de (N_0, C_3)

Figura 4.1

Calculemos $\eta_1^R(N_0, C_1)$ para $E = m(N_0, C_1) = 9$ y $c = (1, 2, 7)$

$$\eta_1^{CEA}(N_0, C_1) = (\text{mín}\{1, \lambda\}, \text{mín}\{2, \lambda\}), \text{mín}\{7, \lambda\})$$

tal que $\sum_{i \in N} \eta_{1_i}^{CEA}(N_0, C_1) = 9$, así que $\lambda = 6$,

$$\eta_1^{CEA}(N_0, C_1) = (1, 2, 6).$$

$$\eta_1^{CEL}(N_0, C_1) = (\text{máx}\{0, 1 - \mu\}, \text{máx}\{0, 2 - \mu\}, \text{máx}\{0, 7 - \mu\})$$

tal que $\sum_{i\in N}\eta_{1_i}^{CEL}(N_0,C_1)=9$, así que $\mu=\frac{1}{3}$,

$$\eta_1^{CEL}(N_0,C_1)=\left(\frac{2}{3},\frac{5}{3},\frac{20}{3}\right).$$

$$\eta_1^{Prop}(N_0,C_1)=\left(\frac{9}{10},\frac{18}{10},\frac{63}{10}\right).$$

$$\begin{aligned}\eta_1^{T}(N_0,C_1)&=(0.5,1,3.5)+CEL(4,(0.5,1,3.5)\\&=(0.5,1,3.5)+(\text{máx}\{0,0.5-\mu\},\text{máx}\{0,1-\mu\},\text{máx}\{0,3.5-\mu\}),\end{aligned}$$

con $\mu=\frac{1}{3}$ tenemos

$$\eta_1^{T}(N_0,C_1)=(0.5,1,3.5)+\left(\frac{1}{6},\frac{2}{3},\frac{19}{6}\right)=\left(\frac{2}{3},\frac{5}{3},\frac{20}{3}\right).$$

Para calcular $\eta_1^{R}(N_0,C_2)$, vemos que $E=m(N_0,C_2)=9$ y $c=(1,7,7)$

$$\eta_1^{CEA}(N_0,C_2)=(\text{mín}\{1,\lambda\},\text{mín}\{7,\lambda\}),\text{mín}\{7,\lambda\})$$

tal que $\sum_{i\in N}\eta_{1_i}^{CEA}(N_0,C_2)=9$, así que $\lambda=4$,

$$\eta_1^{CEA}(N_0,C_2)=(1,4,4).$$

$$\eta_1^{CEL}(N_0,C_2)=(\text{máx}\{0,1-\mu\},\text{máx}\{0,7-\mu\},\text{máx}\{0,7-\mu\})$$

tal que $\sum_{i\in N}\eta_{1_i}^{CEL}(N_0,C_2)=9$, así que $\mu=2.5$,

$$\eta_1^{CEL}(N_0,C_2)=(0,4.5,4.5)$$

$$\eta_1^{Prop}(N_0,C_2)=\left(\frac{9}{15},\frac{63}{15},\frac{63}{15}\right).$$

$$\begin{aligned}\eta_1^{T}(N_0,C_2)&=(0.5,3.5,3.5)+CEL(1.5,(0.5,3.5,3.5)\\&=(0.5,3.5,3.5)+(\text{máx}\{0,0.5-\mu\},\text{máx}\{0,3.5-\mu\},\text{máx}\{0,3.5-\mu\}),\end{aligned}$$

con $\mu=2.75$ tenemos

$$\eta_1^{T}(N_0,C_2)=(0.5,3.5,3.5)+(0,0.75,0.75)=(0.5,4.25,4.25).$$

Para calcular $\eta_1^{R}(N_0,C_3)$, tenemos que $E=m(N_0,C_3)=5$ y $c=(2,6,2)$

$$\eta_1^{CEA}(N_0,C_3)=(\text{mín}\{2,\lambda\},\text{mín}\{6,\lambda\}),\text{mín}\{2,\lambda\})$$

tal que $\sum_{i\in N}\eta_{1_i}^{CEA}(N_0,C_3)=5$, así que $\lambda=\frac{5}{3}$,

$$\eta_1^{CEA}(N_0,C_3)=\left(\frac{5}{3},\frac{5}{3},\frac{5}{3}\right).$$

$$\eta_1^{CEL}(N_0,C_3)=(\text{máx}\{0,2-\mu\},\text{máx}\{0,6-\mu\},\text{máx}\{0,2-\mu\})$$

tal que $\sum_{i\in N} \eta_{1_i}^{CEL}(N_0, C_3) = 5$, así que $\mu = \frac{5}{3}$,

$$\eta_1^{CEL}(N_0, C_3) = \left(\frac{1}{3}, \frac{13}{3}, \frac{1}{3}\right).$$

$$\eta_1^{Prop}(N_0, C_3) = (1, 3, 1)$$

$$\eta_1^{T}(N_0, C_3) = CEA(5, (1, 3, 1) = (\text{mín}\{1, \lambda\}, \text{mín}\{3, \lambda\}, \text{mín}\{1, \lambda\}),$$

con $\lambda = 3$ tenemos

$$\eta_1^{T}(N_0, C_3) = (1, 3, 1).$$

(N_0, C)	$\eta_1^{CEA}(N_0, C)$	$\eta_1^{CEL}(N_0, C)$	$\eta_1^{Prop}(N_0, C)$	$\eta_1^{T}(N_0, C)$	η_1^{Ig}
(N_0, C_1)	$(1, 2, 6)$	$\left(\frac{2}{3}, \frac{5}{3}, \frac{20}{3}\right)$	$\left(\frac{9}{10}, \frac{18}{10}, \frac{63}{10}\right)$	$\left(\frac{2}{3}, \frac{5}{3}, \frac{20}{3}\right)$	(3,3,3)
(N_0, C_2)	$(1, 4, 4)$	$\left(0, \frac{9}{2}, \frac{9}{2}\right)$	$\left(\frac{9}{15}, \frac{63}{15}, \frac{63}{15}\right)$	$\left(\frac{1}{2}, \frac{17}{4}, \frac{17}{4}\right)$	(3,3,3)
(N_0, C_3)	$\left(\frac{5}{3}, \frac{5}{3}, \frac{5}{3}\right)$	$\left(\frac{1}{3}, \frac{13}{3}, \frac{1}{3}\right)$	$(1, 3, 1)$	$(1, 3, 1)$	$\left(\frac{5}{3}, \frac{5}{3}, \frac{5}{3}\right)$

Cuadro 4.1: Resumen asignaciones $\eta_1^R(N_0, C)$ y η_1^{Ig}.

Proposición 1. *Si $R(E, c) \in \{CEA(E, c), CEL(E, c), Prop(E, c), T(E, c)\}$, entonces la asignación $\eta_1^R(N_0, C)$*
a) Cumple con los axiomas IR, CM, CON, POS, SYM, ESEC.
b) No cumple con los axiomas CS, SOL, PM, SEP, IOC, IIT.
Además:
c) $\eta_1^{Ig}(N_0, C)$ cumple con los axiomas CM, SOL, CON, POS, SYM, ESEC, IIT.
d) $\eta_1^{Ig}(N_0, C)$ no cumple con CS, IR, PM,, SEP, IOC.

Demostración. *a):*

- **Racionalidad individual:** Este axioma es satisfecho por $\eta_1^R(N_0, C)$ gracias a la propiedad de límite superior de las soluciones $R(E, c)$.

- **Monotonía de costos:** $\eta_1^R(N_0, C)$ presenta este axioma, derivada de las propiedades de monotonía de recursos y monotonía de demandas cumplidas por las cuatro soluciones $R(E, c)$.

- **Continuidad:** $\eta_1^R(N_0, C)$ adquiere automáticamente la continuidad de las soluciones $R(E, c)$.

- **Positividad:** La propiedad de no negatividad de $R(E, c)$ implica la positividad de $\eta_1^R(N_0, C)$.

- **Simetría:** Dado un *mcstp* (N_0, C), si dos agentes i, j simétricos se cumple que $c_{i0} = c_{j0}$, es decir, ambos tendrán demandas iguales en el problema de bancarrota (E, c). Entonces, por el axioma de igualdad de trato, tenemos $R_i(E, c) = R_j(E, c)$, así $\eta_{1_i}^R(N_0, C) = \eta_{1_j}^R(N_0, C)$.

- **Reparto igualitario de costos extras :** Bajo los supuestos de esta propiedad, todos los agentes tiene el mismo costo de conexión directa a la fuente, $c_{0i} = c_0$. Al aumentar este costo, las demandas de todos los agentes seguirán también iguales entre ellas; en ambos casos el costo del mt es cubierto de manera igualitaria entre los agentes debido a el axioma de igualdad de trato de $R(E, c)$ y por ello distribuyen igualitariamente los costos extras.

b):
Basta exhibir un *mcstp* (N_0, C) para el cual no se cumpla cada una de las propiedades.

- **Selección de núcleo:** Consideremos el problema (N_0, C_3) y $S = \{1, 2\}$ vemos que $\eta_1^R(N_0, C_3)$ no cumple con el axioma de selección de núcleo para ninguna de las cuatro soluciones $R(E, c)$, pues $\sum_{i \in S} \eta_{1_i}^R(N_0, C_3) \geq m(S_0, C_3) = 3$.

- **Solidaridad:** Si consideramos los problemas (N_0, C_1) y (N_0, C_2), que difieren únicamente en el costo de la conexión directa del agente 2, podemos notar que $\eta_1^R(N_0, C)$ no cumple con *SOL*, pues $C_1 \leq C_2$ pero $\eta_{1_3}^R(N_0, C_1) > \eta_{1_3}^R(N_0, C_2)$.

- **Monotonía de la población:** Considerando el problema (N_0, C_2) y $S = \{1, 2\}$, se observa que $\eta_1^R(N_0, C)$ no cumple con *PM*, para ninguna de las cuatro soluciones $R(E, c)$, ya que $\eta_{1_2}^R(N_0, C_2) > \eta_{1_2}^R(S_0, C_2)$.

- **Separabilidad:** El *mcstp* (N_0, C_3), es tal que $m(N_0, C_3) = 5 = m(\{1, 2\}_0, C_3) + m(\{3\}_0, C_3) = 3 + 2$ pero $\eta_1^R(N_0, C_3) \neq \eta_1^R(\{1, 2\}_0, C_3) + \eta_1^R(\{3\}_0, C_3)$.

- **Independencia de otros costos:** Considerando los *mcstp* (N_0, C_1) y (N_0, C_2), vemos que $\eta_1^R(N_0, C)$ no satisface esta propiedad, ya que la única diferencia entre ambos problemas es el costo de conexión directa del agente 2; sin embargo, este cambio genera modificaciones en las asignaciones de los demás agentes.

- **Independencia de árboles irrelevantes:** Los problemas (N_0, C_1) y (N_0, C_2) son árbol-equivalentes, pero las asignaciones $\eta_1^R(N_0, C_1)$ y $\eta_1^R(N_0, C_2)$ difieren entre ellas.

c):

- **Monotonía de costos:** $\eta_1^{Ig}(N_0, C)$ verifica este axioma, ya que si $C' \geq C$, entonces $m(N_0, C') \geq m(N_0, C)$, y por tanto $\eta_1^{Ig}(N_0, C') \geq \eta_1^{Ig}(N_0, C)$.

- **Solidaridad:** $\eta_1^{Ig}(N_0, C)$ satisface *SOL* por la misma razón que cumple *CM*.

- **Continuidad:** Pequeños cambios en el costo de las conexiones, representan un cambio pequeño en $\eta_1^{Ig}(N_0, C)$. Es claro por la definición de la asignación.

- **Positivad:** La verificación es trivial.

- **Simetería:** $\eta_{1_i}^{Ig}(N_0, C) = \eta_{1_j}^{Ig}(N_0, C)$ para todo $i, j \in N$, en particular si i y j son agentes simétricos.

- **Reparto igualitario de costos extra:** Cualquier aumento en $m(N_0, C)$ será indudablemente repartido de manera igualitaria.

- **Independencia de árboles irrelevantes :** Si (N_0, C) y (N_0, C') son dos *mcstp* árbol-equivalentes, entonces $m(N_0, C) = m(N_0, C')$, así que claramente $\eta_1^{Ig}(N_0, C) = \eta_1(N_0, C')$.

d):

- **Selección de núcleo:** Consideremos el problema (N_0, C_3) y $S = \{1, 2\}$ vemos que $\eta_1^{IR}(N_0, C_3)$ no cumple con el axioma de selección de núcleo para ninguna de las cuatro soluciones $R(E, c)$, pues $\sum_{i \in S} \eta_{1_i}^{R}(N_0, C_3) \geq m(S_0, C_3) = 3$.

- **Racionalidad individual:** $\eta_{1_1}^{Ig}(N_0, C_1) = 3 > 1 = c_{01}$, así $\eta_1^{Ig}(N_0, C)$ no satisface *IR*.

- **Monotonía de la población:** Considerando el problema (N_0, C_2) y $S = \{1, 2\}$, se observa que $\eta_1^{Ig}(N_0, C)$ no cumple con *PM*, pues $\eta_{1_1}^{Ig}(N_0, C_2) = 3 < \frac{3}{2} = \eta_{1_1}^{Ig}(S_0, C_2)$

- **Separabilidad:** El *mcstp* (N_0, C_3), es tal que $m(N_0, C_3) = 5 = m(\{1, 2\}_0, C_3) + m(\{3\}_0, C_3) = 3 + 2$ pero $\eta_1^{Ig}(N_0, C_3) \neq \eta_1^{Ig}(\{1, 2\}_0, C_3) + \eta_1^{Ig}(\{3\}_0, C_3)$.

- **Independencia de otros costos**: Cualquier modificación de C, digamos en la entrada c_{ij}, que provoque un cambio en $m(N_0, C)$ tendrá como consecuencia una alteración en la asignación de todos los agentes, no únicamente de los agentes i, j.

□

La siguiente tabla resume la proposición 1.

Axioma	$\eta_1^{CEA}(N_0, C)$	$\eta_1^{CEL}(N_0, C)$	$\eta_1^{Prop}(N_0, C)$	$\eta_1^{T}(N_0, C)$	$\eta_1^{Ig}(N_0, C)$
CS	No	No	No	No	No
IR	Sí	Sí	Sí	Sí	No
CM	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí
SOL	No	No	No	No	Sí
PM	No	No	No	No	No
CON	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí
POS	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí
SEP	No	No	No	No	No
SYM	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí
IOC	No	No	No	No	No
ESEC	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí
IIT	No	No	No	No	Sí

Cuadro 4.2: Axiomas de las asignaciones η_1^{R} y $\eta_1^{Ig}(N_0, C)$.

Un aspecto importante de la asignación $\eta_1^{R}(N_0, E) = R(E, c)$ con $E = m(N_0, C)$ y $c_i = c_{0i}$, es que al reducir el *mcstp* a un problema de bancarrota que toma en cuenta únicamente el costo de conexión directa c_{i0}, se pierde información sobre las interdependencias entre los agentes.

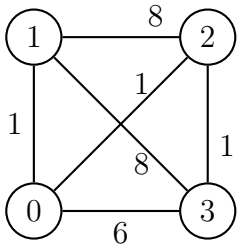
En un *mcstp*, las conexiones no directas (a través de otros nodos) pueden reducir significativamente los costos totales. Sin embargo, cuando se asocia un problema de bancarrota

a un *mcstp* de manera natural como se hizo en esta sección, solo se toman en cuenta los costos directos c_{i0}, ignorando las posibles rutas más económicas a través de otros agentes. Esta simplificación puede llevar a una asignación de costos que no refleje completamente la estructura de ahorro en el *mt*. Por ejemplo, un agente podría estar indirectamente conectado a la fuente a través de otro agente, lo que reduciría su contribución al costo total, pero esto no se captura al usar solo c_{i0} como demanda.

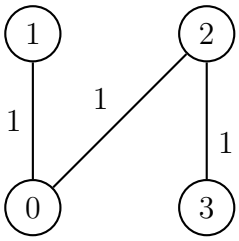
Un pequeño ejemplo para visualizar una evidente desventaja de asignar este problema de bancarrota a un *mcstp* es el siguiente:

Ejemplo 5. Consideremos el *mcstp* (N_0, C), donde el conjunto de nodos es $N = \{1, 2, 3\}$, y los costos de conexión entre los nodos están dados por la siguiente matriz de costos:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 0 & 8 & 8 \\ 1 & 8 & 0 & 1 \\ 6 & 8 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



(a) Grafo completo con los costos de las aristas.



(b) Árbol de expansión de costo mínimo.

Figura 4.2

En la figura 4.2, se muestra la representación visual del problema (N_0, C), así como el *mt*. Podemos observar que $m(N_0, C) = 3$. Y el problema de bancarrota correspondiente es $(3, (1, 1, 6))$. Resolver este problema de bancarrota con cualquiera de las 4 soluciones mencionadas, les asignaría a los agentes 1 y 2 costos iguales, es decir $\psi_1(N_0, C) = \psi_2(N_0, C)$, de hecho esta igualdad se dará siempre que la regla utilizada para resolver el problema de bancarrota cumpla con la propiedad de igualdad de trato. Sin embargo, esto podría no ser lo más adecuado debido a las diferencias entre los costos de las conexiones hacia el agente 3. Observamos que

$$m(N_0, C) - m(\{1, 3\}, C) = 3 - 7 = -4$$

y que

$$m(N_0, C) - m(\{2, 3\}, C) = 3 - 2 = 1,$$

esto quiere decir que, al unirse el agente 2 disminuye el costo total de conexión en 4 unidades, mientras que el agente 1 aumenta el costo total de conexión en 1 unidad. Considerando esta información, el agente 2 podría considerarse como *más valioso* para el grupo que el agente 1 pues su presencia representa una gran ahorro en el costo total. De este modo el agente 2 podría desear pagar menos que el agente 1.

Derivado de este ejemplo podemos definir una propiedad respecto al orden de las contribuciones de los agentes al costo del *mt*:
Ordenamiento por contribuciones marginales (OMC): Una regla de asignación ψ, cumple Ordenamiento por contribuciones marginales si y sólo si para todo (N_0, C) y para todos $i, j \in N$ tal que

$$m(N_0, C) - m(N_0 \setminus \{i\}, C) \geq m(N_0, C) - m(N_0 \setminus \{j\}, C)$$

se tiene que $\psi_i(N_0, C) \geq \psi_j(N_0, C)$.

Proposición 2. *Ninguna asignación cumple Racionalidad individual y Ordenamiento por contribuciones marginales.*

Demostración. Basta dar un *mcstp* como ejemplo para el cual sea imposible una asignación que cumpla ambas propiedades. Consideremos el *mcstp* (N_0, C) que es representado por la figura 4.3. Vemos que:

$$m(N_0, C) - m(N_0 \setminus \{1\}, C) = m(N_0, C) - m(N_0 \setminus \{2\}, C) = m(N_0, C) - m(N_0 \setminus \{3\}, C) = 4 - 3 = 1.$$

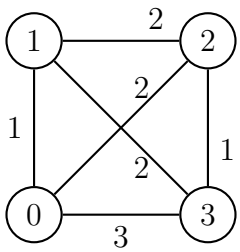


Figura 4.3

Así,una asignación x que cumpla *Racionalidad individual* y *ordenamiento por contribuciones marginales* deberá cumplir con

$$x_1 + x_2 + x_3 = 4$$

$$x_1 \leq 1$$

$$x_2 \leq 2$$

$$x_3 \leq 3$$

$$x_1 \leq x_2$$

$$x_2 \leq x_1$$

$$x_2 \leq x_3$$

$$x_3 \leq x_2,$$

simplificando:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 4$$

$$x_1 \leq 1$$

$$x_2 \leq 2$$

$$x_3 \leq 3$$

$$x_1 = x_2 = x_3.$$

El mayor valor de x_1 (y por tanto de x_2 y x_3) es 1. Por lo que el mayor valor de $x_1 + x_2 + x_3$ es $3 \neq 4$. □

El cumplimiento de la racionalidad individual es fundamental en una asignación de costos para un *mcstp*, ya que garantiza que ningún agente pague más de lo que costaría conectarse directamente a la red sin usar los recursos de los demás. Este axioma es clave para la aceptabilidad de la solución, ya que asegura que cada agente perciba su asignación como justa en términos de su participación real en la red. Por otro lado, la propiedad de ordenamiento por contribuciones marginales establece que los agentes que contribuyen más al costo total deberían recibir asignaciones mayores. Aunque esta propiedad puede promover alguna clase de equidad relativa entre los agentes, no existe una asignación de costos ψ que cumpla con ambas propiedades. En este contexto, es más crítico garantizar que cada agente pague una cantidad acorde a su conexión directa, evitando así incentivos para desvincularse de la cooperación. Por lo tanto, la racionalidad individual prevalece como un criterio esencial para lograr soluciones aceptables, incluso si se debe sacrificar el ordenamiento por contribuciones marginales.

En resumen, la asignación $\eta_1^R(N_0, C)$ basada en costos directos proporciona una solución fundamental que se alinea con principios esenciales como la racionalidad individual, asegurando que cada agente perciba su contribución como justa en función de su conexión directa a la red. Sin embargo, su enfoque limitado a los costos individuales directos puede dejar de lado interacciones más complejas entre los agentes. Este vacío motiva la exploración de enfoques alternativos que integren los costos indirectos.

4.2. Asignación de costos alternativa basada en costos de conexión indirecta

Una alternativa para evitar parcialmente la pérdida de información es considerar un problema de bancarrota que integre datos más allá de las conexiones directas de los agentes, lo cual resulta fundamental para lograr una asignación de costos más precisa en *mcstp*. Al incluir el costo de conexión más barato para cada agente, ya sea de manera directa o a través de otros nodos, y asumiendo el costo de todas las aristas utilizadas, se obtiene una representación más completa de la participación de cada agente en la red. Este enfoque captura no solo el costo individual de la conexión directa, sino también la opción más económica disponible para cada agente. De esta manera, se logra una asignación que refleja de una manera más adecuada la estructura de la red, promoviendo una distribución más equitativa del costo total entre los agentes al considerar tanto las conexiones directas como las alternativas más baratas disponibles en la red.

Sea

$$c_{i0}^* = \min_{P_{i0}} \left\{ \sum_{(i,j)\in P_{i0}} c_{ij} \right\}$$

donde P_{i0} es un camino de i a la fuente. Así c_{i0}^* representa el precio más barato al que el agente i se conecta con la fuente, ya sea directamente o a través de otros agentes, considerando el costo de todas las conexiones utilizadas. Denotemos $C_0^* = \sum_{i\in N} c_{i0}^*$.
Es claro que $C_0^* \geq m(N_0, C)$, así que podemos considerar

$$C_0^* - m(N_0, C)$$

como el beneficio de la cooperación.

Supongamos que cada agente i paga inicialmente c_{i0}^*, pero como construir el *mt* es más barato, se obtiene un beneficio de la cooperación. Se propone inicialmente que este beneficio (ahorro) sea repartido de manera igualitaria entre los agentes:

$$\eta_2^{Ig}(N_0, C) = c_{i0}^* - \frac{1}{|N|}(C_0^* - m(N_0, C)),$$

esta regla de asignación cumple con algunas propiedades importantes, sin embargo se puede construir fácilmente un problema (N_0, C) como prueba de que esta regla no cumple con la propiedad de *positividad*.

Cuando asumimos que un agente al buscar su costo de conexión más barato no se limita únicamente a su conexión directa, estamos diciendo que no existe un derecho a la propiedad privada en la red: cualquier agente puede conectarse a través de otro, siempre y cuando pague las conexiones que utilice. Esto también implica que las soluciones deben cumplir con el axioma de positividad, ya que sería extraño que un agente reciba un pago por "permitir" que otros se conecten a través de él, dado que desde el inicio no tenía el derecho de negarse a esa conexión. Así, asegurar la positividad no solo tiene sentido, sino que es esencial para mantener coherencia en la asignación de costos en este tipo de redes.

Dado un *mcstp* (N_0, C), se puede definir un problema de bancarrota (E^*, c_0^*) con

$$E^* = C_0^* - m(N_0, C) \quad \text{y} \quad c_0^* = (c_{i0}^*)_{i\in N}.$$

Luego, para definir una solución al *mcstp* a través de (E^*, c_0^*), supongamos nuevamente que cada agente i paga inicialmente c_{i0}^*, pero como $C_0^* - m(N_0, C) \geq 0$, pide algún tipo de reembolso. Este agente quiere verse lo más beneficiado posible así que demanda ser reembolsado en su totalidad; así una solución es:

$$\eta_{2_i}^R(N_0, C) = c_{i0}^* - R_i(E^*, c_0^*),$$

donde R es una solución para el problema de bancarrota. Esta solución está bien definida (es eficiente), pues

$$\sum_{i\in N} \eta_{2_i}^R(N_0, C) = \sum_{i\in N} c_{i0}^* - \sum_{i\in N} R_i(E^*, c_0^*) = C_0^* - (C_0^* - m(N_0, C)) = m(N_0, C).$$

Nota importante: El desarrollo del contenido de esta sección fue desarrollado de manera independiente. Sin embargo, posteriormente se identificó que justo esta regla de asignación ya había sido presentada en el artículo Giménez-Gómez et al. [2020]. Es claro que si $R = \Phi$ $\eta_2^R(N_0, C) = \alpha^\Phi(N_0, C)$. Además de que Giménez-Gómez et al. se centran particular y únicamente en $\alpha^{CEL}(N_0, C) = \eta_2^{CEL}(N_0, C)$, cabe destacar que dicho trabajo contiene un par de errores importantes que serán detallados cuando corresponda. Asimismo es fundamental enfatizar las diferencias entre el trabajo citado y el desarrollado en este documento, tanto por respeto al esfuerzo de los autores previos como para garantizar la claridad y la transparencia académica de esta tesis.

4.2.1. Propiedades de las asignaciones $\eta_2^{\mathbf{R}}(\mathbf{N_0}, \mathbf{C})$ y $\eta_2^{\mathbf{Ig}}(\mathbf{N_0}, \mathbf{C})$

Directamente por la manera en que se definió, esta solución cumple con *racionalidad individual* y debido a $R_i(E^*, c_0^*) \leq c_{i0}^*$ se cumple la propiedad de *positividad*.

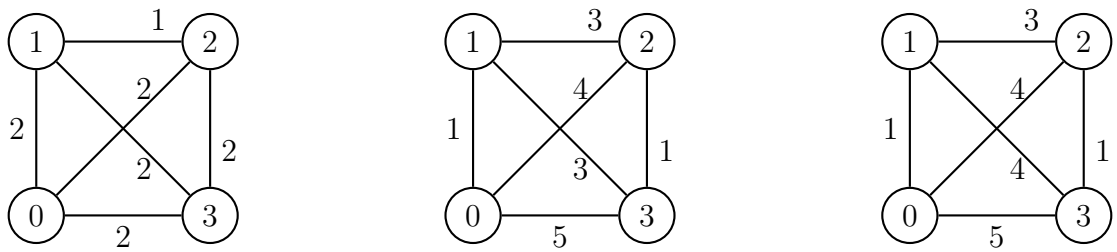
Consideraremos que R es cualquiera de las 4 soluciones clásicas mencionadas en el capítulo 3. Así, debido a que, para estas soluciones, pequeñas variaciones en el recurso total o en los reclamos de los agentes resultan en pequeñas variaciones en las asignaciones (continuidad), la solución $\eta_{2_i}^R(N_0, C) = c_{i0}^* - R_i(E^*, c_0^*)$ es continua. Debido al axioma de igualdad de trato (cumplida por las 4 soluciones consideradas), $\eta_2^R(N_0, C)$ cumple con *simetría.*

Monotonía de recursos: Esta propiedad en $R(E^*, c_0^*)$ exige que si (N_0, C) y (N_0, C') son tales que $c_{i0}^* = c_{i0}^{*'}$ para todo $i \in N$ y además $m(N_0, C') < m(N_0, C)$, entonces $\eta_2^R(N_0, C') \leq \eta_2^R(N_0, C)$.

Preservación de orden: esta propiedad garantiza la preservación de orden respecto a los costos de conexión mínimos.

Se calcularán las asignaciones de algunos ejemplos para evaluar el cumplimiento de las propiedades definidas en la sección 2.3.1 por las asignaciones $\eta_2^R(N_0, C)$ y $\eta_2^{Ig}(N_0, C)$. Consideremos los *mcstp* correspondientes a la siguientes matrices

$$C_4 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad C_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 3 & 3 \\ 4 & 3 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C_6 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 0 & 1 \\ 5 & 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$



(a) Grafo de (N_0, C_4) (b) Grafo de (N_0, C_5) (c) Grafo de (N_0, C_6)

Figura 4.4

Retomando los ejemplos de la sección 3.1, calculamos $\eta_2^R(N_0, C_1)$, vemos que $m(N_0, C_1) = 9$, $c_0* = (1, 2, 7)$, entonces $E^* = 10 - 9 = 1$.

$$\eta_2^{CEA}(N_0, C_1) = (1, 2, 7) - (\text{mín}\{1, \lambda\}, \text{mín}\{2, \lambda\}), \text{mín}\{7, \lambda\})$$

tal que $\sum_{i \in N} \eta_{2_i}^{CEA}(N_0, C_1) = 9$, así que $\lambda = \frac{1}{3}$,

$$\eta_2^{CEA}(N_0, C_1) = (1, 2, 7) - \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}, \frac{5}{3}, \frac{20}{3}\right).$$

$$\eta_2^{CEL}(N_0, C_1) = (1, 2, 7) - (\text{máx}\{0, 1 - \mu\}, \text{máx}\{0, 2 - \mu\}, \text{máx}\{0, 7 - \mu\})$$

tal que $\sum_{i \in N} \eta_{2_i}^{CEL}(N_0, C_1) = 9$, así que $\mu = 6$,

$$\eta_2^{CEL}(N_0, C_1) = (1, 2, 7) - (0, 0, 1) = (1, 2, 6)$$

$$\eta_2^{Prop}(N_0, C_1) = (1, 2, 7) - \left(\frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \frac{7}{10}\right) = \left(\frac{9}{10}, \frac{18}{10}, \frac{63}{10}\right).$$

$\eta_2^T(N_0, C_1) = (1, 2, 7) - CEA(1, (0.5, 1, 3.5)) = (1, 2, 7) - (\text{mín}\{0.5, \lambda\}, \text{mín}\{1, \lambda\}, \text{mín}\{3.5, \lambda\})$, con $\lambda = \frac{1}{3}$ tenemos

$$\eta_2^T(N_0, C_1) = (1, 2, 7) - \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}, \frac{5}{3}, \frac{20}{3}\right).$$

Calculando $\eta_2^R(N_0, C_2)$, vemos que $m(N_0, C) = 9$, $c_0* = (1, 3, 7)$, entonces $E^* = 11 - 9 = 2$

$$\eta_2^{CEA}(N_0, C_2) = (1, 3, 7) - (\text{mín}\{1, \lambda\}, \text{mín}\{3, \lambda\}), \text{mín}\{7, \lambda\})$$

tal que $\sum_{i \in N} \eta_{2_i}^{CEA}(N_0, C_2) = 9$, así que $\lambda = \frac{2}{3}$,

$$\eta_2^{CEA}(N_0, C_2) = (1, 3, 7) - \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}, \frac{7}{3}, \frac{19}{3}\right).$$

$$\eta_2^{CEL}(N_0, C_2) = (1, 3, 7) - (\text{máx}\{0, 1 - \mu\}, \text{máx}\{0, 3 - \mu\}, \text{máx}\{0, 7 - \mu\})$$

tal que $\sum_{i \in N} \eta_{2_i}^{CEL}(N_0, C_2) = 9$, así que $\mu = 5$,

$$\eta_2^{CEL}(N_0, C_2) = (1, 3, 7) - (0, 0, 2) = (1, 3, 5)$$

$$\eta_2^{Prop}(N_0, C_2) = (1, 3, 7) - \left(\frac{2}{11}, \frac{6}{11}, \frac{14}{11}\right) = \left(\frac{9}{11}, \frac{27}{11}, \frac{63}{11}\right).$$

$\eta_2^T(N_0, C_2) = (1, 3, 7) - CEA(2, (0.5, 1.5, 3.5) = (1, 3, 7) - (\text{mín}\{0.5, \lambda\}, \text{mín}\{1.5, \lambda\}, \text{mín}\{3.5, \lambda\})$, con $\lambda = 0.75$ tenemos

$$\eta_2^T(N_0, C_2) = (1, 3, 7) - (0.5, 0.75, 0.75) = (0.5, 2.25, 6.25).$$

Calculando $\eta_2^R(N_0, C_4)$, tenemos $m(N_0, C) = 5$, $c_0* = (2, 2, 2)$, entonces $E^* = 6 - 5 = 1$. Por trato igualitario, tenemos que

$$\eta_2^{CEA}(N_0, C_4) = (2, 2, 2) - \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \left(\frac{5}{3}, \frac{5}{3}, \frac{5}{3}\right) = \eta_2^{CEL}(N_0, C_4) = \eta_2^{Prop}(N_0, C_4) = \eta_2^T.$$

(N_0, C)	$\eta_2^{CEA}(N_0, C)$	$\eta_2^{CEL}(N_0, C)$	$\eta_2^{Prop}(N_0, C)$	$\eta_2^T(N_0, C)$	$\eta_2^{Ig}(N_0, C)$
(N_0, C_1)	$\left(\frac{2}{3}, \frac{5}{3}, \frac{20}{3}\right)$	$(1, 2, 6)$	$\left(\frac{9}{10}, \frac{18}{10}, \frac{63}{10}\right)$	$\left(\frac{2}{3}, \frac{5}{3}, \frac{20}{3}\right)$	
(N_0, C_2)	$\left(\frac{1}{3}, \frac{7}{3}, \frac{19}{3}\right)$	$(1, 3, 5)$	$\left(\frac{9}{11}, \frac{27}{11}, \frac{63}{11}\right)$	$\left(\frac{1}{2}, \frac{9}{4}, \frac{25}{4}\right)$	
(N_0, C_4)	$\left(\frac{5}{3}, \frac{5}{3}, \frac{5}{3}\right)$	$\left(\frac{5}{3}, \frac{5}{3}, \frac{5}{3}\right)$	$\left(\frac{5}{3}, \frac{5}{3}, \frac{5}{3}\right)$	$\left(\frac{5}{3}, \frac{5}{3}, \frac{5}{3}\right)$	$\left(\frac{5}{3}, \frac{5}{3}, \frac{5}{3}\right)$
(N_0, C_5)					$\left(-\frac{1}{3}, \frac{8}{3}, \frac{8}{3}\right)$
(N_0, C_6)					$\left(-\frac{2}{3}, \frac{7}{3}, \frac{10}{3}\right)$

Cuadro 4.3: Resumen asignaciones $\eta_2^R(N_0, C)$ y $\eta_2^{Ig}(N_0, C)$.

Proposición 3. *Si $R(E^*, c_0^*) \in \{CEA(E^*, c_0^*), CEL(E^*, c_0^*), Prop(E^*, c_0^*), T(E^*, c_0^*)\}$, entonces la asignación $\eta_2^R(N_0, C)$*
a) Cumple con los axiomas IR, CM, CON, POS, SYM, ESEC.
b) No cumple con los axioma CS, SOL, PM, SEP, IOC, IIT.
Además:
c) $\eta_2^{Ig}(N_0, C)$ satisface los axiomas IR, CON, SYM, ESEC.
d) $\eta_2^{Ig}(N_0, C)$ no cuenta con los axiomas CS,CM, SOL, PM, POS, SEP, IOC, IIT.

Demostración.
a):

- **Racionalidad individual:** Este axioma es cumplido por $\eta_2^R(N_0, C)$ directamente debido a la propiedad de no negatividad de las soluciones $R(E^*, c_0^*)$. De hecho cumple además otro tipo de racionalidad individual, pues

$$\eta_{2_i}^R(N_0, C) \leq c_{i0}^*,$$

  es decir, a ningún agente se le asignará más que su conexión mínima hacia la fuente (ya sea directamente o a través de otros agentes).

- **Monotonía de costos:** $\eta_2^R(N_0, C)$ presenta este axioma, derivada de las propiedades de monotonía de recursos y monotonía de demandas cumplidas por las cuatro soluciones $R(E^*, c_0^*)$.

- **Continuidad:** $\eta_2^R(N_0, C)$ hereda automáticamente la continuidad, de las soluciones $R(E^*, c_0^*)$.

- **Positividad:** La propiedad de límite superior de $R(E^*, c_0^*)$ implica la positividad de $\eta_2^R(N_0, C)$.

- **Simetría:** Dado un *mcstp* (N_0, C), dos agentes i, j simétricos se cumplirá que $c_{i0}^* = c_{j0}^*$, es decir, tendrán demandas iguales en el problema de bancarrota (E^*, c_0^*), luego, por la propiedad de igualdad de trato, tenemos $R_i(E^*, c_0^*) = R_j(E^*, c_0^*)$, así $\eta_{2_i}^R(N_0, C) = \eta_{2_j}^R(N_0, C)$.

- **Reparto igualitario de costos extras:** Bajo los supuestos de este axioma, todos los agentes tienen el mismo mínimo costo de conexión, que será, de hecho, el costo de su conexión directa a la fuente. Al aumentar éste, las demandas de todos los agentes seguirán también iguales entre ellas; en ambos casos el costo del *mt* es cubierto de manera igualitaria entre los agentes debido a la propiedad de trato igualitario de $R(E^*, c_0^*)$ y por ello distribuyen igualitariamente los costos extras.

b):
Basta exhibir un *mcstp* (N_0, C) para el cual no se cumpla cada una de las propiedades.

- **Selección de núcleo:** Consideremos el problema (N_0, C_4) y $S = \{1, 2\}$ vemos que $\eta_2^R(N_0, C_4)$ no cumple con el axioma de selección de núcleo para ninguna de las cuatro soluciones $R(E^*, c_0^*)$, pues $\sum_{i \in S} \eta_{2_i}^R(N_0, C_4) = \frac{10}{3} > m(S_0, C) = 3$.

- **Solidaridad:** Si consideramos los problemas (N_0, C_1) y (N_0, C_2), los cuáles sólo difieren en el costo de la conexión directa del agente 2, podemos observar que $\eta_2^R(N_0, C)$ no cumple con *SOL*, pues $C_1 \leq C_2$ pero $\eta_{2_3}^R(N_0, C_1) > \eta_{2_3}^R(N_0, C_2)$.

- **Monotonía de la población:** Considerando el problema (N_0, C_4) y $S = \{1, 2\}$, se observa que $\eta_2^R(N_0, C)$ no cumple con *PM*, para ninguna de las cuatro soluciones $R(E^*, c_0^*)$, ya que $\eta_{2_1}^R(N_0, C_4) = \frac{5}{3} > \frac{3}{2} = \eta_{2_1}^R(S_0, C_4)$.

- **Separabilidad:** El *mcstp* (N_0, C_4), es tal que $m(N_0, C_4) = 5 = m(\{1, 2\}_0, C_4) + m(\{3\}_0, C_4) = 3 + 2$ pero $\eta_2^R(N_0, C_4) \neq \eta_2^R(\{1, 2\}_0, C_4) + \eta_2^R(\{3\}_0, C_4)$.

- **Independencia de otros costos:** Considerando los *mcstp* (N_0, C_1) y (N_0, C_2), vemos que $\eta_2^R(N_0, C)$ no satisface este axioma, ya que la única diferencia entre ambos problemas es el costo de conexión directa del agente 2; sin embargo, este cambio genera modificaciones en las asignaciones de los demás agentes.

- **Independencia de árboles irrelevantes:** Los problemas (N_0, C_1) y (N_0, C_2) son árbol-equivalentes, pero las asignaciones $\eta_2^R(N_0, C_1)$ y $\eta_2^R(N_0, C_2)$ difieren entre ellas.

c):

- **Racionalidad individual:** Este axioma es cumplida por $\eta_2^{Ig}(N_0, C)$ debido a que el agente paga inicialmente c_{i0}^* que por definición es menor o igual a c_{0i} y posteriormente esta cantidad es reducida en una proporción del beneficio de la cooperación.

- **Continuidad:** $\eta_2^{Ig}(N_0, C)$ es continua, ya que pequeños cambios en C, provocarán pequeños cambios en los términos de $\eta_2^{Ig}(N_0, C)$.

- **Simetría:** Dado un *mcstp* (N_0, C), dos agentes i, j simétricos se cumplirá que $c^*_{i0} = c^*_{j0}$, estás cantidades son disminuidas en la misma cantidad de acuerdo al ahorro, así $\eta^{Ig}_{2_i}(N_0, C) = \eta^{Ig}_{2_j}(N_0, C)$.

- **Reparto igualitario de costos extras:** Se cumple por la naturaleza igualitaria de η^{Ig}_2.

d):

- **Selección de núcleo:** Consideremos el problema (N_0, C_4) y $S = \{1, 2\}$ vemos que $\eta^{Ig}_2(N_0, C_4)$ no cumple con el axioma de selección de núcleo, pues $\sum_{i \in S} \eta^{Ig}_{2_i}(N_0, C_4) = \frac{10}{3} > m(S_0, C) = 3$.

- **Monotonía de costos:** Considerando los problemas (N_0, C_5) y (N_0, C_6), los cuáles difieren únicamente en el valor de la entrada c_{13}, siendo $C_5 < C_6$, tenemos $\eta^{Ig}_{2_1}(N_0, C_5) = -\frac{1}{3} > -\frac{2}{3} = \eta^{Ig}_{2_1}(N_0, C_6)$; queda probado el no cumplimiento de *CM*.

- **Solidaridad:** Si consideramos los problemas (N_0, C_5) y (N_0, C_6), $\eta^{Ig}_2(N_0, C)$ no satisface *SOL* por la misma razón por la que no satisface *CM*.

- **Monotonía de la población:** Considerando el problema (N_0, C_4) y $S = \{1, 2\}$, se observa que $\eta^{Ig}_2(N_0, C)$ no cumple con *PM*, ya que $\eta^{Ig}_{2_1}(N_0, C_4) = \frac{5}{3} > \frac{3}{2} = \eta^{Ig}_{2_1}(S_0, C_4)$.

- **Positividad:** El problema (N_0, C_5) prueba el incumplimiento, pues $\eta^{Ig}_{2_1}(N_0, C_5) < 0$.

- **Separabilidad:** El *mcstp* (N_0, C_4), es tal que $m(N_0, C_4) = 5 = m(\{1, 2\}_0, C_4) + m(\{3\}_0, C_4) = 3 + 2$ pero $\eta^{Ig}_2(N_0, C_4) \neq \eta^R_2(\{1, 2\}_0, C_4) + \eta^{Ig}_2(\{3\}_0, C_4)$.

- **Independencia de otros costos:** Considerando los *mcstp* (N_0, C_5) y (N_0, C_6), vemos que $\eta^{Ig}_2(N_0, C)$ no satisface esta propiedad, ya que la única diferencia entre ambos problemas es el costo de conexión c_{13}; sin embargo, este cambio genera una alteración en la asignación del agente 2.

- **Independencia de árboles irrelevantes:** Los problemas (N_0, C_5) y (N_0, C_6) son árbol-equivalentes, pero las asignaciones $\eta^{Ig}_2(N_0, C_4)$ y $\eta^{Ig}_2(N_0, C_5)$ son distintas.

□

Nota importante: Una proposición similar (sustituyendo IR y CS por IR^* y CS^*, respectivamente) particularmente para $\alpha^{CEL}(N_0, C) = \eta^{CEL}_2(N_0, C)$ a la anterior es expuesta en Giménez-Gómez et al. [2020], sin embargo en la obra referida se afirma el cumplimiento de *SOL* e *IIT*, mientras que en el presente documento se proporcionó un ejemplo claro que lo contradice.
En el artículo señalado, se presenta la prueba de que el axioma de *CM* se cumple como una implicación del axioma de *SOL*; sin embargo, éste no se satisface en realidad, lo que invalida dicho argumento. A pesar de ello, el axioma de *CM* resulta satisfecho, aunque por razones distintas a las planteadas en el artículo.

La siguiente tabla resume los axiomas cumplidos por $\eta_2(N_0, C)$.

Axioma	$\eta_2^{CEA}(N_0, C)$	$\eta_2^{CEL}(N_0, C)$	$\eta_2^{Prop}(N_0, C)$	$\eta_2^{T}(N_0, C)$	$\eta_2^{Ig}(N_0, C)$
CS	No	No	No	No	No
IR	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí
CM	Sí	Sí	Sí	Sí	No
SOL	No	No	No	No	No
PM	No	No	No	No	No
CON	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí
POS	Sí	Sí	Sí	Sí	No
SEP	No	No	No	No	No
SYM	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí
IOC	No	No	No	No	No
ESEC	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí
IIT	No	No	No	No	No

Cuadro 4.4: Axiomas de las asignaciones $\eta_2^{R}(N_0, C)$ y $\eta_2^{Ig}(N_0, C)$.

Capítulo 5

Algunas clases de *mcstp* relevantes

En este capítulo, se estudian clases particulares de *mcstp* en las cuales las reglas de asignación satisfacen propiedades específicas de racionalidad. Estos resultados son fundamentales para entender cómo ciertas características estructurales de las redes influyen en la distribución de costos, proporcionando una base teórica para analizar escenarios particulares con restricciones bien definidas.

En el capítulo anterior se demostró que, en general, no existe una asignación de costos que cumpla simultáneamente las propiedades de *Racionalidad individual* y *Ordenamiento por contribuciones marginales* para todos los *mcstp*. Esta incompatibilidad motiva la búsqueda de una clase específica de problemas en la que sí sea posible construir una asignación que respete ambas propiedades. En este capítulo, proponemos una condición suficiente para la existencia de dicha asignación y mostramos un procedimiento para su construcción en problemas que cumplen con esta condición.
Además se mostró también que, en general, las asignaciones $\eta_1^R(N_0, C)$ y $\eta_2^R(N_0, C)$ no cumplen *Selección de núcleo*. En este capítulo se definirán algunas clases específicas de *mcstp* para los cuales las dos asignaciones propuestas satisfacen este importante axioma.

5.1. Clase de *mcstp* con una asignación que satisface Racionalidad individual y Ordenamiento por contribuciones marginales

Recordemos que la propiedad de *Ordenamiento por contribuciones marginales* establece que la asignación debe respetar el ranking de los agentes según su contribución marginal al costo total del árbol, mientras que la *Racionalidad individual* garantiza que ningún agente pague más que su costo de conexión directa a la fuente. La siguiente proposición establece dos condiciones que en conjunto son suficientes para asegurar la existencia de una asignación $\psi(N_0, C)$ que cumpla con ambas propiedades.

Sea $P_1, P_2 \in \Pi_n$ con P_1 una permutación que ordena de manera decreciente a los agentes de acuerdo a sus contribuciones marginales a la gran coalición y P_2 una permutación que ordena a los agentes de manera decreciente de acuerdo al costo de sus conexiones directas, usando como criterio de desempate la contribución marginal a la gran coalición.

Proposición 4. *Si el problema* (N_0, C) *cumple con las siguientes condiciones:*
a) $m(N_0, C) - m(N_0 \setminus \{i\}, C) \neq m(N_0, C) - m(N_0 \setminus \{j\}, C)$ *para todo* $i, j \in N, i \neq j$
b) $P_1 = P_2$,
entonces existe una asignación $\psi(N_0, C)$ *que satisface tanto el ordenamiento por contribuciones marginales como la racionalidad individual.*

Demostración. La prueba de esta proposición es la construcción de una $\psi(N_0, C)$ para un *mcstp* (N_0, C) que satisface la condición suficiente.

Se procederá mediante la definición de un algoritmo de construcción de una regla que satisface IR y OMC.

Dado un problema (N_0, C) que satisface las condiciones *a)* y *b)*, podemos construir una asignación $\psi(N_0, C)$ que respete tanto el ordenamiento como la racionalidad individual siguiendo estos pasos:

1. **Ordenar los Agentes:**
   - Ordenar los agentes $i \in N$ en orden decreciente respecto a sus contribuciones marginales a la gran coalición. Es decir, encontrar P_1. A partir de aquí, por simplicidad denotaremos $P_1 = P$.
2. **Asignación Secuencial por Pasos:**
   - Inicializar las asignaciones en cero, es decir, $\psi_i^{(0)} = 0$ para cada agente $i \in N$. Y $m^{(0)} = m(N_0, C)$.
   - Si $c_{P_{(1)}0}$ es mayor que el costo restante $m^{(0)} - \sum_{j=1}^{n} \psi_j^{(0)}$, asignar a $P_{(1)}$ el costo restante, de modo que:
   $$\psi_{P_{(1)}}^{(1)} = m^{(0)} - \sum_{j=1}^{n} \psi_j^{(0)},$$
   mientras que, las asignaciones para el resto de agentes $i \neq P_{(1)}$:
   $$\psi_i^{(1)} = \psi_i^{(0)}$$
   y detener el proceso de asignación.
   - Si el costo de conexión directa $c_{P_{(1)}0}$ es menor o igual al costo restante del árbol, $m^{(0)} - \sum_{j=1}^{n} \psi_j^{(0)}$, asignar al agente $P_{(1)}$ su costo de conexión directa:
   $$\psi_{P_{(1)}}^{(1)} = c_{P_{(1)}0},$$
   mientras que, las asignaciones para el resto de agentes $i \neq P_{(1)}$ estarán dadas por
   $$\psi_i^{(1)} = \psi_i^{(0)}.$$
   - Si $c_{P_{(2)}0}$ es mayor que el costo restante $m^{(0)} - \sum_{j=1}^{n} \psi_j^{(1)}$, asignar a $P_{(2)}$ el costo restante, de modo que:
   $$\psi_{P_{(2)}}^{(2)} = m^{(0)} - \sum_{j=1}^{n} \psi_j^{(1)},$$

mientras que, las asignaciones para el resto de agentes $i \neq P_{(2)}$, :

$$\psi_i^{(2)} = \psi_i^{(1)}$$

y detener el proceso de asignación.

- Si el costo de conexión directa $c_{P_{(2)}0}$ es menor o igual al costo restante del árbol, $m^{(0)} - \sum_{j=1}^{n} \psi_j^{(1)}$, asignar al agente $P_{(2)}$ su costo de conexión directa:

$$\psi_{P_{(2)}}^{(2)} = c_{P_{(2)}0},$$

mientras que, las asignaciones para el resto de agentes $i \neq P_{(2)}$ estarán dadas por

$$\psi_i^{(2)} = \psi_i^{(1)}.$$

- Continuar hasta que el costo total $m(N_0, C)$ sea cubierto.

El algoritmo asigna al agente $P_{(k)}$ la mayor cantidad posible siempre que

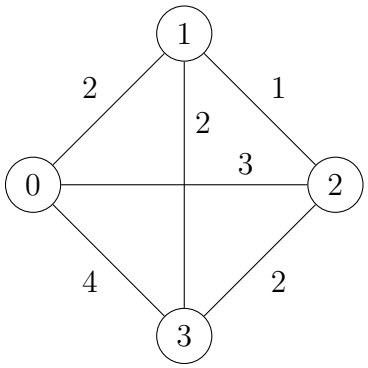
$$\sum_{i=1}^{k} \psi_{P(i)}(N_0, C) \leq m(N_0, C)$$

considerando que $\psi_{P(l)}(N_0, C) = 0$ para todo $l > k$. □

Este procedimiento asegura que cada agente reciba una asignación que respete su contribución marginal (según el ranking dado por la coincidencia) y cumpla la racionalidad individual, ya que ningún agente paga más que su conexión directa.

Ejemplo 9. Consideremos (N_0, C) definido por la siguiente matriz

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$



- Las contribuciones marginales son:
  $CM_1 = 5 - 5 = 0$,
  $CM_2 = 5 - 4 = 1$,
  $CM_3 = 5 - 3 = 2$.
- El ranking por contribuciones marginales es $P_1 = (3, 2, 1)$.
- El ranking por conexiones directas es $P_2 = (3, 2, 1)$.
- Luego, este *mcstp* cumple con *a)* y *b)*.

Aplicando el algoritmo, tenemos en el paso inicial que $\psi^{(0)} = (0, 0, 0)$, $m^{(0)} = 5$. Como $c_{P_{(1)}0} = c_{30} = 4 < m^{(0)} - \sum_{j=1}^{n} \psi_j^{(0)} = 5 - 0$, entonces $\psi_{P_{(1)}}^{(1)} = \psi_3^{(1)} = c_{30} = 4$, $\psi_2^{(1)} = \psi_1^{(1)} = 0$.

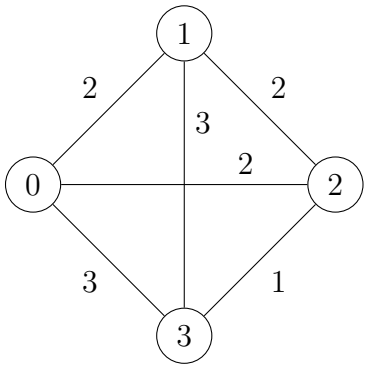
Ahora, como $c_{P_{(2)}0} = c_{20} = 3 > m^{(0)} - \sum_{j=1}^{n} \psi_j^{(1)} = 5-4 = 1$, entonces $\psi_{P_{(2)}}^{(2)} = \psi_2^{(2)} = 5-4 = 1$ mientras que $\psi_3^{(2)} = 4$ y $\psi_1^{(2)} = 0$. Se ha cubierto el costo total del *mt* y la asignación es $\psi(N_0, C) = (0, 1, 4)$, esta asignación claramente cumple con *ordenamiento por contribuciones marginales* y *racionalidad individual*.

La condición de que las *contribuciones marginales de los agentes sean distintas* es crucial; sin esta condición, agentes con la misma contribución marginal recibirían asignaciones idénticas, lo cual podría resultar insuficiente para cubrir el costo total del *mt*.

Esta condición es suficiente, pero no necesaria, ya que existen problemas en los que los rankings no coinciden y aún así es posible construir una asignación que cumpla ambas propiedades.

Ejemplo 6. Consideremos (N_0, C) definido por la siguiente matriz:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



- Las contribuciones marginales son:
  $CM_1 = 5 - 3 = 2$,
  $CM_2 = 5 - 5 = 0$,
  $CM_3 = 5 - 4 = 1$.
- El ranking por contribuciones marginales es $P_1 = (1, 3, 2)$.
- El ranking por conexiones directas es $P_2 = (3, 1, 2)$.
- Luego, este *mcstp* no cumple con *b)*.

Sin embargo, la asignación $\psi(N_0, C) = (2, 1, 2)$ es racional individual y cumple con el ordenamiento por contribuciones marginales.

5.2. Clases de *mcstp* tal que $\eta^{\mathbf{R}}(\mathbf{N_0}, \mathbf{C})$ cumplen Selección de núcleo

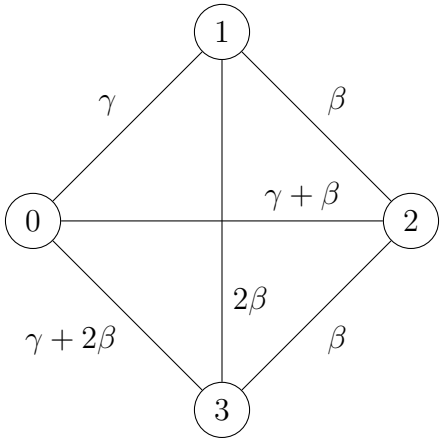
El cumplimiento del axioma de *CS* garantiza que la asignación de costos es tal que ningún subconjunto de agentes puede mejorar unilateralmente, lo cual es fundamental para la estabilidad de la solución. Al restringir el tipo de problemas (N_0, C) considerados, puede probarse que $\eta_1^R(N_0, C)$ y $\eta_2^R(N_0, C)$ respetan la propiedad *CS*.

5.2.1. *mcstp* lineales

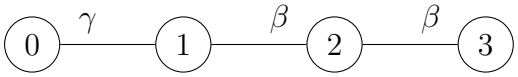
Consideremos el problema (N_0, C) tal que la matriz de costos $C = (c_{ij})_{i,j \in N_0}$ está definida por:

$$c_{ij} = \begin{cases} \beta|j-i|, & \text{si } i \neq 0 \text{ y } j \neq 0, \\ \gamma + \beta(j-1), & \text{si } i = 0 \text{ y } j \neq i, \\ \gamma + \beta(i-1), & \text{si } j = 0 \text{ y } i \neq j. \end{cases} \quad , \tag{5.1}$$

Este tipo específico de *mcstp* corresponde a aquellos casos donde el *mt* sigue una estructura lineal formada por las conexiones $\{(0,1),(1,2),(2,3),(3,4),\ldots,(n-1,n)\}$, con un costo de conexión de $\gamma > 0$ entre la fuente y el primer nodo $(0,1)$, y un costo uniforme $\beta > 0$ para el resto de las conexiones en el árbol. Además, los costos fuera del *mt* se completan considerando el costo del camino dentro del *mt* que conecta a los nodos correspondientes. Por ejemplo, en el caso $N = \{1,2,3\}$ el grafo que representa el problema (N_0, C) es mostrado en la figura 5.1.



(a) Red completa que representa (N_0, C).



(b) Árbol de expansión de mínimo costo de (N_0, C).

Figura 5.1

Notamos que para esta clase de problemas el costo de conexión directa del agente i coincide con el costo de conexión de menor costo, es decir:

$$c_{i0} = c^*_{i0} = \min_{P_{i0}} \left\{ \sum_{(i,j) \in P_{i0}} c_{ij} \right\} = \gamma + (i-1)\beta.$$

Proposición 5. *Si $R \in \{CEA, CEL, Prop, T\}$ y C se define como en* (5.1) *, entonces $\eta^R_1(N_0, C)$ y $\eta^R_2(N_0, C)$ cumplen con el axioma de Selección de núcleo.*

Demostración. Sea $S \subset N$ e $i_s \in S$ el agente con mayor costo de conexión directa a la fuente. De esta manera $m(S_0, C) = \gamma + (i_s - 1)\beta$.

Se procederá por inducción sobre i_s, los argumentos siguientes aplican tanto para $\eta_1(N_0, C)$ como para $\eta_2(N_0, C)$, así que para reducir notación se escribirá simplemente $\eta(N_0, C)$.

Caso base $\mathbf{i_s = 1}$:
Si $i_s = 1$ entonces $S = \{1\}$, luego, por racionalidad individual,

$$\sum_{i \in S} \eta_i(N_0, C) = \eta_1(N_0, C) \leq c_{10} = \gamma = m(N_0, C).$$

Paso inductivo:
Hipótesis de inducción: Si $i_{s'} = m$, entonces

$$\sum_{i \in S'} \eta_i(N_0, C) \leq m(S'_0, C) = \gamma + (m-1)\beta.$$

Por demostrar: Si $i_s = m + 1$ entonces

$$\sum_{i \in S} \eta_i(N_0, C) \leq m(S_0, C) = \gamma + m\beta.$$

Supongamos lo contrario, $i_s = m + 1$ pero

$$\sum_{i \in S} \eta_i(N_0, C) > m(S_0, C) = \gamma + m\beta.$$

$$\Rightarrow \sum_{i \in S \setminus \{m+1\}} \eta_i(N_0, C) + \eta_{m+1}(N_0, C) > \gamma + m\beta$$

$$\Rightarrow \sum_{i \in S \setminus \{m+1\}} \eta_i(N_0, C) > \gamma + m\beta - \eta_{m+1}(N_0, C)$$

Luego, por hipótesis de inducción y *positividad*

$$\gamma + (m-1)\beta \geq \sum_{i=1}^{m} \eta_i(N_0, C) \geq \sum_{i \in S \setminus \{m+1\}} \eta_i(N_0, C) > \gamma + m\beta - \eta_{m+1}(N_0, C)$$

$$\Rightarrow \gamma + (m-1)\beta > \gamma + m\beta - \eta_{m+1}(N_0, C)$$

$$\Rightarrow \beta < \eta_{m+1}(N_0, C).$$

Por la propiedad de *preservación de orden* cumplida por R, como $c_{j0} > c_{(m+1)0}$ para todo $j > m + 1$ entonces $\eta_j(N_0, C) \geq \eta_{m+1}(N_0, C) > \beta$ para todo $j > m + 1$. Así que

$$\sum_{i=m+2}^{n} \eta_i(N_0, C) > (n - (m+1))\beta,$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \eta_i(N_0, C) = \sum_{i=1}^{m+1} \eta_i(N_0, C) + \sum_{i=m+2}^{n} \eta_i(N_0, C) &\geq \sum_{i \in S} \eta_i(N_0, C) + \sum_{i=m+2}^{n} \eta_i(N_0, C) \\
&> \gamma + m\beta + (n - (m+1))\beta \\
&= \gamma + (n-1)\beta \\
&= m(N_0, C).
\end{aligned}$$

$\sum_{i=1}^{n} \eta_i(N_0, C) > m(N_0, C)$ contradice la *eficiencia* necesaria en la definición de regla de asignación.
El supuesto es falso, así que si $i_s = m + 1$, entonces:

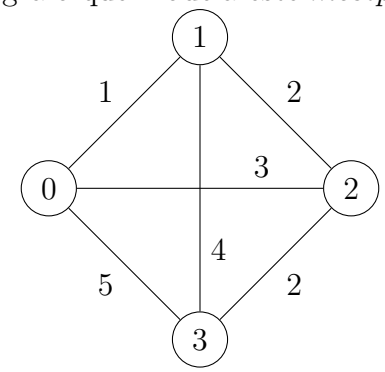
$$\sum_{i \in S} \eta_i(N_0, C) \leq m(S_0, C) = \gamma + m\beta.$$

□

Nota importante: En Giménez-Gómez et al. [2020] esta misma clase de problemas es exhibida como una clase de *mcstp* (N_0, C) para los cuáles $\alpha^{CEL}(N_0, C) = \eta_2^{CEL}(N_0, C)$ satisface CS^*. Un claro aporte en este documento es justamente la Proposición 5, en la que además de CEL se toman en cuenta las soluciones CEA, T y Prop. De hecho, en la argumentación de la prueba expuesta aquí no se usa la forma explícita de las reglas de asignaciones sino una propiedad clave cumplida por la solución de problema de bancarrota correspondiente, la *Preservación de orden*. Esto subraya la importancia de las propiedades axiomáticas generales sobre las formas específicas de las reglas, permitiendo una mayor generalidad en ciertos resultados.

Ejemplo 7. Consideremos el *mcstp* (N_0, C) con C definido como en (5.1) para $N = \{1, 2, 3\}$, $\gamma = 1$ y $\beta = 2$.

El grafo que modela este *mcstp* es:



Se tiene que:
$c_0^* = c_0 = (1, 3, 5)$
$E = m(N_0, C) = 5$
$E^* = 9 - 5 = 4$

Y las soluciones asociadas resultan:

R	CEA	CEL	$Prop$	T
$\eta_1(N_0, C)$	$(1, 2, 2)$	$\left(0, \frac{3}{2}, \frac{7}{2}\right)$	$\left(\frac{5}{9}, \frac{15}{9}, \frac{25}{9}\right)$	$\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 3\right)$
$\eta_2(N_0, C)$	$\left(0, \frac{3}{2}, \frac{7}{2}\right)$	$(1, 2, 2)$	$\left(\frac{5}{9}, \frac{15}{9}, \frac{25}{9}\right)$	$\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 3\right)$

Cabe señalar que el tipo de problemas (N_0, C) definido por (5.1) puede ampliarse considerablemente al introducir una condición más flexible sobre los costos de conexión entre los agentes consecutivos. En particular, si $\beta_k = c_{(k-1)k}$ y se impone la condición $\beta_k \geq \beta_{k+1}$ para todo $k \in N$, se incluye un conjunto más general de problemas en los que los costos decrecen o permanecen constantes a medida que las conexiones avanzan en el árbol. Esta extensión

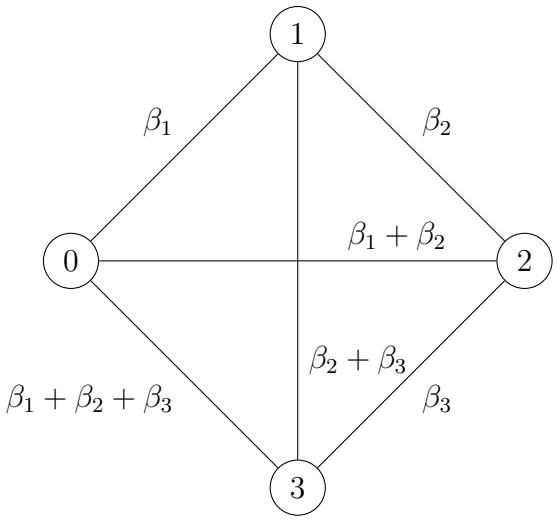
mantiene la estructura del problema original y permite analizar casos más flexibles, donde los costos no son uniformes pero siguen una relación ordenada. Formalmente, consideremos la matriz simétrica $C = (c_{ij})_{i,j \in N_0}$ dada por:

$$c_{ij} = \begin{cases} \sum_{k=i+1}^{j} \beta_k, & \text{si } i+1 \leq j, \\ 0, & \text{si } i = j, \\ \sum_{k=j+1}^{i} \beta_k, & \text{si } j+1 \leq i. \end{cases}, \tag{5.2}$$

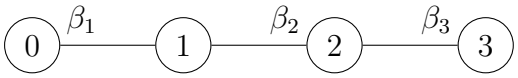
Al ser C una matriz simétrica con los valores de la diagonal principales iguales a cero, (N_0, C) es un *mcstp*.

Nuevamente notamos que este tipo específico de *mcstp* corresponde a los casos donde el *mt* tiene una estructura lineal formada por las conexiones $\{(0,1),(1,2),(2,3),(3,4),\ldots,(n-1,n)\}$, con un costo de conexión β_i para las conexiones $(i-1,i)$ en el *mt*. Además, los costos de la red se completan considerando el costo del camino que conecta a los nodos correspondientes. dentro del *mt*.

Como ejemplo, el grafo que representa el problema (N_0, C) con $N = \{1,2,3\}$ es mostrado en la figura 5.3.



(a) Grafo que representa a (N_0, C).



(b) Árbol de expansión de mínimo costo de (N_0, C).

Figura 5.3

Proposición 6. *Si $R \in \{CEA, CEL, Prop, T\}$, C se define como en (5.2) y $\beta_i \geq \beta_{i+1}$, entonces $\eta_1^R(N_0, C)$ y $\eta_2^R(N_0, C)$ cumplen el axioma de Selección de núcleo.*

Demostración. Consideremos $S \subseteq N$ y sea $i_s \in S$ el agente con el mayor costo de conexión directa a la fuente. En este caso, el costo mínimo de conectar el conjunto S a la fuente es $m(S_0, C) = \sum_{i=1}^{i_s} \beta_i$

La demostración se realiza mediante inducción sobre i_s. En los argumentos siguientes, se utilizará simplemente $\eta(N_0, C)$ para representar la asignación, ya que los razonamientos son válidos tanto para $\eta_1(N_0, C)$ como para $\eta_2(N_0, C)$.

Caso base: $i_s = 1$**.**
Si $i_s = 1$, entonces $S = \{1\}$, y por la propiedad de *racionalidad individual*, tenemos:

$$\sum_{i \in S} \eta_i(N_0, C) = \eta_1(N_0, C) \leq c_{10} = \beta_1 = m(S_0, C).$$

Paso inductivo:
Supongamos como hipótesis de inducción que, si $i_{s'} = m$, entonces:

$$\sum_{i \in S'} \eta_i(N_0, C) \leq m(S'_0, C) = \sum_{k=1}^{m} \beta_k.$$

Debemos probar que si $i_s = m + 1$, entonces:

$$\sum_{i \in S} \eta_i(N_0, C) \leq m(S_0, C) = \sum_{k=1}^{m+1} \beta_k.$$

Supongamos, en busca de contradicción, que $i_s = m + 1$ pero:

$$\sum_{i \in S} \eta_i(N_0, C) > m(S_0, C) = \sum_{k=1}^{m+1} \beta_k$$

Esto implica que:

$$\sum_{i \in S \setminus \{m+1\}} \eta_i(N_0, C) + \eta_{m+1}(N_0, C) > \sum_{k=1}^{m+1} \beta_k,$$

$$\Rightarrow \sum_{i \in S \setminus \{m+1\}} \eta_i(N_0, C) > \sum_{k=1}^{m+1} \beta_k - \eta_{m+1}(N_0, C).$$

Por la hipótesis de inducción y el axioma de *positividad*, se tiene:

$$\sum_{k=1}^{m} \beta_k \geq \sum_{i=1}^{m} \eta_i(N_0, C) \geq \sum_{i \in S \setminus \{m+1\}} \eta_i(N_0, C) > \sum_{k=1}^{m+1} \beta_k - \eta_{m+1}(N_0, C).$$

Por lo tanto:

$$\sum_{k=1}^{m} \beta_k > \sum_{k=1}^{m+1} \beta_k - \eta_{m+1}(N_0, C),$$

$$\Rightarrow \beta_{m+1} < \eta_{m+1}(N_0, C).$$

Por el axioma de *preservación de orden* de R, dado que $c_{j0} > c_{(m+1)0}$ para todo $j > m+1$, se cumple que $\eta_j(N_0, C) \geq \eta_{m+1}(N_0, C) > \beta_{m+1}$. Así, para los agentes $j > m + 1$:

$$\sum_{i=m+2}^{n} \eta_i(N_0, C) > (n - (m + 1))\beta_{m+1}.$$

Sumando todas las asignaciones:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \eta_i(N_0, C) &= \sum_{i=1}^{m+1} \eta_i(N_0, C) + \sum_{i=m+2}^{n} \eta_i(N_0, C) \\
&\geq \sum_{i \in S} \eta_i(N_0, C) + \sum_{i=m+2}^{n} \eta_i(N_0, C) \\
&> \sum_{k=1}^{m+1} \beta_k + (n - (m+1))\beta_{m+1} \\
&\geq \sum_{k=1}^{m+1} \beta_k + \sum_{k=m+2}^{n} \beta_k \\
&= m(N_0, C)
\end{aligned}$$

Esto contradice la propiedad de *eficiencia* de η, ya que:

$$\sum_{i=1}^{n} \eta_i(N_0, C) > m(N_0, C).$$

Por lo tanto, el supuesto es falso, y se concluye que, si $i_s = m + 1$, entonces:

$$\sum_{i \in S} \eta_i(N_0, C) \leq m(S_0, C) = \sum_{k=1}^{m+1} \beta_k.$$

□

Observación. Los razonamientos utilizados en la demostración de las dos proposiciones anteriores permiten concluir que, para este tipo específico de problemas, la única condición necesaria sobre R (la solución al problema de bancarrota correspondiente) para garantizar que $\eta_1^R(N_0, C)$ y $\eta_2^R(N_0, C)$ satisfagan la propiedad de *Selección de núcleo* es *Preservación de orden*. Por lo tanto, si (N_0, C) pertenece a alguna de las clases de problemas definidas en esta sección, las asignación $\eta_1^R(N_0, C)$ y $\eta_2^R(N_0, C)$ cumplirán con la propiedad de *Selección de núcleo* para cualquier regla R que verifique *Preservación de orden.*

En estos tipos de *mcstp*, la estructura lineal del *mt* y la forma en que se definen los costos aseguran que ningún agente tenga un incentivo para conectarse a través de otros agentes. Esto se debe a que el costo de conexión entre cualquier par de nodos es simplemente el costo acumulado de las aristas en el camino dentro del *mt*. Por lo tanto, cada agente pagaría el mismo costo independientemente de si se conecta directamente o a través de otros agentes, eliminando cualquier beneficio potencial por establecer conexiones indirectas. Esta característica refuerza la estabilidad de las asignaciones $\eta_1^R(N_0, C)$ y $\eta_2^R(N_0, C)$, ya que ningún subconjunto de agentes puede reducir colectivamente sus costos al reorganizar sus conexiones.

Una situación en que es aplicable esta clase de *mcstp* es cuando el costo de conexión depende únicamente la distancia recorrida para el abastecimiento del servicio, más específicamente en casos donde los agentes están situados en una línea recta sobre un terreno que no presente irregularidades significativas; donde la distancia entre los agentes situados consecutivamente es no creciente.

5.2.2. Clase de *2-mcstp*

Los 2-*mcstp* son una clase de *mcstp* donde el costo entre cada par de nodos distintos está restringido a tomar únicamente dos valores posibles: un costo bajo k_1 o un costo alto k_2. Es decir, $c_{ij} \in \{k_1, k_2\}$ para todo $i, j \in N_0$ con $i \neq j$. En la siguiente proposición se considera un tipo especial de 2-*mcstp*.

Proposición 7. *Sea (N_0, C) un 2-mcstp tal que $c_{ij} = k_1$ si $i, j \neq 0$, $c_{i0} = k_2$ para todo $i \in N$ y $0 \leq k_1 \leq k_2$. Si R es una solución de problemas de bancarrota que verifica Igualdad de trato, entonces $\eta_1^R(N_0, C)$ y $\eta_2^R(N_0, C)$ cumplen CS.*

Demostración. Se tiene que $m(N_0, C) = k_2 + (n-1)k_1$ y $c_{i0}^* = k_2 = c_{i0}$ para todo $i \in N$. Los argumentos siguientes aplican tanto para $\eta_1^R(N0, C)$ como para $\eta_2^R(N_0, C)$, así que se denotará únicamente como $\eta^R(N_0, C)$.
Como todos los agentes tienen la misma demanda, por la propiedad de *Igualdad de trato*, para todo $i \in N$ se tiene

$$\eta_i^R(N_0, C) = \frac{m(N_0, C)}{n} = \frac{k_2 + (n-1)k_1}{n},$$

además para todo $S \subseteq N$, $m(S_0, C) = k_2 + (s-1)k_1$ donde $s = |S|$.

$$\sum_{i \in S} \eta_i^R(N_0, C) = \sum_{i \in S} \frac{k_2 + (n-1)k_1}{n} \leq k_2 + (s-1)k_1 = m(S_0, C).$$

□

Nota importante: La prueba para $\alpha^{CEL} = \eta_2^{CEL}$ es presentada en Giménez-Gómez et al. [2020], sin embargo ésta es extendida aquí para η_1^R y η_2^R con R cualquier solución con *Igualdad de trato.*

Los *mcstp* bipersonales representan un caso trivial en el que las asignaciones $\eta_1^R(N_0, C)$ y $\eta_2^R(N_0, C)$ cumplen CS.

Proposición 8. *Sea un mcstp (N_0, C) con $n = 2$, y R cualquier solución de problema de bancarrota, entonces $\eta_1^R(N_0, C)$ y $\eta_2^R(N_0, C)$ satisfacen CS.*

Demostración. La proposición es implicación directa del axioma IR satisfecho por ambas reglas de asignación. □

Capítulo 6

Dos asignaciones basadas en distribución equitativa de excedentes

En el contexto de los *mcstp*, resulta valioso adaptar principios de asignación de costos desarrollados en áreas como la teoría de juegos cooperativos para proponer soluciones que equilibren equidad y eficiencia. Este capítulo presenta dos soluciones desarrolladas por Van Den Brink and Funaki [2009], la solución CIS (Centre-of-gravity of the Imputation-Set) y la solución $ENSC$ (Egalitarian Non- Separable Contribution), analizando las propiedades clave que cumplen y sus implicaciones en términos de asignación de costos. Además, se definen clases específicas *mcstp* diseñadas para garantizar la propiedad de Selección de Núcleo (CS), explorando cómo estas estructuras influyen en la estabilidad y cooperación dentro de la red. Este análisis permite evaluar tanto las fortalezas como las limitaciones de las soluciones propuestas en distintos contextos.

Solución CIS en el contexto de *mcstp*

La solución *CIS* asigna a cada agente el costo de su conexión directa a la red, denotado como c_{0i}, y reparte equitativamente entre todos los agentes la diferencia entre el costo total del *mt* $m(N_0, C)$ y la suma de los costos de las conexiones directas. Formalmente, la asignación de la solución CIS para un agente i se define como:

$$\mathrm{CIS}_i(N_0, C) = c_{0i} + \frac{1}{|N|}\left(m(N_0, C) - \sum_{j \in N} c_{0j}\right)$$

De hecho, debido a la construcción del *mt*, el término entre paréntesis es no positivo, de manera que esta solución asegura que todos los agentes obtengan una parte igual del beneficio de la cooperación. Cada agente $i \in N$ aporta en un inicio el costo de su conexión directa c_{0i}, luego se construye un *mt*, el cual, por definición tendrá un costo menor o igual que la suma de las aportaciones iniciales $m(N_0, C) \leq \sum_{j \in N} c_{0j}$, así la cantidad $m(N_0, C) - \sum_{j \in N} c_{0j} \leq 0$ representa el ahorro conjunto mediante el cual los agentes se benefician de la cooperación de todo el grupo; finalmente, este ahorro se distribuye equitativamente entre todos los agentes.

Solución ENSC en el contexto de *mcstp*

La solución *ENSC* es una adaptación de la solución *CIS* que considera las conexiones y contribuciones de los agentes a partir del ahorro generado por sus conexiones indirectas. La

asignación ENSC de un agente i se define como:

$$\begin{aligned}\mathrm{ENSC}_i(N_0, C) &= m(N_0, C) - m(N \setminus \{i\}, C) + \frac{1}{|N|}\left(m(N_0, C) - \sum_{j \in N}(m(N_0, C) - m(N \setminus \{j\}, C))\right) \\ &= -m(N_0 \setminus \{i\}, C) + \frac{1}{|N|}\left(m(N_0, C) + \sum_{j \in N} m(N_0 \setminus \{j\}, C)\right)\end{aligned}$$

donde $m(N_0 \setminus \{i\}, C)$ representa el costo del *mt* una vez que el agente i es removido de la red.

En este caso, la solución *ENSC* asigna a cada agente su *contribución marginal* al grupo $m(N_O, C) - m(N_0 \setminus \{i\}, C)$ y después distribuye la diferencia $m(N_O, C) - \sum_{j \in N}[m(N_O, C) - m(N_0 \setminus \{j\}, C)]$ de manera equitativa entre los agentes.

Mientras que la solución $CIS(N_0, C)$ se enfoca en distribuir equitativamente el ahorro después de que los costos directos son pagados, la solución $ENSC(N_0, C)$ busca dividir el costo (o ahorro) restante después de que cada agente aporta su contribución marginal al grupo. Así, ambas soluciones buscan establecer una forma justa de repartir los costos entre los agentes en un *mcstp*, una considerando sus costos de conexión directa y otra el valor que aportan al grupo en términos del cambio en el costo total de conexión.
Es importante notar que, por la naturaleza de la definición de la solución $ENSC(N_0, C)$, ésta es la única (de las definidas aquí) que cumple la propiedad de *Ordenamiento por contribuciones marginales.*

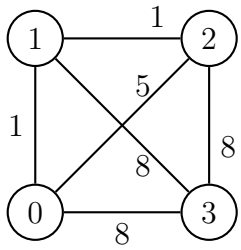
6.1. Propiedades de las asignaciones basadas en distribución equitativa de excedentes

A continuación se evaluará el cumplimiento por parte de $CIS(N_0, C)$ y $ENSC(N_0, C)$ de los axiomas definidos en la sección *2.3.1*.

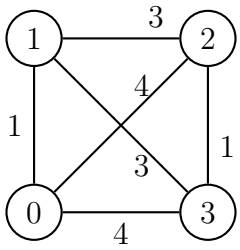
Consideremos los *mcstp* correspondientes a las siguientes matrices:

$$C_7 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 & 8 \\ 1 & 0 & 1 & 8 \\ 5 & 1 & 0 & 8 \\ 8 & 8 & 8 & 0 \end{pmatrix}, \quad C_8 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & 3 & 3 \\ 4 & 3 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C_9 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 3 & 3 \\ 4 & 3 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

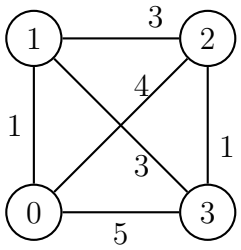
$$C_{10} = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 1 & 1 \\ 8 & 0 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 0 & 6 \\ 1 & 5 & 6 & 0 \end{pmatrix}, \quad C_{11} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 3 & 5 \\ 4 & 3 & 0 & 1 \\ 5 & 5 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$



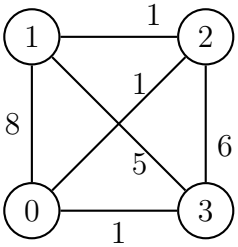
(a) Grafo de (N_0, C_7)



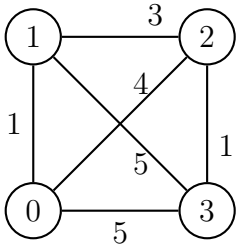
(b) Grafo de (N_0, C_8)



(c) Grafo de (N_0, C_9)



(d) Grafo de (N_0, C_{10})



(e) Grafo de (N_0, C_{11})

Donde las soluciones correspondientes son:

$$\mathrm{CIS}(N_0, C_7) = \left(1 - \frac{4}{3}, 5 - \frac{4}{3}, 8 - \frac{4}{3}\right) = \left(-\frac{1}{3}, \frac{11}{3}, \frac{20}{3}\right),$$

$$\mathrm{CIS}(N_0, C_8) = \left(1 - \frac{4}{3}, 4 - \frac{4}{3}, 4 - \frac{4}{3}\right) = \left(-\frac{1}{3}, \frac{8}{3}, \frac{8}{3}\right),$$

$$\mathrm{CIS}(N_0, C_9) = \left(1 - \frac{5}{3}, 4 - \frac{5}{3}, 5 - \frac{5}{3}\right) = \left(-\frac{2}{3}, \frac{7}{3}, \frac{10}{3}\right),$$

$$\mathrm{ENSC}(N_0, C_{10}) = \left(-2 + \frac{13}{3}, -6 + \frac{13}{3}, -2 + \frac{13}{3}\right) = \left(\frac{7}{3}, -\frac{5}{3}, \frac{7}{3}\right),$$

$$\mathrm{ENSC}(N_0, C_9) = \left(-5 + \frac{18}{3}, -4 + \frac{18}{3}, -4 + \frac{18}{3}\right) = (1, 2, 2),$$

$$\mathrm{ENSC}(N_0, C_{11}) = \left(-5 + \frac{20}{3}, -6 + \frac{20}{3}, -4 + \frac{20}{3}\right) = \left(\frac{5}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{8}{3}\right).$$

Proposición 9. *1. La asignación CIS(N_0, C)*
a) satisface los axiomas IR, CM, CON, SYM y ESEC
b) no satisface los axiomas CS, SOL, PM, POS, SEP, IOC e IIT.
2. La asignación ENSC(N_0, C)
a) satisface los axiomasCM, CON, SYM y ESEC
b) no satisface IR, CS, SOL, PM, POS, SEP, IOC e IIT.

Demostración. *1. a)*

- **Racionalidad individual:** Este axioma es cumplido por *CIS*(N_0, C) pues inicialmente el agente i paga c_{0i} y posteriormente se reduce la cantidad de $\frac{1}{|N|}\sum_{j\in N} c_{0j} - m(N_0, C)$ que es siempre no negativa.

- **Monotonía de costos:** Desarrollando la expresión de $\mathrm{CIS}(N_0, C)$ se obtiene $\mathrm{CIS}_i(N_0, C) = \left(1 - \frac{1}{n}\right) c_{0i} + \frac{1}{|N|} m(N_0, C) - \frac{1}{|N|} \sum_{k \neq i} c_{0k}$, luego para todo (N_0, C) y (N_0, C') tales que $c_{ij} < c'_{ij}$ para algún $i \in N$ y $j \in N_0$ y, en caso contrario, $c_{kl} = c'_{kl}$, tenemos que: $c_{0i} \leq c'_{0i}$, $m(N_0, C) \leq m(N_0, C')$ y $\sum_{k \neq i} c_{0k} = \sum_{k \neq i} c'_{0k}$, así que

$$\mathrm{CIS}_i(N_0, C) \leq \mathrm{CIS}_i(N_0, C').$$

.

- **Continuidad:** $\mathrm{CIS}_i(N_0, C)$ es continua debido a que $m(N_0, C)$ responde continuamente a cambios en C.

- **Simetría:** Dado un *mcstp* (N_0, C), dos agentes i, j simétricos se cumplirá que $c_{i0} = c_{j0}$, de aquí que $\mathrm{CIS}(N_0, C)$ cumple con simetría.

- **Reparto igualitario de costos extras:** Bajo los supuestos de este axioma, todos los agentes tienen el mismo costo de conexión directa a la fuente. Al aumentar éste, la igualdad se mantiene; en ambos casos es claro que el costo del *mt* es cubierto de manera igualitaria.

1. b)

- **Selección de núcleo:** Consideremos el problema (N_0, C_7) y $S = \{1, 2\}$ vemos que $\mathrm{CIS}(N_0, C)$ no cumple con Selección de núcleo, pues

$$m(S_0, C) = 2 \neq \frac{10}{3} = \sum_{i \in S} \mathrm{CIS}_i(N_0, C).$$

- **Solidaridad:** Si consideramos los problemas (N_0, C_8) y (N_0, C_9), que difieren únicamente en el costo de la conexión directa del agente 3, podemos notar que $\mathrm{CIS}(N_0, C)$ no cumple con *SOL*, pues $C_8 \leq C_9$ pero $\mathrm{CIS}_1(N_0, C_8) > \mathrm{CIS}_1(N_0, C_9)$.

- **Monotonía de la población:** Considerando el problema (N_0, C_7) y $S = \{1, 2\}$, se observa que $\mathrm{CIS}(N_0, C)$ no cumple con *PM*, ya que $\mathrm{CIS}_2(N_0, C_7) = \frac{11}{3} > 3 = \mathrm{CIS}_2(S_0, C_7)$.

- **Positividad:** El problema (N_0, C_7), prueba el incumplimiento de esta propiedad.

- **Separabilidad:** El *mcstp* (N_0, C_7), es tal que $m(N_0, C_7) = 10 = m(\{1, 2\}_0, C_7) + m(\{3\}_0, C_7) = 2 + 8$ pero $\mathrm{CIS}(N_0, C_7) \neq \mathrm{CIS}(\{1, 2\}_0, C_7) + \mathrm{CIS}(\{3\}_0, C_7)$.

- **Independencia de otros costos:** Considerando los *mcstp* (N_0, C_8) y (N_0, C_9), vemos que $\mathrm{CIS}(N_0, C)$ no satisface este axioma, ya que la única diferencia entre ambos problemas es el costo de conexión directa del agente 3; sin embargo, este cambio genera modificaciones en las asignaciones del resto de agentes.

- **Independencia de árboles irrelevantes:** Los problemas (N_0, C_8) y (N_0, C_9) son árbol-equivalentes, pero las asignaciones $\mathrm{CIS}(N_0, C_8)$ y $\mathrm{CIS}(N_0, C_9)$ difieren entre ellas.

2. a)

- **Monotonía de costos:** Desarrollando la expresión de $\mathrm{ENSC}(N_0, C)$ se obtiene $\mathrm{ENSC}_i(N_0, C) = \left(\frac{1}{n} - 1\right) m(N \setminus \{i\}, C) + \frac{1}{|N|} m(N_0, C) + \frac{1}{|N|} \sum_{k \neq i} m(N \setminus \{k\}, C)$, luego para todo (N_0, C) y (N_0, C') tales que $c_{ij} < c'_{ij}$ para algún $i \in N$ y $j \in N_0$ y, en caso contrario, $c_{kl} = c'_{kl}$, tenemos que: $m(N \setminus \{i\}, C) = m(N \setminus \{i\}, C')$, $m(N_0, C) \leq m(N_0, C')$ y $\sum_{k \neq i} m(N \setminus \{i\}, C) \leq \sum_{k \neq i} m(N \setminus \{i\}, C')$, así que

$$\mathrm{ENSC}_i(N_0, C) \leq \mathrm{ENSC}_i(N_0, C').$$

- **Continuidad:** $\mathrm{ENSC}_i(N_0, C)$ es continua debido a que tanto $m(N_0, C)$ como $m(N \setminus \{i\}, C)$ responden continuamente a cambios en C.

- **Simetría:** Dado un *mcstp* (N_0, C), dos agentes i, j simétricos se cumplirá que $m(N \setminus \{i\}, C) = m(N \setminus \{j\}, C)$, de aquí que $\mathrm{ENSC}(N_0, C)$ cumple con simetría.

- **Reparto igualitario de costos extras:** Bajo los supuestos de esta propiedad, $m(N \setminus \{i\}, C') - m(N \setminus \{i\}, C)$ es igual para todos los agentes $i \in N$. Así que al aumentar el costo de conexión directa, el costo extra será cubierto de manera igualitaria por los agentes.

2. b)

- **Racionalidad individual:** $\mathrm{ENSC}(N_0, C)$ no cumple este axioma ya que cumple con la propiedad de *Ordenamiento por contribuciones marginales* y por la *Proposición 2* no existe una solución que cumpla ambas propiedades.

- **Selección de núcleo:** $\mathrm{ENSC}(N_0, C)$ no cumple con la propiedad de selección de núcleo, pues no cumple con *racionalidad individual.*

- **Solidaridad:** Si consideramos los problemas (N_0, C_9) y (N_0, C_{11}), que difieren únicamente en el costo de la conexión c_{13}, podemos notar que $\mathrm{ENSC}(N_0, C)$ no cumple con *SOL*, pues $C_9 \leq C_{11}$ pero $\mathrm{ENSC}_2(N_0, C_9) > \mathrm{ENSC}_2(N_0, C_{11})$.

- **Monotonía de la población:** Considerando el problema (N_0, C_{10}) y $S = \{2, 3\}$, se observa que $\mathrm{ENSC}(N_0, C)$ no cumple con *PM*, ya que $\mathrm{ENSC}_3(N_0, C_{10}) = \frac{7}{3} > 1 = \mathrm{ENSC}_3(S_0, C_{10})$.

- **Positividad:** El problema (N_0, C_{10}), prueba el incumplimiento de esta propiedad, ya que $\mathrm{ENSC}_2(N_0, C_{10}) < 0$.

- **Separabilidad:** El *mcstp* (N_0, C_{10}), es tal que $m(N_0, C_{10}) = 3 = m(\{1, 2\}_0, C_{10}) + m(\{3\}_0, C_{10}) = 2 + 1$ pero $\mathrm{ENSC}(N_0, C_{10}) \neq \mathrm{ENSC}(\{1, 2\}_0, C_{10}) + \mathrm{ENSC}(\{3\}_0, C_{10})$.

- **Independencia de otros costos:** Considerando los *mcstp* (N_0, C_9) y (N_0, C_{11}), observamos que $\mathrm{ENSC}(N_0, C)$ no satisface esta propiedad, ya que la única diferencia entre ambos problemas es el costo de conexión directa c_{13}; sin embargo, este cambio genera modificaciones en la asignación del agente 2.

- **Independencia de árboles irrelevantes:** Los problemas (N_0, C_9) y (N_0, C_{11}) son árbol-equivalentes, pero las asignaciones $\mathrm{ENSC}(N_0, C_9)$ y $\mathrm{ENSC}(N_0, C_{11})$ son distintas.

□ La siguiente tabla resume la proposición anterior.

Axioma	CIS(N_0, C)	ENSC(N_0, C)
CS	No	No
IR	Sí	No
CM	Sí	Sí
SOL	No	No
PM	No	No
CON	Sí	Sí
POS	No	No
SEP	No	No
SYM	Sí	Sí
IOC	No	No
ESEC	Sí	Sí
IIT	No	No

Cuadro 6.1: Axiomas de las soluciones CIS(N_0, C) y ENSC(N_0, C)

En conclusión, ambas soluciones, CIS(N_0, C) y ENSC(N_0, C), cumplen con diversos axiomas importantes, especialmente en lo que respecta a la monotonía de costos y simetría. Sin embargo, ninguna de las dos soluciones garantiza la selección del núcleo ni la monotonía de la población, lo que sugiere que pueden no ser completamente adecuadas en situaciones donde las coaliciones o la expansión de la red juegan un papel relevante.

6.2. Clases de *mcstp* para los cuales las asignaciones basadas en distribución equitativa de excedentes cumplen Selección de núcleo

La siguiente proposición especifica una clase de *mcstp* para la cual ENSC(N_0, C) satisface CS.

Proposición 10. *Si C se define como en* (5.2) *y $\beta_i \geq \beta_{i+1}$, entonces $ENSC(N_0, C)$ cumple el axioma de Selección de núcleo.*

Demostración. Es fácil ver que para este tipo de problemas se tiene que

$$m(N_0 \setminus \{j\}) = \begin{cases} m(N_0, C) & \text{si } j \neq n, \\ m(N_0, C) - \beta_n & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Así que la asignación $ENSC(N_0, C)$ se define como sigue:

$$ENSC_i(N_0, C) = \begin{cases} \frac{1}{|N|}\left(m(N_0, C) - \beta_n\right) & \text{si } i \neq n, \\ \frac{1}{|N|}\left(m(N_0, C) - \beta_n\right) + \beta_n & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Como $m(N_0, C) = \sum_{i \in N} \beta_i \geq \beta_n$, entonces $ENSC_i(N_0, C) \geq 0$ para todo $i \in N$.

También es claro que $ENSC_n \geq ENSC_i$ para todo $i \in N$. Luego, si $c_{0i} \geq c_{0j}$ entonces $ENSC_i \geq ENSC_j$.

Además,

$$ENSC_1(N_0, C) = \frac{1}{|N|}(m(N_0, C) - \beta_n) = \frac{1}{|N|}\left(\sum_{i \in N} \beta_i - \beta_n\right) = \frac{1}{|N|} \sum_{i \in N,\, i \neq n} \leq \frac{|N| - 1}{|N|}\beta_1 \leq \beta_1.$$

A partir de aquí, utilizando los hechos anteriores, la prueba es idéntica a la de la proposición 6. □

La siguiente proposición muestra que para cierta clase de 2-*mcstp*, las asignaciones$CIS(N_0, C)$ y $ENSC(N_0, C)$ cumplen selección de núcleo.

Proposición 11. *Sea (N_0, C) un 2-mcstp tal que $c_{ij} = k_1$ si $i, j \neq 0$, $c_{i0} = k_2$ para todo $i \in N$ y $0 \leq k_1 \leq k_2$. Entonces $CIS(N_0, C)$ y $ENSC(N_0, C)$ cumplen CS.*

Demostración. Basta mostrar que $CIS(N_0, C)$ y $ENSC(N_0, C)$ reparten igualitariamente $m(N_0, C)$ y proceder como en la prueba de la proposición 7.

$CIS_i(N_0, C) = \frac{m(N_0, C)}{|N|}$ debido a que $c_{i0} = k_2$ para todo $i \in N$. Como $m(N_0 \setminus \{i\}, C) = k_2 + (|N| - 2)k_1$ para todo $i \in N$, entonces $ENSC_i(N_0, C) = \frac{m(N_0, C)}{|N|}$. □

Capítulo 7

Comentarios finales

A lo largo de la historia, los *mcstp* han sido ampliamente estudiados debido a sus aplicaciones en campos como las telecomunicaciones, el transporte y la distribución de recursos. Desde los primeros enfoques algorítmicos de Prim y Kruskal hasta las modernas perspectivas de juegos cooperativos y problemas de bancarrota, los *mcstp* han evolucionado como un marco crucial para optimizar redes y asignar costos de manera justa.

Este trabajo de tesis aporta perspectivas y herramientas poco estudiadas al campo de los *mcstp*. Se exploró la relación entre *mcstp* y problemas de bancarrota, estableciendo un puente entre dos áreas de investigación que, aunque relacionadas, no habían sido estudiadas de manera tan integrada. Se introdujeron y evaluaron nuevas reglas de asignación de costos utilizando enfoques basados en problemas de bancarrota, destacando por su simplicidad e intuición, aprovechando las propiedades axiomatizadas de las soluciones clásicas como CEA, CEL, Talmud y Proporcional. Además, se realizó un análisis detallado del cumplimiento de axiomas fundamentales como racionalidad individual, selección de núcleo, simetría, continuidad y positividad, asegurando que las reglas propuestas no solo son teóricamente consistentes, sino también aplicables en escenarios prácticos bajo ciertos supuestos. En adición, se identificaron clases particulares *mcstp* para los cuáles las reglas de asignación propuestas satisfacen el axioma de selección de núcleo que resulta fundamental porque asegura que ninguna coalición pague más de lo que le costaría conectarse por sí misma, fomentando la cooperación, garantizando estabilidad en las asignaciones y promoviendo equidad en la distribución de costos. Esto es clave para evitar conflictos y desincentivos en redes compartidas.

A diferencia de estudios previos que abordan *mcstp* desde perspectivas cooperativas, como las soluciones basadas en el valor de Shapley, este trabajo destaca por su integración de soluciones clásicas de bancarrota, ofreciendo una óptica poco explorada para la asignación de costos, previamente estudiada únicamente por Giménez Gómez et al.[2014,2020, 2022]. Es importante mencionar que en el presente documento se expandió el análisis axiomático realizado por estos autores profundizando en la conexión entre propiedades de las soluciones de problemas de bancarrota y las reglas de asignación para *mcstp*.

Aunque las reglas propuestas fueron analizadas teóricamente, los ejemplos desarrollados representan solo una pequeña porción de todos los posibles *mcstp*, lo que refleja la amplitud y diversidad de escenarios que aún quedan por explorar dentro de este campo. Esto pone de manifiesto que, si bien se ha avanzado en ciertos aspectos, los *mcstp* ofrecen una riqueza de configuraciones que merecen ser estudiadas para comprender mejor su comportamiento y las

implicaciones de las reglas propuestas.

Por otro lado, el trabajo asume costos fijos y una estructura estática de las redes, lo cual es coherente con los *mcstp* tradicionales, pero limita su aplicación en escenarios más dinámicos. Esto refleja una limitación inherente al enfoque adoptado, ya que muchos problemas reales involucran redes con costos variables o dependencias temporales que no se consideran en este estudio. Aunque esto no afecta la validez de los resultados obtenidos dentro del marco teórico establecido, resalta la necesidad de explorar alternativas que incorporen mayor flexibilidad y adaptabilidad a contextos más complejos.

Generar redes aleatorias podría resultar valioso ya que implicaría explorar cómo las reglas de asignación propuestas se comportan en escenarios diversos y no sesgados por configuraciones específicas. Esto se puede lograr mediante herramientas computacionales utilizando algoritmos para crear redes con diferentes estructuras, distribuciones de costos y densidades de nodos. Estas simulaciones podrían incluir análisis de sensibilidad para evaluar cómo pequeños cambios en los costos afectan las asignaciones y permitir comparaciones de desempeño con otras soluciones clásicas en términos de equidad y justicia. También sería valioso utilizar datos provenientes de sistemas existentes para comparar, en la medida de lo posible, las reglas de asignación propuestas con las que se hayan aplicado realmente.

Otra posible línea de investigación podría enfocarse en analizar la aplicabilidad de las reglas de asignación en escenarios donde los costos cambien con el tiempo o dependan de restricciones adicionales, como capacidad de los enlaces o prioridades en las conexiones. En estos casos, las reglas propuestas deberían adaptarse a este nuevo contexto dinámico, incorporando mecanismos que reflejen la evolución temporal de los costos o las restricciones.

Finalmente, evaluar de manera cuantitativa las ventajas y limitaciones de las reglas propuestas frente a otras soluciones clásicas mediante el desarrollo de métricas específicas para medir equidad y estabilidad de las soluciones puede constituir una línea de investigación alternativa al análisis axiomático, al permitir contrastar directamente el desempeño práctico de las reglas en contextos reales o simulados.

A pesar de que los problemas de árboles de expansión de mínimo costo cuentan con una historia extensa y rica en desarrollo teórico, su versatilidad y relevancia los mantienen como un campo abierto a la innovación. Este trabajo subraya que, con un enfoque creativo y dedicación, es posible redescubrir y reinterpretar enfoques establecidos para proponer nuevas ideas. Esto no solo contribuye a expandir los límites del conocimiento, sino también a hacer frente a retos contemporáneos y mejorar su aplicabilidad en escenarios prácticos. La exploración de alternativas demuestra que incluso en campos ampliamente desarrollados siempre hay espacio para avanzar y contribuir significativamente al progreso teórico y práctico, ampliando el alcance y la aplicabilidad del conocimiento existente.

Bibliografía

Gustavo Bergantiños and Juan Vidal-Puga. On some properties of cost allocation rules in minimum cost spanning tree problems. *AUCO Czech Economic Review*, 2(3), 2008.

Gustavo Bergantiños and Juan Vidal-Puga. Cooperative games for minimum cost spanning tree problems. 2020.

Gustavo Bergantiños and Juan J Vidal-Puga. The optimistic tu game in minimum cost spanning tree problems. *International Journal of Game Theory*, 36(2):223–239, 2007.

Charles G Bird. On cost allocation for a spanning tree: a game theoretic approach. *Networks*, 6(4):335–350, 1976.

Anna Bogomolnaia and Hervé Moulin. Sharing a minimal cost spanning tree: Beyond the folk solution. *Games and Economic Behavior*, 69(2):238–248, 2010.

Otakar Borůvka. O jistém problému minimálním. 1926.

Armin Claus and Daniel J Kleitman. Cost allocation for a spanning tree. *Networks*, 3(4): 289–304, 1973.

Nir Dagan. New characterizations of old bankruptcy rules. *Social Choice and Welfare*, 13 (1):51–59, 1996.

Theo SH Driessen. Relationships between bankruptcy games and minimum cost spanning tree games. In *Operations Research'92: Extended Abstracts of the 17th Symposium on Operations Research held at the Universität der Bundeswehr Hamburg at August 25–28, 1992*, pages 410–412. Springer, 1993.

Bhaskar Dutta and Anirban Kar. Cost monotonicity, consistency and minimum cost spanning tree games. *Games and Economic Behavior*, 48(2):223–248, 2004.

José Manuel Giménez Gómez, Begoña Subiza, Josep E Peris, et al. Conflicting claims problem associated with cost sharing of a network. 2014.

José-Manuel Giménez-Gómez, Josep E Peris, and Begoña Subiza. An egalitarian approach for sharing the cost of a spanning tree. *Plos one*, 15(7):e0236058, 2020.

José-Manuel Giménez-Gómez, Josep E Peris, and Begoña Subiza. A claims problem approach to the cost allocation of a minimum cost spanning tree. *Operational Research*, 22(3):2785–2801, 2022.

Carmen Herrero and Antonio Villar. The three musketeers: four classical solutions to bankruptcy problems. *Mathematical Social Sciences*, 42(3):307–328, 2001.

Carmen Herrero and Antonio Villar. Sustainability in bankruptcy problems. *Top*, 10(2): 261–273, 2002.

Anirban Kar. Axiomatization of the shapley value on minimum cost spanning tree games. *Games and Economic Behavior*, 38(2):265–277, 2002.

Joseph B Kruskal. On the shortest spanning subtree of a graph and the traveling salesman problem. *Proceedings of the American Mathematical society*, 7(1):48–50, 1956.

Robert Clay Prim. Shortest connection networks and some generalizations. *The Bell System Technical Journal*, 36(6):1389–1401, 1957.

Lloyd S Shapley. A value for n-person games. *Contribution to the Theory of Games*, 2, 1953.

William Thomson. Axiomatic and game-theoretic analysis of bankruptcy and taxation problems: a survey. *Mathematical social sciences*, 45(3):249–297, 2003.

René Van Den Brink and Yukihiko Funaki. Axiomatizations of a class of equal surplus sharing solutions for tu-games. *Theory and Decision*, 67:303–340, 2009.

CH Yeh. Sustainability, claims monotonicity, and the constrained equal award rule. Technical report, Mimeo, 2001.

Chun-Hsien Yeh. Secured lower bound, composition up, and minimal rights first for bankruptcy problems. *Journal of Mathematical Economics*, 44(9-10):925–932, 2008.

H Peyton Young. Distributive justice in taxation. *Journal of Economic Theory*, 44(2): 321–335, 1988.