



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE SAN LUIS POTOSÍ



FACULTAD DE CIENCIAS QUÍMICAS

Posgrado en Ciencias en Ingeniería Química

**“Caracterización dinámica de yacimientos petroleros heterogéneos
mediante pruebas de trazadores”**

Tesis para obtener el grado de:

Maestro en Ciencias en Ingeniería Química

Presenta:

Vázquez Olvera Jorge Armando

Director de Tesis:

Dr. Erik César Herrera Hernández

SAN LUIS POTOSÍ, S. L. P ENERO 2025



REPOSITORIO INSTITUCIONAL



**UASLP-Sistema de Bibliotecas Repositorio Institucional Tesis
Digitales Restricciones de Uso
DERECHOS RESERVADOS
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en este Trabajo Terminal está protegido por la Ley Federal de Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos.

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde se obtuvo, mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto o con fines de lucro, reproducción, edición o modificación será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



Caracterización dinámica de yacimientos petroleros heterogéneos mediante pruebas de trazadores © 2025 by Vázquez Olvera Jorge Armando is licensed under [Creative Commons Attribution-NonCommercial-NoDerivatives 4.0 International](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/)

Este proyecto se realizó en Facultad de Ciencias Químicas adscrito a la Universidad Autónoma de San Luis Potosí, en el periodo comprendido entre Enero del 2024 y Diciembre del 2024, bajo la dirección de Dr. Erik César Herrera Hernández.

El programa de Maestría en Ciencias en Ingeniería Química de la Universidad Autónoma de San Luis Potosí pertenece al Sistema Nacional de Posgrados de Calidad (SNP) del CONAHCYT, registro 000896. Número de la beca otorgada por CONAHCYT: 850926. Número de CVU: 1271248.

Los datos del trabajo titulado “Caracterización dinámica de yacimientos petroleros heterogéneos mediante pruebas de trazadores”, se encuentran bajo el resguardo de la Facultad de Ciencias Químicas y pertenecen a la Universidad Autónoma de San Luis Potosí.

Solicitud de Registro de Tesis Maestría

San Luis Potosí SLP a Enero/13/2025

Comité Académico

En atención a: Coordinador/a del Posgrado

Por este conducto solicito a Usted se lleve a cabo el registro de tema de tesis de Maestría, el cual quedo definido de la siguiente manera: “Caracterización dinámica de yacimientos petroleros heterogéneos mediante pruebas de trazadores”

que desarrollará el/la estudiante: Jorge Armando Vázquez Olvera

bajo la dirección y/o Co-dirección de: Dr. Erik César Herrera Hernández

Asimismo, le comunico que el proyecto en el cual trabajará el alumno involucrará el manejo de animales de experimentación, estudios con seres humanos o muestras derivadas de los mismos, el manejo y/o generación de organismos genéticamente modificados y requiere de aval de Comité de Ética e investigación de la FCQ.

(Complete la opción que aplique en su caso):

() Sí debido a que: _____

() No

(X) No Aplica

Sin otro particular, quedo de Usted.

A T E N T A M E N T E

IP. Jorge Armando Vázquez Olvera

Dr. Erik César Herrera Hernández



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE SAN LUIS POTOSÍ



FACULTAD DE CIENCIAS QUÍMICAS

Posgrado en Ciencias en Ingeniería Química

**“Caracterización dinámica de yacimientos petroleros heterogéneos
mediante pruebas de trazadores”**

Tesis para obtener el grado de:
Maestro en Ciencias en Ingeniería Química

Presenta:

Vázquez Olvera Jorge Armando

SINODALES:

Presidente: Dr. Raúl González García

Secretario: Dr. Erik César Herrera Hernández

Vocal: Dr. Edgar Moctezuma Velázquez

Vocal: Dr. Jaime David Pérez Martínez

SAN LUIS POTOSÍ, S. L. P ENERO 2025

INTEGRANTES DEL COMITÉ TUTORIAL ACADÉMICO

Dr. Erik César Herrera Hernández: Director de tesis. Adscrito al Posgrado en Ciencias en Ingeniería Química de la Universidad Autónoma de San Luis Potosí, San Luis Potosí, S.L.P.

Dr. Raúl González García: Sinodal de tesis. Adscrito al Posgrado en Ciencias en Ingeniería Química de la Universidad Autónoma de San Luis Potosí, San Luis Potosí, S.L.P

Dr. Edgar Moctezuma Velázquez: Sinodal de tesis. Adscrito al Posgrado en Ciencias en Ingeniería Química de la Universidad Autónoma de San Luis Potosí, San Luis Potosí, S.L.P

Dr. Jaime David Pérez Martínez: Sinodal suplente de tesis. Adscrito al Posgrado en Ciencias en Ingeniería Química de la Universidad Autónoma de San Luis Potosí, San Luis Potosí, S.L.P

Carta Cesión de Derechos

San Luis Potosí SLP a Enero/13/2025

En la ciudad de San Luis Potosí el día 13 del mes de enero del año 2025 El que suscribe IP. Jorge Armando Vázquez Olvera del programa del Posgrado en Ciencias en Ingeniería Química adscrito a la Universidad Autónoma de San Luis Potosí manifiesta que es autor intelectual del presente trabajo terminal, realizado bajo la dirección de: Dr. Erik César Herrera Hernández y cede los derechos del trabajo titulado "Caracterización dinámica de yacimientos petroleros heterogéneos mediante pruebas de trazadores" a la **Universidad Autónoma de San Luis Potosí**, para su difusión con fines académicos y de investigación.

Los usuarios de la información no deben reproducir de forma total o parcial texto, gráficas, imágenes o cualquier contenido del trabajo si el permiso expreso del o los autores. Éste, puede ser obtenido directamente con el autor o autores escribiendo a la siguiente dirección Jorge343g@gmail.com. Si el permiso se otorga, el usuario deberá dar el agradecimiento correspondiente y citar la fuente del mismo.

IP. Jorge Armando Vázquez Olvera



Carta de Análisis de Similitud

San Luis Potosí SLP a 13 de enero 2025

L.B. María Zita Acosta Nava
Biblioteca de Posgrado FCQ

Asunto: Reporte de porcentaje de similitud de tesis de grado

Por este medio me permito informarle el porcentaje de similitud obtenido mediante Ithenticate para la tesis titulada **Caracterización dinámica de yacimientos petroleros heterogéneos mediante pruebas de trazadores** presentada por el autor **Jorge Armando Vázquez Olvera**. La tesis es requisito para obtener el grado de Maestría en el Posgrado en Ciencias en Ingeniería Química. El análisis reveló un porcentaje de similitud de **12%** excluyendo referencias y metodología.

Agradezco sinceramente su valioso tiempo y dedicación para llevar a cabo una revisión exhaustiva de forma de la tesis. Quedo a su disposición para cualquier consulta o inquietud que pueda surgir en el proceso.

Sin más por el momento, le envío un cordial saludo.

A T E N T A M E N T E

Dr. Erik César Herrera Hernández
Coordinador Académico del Posgrado en
Ciencias en Ingeniería Química

Dedicatorias y agradecimientos

Agradezco profundamente a mis padres y hermana por todo el apoyo que me han brindado todos estos años como mi familia y el haberme formado para ser la persona que soy.

A los profesores que me han ayudado a formarme en el transcurso de la carrera, buscando que los estudiantes sean mejores y que puedan llegar lejos en la vida personal y laboral.

Al la Universidad Autónoma de San Luis Potosí por brindarme el apoyo y abrirme las puertas para poder estudiar la Maestría en Ciencias en Ingeniería Química

Y al Doctor Erik César Herrera Hernández por brindarme el apoyo en cada paso para poder desarrollar el siguiente proyecto de investigación, al igual de inspirarme a llevar más lejos el conocimiento y técnicas aprendidas en el transcurso de esta.

Resumen

Este trabajo propone una solución al problema inverso del flujo de trazadores en yacimientos fracturados, investigando la sensibilidad de los resultados a los parámetros principales que describen el flujo en estos sistemas. La metodología presentada es aplicable a la interpretación de pruebas de trazadores en yacimientos fracturados, permitiendo la estimación de parámetros clave de la fractura y la matriz, tales como difusividad, permeabilidad de la fractura y porosidad de la matriz. Los modelos considerados incluyen flujo radial en un modelo 2D. Para abordar este problema, se utilizó un modelo de transporte de solutos en medios heterogéneos basado en un sistema de advección-dispersión, acoplado a un modelo de flujo de doble porosidad. La solución del modelo matemático se realizó mediante esquemas numéricos de diferencias finitas, junto la implementación de algoritmos de optimización utilizando el software Matlab, destacando su accesibilidad y robustez en la aplicación de algoritmos de optimización global. A partir de la solución numérica y la definición de los parámetros del modelo, se generaron datos sintéticos de concentración de trazador, simulando una prueba de trazadores para evaluar la sensibilidad de cada parámetro respecto a la función objetivo. Posteriormente, se resolvió el problema inverso mediante algoritmos de optimización, recuperando los parámetros utilizados en los datos sintéticos, ajustando la producción histórica de trazador y obteniendo las propiedades petrofísicas del yacimiento para caracterizar dinámicamente su comportamiento en ambientes heterogéneos. La metodología propuesta ofrece una alternativa práctica para la determinación de los parámetros que controlan la dispersión y el flujo en yacimientos naturalmente fracturados.

Palabras clave: Prueba de trazadores; prueba de presión; problema inverso; algoritmos de optimización.

Abstract

This work proposes a solution to the inverse problem of tracer flow in fractured reservoirs, investigating the sensitivity of the results to the main parameters that describe the flow in these systems. The presented methodology is applicable to the interpretation of tracer tests in fractured reservoirs, allowing the estimation of key fracture and matrix parameters, such as diffusivity, fracture permeability and matrix porosity. The considered models include radial flow in a 2D model. To address this problem, a solute transport model in heterogeneous media based on an advection-dispersion system, coupled to a dual-porosity flow model was used. The solution of the mathematical model was performed using numerical finite difference schemes, together with the implementation of optimization algorithms using Matlab software, highlighting its accessibility and robustness in the application of global optimization algorithms. From the numerical solution and the definition of the model parameters, synthetic tracer concentration data were generated, simulating a tracer test to evaluate the sensitivity of each parameter with respect to the objective function. Subsequently, the inverse problem was solved using optimization algorithms, recovering the parameters used in the synthetic data, adjusting the historical tracer production, and obtaining the petrophysical properties of the reservoir to dynamically characterize its behavior in heterogeneous environments. The proposed methodology offers a practical alternative for determining the parameters that control dispersion and flow in naturally fractured reservoirs.

Keywords: Tracer test; pressure test; inverse problem; optimization algorithms.

Índice general

Capítulo 1. Introducción	1
1.1 Antecedentes	3
1.1.1 Caracterización de yacimientos	3
1.1.2 Pruebas de trazadores entre pozos	5
1.1.3 Importancia de la prueba de trazadores en México	7
1.1.4 Modelo de flujo	9
1.1.5 Modelo de transporte	10
1.1.6 Métodos de optimización para la resolución del problema inverso	12
1.2 Justificación	17
1.3 Hipótesis	18
1.4 Objetivo general	18
1.4.1 Objetivos específicos	18
Capítulo 2. Materiales y métodos	19
2.1 Geometría del dominio	21
2.2 Modelo matemático	22
2.2.1 Modelo de flujo de fluidos del yacimiento	22
2.2.1.1 Modelo de Warren & Root	22
2.2.2 Modelo de transporte del trazador:	23
2.2.2.1 Ecuación de dispersión-advección dual (DADE)	23
2.3 Solución numérica	25
2.4 Modelo computacional	30
Capítulo 3. Resultados y discusión	35
3.1 Solución del problema directo	35
3.1.1 Efecto de los parámetros en los modelos de flujo y transporte	42
3.2 Planteamiento del problema inverso	47
3.2.3 Análisis de sensibilidad de la función objetivo a los parámetros del modelo	49
3.3 Solución del problema inverso con datos sintéticos	51
3.3.1 Generación de datos sintéticos y resolución del problema inverso	52
Caso 1: Prueba de trazador con inyección a presión constante	52
Caso 2: Prueba de trazador con bache	56

Conclusiones	60
Recomendaciones y trabajos futuros.....	62
Referencias bibliográficas.....	63
Anexos.....	67
Anexo 1: Nomenclatura	67
Anexo 2: Índice de figuras y tablas	69
Anexo 3: Parámetros y variables adimensionales del sistema de ecuaciones del modelo de flujo	72
Anexo 4: Parámetros y variables adimensionales del sistema de ecuaciones de transporté.....	72
Anexo 5: Código para la resolución del problema directo	73
Anexo 6: Código para la resolución del problema inverso.....	78

Capítulo 1. Introducción

Las formaciones geológicas que albergan los yacimientos de hidrocarburos más atractivos para su extracción se distinguen por características específicas en sus estructuras rocosas. Estas presentan una porosidad intergranular adecuada que permite el almacenamiento de fluidos, así como una interconexión entre los poros facilitada por fracturas generadas por movimientos geológicos y procesos de disolución. Estas condiciones son esenciales no solo para el almacenamiento, sino también para garantizar el flujo eficiente de los fluidos a través de la formación. Sin embargo, las propiedades petrofísicas de estos sistemas suelen ser altamente heterogéneas, resultado de discontinuidades a diferentes escalas dentro del yacimiento. Esta heterogeneidad complica el desarrollo de modelos precisos que representen fielmente el medio poroso y sus dinámicas.

En particular, los yacimientos con sistemas de doble porosidad, dominados por fracturas, representan un reto significativo para la industria. Este tipo de sistemas presenta incertidumbre en parámetros fundamentales, como la capacidad de almacenamiento, el transporte de fluidos y la interacción entre la matriz rocosa y las fracturas. Las fracturas más grandes forman canales de alta permeabilidad que facilitan el flujo, mientras que las fisuras más pequeñas actúan como zonas de almacenamiento con baja permeabilidad. Esta dualidad genera un comportamiento único, donde la permeabilidad efectiva está limitada por la geometría, conectividad y distribución del sistema de fracturas (Bogatkov & Babadagli, 2010).

La caracterización de estos yacimientos es fundamental para garantizar su desarrollo eficiente. Esto implica comprender tanto su comportamiento dinámico, relacionado con la evolución de la producción y la presión, como su comportamiento estático, definido por las propiedades físicas del medio. Modelar estos sistemas requiere integrar información geológica y petrofísica con herramientas que puedan simular los fenómenos físicos involucrados. El objetivo es desarrollar representaciones realistas que permitan una comparación confiable con los datos de campo y, a su vez, optimizar la explotación del yacimiento (Gómez et al., 2014).

Una estrategia clave para abordar esta complejidad es dividir el yacimiento en bloques o campos, cada uno desarrollado mediante varios pozos que producen de una misma reserva. Durante esta etapa, es crucial considerar factores como la dirección de las fracturas, el grado de heterogeneidad y el impacto de técnicas de recuperación mejorada, como la inyección de agua o gas. Además, la evaluación de la conectividad entre pozos, los canales de alta permeabilidad y la distribución de la saturación de petróleo son aspectos determinantes para garantizar una recuperación eficiente y sostenible (Ji et al., 2002).

Entre las herramientas más útiles para la caracterización dinámica de yacimientos destacan las pruebas de campo, como las pruebas de presión, las pruebas de interferencia y las pruebas de trazadores. Estas últimas han demostrado ser especialmente efectivas para investigar las propiedades del medio poroso y las dinámicas de flujo. Su origen se remonta a mediados del siglo XX, inicialmente como pruebas de un solo pozo destinadas a estimar la saturación de petróleo residual, la heterogeneidad y la mojabilidad. Con el tiempo, su aplicación se extendió a yacimientos no convencionales, permitiendo analizar patrones de flujo y correlaciones cualitativas con la complejidad de las redes de fracturas (Gardien et al., 1996; Kumar et al., 2020).

Estas técnicas permiten no solo evaluar la conectividad entre pozos y la efectividad de procesos de inyección, sino también caracterizar parámetros fundamentales como porosidades, permeabilidades y la distribución espacial del medio poroso (Guan et al., 2005). Las pruebas consisten en la inyección de una sustancia trazadora, ya sea química o radioactiva, en el fluido de inyección, seguida del monitoreo de su llegada en pozos productores vecinos. Este proceso genera curvas de surgencia de trazador que proporcionan información detallada sobre la conectividad, el tipo de canales y los patrones de flujo del yacimiento (Akin, 2003).

El diseño adecuado de estas pruebas es crítico para garantizar su éxito. Es necesario planificar cuidadosamente la selección del trazador, la cantidad a inyectar, el tiempo de muestreo y los métodos de análisis para construir curvas de respuesta confiables. Los avances recientes en las técnicas de interpretación han permitido desarrollar

modelos más robustos que combinan enfoques semi-analíticos con simulaciones numéricas, mejorando significativamente la precisión en la estimación de parámetros del yacimiento, proporcionando una herramienta robusta para enfrentar la incertidumbre y la complejidad de los sistemas naturalmente fracturados.

(Ramírez, 2008).

Este trabajo se centra en proponer un modelo integral para la interpretación de pruebas de trazadores en yacimientos naturalmente fracturados. El modelo considera un sistema de doble porosidad con flujo radial en fracturas horizontales y bloques cúbicos de matriz, abordando los problemas directo e inverso del transporte de trazadores en medios heterogéneos. El problema directo se centra en predecir la respuesta del trazador en función de parámetros conocidos, como la porosidad, la permeabilidad y la transferencia de masa entre la matriz y las fracturas. Esto se logra mediante la resolución de ecuaciones de transporte que describen los fenómenos de advección y difusión en el sistema. Estas simulaciones permiten generar curvas de transporte del trazador que representan el flujo y la conectividad del sistema. Por su parte, el problema inverso busca estimar los parámetros desconocidos del yacimiento a partir de las curvas observadas en las pruebas de campo. Este problema es más complejo debido a la naturaleza no lineal de las ecuaciones y a la interdependencia de las propiedades del sistema, lo que puede generar múltiples soluciones. La metodología propuesta utiliza técnicas de optimización iterativas para minimizar las diferencias entre las curvas simuladas y observadas, asegurando una mejor aproximación a las propiedades reales del yacimiento. Al integrar ambos enfoques, el modelo permite una caracterización dinámica más precisa del yacimiento, identificando parámetros clave para optimizar estrategias de producción y recuperación.

1.1 Antecedentes

1.1.1 Caracterización de yacimientos

En la caracterización de yacimientos petroleros, el objetivo principal es conocer las características tanto estáticas como dinámicas de las rocas productoras de

hidrocarburos y de los fluidos presentes en el yacimiento como la viscosidad del fluido y la permeabilidad, compresibilidad y porosidad de la roca, para construir un modelo del yacimiento, lo más realista posible, mediante la incorporación de toda la información disponible por los medios de comunicación entre el yacimiento y la superficie.

Caracterización estática

En la caracterización estática no se requiere analizar el movimiento de fluidos en el medio poroso. Mediante estudios geofísicos y geológicos se analizan e integran la geometría y los límites físicos convencionales, el contacto agua-aceite original, así como las variaciones internas verticales y laterales de sus características petrofísicas, con el fin de precisar la estimación del volumen original de hidrocarburos, reservas probadas, probables y posibles de los yacimientos. Esto, mediante los siguientes métodos (Liro, 1993):

- Registros geofísicos: Información obtenida por sondas para recolectar datos de las propiedades geofísicas de las formaciones cerca del pozo, principalmente es información de la densidad, porosidad, resistencia eléctrica, velocidad acústica y saturación de fluido de la roca.
- Registros geológicos: Información básica de la geología obtenida durante la perforación de un pozo petrolero, siendo datos más limitados como tipo de roca, textura, composición mineralógica y estratificación.
- Datos petrofísicos: Datos que se utilizan para estudiar yacimientos subterráneos y evaluar su viabilidad como recursos, considerando que principalmente la información obtenida está relacionada a los métodos anteriores y las estimaciones que se pueden generar a partir de esa información.

Caracterización dinámica

La caracterización dinámica de yacimientos se puede definir como el proceso mediante el cual se identifican y evalúan los elementos que afectan la explotación de un

yacimiento a través del análisis de variables que indican el comportamiento del sistema. El objetivo de la caracterización dinámica de yacimientos consiste en la detección y evaluación de los elementos que afectan los procesos de flujo presentes durante la explotación de un yacimiento, tales como fallas geológicas, acuñamientos, estratificación, discordancias, doble porosidad, doble permeabilidad y fracturas, entre otros. Estos elementos se obtienen principalmente con las siguientes herramientas (Ramírez, 2008):

- Pruebas de variación de presión.
- Datos históricos de producción (agua, aceite y gas).
- Prueba de trazadores

1.1.2 Pruebas de trazadores entre pozos

Entre los métodos de caracterización dinámica, la prueba de trazadores tiene la ventaja de proporcionar información sobre las direcciones de flujo en la formación. Esto reduce la incertidumbre sobre la trayectoria del fluido y los patrones de flujo del yacimiento, asegurando una percepción rápida y concluyente de su continuidad. Esta ventaja proviene de que este método está complementado con otras técnicas de caracterización, uniendo la información obtenida de la caracterización estática, con un modelo matemático de flujo del fluido y transporte del trazador, para crear un modelo matemático que será complementado con datos históricos para la determinación de propiedades mediante esquemas de optimización.

Las pruebas de trazadores entre pozos se utilizan en yacimientos petroleros para identificar canales de comunicación y validar modelos geológicos. Consisten en inyectar un trazador (radioactivo o químico) disuelto en el fluido a través de un pozo de inyección y monitorear su llegada a los pozos de observación cercanos. Las curvas de ruptura del trazador proporcionan información clave sobre los canales conductores y las propiedades de la formación. Como se observa en la Figura 1.1 donde a partir de un pozo inyector de trazador se pudo observar la presencia de trazador en ciertos pozos productores circundantes (Ramírez, 2008).

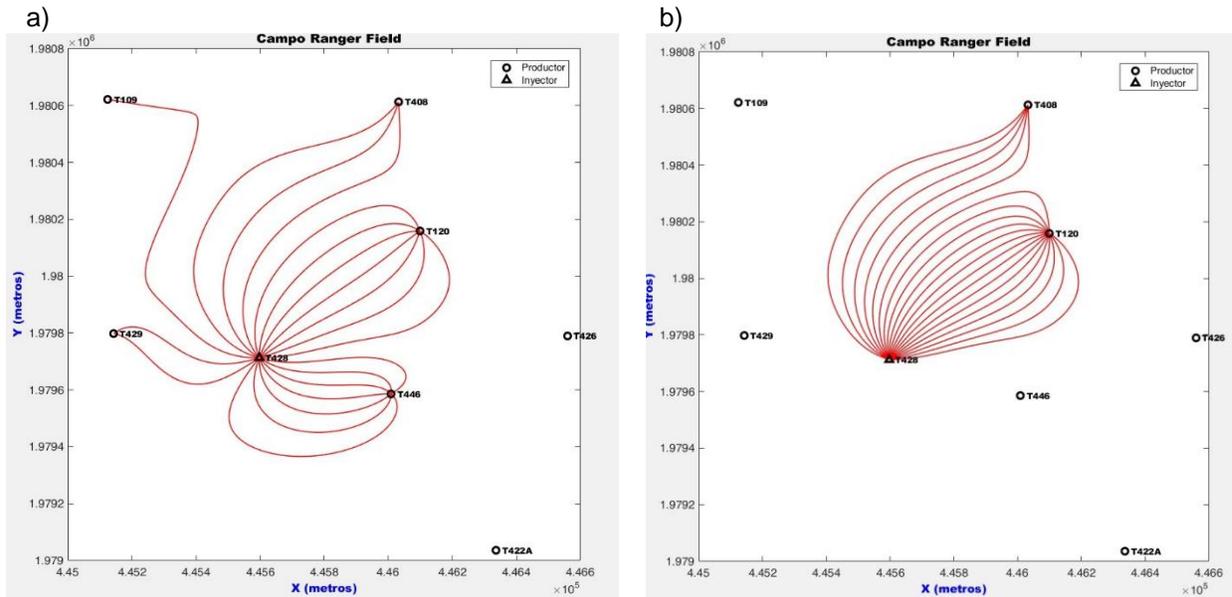


Figura 1.1 Conectividad entre pozos: a) Interconectividad entre los pozos productores y el inyector
 b) Dirección del sistema de fracturas de los pozos con mayor comunicación con el pozo inyector.
 (Aydiñ et al., 2024)

En sus inicios funcionaba como una prueba de un solo pozo donde el mismo pozo inyector era el que volvía a recuperar el trazador después de ser cerrado por un tiempo para poder dejar que el trazador se dispersé en la formación, y la información obtenida podía ser utilizada para estimar la saturación, heterogeneidad y humectabilidad del petróleo residual (Gardien et al., 1996). Después se presentaron más aplicaciones para el análisis del flujo del trazador en yacimientos no convencionales para determinar los patrones de flujo de etapas individuales y una correlación cualitativa entre los perfiles de retorno del trazador y la complejidad de una red de fracturas. Con los avances tecnológicos, fueron incorporando nuevos métodos prácticos y computacionales para evaluar los resultados de las pruebas (Kumar et al., 2020). Generalmente, los objetivos de la prueba de trazador entre pozos se dividen en dos partes: una es determinar la eficiencia de la comunicación entre pozos, el tipo de canales y la efectividad del proceso de inyección (de agua, nitrógeno o CO₂) para el desplazamiento de aceite residual en el yacimiento. La otra consiste en la determinación de las propiedades del medio poroso como porosidades y permeabilidades.

La información obtenida mediante las pruebas de trazadores entre pozos incluye información cualitativa como la eficiencia del barrido del fluido de inyección de agua, la conectividad de la formación y la distribución del fluido de inyección. Además, a través del análisis cuantitativo de los datos de las pruebas de trazadores combinados con datos de producción de fluidos y los datos estáticos del pozo, se pueden obtener parámetros clave del yacimiento, incluidos el espesor de la formación, la porosidad, la permeabilidad, el factor de formación y la saturación. Sobre esta base, se ajusta el plan de desarrollo del campo petrolero para mejorar la productividad (Yang et al., 2022).

Actualmente, los métodos que interpretan los perfiles de trazadores están formados por un método integral, este método combina el método semi-analítico con simulaciones numéricas, mejorando significativamente la precisión en la estimación de parámetros del yacimiento (Ji et al., 2002). Gracias a este desarrollo de las técnicas de interpretación, la prueba del trazador entre pozos ha demostrado ser una herramienta eficiente para investigar el rendimiento del flujo del yacimiento y las propiedades del yacimiento que controlan los procesos de desplazamiento (Guan et al., 2005). El diseño de la prueba debe determinar con la mayor precisión posible el tiempo de arribo del trazador y obtener con un mínimo de muestras una tendencia definida de la curva de respuesta. Los elementos de las pruebas de trazadores, incluida la teoría del diseño, la tecnología de inyección, el sistema de muestreo y el método interpretativo han sido desarrollado durante las últimas tres décadas (Ramírez, 2008).

1.1.3 Importancia de la prueba de trazadores en México

Después de la producción primaria y, en algunos casos, la inyección del agua siempre queda una fracción de petróleo atrapado en la roca del yacimiento, conocida como petróleo remanente. En teoría, en una roca con preferencia por el agua (mojada por agua), todo el petróleo podría ser desplazado por el agua, siempre que se aplique un gradiente de presión lo suficientemente alto para superar las fuerzas capilares y

viscosas que lo retienen. Sin embargo, si la roca es mojada por aceite se requieren de procesos de recuperación adicionales que involucran el uso de surfactantes químicos que modifican la afinidad de la roca por el aceite y permiten la recuperación de una fracción adicional del aceite remanente. En la práctica, esto es difícil de lograr debido a limitaciones técnicas y económicas. La buena noticia es que muchos avances tecnológicos han sido desarrollados en geología, geofísica, petrofísica, producción e ingeniería de yacimientos. El avance de las supercomputadoras, las computadoras personales cada vez más potentes y las estaciones de trabajo han impulsado un notable incremento en el poder computacional. Estos desarrollos tecnológicos, junto con herramientas computacionales avanzadas y software especializado, abren nuevas oportunidades para optimizar la recuperación económica de hidrocarburos.

México tiene, potencial para llevar a cabo esta recuperación del aceite remanente, pero requiere investigar acerca del flujo de los fluidos inyectados y su efecto sobre el desplazamiento de aceite y gas en el ambiente heterogéneo de la formación para realizar las técnicas de recuperación mejorada del hidrocarburo. Las pruebas de trazadores son una herramienta adecuada para resolver el problema anterior; sin embargo, se requiere más investigación sobre el flujo de trazadores en yacimientos naturalmente fracturados.

Aunque gracias a la revolución tecnológica en los años recientes a surgido una nueva dimensión a la tecnología de trazadores, con un nuevo énfasis a los modelos matemáticos y a la simulación numérica de las pruebas de trazadores. Pero este debe determinar con la mayor precisión posible el tiempo de arribo del trazador y obtener con un mínimo de muestras una tendencia definida de la curva de concentración. Si el monitoreo no es adecuado y/o la cantidad de trazadores es insuficiente tan sólo se logra captar unos pocos puntos de la curva de concentración de trazador. Existe entonces gran incertidumbre en las partes más descriptivas de la curva. Aun así, este es el único medio directo de seguir el movimiento de los fluidos inyectados. El conocimiento del movimiento de dichos fluidos es un elemento crucial en la optimización de procesos de recuperación de hidrocarburos, sin el cual, el desarrollar

un método para desplazar aceite en un yacimiento sería extremadamente difícil (Ramírez, 2008).

1.1.4 Modelo de flujo

Entrando en la base de las consideraciones del modelado de una prueba de trazadores en el ambiente heterogéneo hay que tener 2 factores claves en mente, el primero es el flujo del fluido a través de la formación y el segundo es el transporte del soluto.

El flujo de fluidos en medios porosos ha sido ampliamente investigado con el paso de los años, pero se han tenido en consideración 2 modelos como los más representativos para describir el modelo de doble porosidad. El primero es el modelo de Barenblatt et al. (1960) que, a diferencia de la teoría clásica de flujo en medios porosos, este no se introduce una presión de fluido, sino dos (p_m y p_f) para cada punto del espacio. La presión p_f representa la presión promedio del fluido en las fisuras en la vecindad del punto dado, y la presión de la matriz p_m , considerando que ambos están en una distribución de bloques homogéneos en roca, representado en las Ecuaciones (1) y (2) :

$$\frac{k_m}{\mu} \nabla^2 p_m - \frac{\alpha}{\mu} (p_m - p_f) = \phi_m c_m \frac{\partial p_m}{\partial t} \quad (1)$$

$$\frac{k_f}{\mu} \nabla^2 p_f + \frac{\alpha}{\mu} (p_m - p_f) = \phi_f c_f \frac{\partial p_f}{\partial t} \quad (2)$$

El segundo modelo es el establecido por Warren & Root (1963) que es considerado como el más cercano al comportamiento real esperado de un ambiente fracturado, pues considera que el flujo es dominado por los canales generados por las fracturas y deja la matriz porosa como una fuente de almacenamiento para el fluido, en estas condiciones el modelo se representa como en las Ecuaciones (3) y (4):

$$\lambda(p_{fd} - p_{md}) = (1 - \omega) \frac{\partial p_{md}}{\partial t_D} \quad (3)$$

$$\frac{1}{r_D} \frac{\partial}{\partial r_D} \left(r_D \frac{\partial p_{fd}}{\partial r_D} \right) - (1 - \omega) \frac{\partial p_{md}}{\partial t_D} = \omega \frac{\partial p_{fd}}{\partial t_D} \quad (4)$$

1.1.5 Modelo de transporte

El siguiente punto a tener en cuenta es el transporte del trazador bajo la consideración del estudio abordando la definición y medición de las propiedades dispersivas del yacimiento. El conocimiento de dichas propiedades dispersivas es de fundamental importancia para la evaluación, análisis y simulación de la concentración del trazador que será administrado por el pozo de inyección y la concentración que será obtenida por el pozo de muestreo-observación que pueden ser utilizados.

Entre los modelos establecidos por autores se pueden encontrar, el modelo Güven et al. (1985) de la Ecuación (5), donde se considera formaciones con porosidad homogénea y espesor constante:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + U_r \frac{\partial C}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r D_r \frac{\partial C}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(D_v \frac{\partial C}{\partial z} \right) \quad (5)$$

La modificación de la ecuación de dispersión para redes euclidianas para describir el transporte en medios heterogéneos por Hernandez-Coronado et al. (2012) de la Ecuación (6).

$$\frac{\partial C}{\partial t_D} + \frac{1}{r_D^{D-1}} \frac{\partial C}{\partial \hat{r}} \left[r_D^{D-\alpha+1} \left(\frac{\alpha \zeta C}{r_D} - \frac{\partial C}{\partial r_D} \right) \right] = 0 \quad (6)$$

El modelo de transporte del trazador en condiciones de porosidad heterogéneas en una dimensión por Yates (1990) de la Ecuación (7).

$$R \frac{\partial C}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D(x) \frac{\partial C}{\partial x} \right) - v \frac{\partial C}{\partial x} - \mu RC \quad (7)$$

Modelo de transporte de trazador considerando la velocidad intersticial por Ghori & Heller (1992) de la ecuación (8).

$$v \frac{\partial C}{\partial t} = \frac{u}{\phi} \cdot \nabla C - \nabla \cdot D \cdot \nabla C \quad (8)$$

En caso de transporte anómalo en medios heterogéneos, por Di Donato et al. (2003) de la Ecuación (9).

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \nabla \cdot D \nabla C \quad (9)$$

En casos más complejos contemplando las características del modelo transporte en medios de doble porosidad está el modelo de Coronado et al., (2011) de la Ecuación (10).

$$\begin{aligned} \frac{\partial C_f}{\partial t} + u_2(x_2) \frac{\partial C_f}{\partial x_2} - D_f \frac{\partial^2 C_f}{\partial x_2^2} - \frac{\phi_m D_m}{b} \frac{\partial^2 C_m}{\partial z^2} \Big|_{z=w} &= S_2(t) \delta(x_2) \\ \frac{\partial C_m}{\partial t} - \frac{D_m}{R} \frac{\partial^2 C_m}{\partial z^2} &= 0 \end{aligned} \quad (10)$$

Y el modelo más complejo es el de Lange et al, (2005) usando un sistema de ecuaciones de dispersión-convección para un sistema de doble porosidad que tiene la ventaja de incluir la influencia de la presión en la dispersión del trazador considerando el modelo de Warren & Root de la Ecuaciones (11) y (12):

$$\frac{\partial C_m}{\partial t} = \frac{D_m}{\phi_m} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial C_m}{\partial r} + \frac{\partial^2 C_m}{\partial r^2} \right) + \frac{\alpha}{\phi_f} (C_f - C_m) \quad (11)$$

$$\frac{\partial C_f}{\partial t} = \frac{D_f}{\phi_f} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial C_f}{\partial r} + \frac{\partial^2 C_f}{\partial r^2} \right) + \frac{k}{\phi_f \mu} \left[C_f \frac{1}{r} \frac{\partial p_f}{\partial r} + C_f \frac{\partial^2 p_f}{\partial r^2} + \frac{\partial p_f}{\partial r} \frac{\partial C_f}{\partial r} \right] - \frac{\alpha}{\phi_f} (C_f - C_m) \quad (12)$$

1.1.6 Métodos de optimización para la resolución del problema inverso

Los métodos de optimización son esenciales para resolver el problema inverso, que implican determinar parámetros desconocidos de un modelo a partir de datos observados. Su eficiencia computacional y capacidad para manejar problemas de gran escala los convierten en una pieza clave para obtener soluciones confiables y prácticas en aplicaciones científicas y tecnológicas. Para encontrar los parámetros óptimos, la mejor opción es usar simultáneamente distintos métodos de optimización que utilizan diferentes procedimientos de búsqueda y exploración del espacio de parámetros (Gómez et al., 2014). En esta tesis se utilizarán métodos de búsqueda global que hacen uso de técnicas estocásticas como el de recocido simulado y el de algoritmos genéticos, así como métodos de búsqueda directa como el de Nelder-Mead. Es importante mencionar que ambos métodos de optimización no utilizan gradientes.

Nelder-Mead

El método de Nelder-Mead, también conocido como método del simplex, es una técnica de optimización para encontrar el mínimo de una función sin restricciones, sin requerir el cálculo de derivadas. Este método es especialmente útil para funciones complejas o no lineales donde las derivadas son difíciles de calcular o no están disponibles.

El proceso comienza seleccionando varios puntos iniciales que forman un "simplex", un polígono que tiene $n+1$ vértices en un espacio de n dimensiones (por ejemplo, un triángulo en dos dimensiones). Luego, se evalúa la función en cada vértice del simplex y se identifica el peor punto, es decir, el que tiene el valor de función más alto en un problema de minimización.

A partir de aquí, se realizan diversas transformaciones en el simplex para ir acercándose al mínimo:

1. Reflexión: Mueve el peor punto hacia el centro del simplex, en la dirección opuesta, para explorar mejores valores.

$$x_{reflejado} = x_{centroide} + \alpha(x_{centroide} - x_{worst})$$

Donde $\alpha > 0$ es el coeficiente de reflexión.

2. Expansión: Si el punto reflejado es el mejor de todos, se mueve aún más lejos en esa dirección para ver si se mejora aún más.

$$x_{\text{expandido}} = x_{\text{centroide}} + \gamma(x_{\text{reflejado}} - x_{\text{centroide}})$$

con $\gamma > 1$

3. Contracción: Si el punto reflejado es peor que los demás, el simplex se contrae hacia el centro para explorar el área cercana.

$$x_{\text{contraído}} = x_{\text{centroide}} + \beta(x_{\text{worst}} - x_{\text{centroide}})$$

con $0 < \beta < 10$

4. Reducción: Si ninguna transformación es satisfactoria, el simplex se reduce en torno al mejor punto para explorar una región más pequeña.

Este proceso de ajuste y desplazamiento se repite hasta alcanzar un criterio de parada, que puede ser una precisión deseada o un límite en el número de iteraciones. En la Figura 1.2 se muestran las etapas del método de Nelder-Mead para un sistema en dos dimensiones.

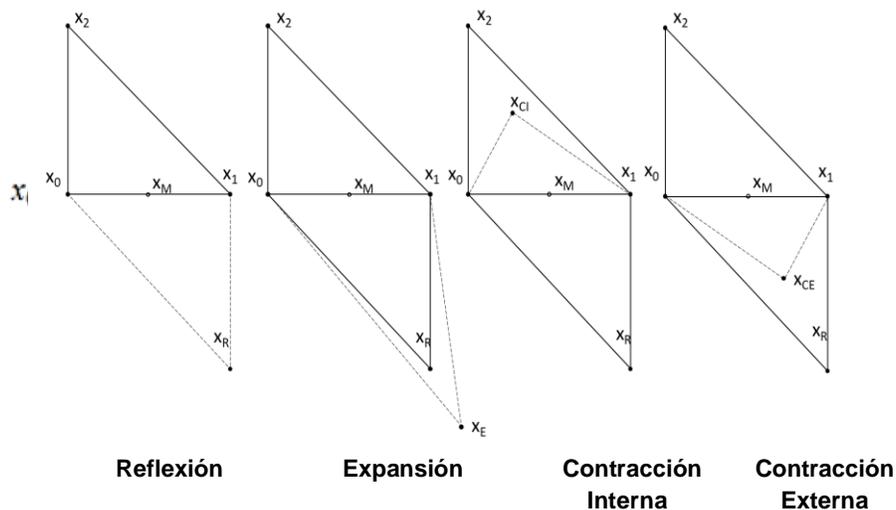


Figura 1.2 Procesos de iteración k del Algoritmo de Nelder-Mead. (Pilotta, 2021)

Recocido simulado

El método de recocido simulado es una técnica de optimización inspirada en el proceso de recocido en metalurgia, donde un material se calienta y se enfría lentamente para reducir defectos y obtener una estructura más estable. En el contexto de la optimización, este método se emplea para encontrar el mínimo (o máximo) global de una función compleja, especialmente en problemas con múltiples mínimos o máximos locales.

El método simula el proceso de recocido mediante una serie de pasos aleatorios en el espacio de búsqueda de la función objetivo. La clave está en controlar la "temperatura" del sistema, que comienza alta y va disminuyendo gradualmente, como se ve en los siguientes puntos.

1. Inicialización: Se elige un punto inicial en el espacio de búsqueda y una "temperatura" inicial alta.
2. Exploración de soluciones: En cada iteración, se genera un nuevo punto en la vecindad del punto actual. Si el valor de la función en este nuevo punto es mejor se acepta el punto y se mueve hacia él.
3. Aceptación de soluciones peores: Si el nuevo punto es peor, el algoritmo aún puede aceptarlo, pero con una probabilidad que depende de la diferencia en el valor de función entre el punto actual y el nuevo, así como de la temperatura.
4. Enfriamiento: La temperatura se reduce de acuerdo con una "tasa de enfriamiento", lo que significa que con el tiempo el sistema se vuelve menos propenso a aceptar soluciones peores.
5. Criterio de parada: El proceso continúa hasta que la temperatura alcanza un nivel mínimo o hasta que se cumplen otros criterios de parada, como un número máximo de iteraciones o una precisión deseada, regresando a la generación de una nueva solución como se ve en y la Figura 1.3.

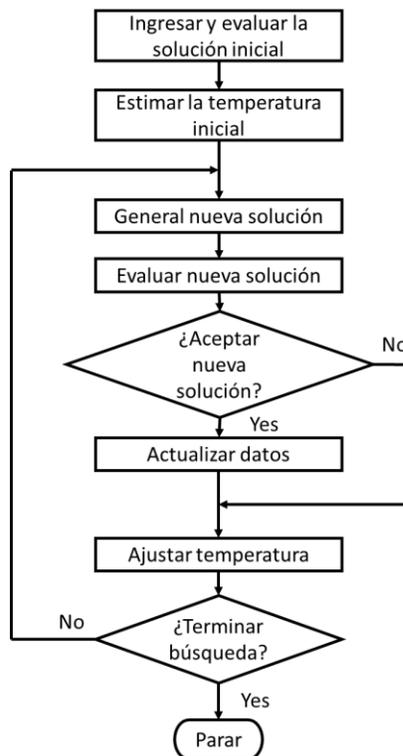


Figura 1.3 Estructura del algoritmo de recocido simulado.
(Henderson et al ,2006)

Algoritmos genéticos

El método de optimización de algoritmos genéticos es una técnica inspirada en la teoría de la selección natural y la genética. Este enfoque simula el proceso de evolución para encontrar soluciones óptimas en problemas complejos de optimización, especialmente aquellos con múltiples soluciones locales, gran dimensionalidad o que son no lineales. El algoritmo genético emplea una población de soluciones candidatas (individuos) que evolucionan a lo largo de varias generaciones para mejorar la calidad de las soluciones. Cada individuo representa una posible solución codificada, típicamente en una cadena de bits o valores como se observa en la Figura 1.4. Los pasos clave incluyen:

1. Inicialización de la población: Se crea una población inicial de individuos al azar, donde cada individuo representa una posible solución al problema.
2. Evaluación: Cada individuo se evalúa utilizando una función de aptitud que mide qué tan buena es la solución que representa.

3. Selección: Se eligen los individuos más aptos para la reproducción, lo cual asegura que las mejores soluciones tengan una mayor probabilidad de pasar sus características a la siguiente generación.
4. Cruzamiento: Los individuos seleccionados se combinan para producir descendientes.
5. Mutación: Algunos genes de los individuos se modifican al azar para introducir variación en la población.
6. Reemplazo y repetición: Los nuevos individuos (descendientes) reemplazan a algunos o todos los individuos de la generación anterior, y el proceso de evaluación, selección, cruzamiento y mutación se repite durante varias generaciones.
7. Criterio de parada: El proceso continúa hasta que se cumple un criterio de parada, como alcanzar un número máximo de generaciones, lograr un valor de aptitud deseado, o cuando las mejoras de aptitud se vuelven mínimas.

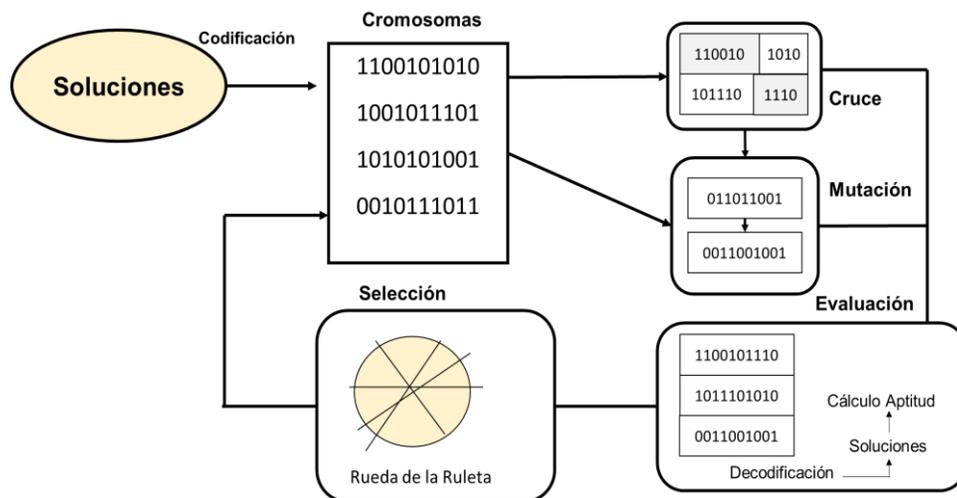


Figura 1.4 Esquema del algoritmo genético simple.
(Ferreira et al. 2016)

1.2 Justificación

La mayoría de las aplicaciones de pruebas de trazadores en operaciones de yacimientos petrolero se han producido en los últimos cuarenta años. Desafortunadamente, debido a la naturaleza competitiva de esta industria, gran parte del trabajo en el tema de las pruebas de trazadores está pobremente documentado. Además, la literatura disponible está en revistas especializadas que no cuentan con el rigor científico de la mayoría de las revistas de arbitraje estricto y que además requieren de membresías dirigidas a los administradores de los yacimientos. Las pequeñas empresas de servicios que llevan a cabo las pruebas en campo están desapareciendo de la escena de ingeniería de yacimientos pues están siendo remplazadas grandes compañías que tienen un catálogo amplio de servicios (incluyendo las pruebas de trazadores) que se apoyan en softwares especializados que demandan altos costos de licenciamiento además de capacitación para ser usados. Como resultado, gran parte de este conocimiento se transmite sólo de manera local entre un conjunto cada vez menor de proveedores (Zemel, 1995).

El desarrollo y la implementación de metodologías de caracterización de yacimientos petroleros que permitan utilizar la información disponible de pruebas de trazadores, constituyen elementos complementarios de gran utilidad para su administración y explotación. Dichas metodologías se apoyan en modelos de flujo de fluidos y de transporte de trazadores que describen de manera efectiva los fenómenos que tienen lugar el yacimiento mediante una representación matemática. La complejidad de los modelos matemáticos y las técnicas de solución numérica han evolucionado como consecuencia del incremento de la capacidad de cómputo de los últimos años. Esto ha añadido una dimensión a la tecnología de trazadores y ha puesto un nuevo énfasis en el modelado matemático y la simulación por computadora de las curvas de respuesta del trazador, pudiendo compensar la poca comunicación que hay en la implementación de los modelos y los proveedores de estos servicios.

Por esta razón, en el presente proyecto de investigación se realizará la implementación de una metodología que permita caracterizar las propiedades petrofísicas de un

yacimiento heterogéneo. Las etapas involucradas parten del modelo matemático que tiene que ser resuelto mediante alguna técnica numérica para posteriormente llevar a cabo su implementación computacional a través de un software especializado como Matlab. Esta metodología y el software generado podrán ser utilizados como herramientas alternativas de caracterización que permitan obtener los parámetros del yacimiento, así como la mayor información posible del comportamiento de los pozos los cuales hayan sido sometidos a pruebas de trazadores.

1.3 Hipótesis

La implementación de una metodología de optimización para resolver el problema inverso en un modelo de flujo y transporte de trazador permitirá obtener los parámetros que caracterizan dinámicamente del medio poroso de una prueba de trazadores.

1.4 Objetivo general

Caracterizar el comportamiento dinámico de un yacimiento heterogéneo utilizando datos sintéticos y un modelo de transporte de trazador a través de un esquema de optimización derivado de la formulación de un problema inverso.

1.4.1 Objetivos específicos

1. Definir el modelo matemático del transporte de trazador, la geometría, la dimensionalidad y las condiciones de frontera.
2. Definir el modelo matemático para el flujo de fluidos en el medio poroso.
3. Resolver el modelo acoplado de flujo y transporte de trazador utilizando un esquema de solución numérica (diferencias finitas explícitas) en un software de alto nivel como Matlab.
4. A partir de la solución numérica, generar y adaptar datos sintéticos con la inclusión de ruido.
5. Resolver el problema inverso, a partir de esquemas de optimización, para recuperar los parámetros asociados a los datos sintéticos que representan las propiedades de un yacimiento petrolero.

Capítulo 2. Materiales y métodos

Dado que el objetivo es estimar parámetros de una formación utilizando datos de pruebas de trazadores o de pruebas de presión es necesario desarrollar modelo que simule el comportamiento de una formación con porosidad intermedia durante el flujo e inyección de un trazador en un modelo 2D radial, las características que no influyen de manera determinante en los modelos propuestos pueden descartarse. Procediendo a definir los parámetros de definen al modelo para llevar a cabo la solución del problema inverso a datos sintéticos para validar el modelo como se observa en la Figura 2.1.

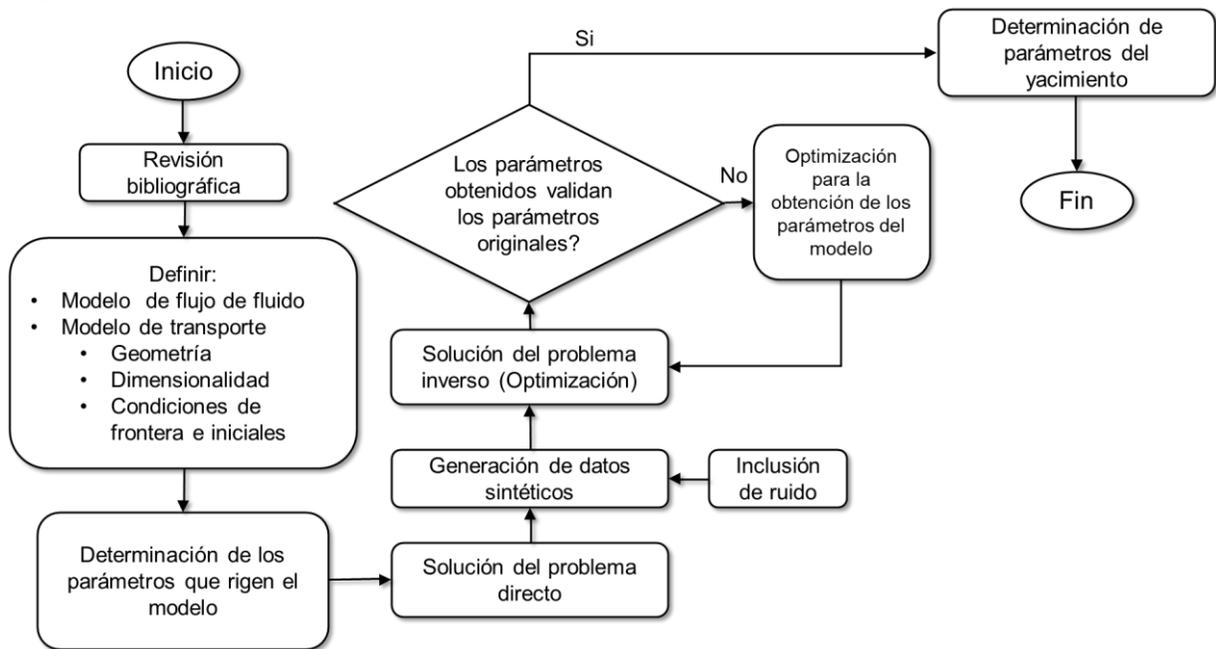


Figura 2.1 Diagrama de la metodología utilizada para la conducción de este trabajo.

El sistema físico para modelar es una idealización física que incorpora un conjunto común de características que parecen ser significativas, como lo ilustra Warren & Root (1963) en la Figura 2.2:

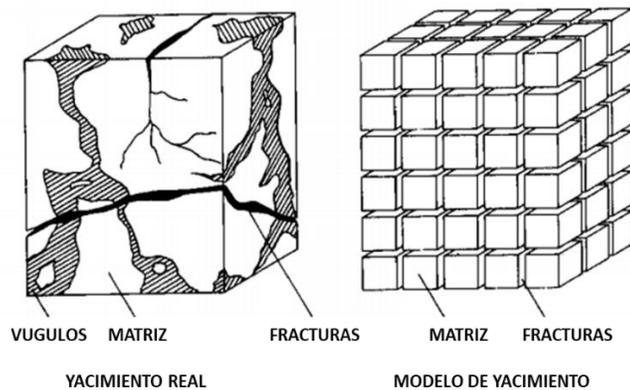


Figura 2.2 Idealización de la heterogeneidad del medio poroso.
(Adaptado de Warren & Root, 1963).

- 1) El medio que contiene la porosidad primaria (la matriz de la roca) es homogéneo e isótropo, y está contenido dentro de una matriz sistemática de paralelepípedos rectangulares idénticos.
- 2) Toda la porosidad secundaria (los canales generados por la fractura) está contenida dentro de un sistema ortogonal de fracturas continuas uniformes, las cuales están orientadas de manera que cada fractura es paralela a uno de los ejes principales de permeabilidad. Las fracturas normales a cada uno de los ejes principales están espaciadas uniformemente y son de ancho constante; puede existir un espaciado de fractura o un ancho diferentes a lo largo de cada uno de los ejes para simular el grado adecuado de anisotropía.
- 3) El complejo entramado de porosidades primarias y secundarias es homogéneo, aunque anisótropo. El flujo puede ocurrir entre las porosidades primaria y secundaria, pero el flujo a través de los elementos de porosidad primaria es tan pequeña que puede ser descartada. Se harán supuestos adicionales de naturaleza más particular en los puntos apropiados del tratamiento matemático.

2.1 Geometría del dominio

En particular se resolverá el caso de yacimiento de flujo radial con frontera finita, como se muestra en el esquema a) de la Fig. 2.3, donde el pozo se ubica en el centro del yacimiento donde se llevará a cabo la inyección continua de un fluido y del trazador. La frontera exterior se ubica en una posición alejada del pozo. En la Figura 2.3 b) se

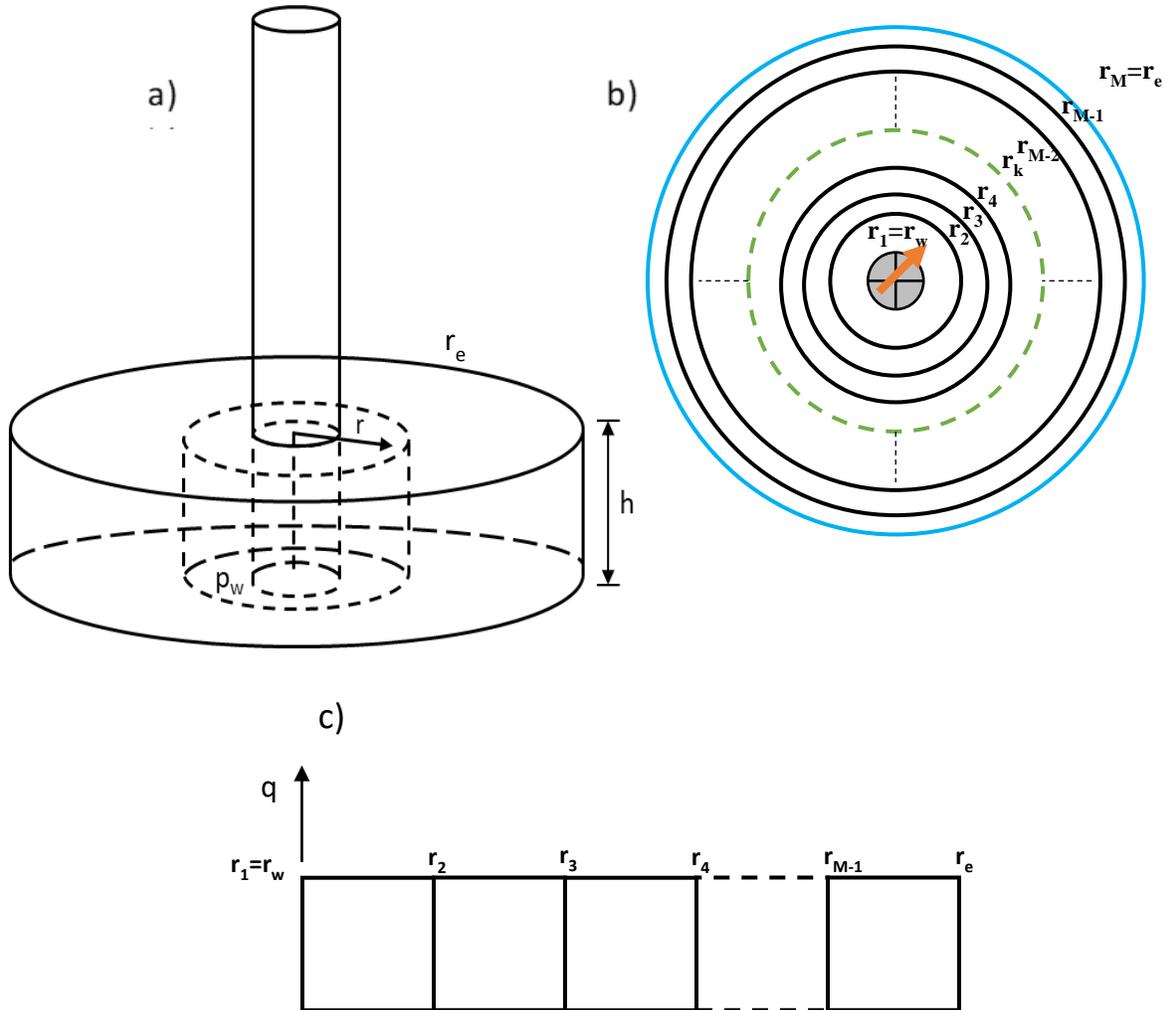


Figura 2.3 a) Flujo radial en un yacimiento finito, b) Esquema radial con posición del pozo y la frontera externa y c) La representación del modelo en forma 1D.

muestra el espacio radial desde el pozo inyector hasta el radio exterior; se observa que el pozo se encuentra en el centro mientras que la frontera externa está definida a una distancia específica desde el pozo inyector. En este caso, cada nodo radial mostrado entre el pozo y la frontera externa está asociado a un radio particular, por lo

que los balances de masa se satisfacen de manera simultánea en cada ubicación manteniendo los mismos valores de presión y concentración en cada posición radial. Y c) es la presentación del modelo de forma unidimensional.

2.2 Modelo matemático

Los métodos utilizados para modelar el flujo y transporte de fluidos en un sistema de matriz y fractura pueden ser dividido en dos categorías principales: un método de medio continuo y un método de fractura discreta, el caso de un medio continuo es aproximaciones de doble porosidad y doble permeabilidad donde se propone que el sistema de matriz y fractura contribuyen tanto al flujo como al almacenamiento del fluido, mientras que método de fractura discreta solo la matriz contribuye en el almacenamiento y la fractura en el flujo . El sistema de ecuaciones elegidas para este modelo será de fracturas discretas consistiendo en un acoplamiento de las ecuaciones de Warren & Root (1963) y de la ecuación de dispersión-advención en un medio de doble porosidad (DADE), de Lange et al, (2005).

2.2.1 Modelo de flujo de fluidos del yacimiento

2.2.1.1 Modelo de Warren & Root

Un modelo típico de flujo de fluidos del yacimiento es el modelo de doble porosidad de Warren & Root (1963). Este utiliza dos conjuntos de medios continuos separados para describir un sistema de matriz rocosa fracturado. La comunicación entre las fracturas y la matriz se logra mediante una función de intercambio relacionada con un factor de forma de la matriz. Este modelo es apropiado para yacimientos con distribuciones uniformes de fracturas conectadas (presentando un modelo simplificado, idealizando un sistema de paralelepípedo rectangulares separados por una red ortogonal de fracturas Figura 2.1 y si bien el modelo de flujo ciertamente implica heterogeneidad a escala macroscópica, puede considerarse homogéneo si las dimensiones de los bloques homogéneos son pequeñas en comparación con las dimensiones del yacimiento. El enfoque más simple es asumir fracturas espaciadas uniformemente y

permitir variaciones en el ancho de la fractura para satisfacer las condiciones de anisotropía.

El sistema de ecuaciones de este modelo es el siguiente:

$$\phi_m c_m \frac{\partial p_m}{\partial t} = \frac{\alpha k_m}{\mu} (p_f - p_m) \quad (13)$$

$$\phi_f c_f \frac{\partial p_f}{\partial t} = \frac{k_f}{\mu} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial p_f}{\partial r} \right) - \phi_m c_m \frac{\partial p_m}{\partial t} \quad (14)$$

El modelo supone que las fuerzas externas son constantes, que no hay interacción entre las dos regiones (ϕ_m es independiente de p_f y ϕ_f es independiente de p_m) y que la variación de ϕ_f con respecto a p_f es pequeña.

Para la adimensionalización del sistema de ecuaciones se utilizan los parámetros y variables adimensionales del Anexo 3.

Por el modelo es conveniente la introducción de estos parámetros adimensionales, ya que en este punto esto permitirá simplificar el proceso de generar las soluciones a la ecuación de flujo, además de la reducción de los parámetros de interés al ser agrupados. Acoplado las Ecuaciones (13) y (14) con los conceptos del Anexo 3, se obtienen el sistema de ecuaciones que describen el flujo en su forma adimensional de la siguiente manera :

$$\frac{\partial p_{mD}}{\partial t} = \frac{\lambda \tau}{(1-\omega)} (p_{fD} - p_{mD}) \quad (15)$$

$$\frac{\partial p_{fD}}{\partial t} = \frac{\tau}{\omega} \frac{1}{r_D} \frac{\partial}{\partial r_D} \left(r_D \frac{\partial p_{fD}}{\partial r_D} \right) - \frac{(1-\omega)}{\omega} \frac{\partial p_{mD}}{\partial t} \quad (16)$$

2.2.2 Modelo de transporte del trazador:

2.2.2.1 Ecuación de dispersión-advección dual (DADE)

El transporte de trazadores está principalmente influenciado por los mecanismos de convección, dispersión y adsorción. La comprensión de las propiedades dispersivas

es esencial para evaluar, analizar y simular la concentración del trazador inyectado desde el pozo de inyección, así como la concentración detectada en el pozo de observación (Philip, 1973). La dispersión es el resultado de la difusión molecular y la dispersión mecánica o dispersión hidrodinámica. En comparación con la dispersión hidrodinámica, la difusión molecular es más débil en varios órdenes de magnitud. En muchos escenarios, donde la velocidad del fluido es relevante, la difusión y adsorción molecular suele despreciarse y sólo se considera la dispersión hidrodinámica. Esto debido a que las fluctuaciones locales de la velocidad del fluido y la estructura del medio poroso inducen a una situación donde la dispersión hidrodinámica sea la que domine el transporte (Li L. et al, 2017).

La ecuación DADE se utiliza comúnmente en la modelación de fenómenos de transporte en medios porosos, como la contaminación del suelo, transporte de solutos en yacimientos o en acuíferos. En este caso la dispersión representa la difusión de un trazador a través del medio poroso, mientras que la advección se refiere al transporte convectivo de la sustancia debido al flujo del fluido a través del medio. La combinación de estos dos efectos en la ecuación DADE permite simular el comportamiento de la sustancia en el medio poroso. Para un sistema de doble porosidad el sistema de ecuaciones toma la siguiente forma:

$$\frac{\partial C_m}{\partial t} = \frac{D_m}{\phi_m} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial C_m}{\partial r} + \frac{\partial^2 C_m}{\partial r^2} \right) + \frac{\alpha}{\phi_f} (C_f - C_m) \quad (17)$$

$$\frac{\partial C_f}{\partial t} = \frac{D_f}{\phi_f} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial C_f}{\partial r} + \frac{\partial^2 C_f}{\partial r^2} \right) + \frac{k}{\phi_f \mu} \left[C_f \frac{1}{r} \frac{\partial p_f}{\partial r} + C_f \frac{\partial^2 p_f}{\partial r^2} + \frac{\partial p_f}{\partial r} \frac{\partial C_f}{\partial r} \right] - \frac{\alpha}{\phi_f} (C_f - C_m) \quad (18)$$

Para la adimensionalización del sistema de ecuaciones se utilizan los parámetros y variables adimensionales del Anexo 4.

Acoplando las Ecuaciones (17), (18) y los parámetros del Anexo 4 se obtiene el siguiente conjunto de ecuaciones adimensionales:

$$\frac{\partial C_{mD}}{\partial t} = \tau D_{mD} \left(\frac{1}{r_D} \frac{\partial C_{mD}}{\partial r_D} + \frac{\partial^2 C_{mD}}{\partial r_D^2} \right) + \tau \alpha_D (C_{fD} - C_{mD}) \quad (19)$$

$$\frac{\partial C_{fd}}{\partial t} = \tau D_{fd} \left(\frac{1}{r_D} \frac{\partial C_{fd}}{\partial r_D} + \frac{\partial^2 C_{fd}}{\partial r_D^2} \right) + \tau \gamma \left[C_{fd} \frac{1}{r_D} \frac{\partial p_{fd}}{\partial r_D} + C_{fd} \frac{\partial^2 p_{fd}}{\partial r_D^2} + \frac{\partial p_{fd}}{\partial r_D} \frac{\partial C_{fd}}{\partial r_D} \right] - \tau \alpha_D (C_{fd} - C_{mD}) \quad (20)$$

Nótese que en las Ecuaciones (15) y (16) correspondientes al flujo, y las Ecuaciones (19) y (20) del transporte, se encuentran acopladas, es decir el transporte del soluto depende del campo de velocidades derivado de las ecuaciones de flujo. El campo de velocidades en la dirección del flujo determina con la ecuación de Darcy como se ve en la siguiente ecuación.

$$\bar{v}_r = -\frac{k}{\mu} \frac{\partial p_f}{\partial r} \hat{e}_r \quad (21)$$

2.3 Solución numérica

El modelo utilizado para simular el flujo y el transporte en el medio poroso consta de un sistema de ecuaciones diferenciales parciales cuyas variables dependientes son: p_{mD} , p_{fd} , C_{mD} y C_{fd} y las variables independientes son t y r_D , además de los parámetros adimensionales que lo conforman. Como menciona Thomas (1995) la solución del modelo puede hacerse por diferentes vías; semi-analítica con transformadas de Laplace, semi-numérica con trasformada de Laplace combinada con diferencias finitas o mediante de solución numérica utilizando esquemas de diferencias finitas explícitas o implícitas. En esta tesis se utilizó el esquema de solución numérica mediante diferencias finitas explícitas.

Usando la discretización por método de diferencias finitas explícitas descrito por Thomas (1995), en la Figura 2.4 se presentan los nodos temporales utilizados en la evaluación de las derivadas de primer y segundo orden.

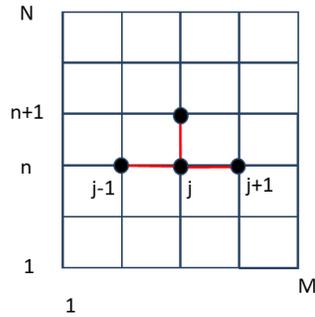


Figura 2.4 Extensión de discretización por métodos de diferencias finitas explícitas. j son los nodos espaciales y n los nodos temporales.

La aproximación de derivadas utilizando diferencias finitas se basa en la expansión de la función mediante series de Taylor. Donde se analiza el caso de funciones de una y dos variables, destacando el error asociado con las derivadas de primer y segundo orden.

Funciones de una variable: Sea $f(x)$ una función diferenciable, y consideremos un punto x_0 con un incremento h . La serie de Taylor de $f(x)$ alrededor de x_j es:

$$\begin{aligned} f(x_j + \Delta x) &= f(x_j) + \Delta x f'(x_j) + \frac{\Delta x^2}{2} f''(x_j) + \frac{\Delta x^3}{6} f'''(x_j) + O(\Delta x^4) \\ f(x_j - \Delta x) &= f(x_j) - \Delta x f'(x_j) + \frac{\Delta x^2}{2} f''(x_j) - \frac{\Delta x^3}{6} f'''(x_j) + O(\Delta x^4) \end{aligned} \quad (22)$$

Para aproximaciones de una variable:

La primera derivada $f'(x_j)$

Diferencia hacia adelante:

$$f'(x_j) \approx \frac{f(x_j + \Delta x) - f(x_j)}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad (23)$$

Diferencia centrada:

$$f'(x_j) \approx \frac{f(x_j + \Delta x) - f(x_j - \Delta x)}{2\Delta x} + O(\Delta x^2) \quad (24)$$

La diferencia central es más precisa, ya que el error $O(\Delta x)$ principal es de orden Δx^2 , mientras que en la diferencia hacia adelante es de orden Δx .

La segunda derivada $f''(x_j)$

$$f''(x_j) \approx \frac{f(x_j + \Delta x) - 2f(x_j) + f(x_j - \Delta x)}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2) \quad (25)$$

Funciones de dos variables: Sea $f(x, y)$ una función diferenciable, y consideremos un punto (x_j, y_j) con un incremento h en las direcciones x y y .

Para aproximaciones de dos variables:

La primera derivada $f'_x(x_j, y_j)$ y $f'_y(x_j, y_j)$

Diferencia hacia adelante:

$$f'_x(x_j, y_j) \approx \frac{f(x_j + \Delta x, y_j) - f(x_j, y_j)}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad (26)$$

$$f'_y(x_j, y_j) \approx \frac{f(x_j, y_j + \Delta y) - f(x_j, y_j)}{\Delta y} + O(\Delta y)$$

Diferencia centrada:

$$f'_x(x_j, y_j) \approx \frac{f(x_j + \Delta x, y_j) - f(x_j - \Delta x, y_j)}{2\Delta x} + O(\Delta x^2) \quad (27)$$

$$f'_y(x_j, y_j) \approx \frac{f(x_j, y_j + \Delta y) - f(x_j, y_j - \Delta y)}{2\Delta y} + O(\Delta y^2)$$

Donde diferencia central sigue teniendo el menor error.

La segunda derivada $f''_x(x_j, y_j)$ y $f''_y(x_j, y_j)$

$$f_x''(x_j, y_j) \approx \frac{f(x_j + \Delta x, y_j) - 2f(x_j, y_j) + f(x_j - \Delta x, y_j)}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2) \quad (28)$$

$$f_y''(x_j, y_j) \approx \frac{f(x_j, y_j + \Delta y) - 2f(x_j, y_j) + f(x_j, y_j - \Delta y)}{\Delta y^2} + O(\Delta y^2)$$

Fundamentado en lo anterior, al aplicar estas aproximaciones para las derivadas temporales de primer orden utilizando las diferencias hacia adelante se obtiene las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_{iDj}}{\partial t} &\approx \frac{p_{iDj}^{n+1} - p_{iDj}^n}{\Delta t} + O(\Delta t) \\ \frac{\partial C_{iDj}}{\partial t} &\approx \frac{C_{iDj}^{n+1} - C_{iDj}^n}{\Delta t} + O(\Delta t) \end{aligned} \quad (29)$$

Para el caso de las derivadas espaciales de primero orden para la presión y para la concentración por medio de diferencias centradas se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_{iDj}}{\partial r_D} &\approx \frac{p_{iDj+1}^n - p_{iDj-1}^n}{2\Delta r_D} + O(\Delta r_D^2) \\ \frac{\partial C_{iDj}}{\partial r_D} &\approx \frac{C_{iDj+1}^n - C_{iDj-1}^n}{2\Delta r_D} + O(\Delta r_D^2) \end{aligned} \quad (30)$$

Derivadas espaciales de segundo orden para la presión y para la concentración:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 p_{iD}}{\partial r_D^2} &\approx \frac{p_{iDj-1}^n - 2p_{iDj}^n + p_{iDj+1}^n}{\Delta r_D^2} + O(\Delta r_D^2) \\ \frac{\partial^2 C_{iD}}{\partial r_D^2} &\approx \frac{C_{iDj-1}^n - 2C_{iDj}^n + C_{iDj+1}^n}{\Delta r_D^2} + O(\Delta r_D^2) \end{aligned} \quad (31)$$

Sustituyendo las aproximaciones de las derivadas de las Ecuaciones (29), (30) y (31) en las Ecuaciones (15), (16), (19) y (20), y después de un realizar el álgebra

correspondiente, se obtienen los siguientes esquemas discretizados de los modelos adimensionales de flujo y transporte.

Sistema de flujo discretizadas para los medios de la matriz y fractura se representan con las siguientes ecuaciones:

Matriz:

$$p_{mDj}^{n+1} = p_{fDj}^n + p_{mDj}^n [1 - e] \quad (32)$$

Fractura:

$$p_{fDj}^{n+1} = p_{fDj-1}^n [a - b] + p_{fDj}^n [1 - c] + p_{fDj+1}^n [a + b] - d (p_{mDj}^{n+1} - p_{mDj}^n) \quad (33)$$

$$a = \frac{\tau \Delta t}{\omega \Delta r_D^2}; b_j = \frac{\tau \Delta t}{2\omega \Delta r_D r_{Dj}}; c = \frac{2\tau \Delta t}{\omega \Delta r_D^2};$$

$$d = \frac{(1 - \omega)}{\omega}; e = \frac{\lambda \tau}{(1 - \omega)} \Delta t$$

Y el siguiente sistema de ecuaciones discretizadas para el transporte:

Matriz:

$$C_{mDj}^{n+1} = C_{mDj-1}^n [D_{mD} f - D_{mD} g] + C_{mDj}^n [1 - h - 2D_{mD} f]$$

$$+ C_{mDj+1}^n [D_{mD} g + D_{mD} f]$$

$$+ h C_{fD}^n \quad (34)$$

Fractura:

$$C_{fDj}^{n+1} = C_{fDj-1}^n \left[D_{fD} (l - g) + \frac{l\gamma}{4} p_{fDj-1}^n - \frac{l\gamma}{4} p_{fDj+1}^n \right]$$

$$+ C_{fDj}^n \left[1 - h - 2l D_{fD} + \gamma p_{fDj-1}^n [l - g] - 2l\gamma p_{fDj}^n + \gamma p_{fDj+1}^n [g + l] \right]$$

$$+ C_{fDj+1}^n \left[D_{fD} (l + g) - \frac{l\gamma}{4} p_{fDj-1}^n + \frac{l\gamma}{4} p_{fDj+1}^n \right]$$

$$+ h C_{mDj}^n \quad (35)$$

$$l = \frac{\Delta t \tau}{\Delta r_D^2}; g = \frac{\Delta t \tau}{2r_D \Delta r_D}; h = \Delta t \tau \alpha_D$$

Estas ecuaciones de recurrencia para los nodos de discretización serán usadas de manera simultánea para el avance en tiempo. Estas ecuaciones reemplazan las ecuaciones diferenciales parciales que se tenía en un comienzo.

2.4 Modelo computacional

Como parte complementaria y para definir un sistema cerrado que permita la implementación de la solución numérica, se definen las condiciones de frontera y la condición inicial del sistema (Hamdi et al., 2007). Si se observan las ecuaciones originales, existen derivadas espaciales de primer y segundo orden por lo que se requieren dos condiciones de frontera para el modelo de flujo y dos condiciones de frontera para el problema de transporte, además de las condiciones iniciales para la concentración y para la presión. Las condiciones de frontera se imponen en el pozo y en la frontera exterior. En lo que sigue, se explica el procedimiento para incorporar las ecuaciones correspondientes a las condiciones de frontera en las ecuaciones adimensionales discretizadas para dar lugar al problema de valores iniciales.

Para fijar las condiciones iniciales y de frontera se usa como base el sistema hay que explicar ciertos conceptos. En el sistema original, r_w es el radio del pozo y r_e es la distancia desde el centro del pozo a la frontera del yacimiento. Como se mencionó previamente, ambas posiciones definen las fronteras, interna y externa, respectivamente, del yacimiento. Siguiendo la adimensionalización de la posición definida en el Anexo 3 de r_D . En variables adimensionales, dichas frontera están ubicadas en $r_{wD} = 1$ y $r_{eD} = r_e / r_w$. Si se define un número de nodos de discretización para la coordenada radial como M , entonces se puede definir el espaciamiento entre nodos adyacentes de manera tal que las posiciones en el yacimiento se avalúan de acuerdo con $r_{Dj} = r_{Dw} + (j-1)\Delta r_D$, donde $\Delta r_D = r_{eD} / M$, para $j = 1, 2, \dots, M$. De igual manera se define un número de nodos temporales como N de forma que el avance en el tiempo de evalúa de acuerdo con $t_{n+1} = t_0 + \Delta t(n-1)$, donde $t_0 = 0$ y $\Delta t = T / N$, siendo

T es el horizonte de la simulación el cual se define de acuerdo con la información disponible las pruebas de presión o trazadores.

Tomando en cuenta que el caso planteado en trabajo será el de una prueba con una inyección de trazador constante en el pozo a tasa y una presión constante en el pozo y para el caso de bache de trazador, las condiciones iniciales y de frontera se especifican de la siguiente manera en función de variables adimensionales:

Condiciones iniciales:

$$\begin{aligned} p_{iD}(r_D, 0) &= 1 \\ C_{iD}(r_D, 0) &= 0 \end{aligned} \quad (36)$$

En la frontera interna correspondiente a $r_D = 1$ y el termino p_{wfD} corresponde a la presión adimensional en el pozo.

Condición de frontera en el pozo:

Caso inyección continua a presión constante

$$\begin{aligned} \text{En } r_D &= 1 \\ p_{fD1}^{n+1} &= p_{iny} \quad ; t \geq 0 \\ C_{fD1}^{n+1} &= 1 \quad ; t \geq 0 \end{aligned} \quad (37)$$

Caso de bache

$$\begin{aligned} \text{En } r_D &= 1 \\ p_{fD1}^{n+1} &\begin{cases} p_{wfD}; & 0 \leq t_1 \\ p_{inyD}; & t_1 \leq t < t_2 \\ p_{wfD}; & t_2 > t \end{cases} \\ C_{fD1}^{n+1} &\begin{cases} 0 & ; 0 \leq t_1 \\ 1 & ; t_1 \leq t < t_2 \\ 0 & ; t_2 > t \end{cases} \end{aligned} \quad (38)$$

* wf = Condición fondo de pozo

En el caso de la frontera externa, generalmente se asume que la frontera está muy lejos (frontera infinita) o que el yacimiento está aislado (frontera finita). En nuestro caso vamos a utilizar la segunda (frontera finita) y considerar yacimiento impermeable en la frontera exterior.

Condición de frontera externa:

$$\begin{aligned}
 &\text{En } r_D = r_{eD} \\
 &\frac{\partial p_{iDM}}{\partial r_D} = 0 \quad ; t \geq 0 \\
 &\frac{\partial C_{iDM}}{\partial r_D} = 0 \quad ; t \geq 0 \\
 &*i = m, f
 \end{aligned} \tag{39}$$

Para la incorporar la condición de frontera externa en las ecuaciones discretizadas, se hace referencia al hecho de que se va a resolver el caso de yacimiento finito de frontera aislada, y por lo tanto retomamos la Ecuación (37) que se lee:

$$\frac{\partial p_{iDM}}{\partial r_D} = 0 \tag{40}$$

$$\frac{\partial C_{iDM}}{\partial r_D} = 0 \tag{41}$$

Si aplicamos diferencias finitas centradas a esta ecuación tenemos:

$$\frac{P_{jDM+1}^n - P_{jDM-1}^n}{2\Delta r_D} = 0 \tag{42}$$

$$\frac{C_{jDM+1}^n - C_{jDM-1}^n}{2\Delta r_D} = 0 \tag{43}$$

$$\frac{C_{mDM+1}^n - C_{mDM-1}^n}{2\Delta r_D} = 0$$

De esta ecuación se despejan $P_{jN,+1}^n$ y C_{jDM+1}^n que corresponden a la presión en un nodo fantasma en la frontera exterior:

$$P_{jDM+1}^n = P_{jDM-1}^n \tag{44}$$

$$C_{jDM+1}^n = C_{jDM-1}^n \tag{45}$$

De esta manera obtenemos las ecuaciones de recurrencia que constituyen el problema de valores iniciales. En resumen, las ecuaciones discretizadas, (33), (34) y (35), que describen el proceso de inyección del trazador son:

En el sistema de ecuaciones de flujo:

En la fractura

$$p_{fDj}^{n+1} \begin{cases} p_{wfD}; 0 \leq t < t_1 \\ p_{inyD}; t_1 \leq t_{iny} \leq t \\ p_{wfD}; t > t_{iny} \end{cases} \quad (46)$$

$$p_{fDj}^{n+1} = p_{fDj-1}^n [a - b] + p_{fDj}^n [1 - c] + p_{fDj+1}^n [a + b] - d (p_{mDj}^{n+1} - p_{mDj}^n); j = 2, 3, 4, \dots, M - 1 \quad (47)$$

$$p_{fDM}^{n+1} = p_{fDM-1}^n [2a] + p_{fDM}^n [1 - c] - d (p_{mDM}^{n+1} - p_{mDM}^n); j = M \quad (48)$$

En la matriz

$$p_{mDj}^{n+1} = p_{fDj}^n + p_{mDj}^n [1 - e]; j = 1, 3, 4, \dots, M \quad (49)$$

En el sistema de ecuaciones para el modelo de transporte:

En la fractura

$$C_{fDj}^{n+1} \begin{cases} 0; 0 \leq t < t_1 \\ 1; t_1 \leq t_{iny} \leq t \\ 0; t > t_{iny} \end{cases} \quad (50)$$

$$\begin{aligned} C_{fDj}^{n+1} = & C_{fDj-1}^n \left[D_{fD} (f - g) + \frac{f\gamma}{4} p_{fDj-1}^n - \frac{f\gamma}{4} p_{fDj+1}^n \right] \\ & + C_{fDj}^n \left[1 - h - 2fD_{fD} + \gamma p_{fDj-1}^n [f - g] - 2f\gamma p_{fDj}^n + \gamma p_{fDj+1}^n [g + f] \right]; j = 2, 3, 4, \dots, M - 1 \\ & + C_{fDj+1}^n \left[D_{fD} (f + g) - \frac{f\gamma}{4} p_{fDj-1}^n + \frac{f\gamma}{4} p_{fDj+1}^n \right] \\ & + hC_{mDj}^n \end{aligned} \quad (51)$$

$$\begin{aligned}
C_{fDM}^{n+1} &= C_{fDM-1}^n [2D_{fD}(f)] \\
&+ C_{fDM}^n [1-h-2fD_{fD} + 2\gamma P_{fDM-1}^n [f] - 2f\gamma P_{fDM}^n]; j = M \\
&+ hC_{mDM}^n
\end{aligned} \tag{52}$$

En la matriz

$$\begin{aligned}
C_{mD1}^{n+1} &= C_{mD2}^n [2D_{mD}f] + C_{mD1}^n [1-h-2D_{mD}f]; j = 1 \\
&+ hC_{fD1}^n
\end{aligned} \tag{53}$$

$$\begin{aligned}
C_{mDj}^{n+1} &= C_{mDj-1}^n [D_{mD}f - D_{mD}g] + C_{mDj}^n [1-h-2D_{mD}f]; j = 2, 3, 4, \dots, M-1 \\
&+ C_{mDj+1}^n [D_{mD}g + D_{mD}f] \\
&+ hC_{fD}^n
\end{aligned} \tag{54}$$

$$\begin{aligned}
C_{mDM}^{n+1} &= C_{mDM-1}^n [2D_{mD}f] + C_{mDM}^n [1-h-2D_{mD}f]; j = M \\
&+ hC_{fDM}^n
\end{aligned} \tag{55}$$

Capítulo 3. Resultados y discusión

En este capítulo se presentan los resultados de la solución numérica del modelo acoplado de flujo y transporte para un medio poroso, utilizando el modelo de doble porosidad, de geometría de flujo radial simétrico donde se lleva a cabo la inyección continua de un fluido y, sobre éste, se inyecta de manera continua un trazador que sigue el campo de flujo del trazador. Se presentan la solución del problema directo y el problema inverso con los datos sintéticos y de campo, como sus correspondientes perfiles radiales de presión y de concentración para diferentes tiempos de observación, así como las curvas de arribo del trazador y la dinámica de la presión para diferentes posiciones en el yacimiento.

3.1 Solución del problema directo

La solución del problema directo se refiere al proceso de utilizar un modelo matemático o computacional para predecir el comportamiento de un sistema bajo ciertas condiciones iniciales y parámetros. En este contexto, el problema directo implica:

1. Selección de un conjunto de parámetros que representen escenarios físicos consistentes con las pruebas de trazadores y las pruebas de presión.
2. Solución del modelo acoplado de transporte de trazador con el modelo de flujo.
3. Selección de los puntos de muestreo de la solución para presión y para la concentración tanto en la fractura como en la matriz.
4. Análisis del efecto de los parámetros en las curvas de distribución de la presión y de la concentración.

En esta sección se presentan los resultados de resolver el problema directo utilizando el esquema de diferencias finitas explícitas. En el caso de la inyección continua de fluido y trazador, la inyección se realiza a presión constante mientras que la inyección del trazador es constante durante la prueba. La prueba sintética de inyección continua de trazador se realiza con las condiciones iniciales y de frontera, así como las propiedades petrofísicas de la Tabla 3.1 y 3.2.

Tabla 3.1 Condiciones iniciales y de frontera.

Propiedad	Magnitud	Unidades
t	300	h
t_{iny}	300	h
p_0	3000	psia
ρ_{iny}	4000	psia
r_w	0.2917	ft
r_e	500	ft
N	1e6	--
M	100	--

Tabla 3.2 Propiedades petrofísicas.

Propiedad	Valor	Unidad
μ	1	cP
c_m	6.89e-6	Pa ⁻¹
ϕ_m	20	%
k_m	9.86e-16	m ²
D_m	1.00E-08	m ² .s ⁻¹
c_f	9.997e-6	Pa ⁻¹
ϕ_f	5	%
k_f	9.86e-12	m ²
D_f	1.00E-03	m ² .s ⁻¹

Obteniendo los parámetros adimensionales de la Tabla 3.3 calculados con las ecuaciones de los Anexo 3 y 4.

Tabla 3.3 Parámetros adimensionales.

Parámetro	Magnitud
ω	0.2662
λ	6.00e-07
τ	0.1314
γ	0.7860
D_{fD}	0.3805
D_{mD}	9.5137e-6

A continuación, se muestra los resultados obtenidos de la solución del modelo de flujo acoplado con el modelo de transporte realizado con el del Anexo 5. En las diferentes figuras, para el caso de los perfiles radiales, la curva azul indica el tiempo más pequeño, mientras que la curva morada de líneas y puntos es del tiempo más grande. En el caso de las curvas de arribo, se sigue la misma lógica en la que el punto de observación más pequeño se indica en color azul mientras que la curva morada indica un punto de observación más alejado.

En la Figura 3.1 se observa el avance del frente de presión a través del sistema de fracturas en la formación para diferentes tiempos de observación. Se observa que en el medio fracturado la influencia de la inyección se puede apreciar hasta el radio exterior desde tiempos tempranos, debido a la buena comunicación que genera el sistema de fracturas.

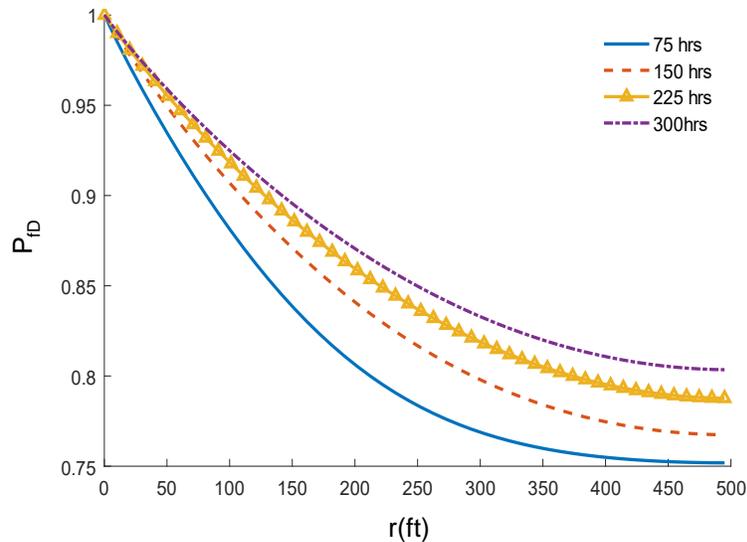


Figura 3.1 Distribución radial de la presión en la fractura.

En la Figura 3.2 se observa que a diferencia de la Figura 3.1 la presión en la matriz tiene un aumento significativamente más lento a comparación de la que se observa en la fractura, en la curva azul a 75 horas se observa un frente de presión que llega hasta 250 ft y en la morada a 300 horas se observa que el frente llegó a la frontera exterior pero su efecto es menos notable. Se debe tener en cuenta que, en el modelo de doble porosidad, los bloques de matriz rocosa se encuentran desconectados entre sí y que sólo intercambian fluido con la red de fracturas. Por otra parte, el fluido se inyecta en el pozo el cual está directamente conectado con la red de fracturas, mientras que los bloques de matriz no se conectan con el pozo. Es por esta razón que la presión en la matriz rocosa se incrementa más lentamente desde la presión inicial. Se observa que la presión cerca del pozo se incrementa conforme se incrementa el tiempo y decae hacia la frontera exterior.

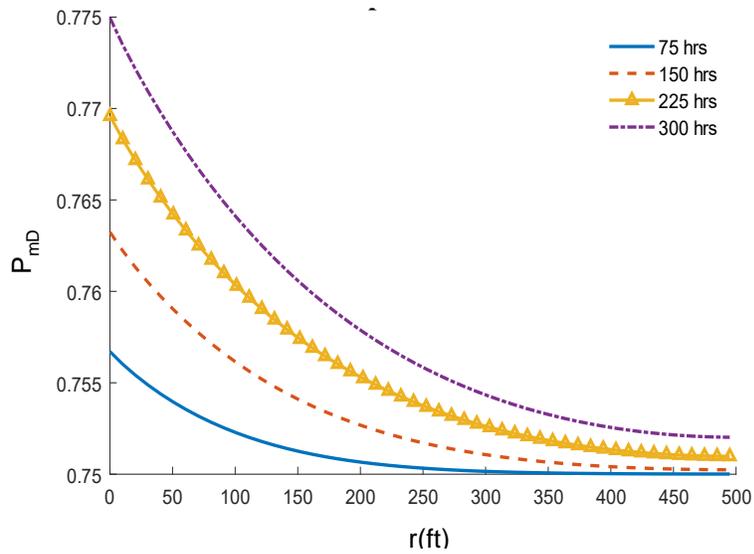


Figura 3.2 Distribución radial de la presión en la matriz.

En la Figura 3.3 se observa con más detalle el frente de presión mencionado en la figura 3.1, donde en la curva azul a 10 ft del pozo alcanza una presión similar a la de inyección con el frente de inyección teniendo un impacto prácticamente inmediato, en la curva morada a 200 ft se observa que el frente de presión logro llegar a la frontera aproximadamente en 190 horas.

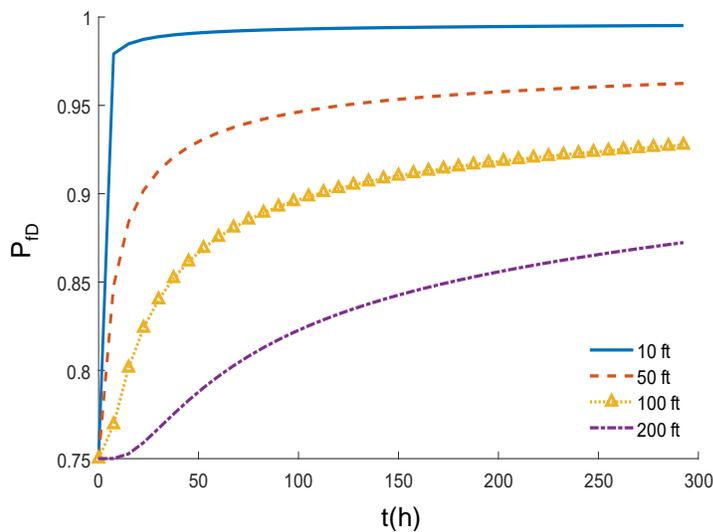


Figura 3.3 Curva de arribo de la presión en la fractura para diferentes posiciones de observación.

En la Figura 3.4 se observa que a los 10 ft de distancia del pozo hay efecto del frente de presión desde el inicio de la prueba similar al de la figura 3.3 pero menor, como se ve en la pendiente de las curvas.

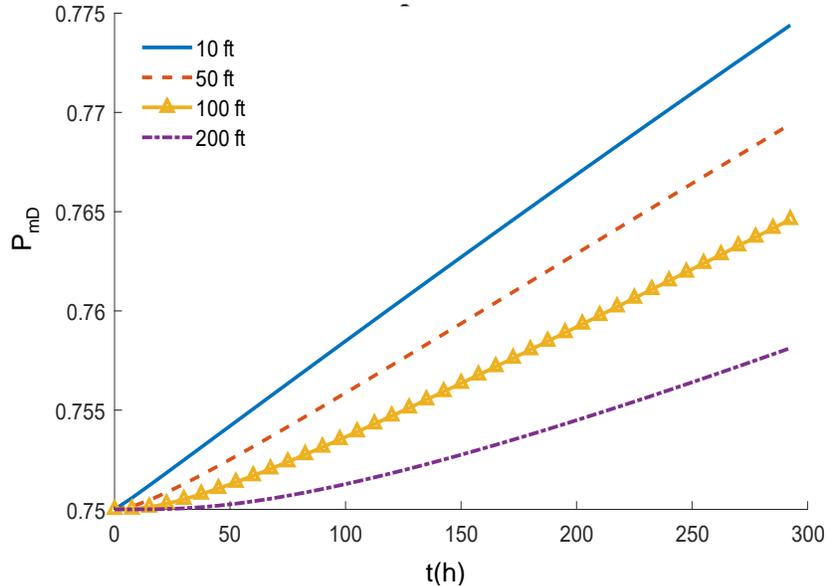


Figura 3.4 Curva de arribo de la presión en la matriz para diferentes posiciones de observación.

En la Figura 3.5 se observan los perfiles radiales de concentración en la formación, a una distancia menor a los 5 ft se observa que la dispersión de la concentración tiene un comportamiento similar para los diferentes tiempos de observación. Sin embargo,

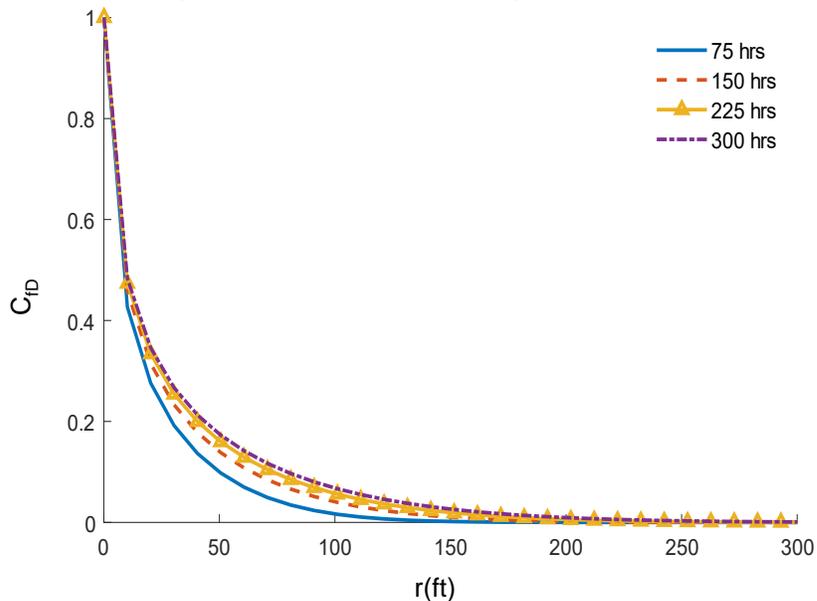


Figura 3.5 Perfil radial de concentración en la fractura.

para tiempos mayores las curvas indican una acumulación de trazador a distancias cercanas al pozo.

En la Figura 3.6 se observa que los perfiles radiales del trazador en la matriz a tiempos cortos como en la curva azul de 75 horas no penetra tan profundo llegando a 12 ft del pozo, y no hay mucho avance comparándolo con la curva de 300 horas donde solo llega a 200 ft.

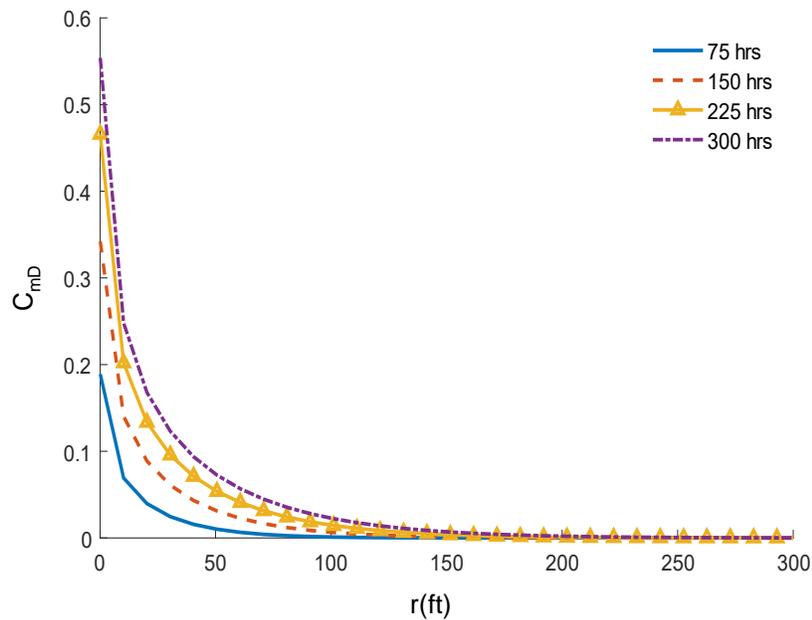


Figura 3.6 Perfil radial de concentración en la matriz.

En la Figura 3.7 se observa que a distancias cerca del pozo como en la curva azul de 10 ft el arribo del trazador llega desde inicios de la prueba, pero a distancias más largas como la de 100 ft su presencia es muy leve, no llegando a interferir con la frontera externa propuesta, corroborando lo dicho en la figura 3.5.

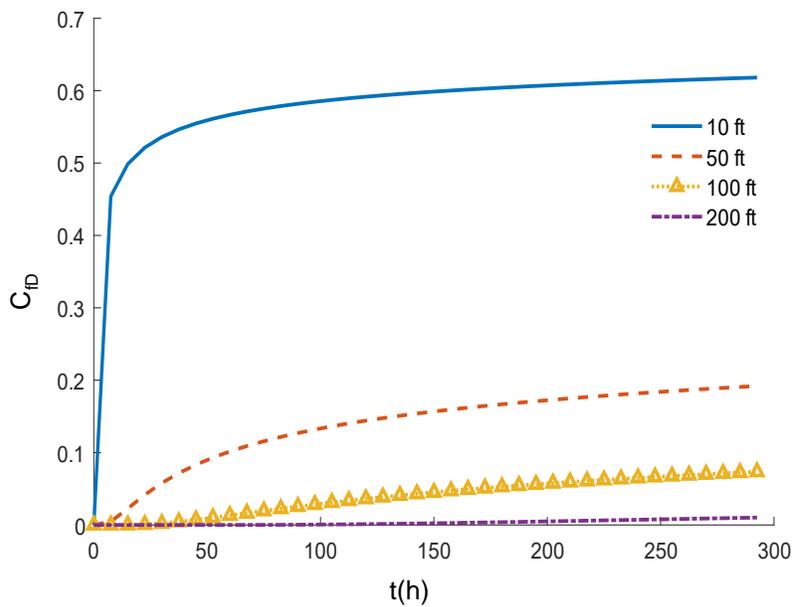


Figura 3.7 Curva de arribo de la concentración en la fractura para diferentes posiciones de observación.

En la Figura 3.8 se observa que el arribo de la matriz es muy pequeño, observando que solo a distancias cerca del pozo se puede apreciar una acumulación significativa a través del tiempo como se ve en la curva en 10 ft y en comparación a 50 ft donde la acumulación del trazador es prácticamente nula.

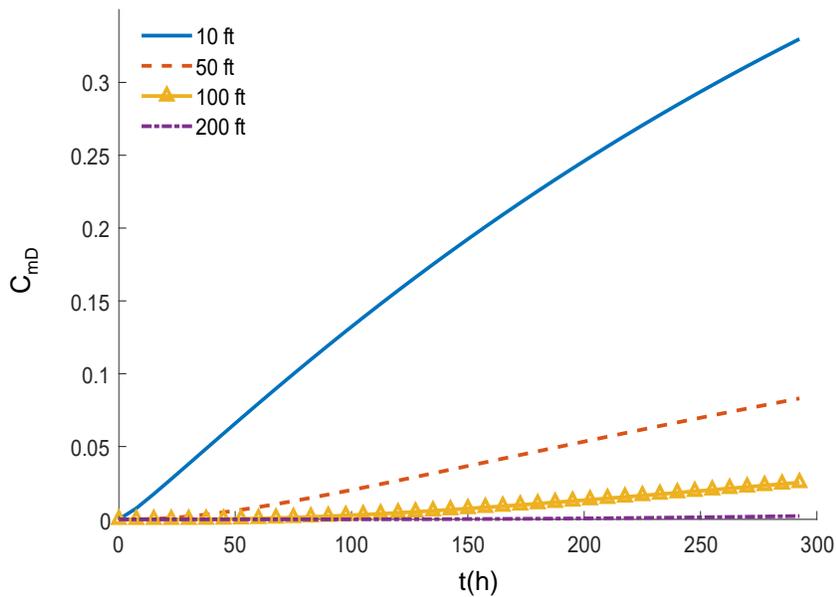


Figura 3.8 Curva de arribo de la concentración en la matriz para diferentes posiciones de observación.

3.1.1 Efecto de los parámetros en los modelos de flujo y transporte

En esta sección se aíslan los efectos de ciertos parámetros estableciéndolos como constantes y sólo se modifica el que es de interés para ver su efecto.

En la Figura 3.9 se observa los efectos del parámetro de flujo ω , el cual su mayor efecto se ve en las gráficas de presión en la fractura y en la matriz, de acuerdo con la definición del factor de almacenamiento ω , un valor cercano a la unidad significa que casi todo el fluido se encuentra almacenado en las fracturas, mientras que un valor cercano a cero indica que casi todo el fluido se encuentra en la matriz rocosa. En casos en los que es pequeño, la cantidad de fluido en la fractura es menor que la que se

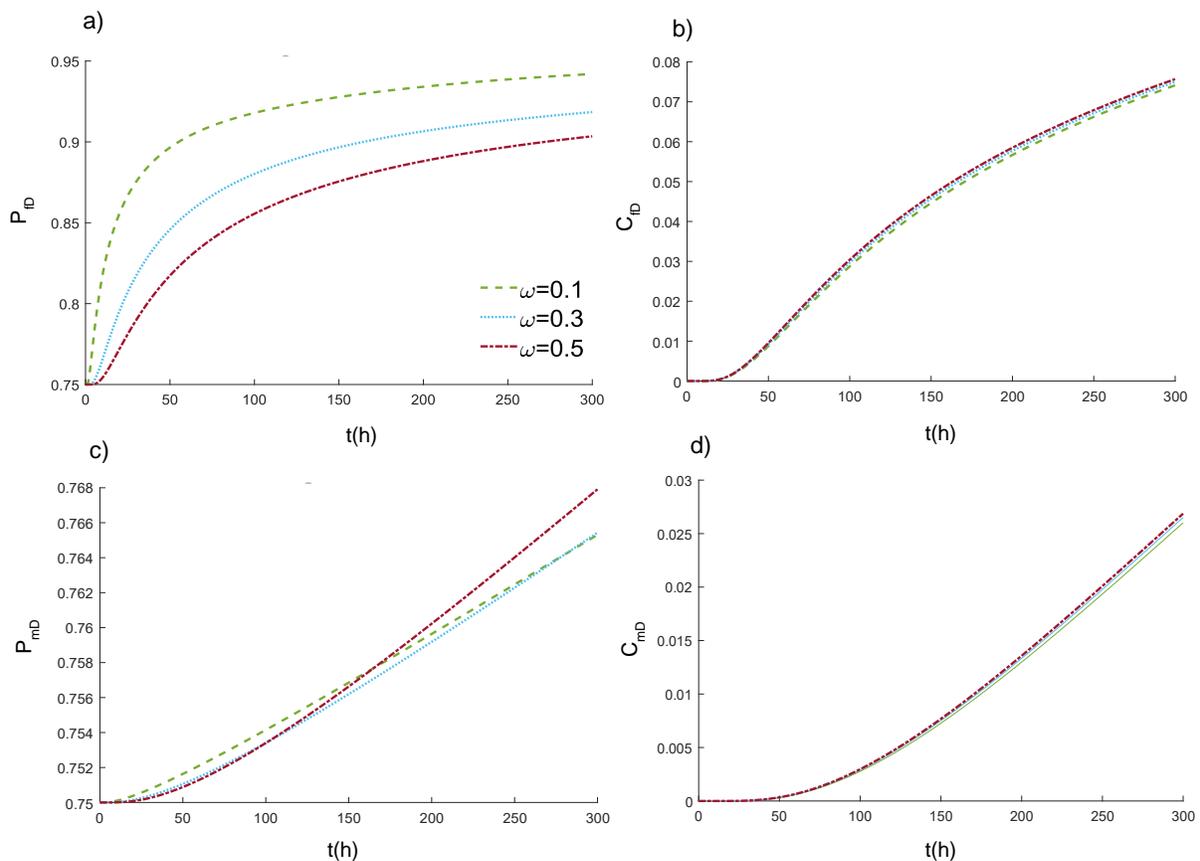


Figura 3.9 Efectos del parámetro ω en la a) Presión en la fractura, b) Concentración en la fractura, c) Presión en la matriz y en la d) Concentración en la matriz.

tiene en la matriz, por lo que es más fácil para el fluido moverse en la fractura como se ve en la sección a) y por eso la presión se eleva más rápido desde un tiempo más

corto. En el caso opuesto, cuando ω es grande, los efectos de la inyección en la fractura tardaran más tiempo en apreciarse debido a que hay una mayor cantidad de fluido almacenado en esta, comparación de la matriz que se observa un leve aumento en la presión, pero debido a su poca comunicación intrínseca tardara en verse un efecto significativo.

En la Figura 3.10, se presenta el efecto del flujo interporoso λ . Se observa que el modelo presenta sensibilidad importante en la presión de la matriz a medida que se incrementa el valor. Para valores pequeños de λ , el incremento de presión es muy pequeño debido a que como hay muy poco intercambio entre el medio fracturado y la matriz, a diferencia de valores del parámetro mayores donde se observa que la presión de la matriz se acerca más al de la fractura. Un valor de λ más grande significa que la matriz rocosa permite pasar una mayor cantidad de fluidos hacia las fracturas y

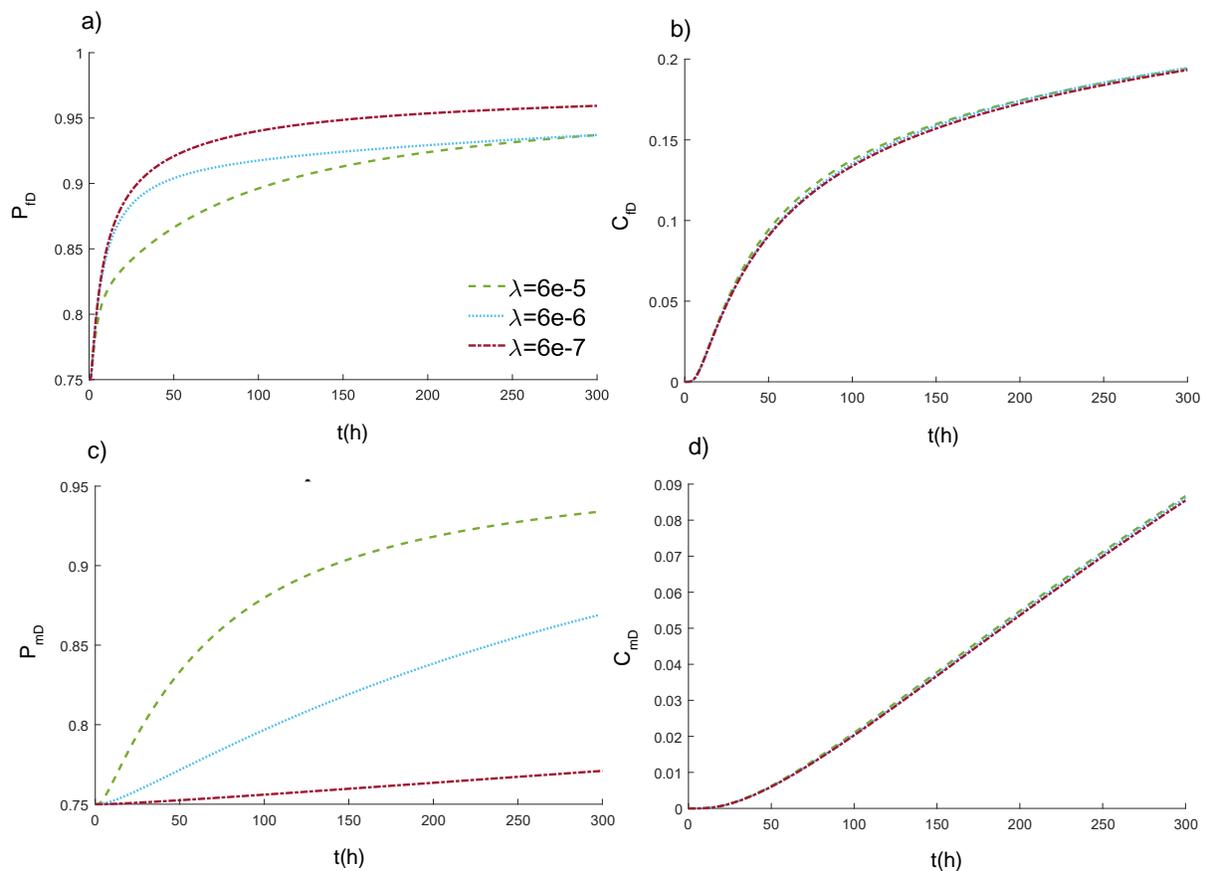


Figura 3.10 Efectos del parámetro λ en la a) Presión en la fractura, b) Concentración en la fractura, c) Presión en la matriz y en la d) Concentración en la matriz.

viceversa, mientras que un valor menor del parámetro significa que la permeabilidad de las fracturas es muy grande comparada con la de la matriz, y que el fluido que llega a la red de fracturas no llegara a tener una comunicación lo suficiente buena para afectar en gran medida a la presión en la matriz.

En la Figura 3.11, se presenta el efecto del tiempo característico por el parámetro τ . De acuerdo con la definición de este parámetro, su dependencia con los parámetros del modelo es compleja y su modificación implica la modificación simultánea de diferentes propiedades físicas pues como se ve en el Anexo 3 contiene propiedades petrofísicas de los parámetros ω y λ . A diferencia del caso anterior y de acuerdo con su definición, la solución del modelo depende fuertemente del valor de este parámetro y como se observa en el desarrollo matemático del modelo en el Capítulo 2 este tiene presencia tanto en el modelo de flujo como en el de transporte. Su aumento significa un aumento de la comunicación del sistema de fracturas con la ventaja de la

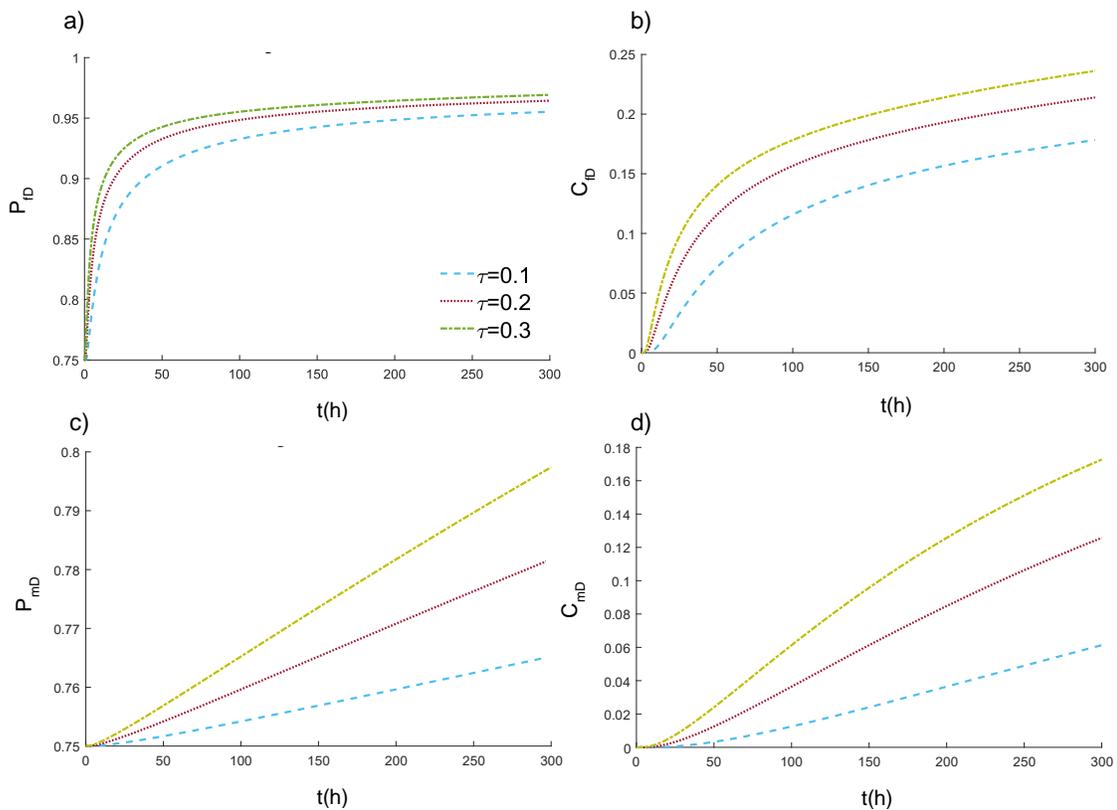


Figura 3.11 Efectos del parámetro τ en la a) Presión en la fractura, b) Concentración en la fractura, c) Presión en la matriz y en la d) Concentración en la matriz.

disminución de su capacidad de almacenamiento, por lo que el fluido puede llegar más lejos significando que tanto el flujo como la dispersión de ambos medios tengan un aumento.

A partir de este punto se empieza a analizar los efectos de los parámetros de transporte (D_{fD} , D_{mD} y γ) los cuales a diferencia de los parámetros de flujo (ω , λ y τ) que tienen efecto en el transporte, los parámetros de transporte no tienen efecto en el flujo de fluido por lo que se puede descartar los efectos en la presión. En la Figura 3.12 se observa que D_{fD} tiene efecto tanto en el medio fracturado como en el de matriz, esto ya que con el aumento del parámetro dispersivo en la fractura el trazador no solo llegará más profundo en la formación, sino que habrá un mejor intercambio con el sistema de la matriz.

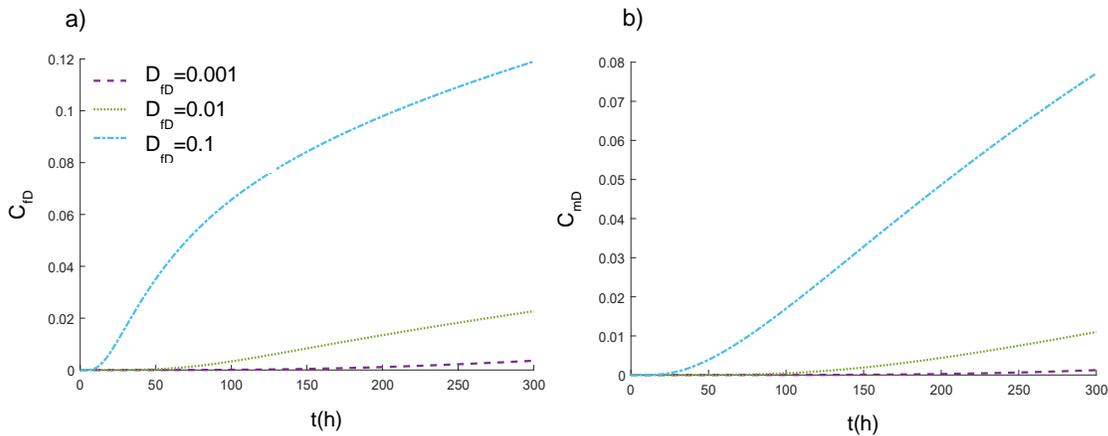


Figura 3.12 Efectos del parámetro D_{fD} en la a) Concentración en la fractura y en la b) Concentración en la matriz.

Con el comportamiento del parámetro D_{mD} en la Figura 3.13 se observa que la falta de comunicación del sistema de la matriz no permite apreciar un cambio significativo en la concentración del trazador con el cambio de valor del parámetro siendo mayormente dependiente del transporte en la fractura, fue necesario aumentar significativamente el valor de D_{mD} para observar cambios significativos y no se observó un impacto que considerable hasta mediados de la prueba. Similar al comportamiento

de flujo donde la fractura es el sistema con mayor impacto gracias a su mayor conectividad a comparación de la matriz.

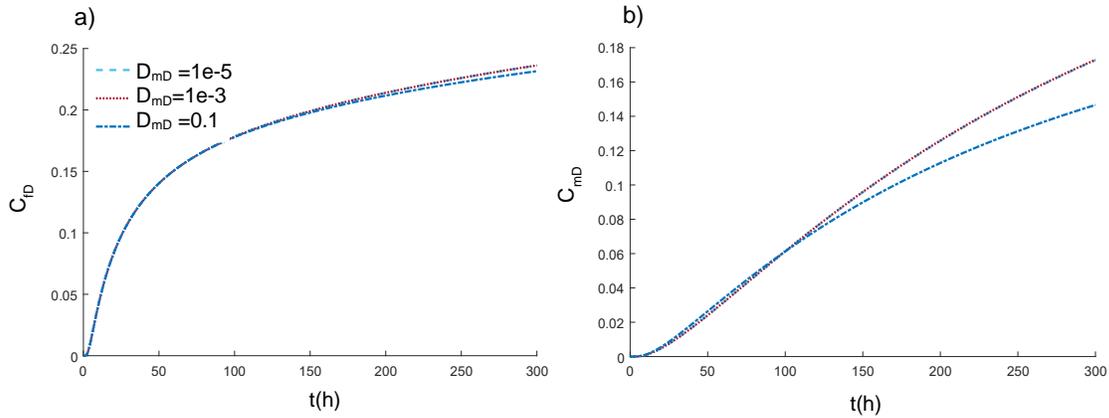


Figura 3.13 Efectos del parámetro D_m en la a) Concentración en la fractura y en la b) Concentración en la matriz.

En la figura 3.14 se encuentra los efectos de γ donde se aprecia un efecto menor D_{fD} a y mayor a D_{mD} , esto debido a como se ve en el Capítulo 2 este está presente en las ecuaciones del transporte en la fractura, en especial en el avance del trazador en los nodos espaciales, por eso con su aumento se nota una mayor dispersión a menores tiempos en el sistema fracturado y de la matriz, aunque esto afecta con una pendiente menos pronunciada, a diferencia de con valores menores con avances de frente de trazador menores pero con mayor acumulación.

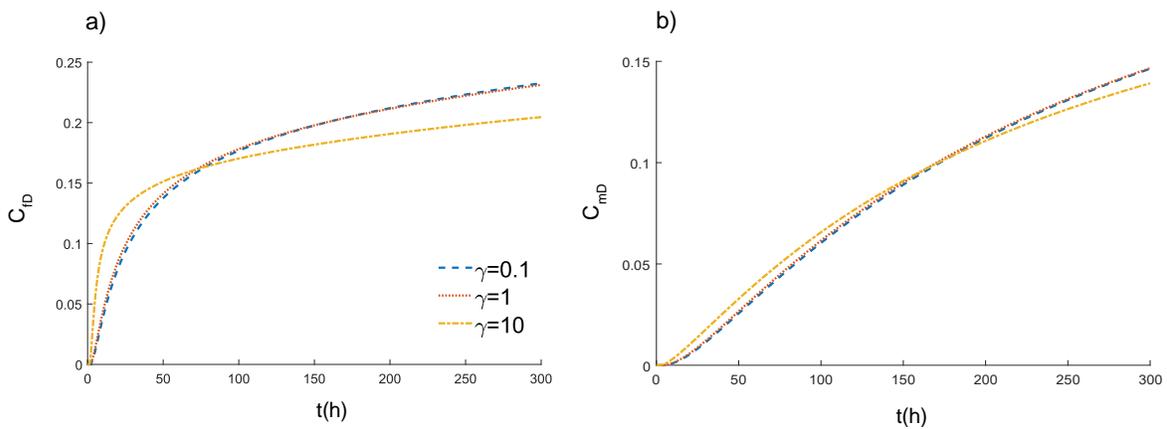


Figura 3.14 Efectos del parámetro γ en: a) Concentración en la fractura y en la b) Concentración en la matriz.

3.2 Planteamiento del problema inverso

En optimización, la solución del problema inverso se refiere a la solución de un problema que está bien definido en términos de minimizar o maximizar una función objetivo, bajo un conjunto de restricciones. A diferencia del problema directo, se refiere al proceso de utilizar un modelo matemático o computacional para predecir el comportamiento de un sistema bajo ciertas condiciones iniciales y parámetros, en el problema inverso se trabaja hacia atrás, a partir de un resultado conocido. Teniendo tres componentes principales:

1. **Función objetivo:** Esta es la función que se desea optimizar (minimizar o maximizar).
2. **Variables de decisión:** Son las incógnitas o las cantidades que se pueden ajustar para optimizar la función objetivo. Estas variables están sujetas a restricciones.
3. **Restricciones:** Estas son las limitaciones o condiciones que deben cumplirse en las soluciones. Pueden ser de igualdad o desigualdad.

La solución del problema inverso es utilizada para la identificación de parámetros desconocidos en modelos matemáticos y su ajuste a datos observados. Esto resulta útil en diversas disciplinas, como la ingeniería, mejorando la precisión de las predicciones. Entre sus ventajas destacan su flexibilidad, ya que puede aplicarse en diferentes campos para analizar sistemas complejos, y su enfoque en resultados deseados, lo que facilita la toma de decisiones en contextos específicos. Además, permite la optimización de recursos al identificar cómo ajustar parámetros para alcanzar objetivos, basándose principalmente en datos preexistentes.

3.2.2 Formulación de la función objetivo

Como se menciona en el planteamiento del problema inverso, este tiene como objetivo encontrar los parámetros que minimicen el valor de la función objetivo. La función

objetivo es una expresión matemática que evalúa el error entre los valores generados por el modelo y los valores reales observados, midiendo el desempeño de una solución en el problema de optimización. En este caso, se define como la suma de los cuadrados de las diferencias entre los valores predichos por el modelo del problema directo y los valores reales cuyo comportamiento se desea replicar mediante la optimización de los parámetros. Esto se expresa en la Ecuación (56) y los rangos de los parámetros se muestran en la Ecuación (57):

$$\begin{aligned}
 FO_{pi}(\theta) &= \sum_{j=1}^N [p_{Di}^{\text{modelo}}(t_j) - p_{Di}^{\text{real}}(t_j)]^2 \\
 FO_{Ci}(\beta) &= \sum_{j=1}^N [C_{Di}^{\text{modelo}}(t_j) - C_{Di}^{\text{real}}(t_j)]^2 \\
 FO_T(\beta) &= [FO_{pf} + FO_{pm} + FO_{cf} + FO_{cm}] \times 1000 \\
 i &= m, f \\
 \theta &= \omega, \lambda, \tau \\
 \beta &= \theta, D_i, D_m, \gamma
 \end{aligned} \tag{56}$$

Rangos de valor de los parámetros adimensionales del modelo de flujo y transporte

$$\begin{aligned}
 0 &< \omega \leq 1 \\
 \lambda &> 0 \\
 0 &< \tau \leq 1 \\
 0 &< Df \leq 1 \\
 Dm &> 0 \\
 0 &< \gamma \leq 1
 \end{aligned} \tag{57}$$

La multiplicación por 1000 se realiza debido a que al manejar valores bajos en el rango de 0 a 1 surgen problemas al minimizar la función objetivo, pues los algoritmos de optimización podrían considerar que el valor minimizado de la función entra en el rango de error aceptable, procediendo a otorgar óptimos con un error fuera del rango de tolerancia.

3.2.3 Análisis de sensibilidad de la función objetivo a los parámetros del modelo

El análisis de sensibilidad se realiza antes del proceso de optimización y tiene como objetivo evaluar el impacto de los parámetros del modelo en la función objetivo. Este análisis permite identificar qué parámetros pueden estimarse con mayor precisión y cuáles presentan mayor incertidumbre, siendo menos confiable. Este análisis permite determinar la existencia de óptimos locales y globales a partir de los datos, y es una herramienta de exploración que puede ser una guía para la definición de los valores iniciales en el proceso de búsqueda de la solución óptima.

A continuación, se muestra el resultado de como cada parámetro afecta la función objetivo variando el valor de 2 parámetros mientras que el resto se mantiene con valores fijos, con un rango definido como el 80% por encima y el 80% por debajo de su valor nominal de la Tabla 3.3.

En cada gráfica de la Figura 3.15 a la 3.16, se seleccionan dos de los parámetros y se mantienen constantes los demás, de forma que se puede analizar el comportamiento de la función objetivo (FO) en un plano determinado. Es importante señalar que el análisis del comportamiento de la FO cuando ciertos parámetros permanecen fijos permite reflejar la complejidad intrínseca de esta función, ya que la relación entre múltiples variables se convierte en un desafío visual y matemático. Debido a que resulta imposible representar el espacio de soluciones de la FO para todos los parámetros simultáneamente.

Esta representación visual de los cortes de la FO muestra solo una sección del comportamiento global de la función, lo cual puede generar interpretaciones limitadas respecto a los valores óptimos en el espacio de parámetros. Dichos valores óptimos, estimados mediante métodos de optimización, podrían situarse en puntos del espacio de soluciones que no se pueden visualizar con certeza en las figuras por las limitaciones visuales. Esta limitación se observa en la manera en que los valles en los gráficos representan los efectos de los parámetros y sus influencias en la FO, siendo en la parte más baja de los valles la zona donde se encuentra el mínimo de la FO donde se encuentra el valor óptimo.

En cuanto a los parámetros que regulan el flujo de la Figura 3.15, como ω , λ y τ , se observa que el parámetro λ tiene una menor repercusión en la FO en comparación con los otros. Este parámetro está relacionado con el flujo interporoso y refleja la facilidad con la que ocurre el intercambio de fluido entre la matriz y la fractura. En formaciones

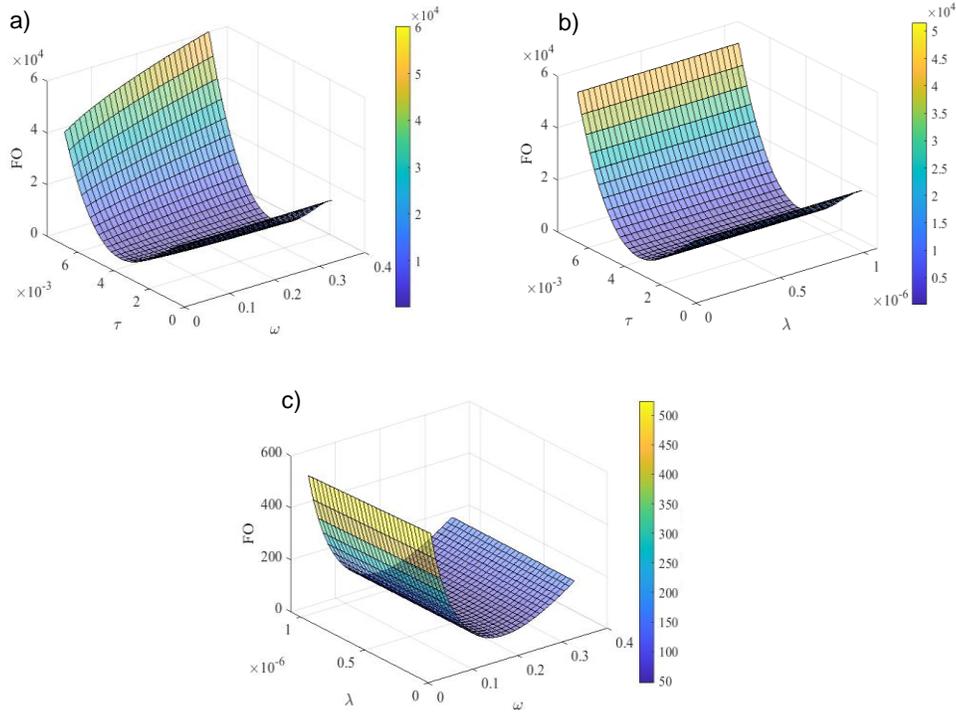


Figura 3.15 Sensibilidad de la función objetivo variando los parámetros de flujo: a) ω vs τ , b) τ vs λ y c) λ vs ω , en los rangos ω (0.36, 0.04), λ (1.2×10^{-7} , 1×10^{-6}) y τ (8.6×10^{-4} , 0.0077).

de doble porosidad, donde el flujo está más relacionado con el medio fracturado, el valor de λ es pequeño, resultando en un efecto reducido sobre el sistema global. El parámetro ω muestra un impacto intermedio, ya que representa la tasa de cambio de presión en función de la diferencia entre los flujos de entrada y salida en la porosidad secundaria. Este impacto se amplifica debido a que, aunque el sistema de fracturas tiene una mejor permeabilidad, su volumen es significativamente menor que el de la matriz. Esto genera cambios de presión más rápidos y pronunciados, los cuales afectan directamente la FO. Finalmente, el parámetro τ es el que tiene mayor impacto, ya que su valor depende tanto de ω como de λ , afectando ambos medios en el modelo y evidenciando su efecto en la FO.

En el caso de los parámetros dispersivos de la Figura 3.16, D_{fD} , D_{mD} y γ , se aprecia un comportamiento similar al observado en los parámetros de flujo. D_{fD} , que está relacionado con la dispersión en la fractura, tiene un efecto más pronunciado que D_{mD} , asociado con la matriz. A su vez, el parámetro γ , tiene un impacto intermedio, ya que su influencia en la función objetivo es mayor que la de D_{mD} , pero no tiene el mismo efecto que D_{fD} , ya que los efectos en la dispersión son mínimos.

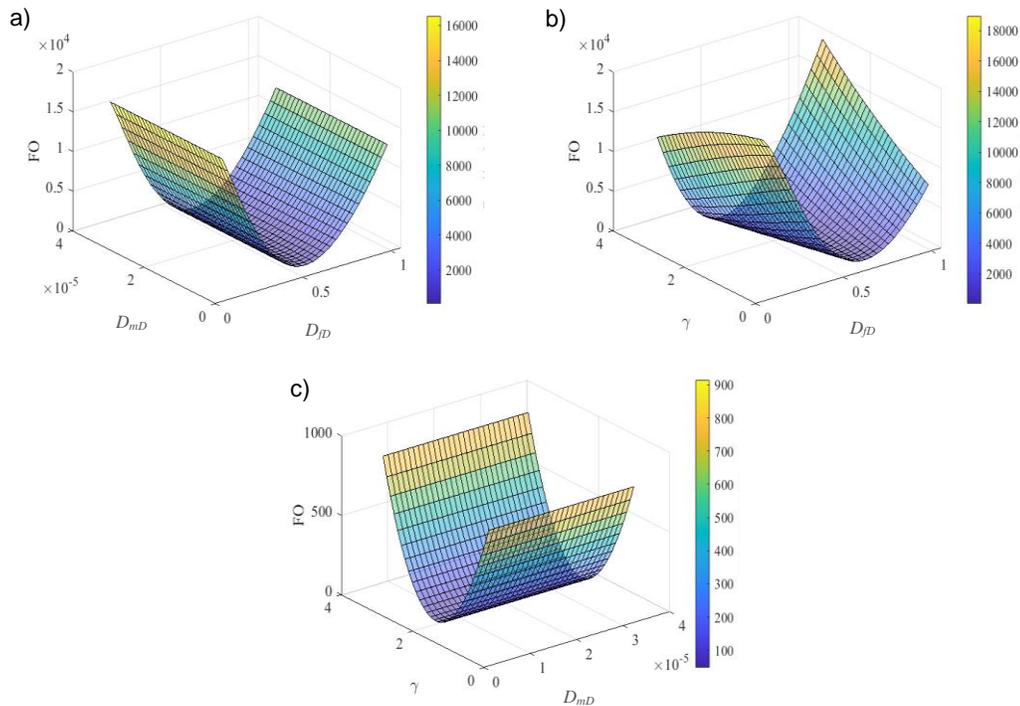


Figura 3.16 Sensibilidad de la función objetivo variando los parámetros de transporte: a) D_{mD} vs D_{fD} , b) D_{fD} vs γ , c) D_{mD} vs γ , D_{fD} (0.1175, 1.05), D_{mD} (1.95×10^{-7} , 3.51×10^{-7}), γ (0.37, 3.33)

3.3 Solución del problema inverso con datos sintéticos

Los datos sintéticos son datos generados artificialmente para simular pruebas de trazadores o pruebas de presión en formaciones de doble porosidad y generar conjuntos de datos que describan escenarios reales. Estos datos pueden ser utilizados para entrenar modelos, realizar pruebas o hacer análisis en situaciones donde el acceso a datos reales es limitado, sensible o costoso. Además, ofrecen una gran flexibilidad. Se pueden generar en cualquier volumen y con las características

específicas consistentes con los yacimientos de fracturados de doble porosidad, permitiendo aumentar la diversidad de escenario posibles.

Para el caso de esta investigación, la generación de datos sintético se lleva a cabo para analizar la metodología de estimación de los parámetros del modelo a partir de información que contiene ruido. También se enfatiza que la información de las pruebas de trazadores y de pruebas de presión no están accesible al público para poder ser analizada con el modelo desarrollado anterior mente.

3.3.1 Generación de datos sintéticos y resolución del problema inverso

Caso 1: Prueba de trazador con inyección a presión constante

Para los parámetros de flujo se usará la información del artículo de Da Prat et al. (1984), que da un rango en el que se pueden encontrar estos parámetros en formaciones de doble porosidad y para los parámetros dispersivos se usara como base la información de Lange et al, (2005).

Tabla 3.4 Condiciones iniciales y de frontera.

<i>Propiedad</i>	<i>Magnitud</i>	<i>Unidades</i>
t	200	h
t_{iny}	200	h
p_0	1450	psia
p_{iny}	2000	psia
r_w	0.656168	ft
r_e	500	ft
N	1e6	--
M	100	--

Tabla 3.5 Propiedades petrofísicas.

<i>Propiedad</i>	<i>Valor</i>	<i>Unidad</i>
μ	1	cP
c_m	6.89e-6	Pa ⁻¹
ϕ_m	20	%
k_m	9.86e-16	m ²
D_m	1.00E-08	m ² .s ⁻¹
c_f	9.997e-6	Pa ⁻¹
ϕ_f	5	%
k_f	9.86e-12	m ²
D_f	1.00E-03	m ² .s ⁻¹

Obteniendo los parámetros adimensionales de la Tabla 3.6 calculados con las ecuaciones de los Anexo 3 y 4.

Tabla 3.6 Parámetros adimensionales

Propiedad	Magnitud
ω	0.2662
λ	6.00e-07
τ	0.1314
γ	0.7860
D_{fD}	0.3805
D_{mD}	9.5137e-6

Y tomando en cuenta que el pozo de sondeo estará a 50 pies del pozo inyector. Para acercarse más a el comportamiento real que se esperaría de una formación se agregara ruido con una función aleatoria, agregando ruido en un rango del 5%, obteniendo las gráficas de la Figura 3.17.

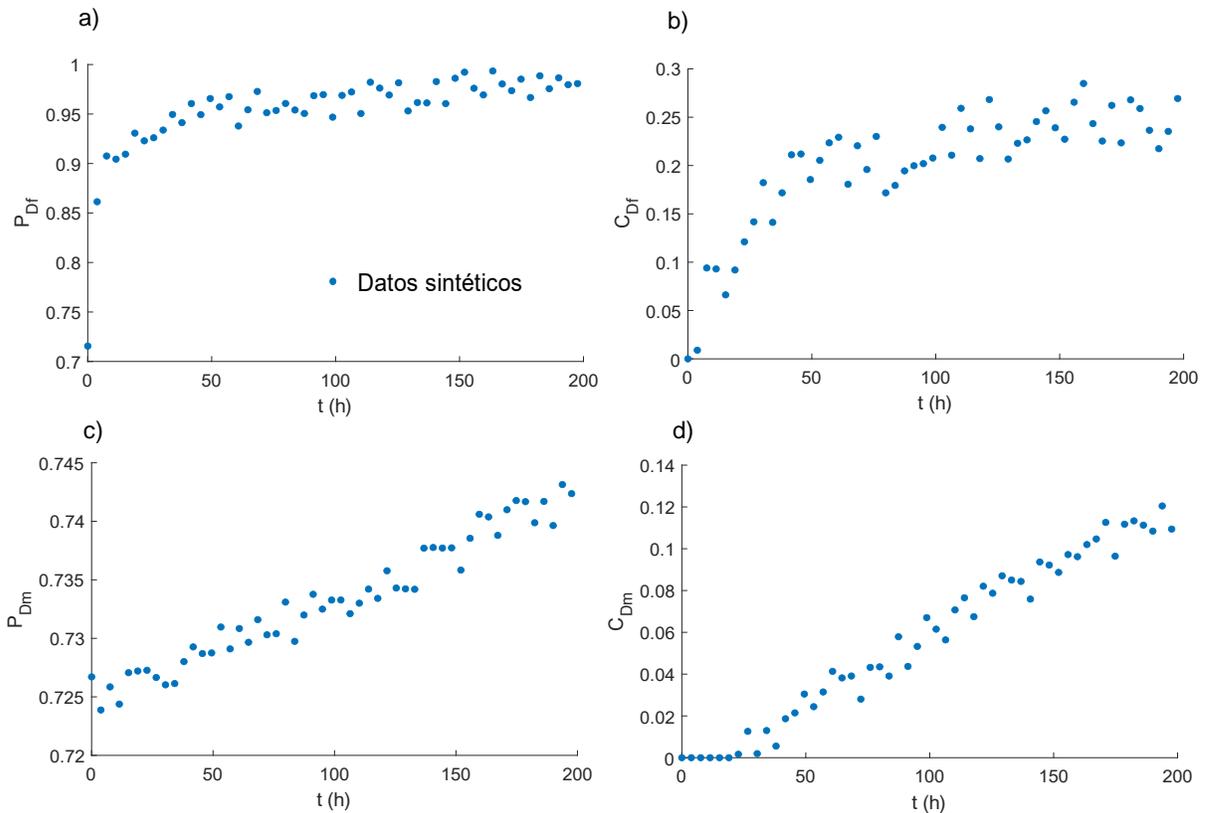


Figura 3.17 Generación datos sintéticos Caso 1: a) Curva de presión en la fractura, creada sintéticamente, b) Curva de concentración en la fractura creada sintéticamente, c) Curva de presión en la matriz creada sintéticamente y d) Curva de concentración en la matriz creada sintéticamente.

Siguiendo el planteamiento desarrollado en la sección anterior, se prosigue a solucionar el problema inverso al llevar a cabo la optimización de los parámetros de los datos sintéticos mediante la plataforma de programación de MATLAB y el código del Anexo 6, teniendo en consideración que el programa está siendo utilizado en un sistema operativo con procesador Ryzen 5 y 32 GB de memoria RAM. Obteniendo las gráficas de la Figura 3.18.

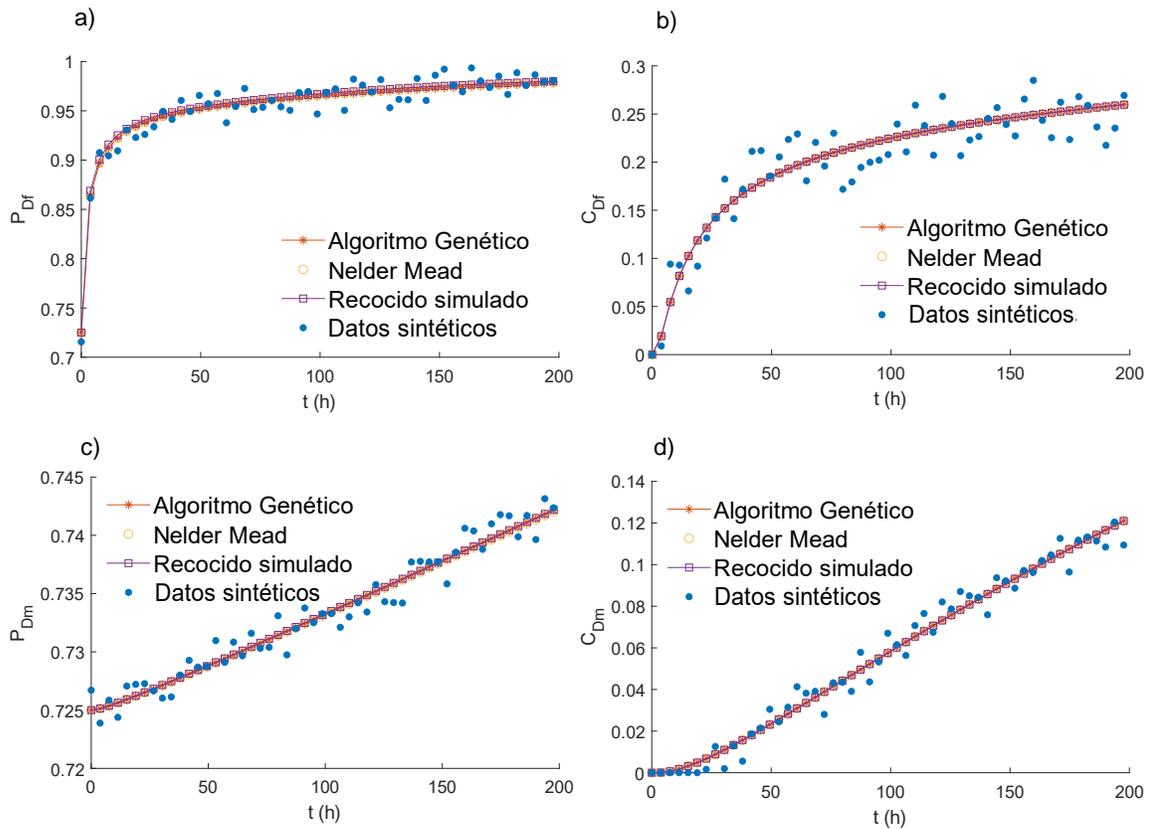


Figura 3.18 Gráficas de optimización Caso 1: a) Curva de presión en la fractura con parámetros optimizados, b) Curva de concentración en la fractura con parámetros optimizados, c) Curva de presión en la matriz con parámetros optimizados y d) Curva de concentración en la matriz con parámetros optimizados.

Tiempo de simulación

- Algoritmo genético: 9.05 min
- Nelder-Mead: 0.10 min
- Recocido simulado: 1.45 min

Tabla 3.7 Comparación de parámetros obtenidos por optimización vs parámetros reales Caso 1.

Parámetro	Valor de datos sintéticos	Algoritmo genético		Nelder-Mead		Recocido simulado	
		Parámetro optimizado	Error%	Parámetro optimizado	Error%	Parámetro optimizado	Error%
ω	0.2662	0.2770	4.08%	0.26	2.33%	0.2366	11.12%
λ	6.00E-07	6.50E-07	8.32%	6.80E-07	13.33%	6.50E-07	8.33%
τ	0.1314	0.1318	0.30%	0.1323	0.68%	0.1316	0.15%
γ	0.786	0.6048	23.05%	0.6	23.66%	0.6409	18.46%
D_{fD}	0.3805	0.3957	3.99%	0.3957	3.99%	0.3958	4.02%
D_{mD}	9.514E-06	9.93E-06	4.40%	9.84E-06	3.47%	8.26E-06	13.14%
		Error promedio	7.36%		7.91%		9.20%

En la tabla 3.7 se muestra el error obtenido en la optimización de los parámetros. Se observa que el parámetro ω mantiene un error aceptable, menor de 5% en todos los algoritmos menos el de Recosido Simulado, lo cual concuerda con la sensibilidad observada, ya que su variación afecta directamente a la FO. Los tres algoritmos logran un buen acercamiento. En el caso de λ , aunque presenta un mayor error, aún se aproxima al valor real; este comportamiento se explica por su menor impacto en la FO y su pequeño valor, lo que dificulta la optimización. Aquí, el algoritmo genético y el recocido simulado muestran los mejores resultados. El parámetro τ tiene un error menor que otros parámetros de flujo, beneficiándose del efecto sobre la FO, lo que facilita su aproximación al valor real; el Recosido simulado se destaca en este caso. El parámetro γ presenta diferencias más significativas respecto al valor original, lo cual está relacionado con el menor impacto de los parámetros dispersivos en la FO; aun así, el Recosido simulado obtiene los mejores valores. Por otro lado, D_{fD} , siendo el parámetro dispersivo con el mejor ajuste, muestra la importancia de su relación con el medio fracturado, destacándose nuevamente el algoritmo genético y el resultado por Nelder-Mead. Finalmente, D_{mD} tiene mayor error que D_{fD} , debido a su menor impacto en la FO y su valor bajo, lo que limita la capacidad del algoritmo para aproximarse al valor real; aun así, el método de Nelder-Mead logra resultados dentro de un error

aceptable. Finalmente, al comparar el error promedio de cada algoritmo se puede concluir que el algoritmo genético proporciona los mejores resultados basándose en el error porcentual.

Caso 2: Prueba de trazador con bache

Para los parámetros de flujo en este caso se usarán los mismos del Caso 1, pero solo con un tiempo de inyección de 50 horas, tomando en cuenta que el pozo de sondeo también estará a 50 pies del pozo inyector. Para acercarse más a el comportamiento real que se esperaría de una formación se agregara ruido con una función aleatoria, agregando ruido en un rango del 5%, los resultados se presentan en las gráficas de la Figura 3.19.

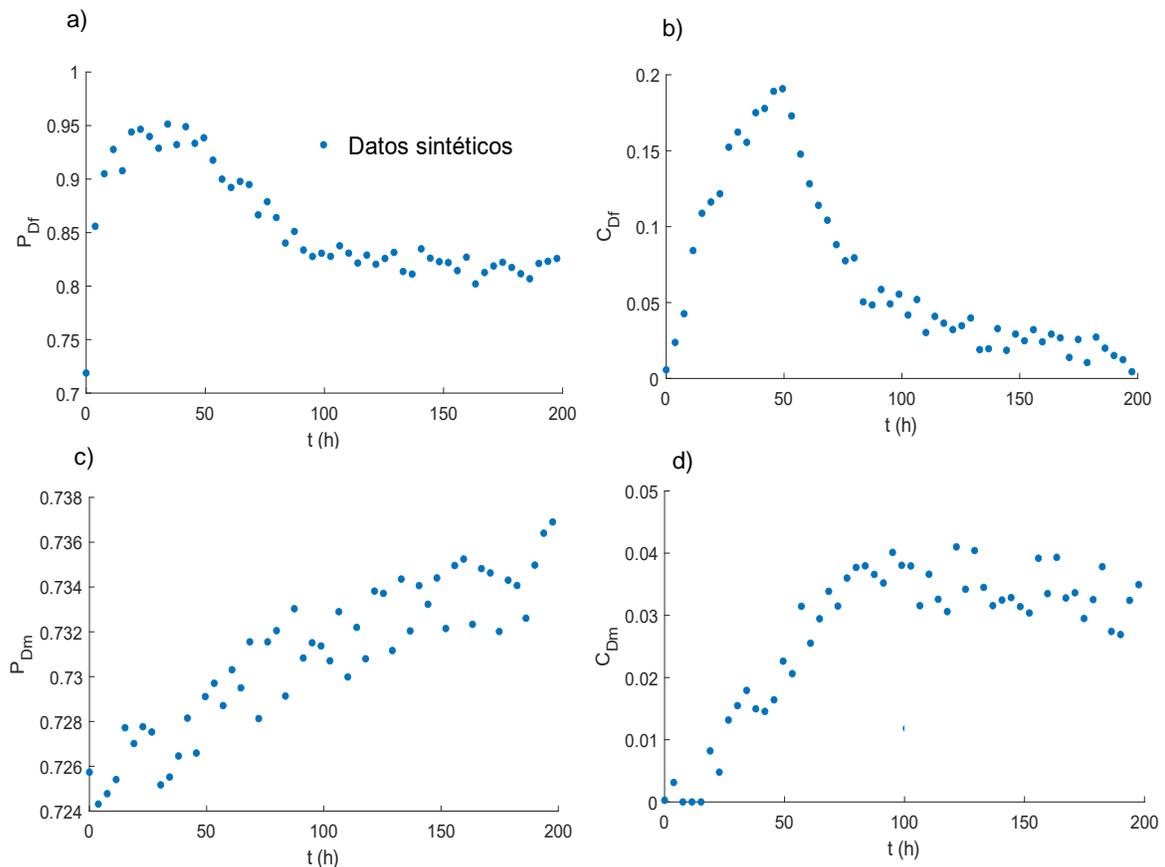


Figura 3.19 Generación datos sintéticos Caso 2: a) Curva de presión en la fractura creada sintéticamente, b) Curva de concentración en la fractura creada sintéticamente, c) Curva de presión en la matriz creada sintéticamente y d) Curva de concentración en la matriz creada sintéticamente.

Siguiendo el planteamiento desarrollado en la sección anterior, se prosigue a solucionar el problema inverso al llevar a cabo la optimización de los parámetros de los datos sintéticos, con el mismo software del Caso 1, obteniendo las gráficas de la Figura 3.20.

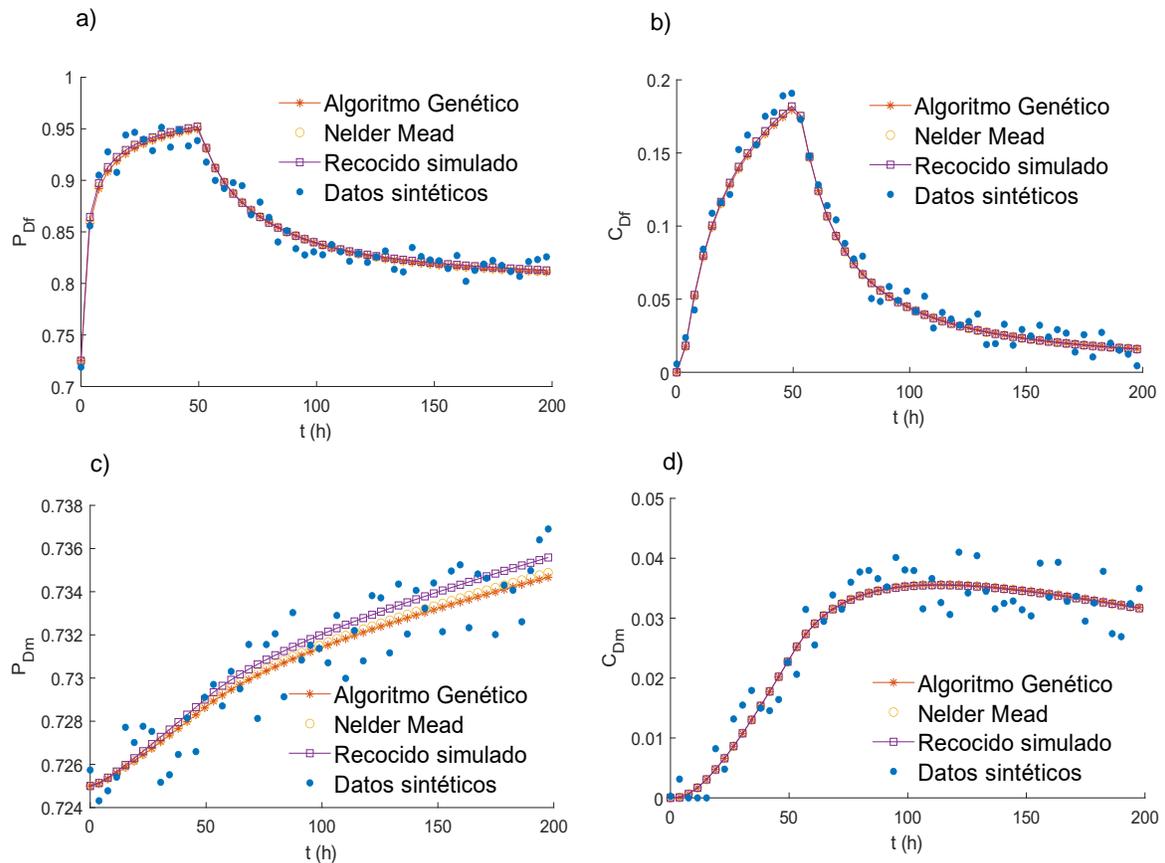


Figura 3.20 Gráficas de optimización Caso 2: a) Curva de presión en la fractura con parámetros optimizados, b) Curva de concentración en la fractura con parámetros optimizados, c) Curva de presión en la matriz con parámetros optimizados y d) Curva de concentración en la matriz con parámetros optimizados.

Tiempo de simulación

- Algoritmo genético: 4.25 min
- Nelder-Mead: 0.1141 min
- Recocido simulado: 0.4303 min

Tabla 3.8 Comparación de parámetros obtenidos por optimización vs parámetros reales Caso 2.

Parámetro	Valor de datos sintéticos	Algoritmo genético		Nelder-Mead		Recocido simulado	
		Parámetro optimizado	Error%	Parámetro optimizado	Error%	Parámetro optimizado	Error%
ω	0.2662	0.2768	4.00%	0.2782	4.50%	0.2541	4.55%
λ	6E-07	5.63E-07	6.25%	5.87E-07	2.24%	6.50E-07	8.39%
τ	0.1314	0.1329	1.14%	0.1323	0.68%	0.1323	0.68%
γ	0.786	0.7881	0.27%	0.6	23.66%	0.6567	16.45%
D_{fD}	0.3805	0.3884905	2.10%	0.3778	0.71%	0.3829	0.63%
D_{mD}	9.51E-06	7.37E-06	22.58%	6.85E-06	28.01%	8.91E-06	6.37%
		Error promedio	6.06%		9.97%		6.18%

En este caso donde se planteando un pulso, se observa que el frente del trazador tiene un impacto positivo en la optimización, ya que su comportamiento favorece la minimización de la función objetivo (FO), acercando los resultados a los valores utilizados en la generación de los datos sintéticos. En cuanto a los parámetros en el modelo de flujo (ω , λ y τ), no se evidencian diferencias significativas con respecto al análisis realizado en el Caso 1. Sin embargo, en los parámetros del modelo de difusión-advección (γ , D_{fD} , y D_{mD}) relacionados con el transporte, se aprecia una considerable disminución del error entre los valores optimizados y los reales. A pesar de ello, el modelo aún enfrenta ciertas dificultades para optimizar los parámetros asociados con el medio de la matriz.

En lo que respecta a los algoritmos de optimización utilizados, el Algoritmo Genético destaca por ofrecer la mejor aproximación y un error promedio menor en comparación con los demás optimizadores. No obstante, esto implica un mayor tiempo de cómputo. Por otro lado, el algoritmo de Nelder-Mead también muestra ser una buena opción en el caso de los parámetros del modelo de flujo con errores menores al 5%, con errores dentro de un rango aceptable. Incluso, en parámetros como λ y τ , logra valores con errores menores que los del Algoritmo Genético. En cuanto al Recosido Simulado,

logro ser el algoritmo con el segundo menor error promedio de los algoritmos, destacando los parámetros D_{fD} , y D_{mD} contando con el menor error de los 3 métodos, aunque teniendo dificultades para el parámetro de λ y γ con un error que supero el 5%.

Conclusiones

Mediante este trabajo de investigación se llegó a la conclusión de que con el modelo 2D radial de doble porosidad de una prueba de trazadores planteado donde el flujo predominante es a través de las fracturas si es posible estimar los parámetros efectivos del modelo de flujo (ω , λ y τ) y del modelo de transporte de advección-dispersión (D_{fD} , D_{mD} , y γ) de una manera satisfactoria por medios de los métodos de optimización propuestos; Recocido simulado, Nelder-Mead y Algoritmos genéticos.

De entre las observaciones de la solución del problema directo e inverso se concluye que los parámetros con más sensibilidad en el modelo son los que están relacionados a la fractura (ω y D_{fD}), efecto derivado a que el medio fracturado demostró que su alta comunicación en la formación del yacimiento favorece de gran manera al flujo del fluido y el transporte del trazador, otro parámetro de alta sensibilidad fue τ , debido a que al ser un parámetro que engloba propiedades de los parámetros ω , λ y estar presentes el desarrollo de ambos modelos de flujo y transporte, derivó que durante la solución del problema inverso se favoreciera la obtención de este parámetro optimizado con un menor error, comparado con el utilizado para generar los datos sintéticos. Otra observación encontrada es que los parámetros del medio poroso de la matriz son los que tienen la menor sensibilidad del modelo (λ y D_{mD}), destacando los errores vistos con λ donde tanto en el caso de inyección continua y con bache el error se encuentra sobre el 5% con todos los métodos de optimización. D_m también presentó dificultades en su optimización en especial en el Caso 2 con el bache donde su error superó el 5% de tolerancia, pero se observó que en el Caso 1 de inyección continua pareció favorecer la obtención de D_{mD} , ya que la acumulación del trazador en la matriz debido a los periodos más largos de inyección favoreció la obtención de mejores estimaciones del parámetro.

Entre los casos de estudio analizados, la prueba de trazadores en bache del Caso 2 mostró ventajas para aumentar la sensibilidad de los parámetros en el problema inverso, ya que permitió un mayor control de las condiciones del sistema y eliminó las

dinámicas asociadas al flujo constante, que dificultan la observación de fenómenos de flujo y transporte advectivo-dispersivo.

En cuanto a los métodos de optimización, el algoritmo genético demostró ser la opción más precisa, con errores promedio del 7.36% para el caso de inyección continua y del 6.06% para el caso de bache, aunque con la desventaja de requerir un tiempo de cómputo considerablemente mayor en comparación con Nelder-Mead y Recocido simulado. Por otro lado, el Recocido simulado destacó al ofrecer estimaciones más cercanas a los parámetros originales en los casos de alta sensibilidad como con el parámetro τ , con errores del 0.15% y 0.68% en los casos de inyección continua y bache, respectivamente.

Recomendaciones y trabajos futuros

- Realizar un análisis de estabilidad formal de la solución numérica por el análisis de Von Neumann.
- Explorar otros esquemas de solución numérica como por el método de Crank Nicolson o transformada de Laplace combinadas con método por diferencias finitas.
- Usar programas análogos a Matlab como Python.
- Extender la metodología a medios altamente heterogéneos. Se sugiere una propuesta con un modelo de triple porosidad (matriz, fractura y vugulos) y una permeabilidad (fractura) para dichos yacimientos como extensión del modelo de doble porosidad de Warren y Root.
- Como un complemento al punto anterior se puede alcanzar un modelo mucho más realista extendiendo la metodología a sistemas de dos dimensiones y a modelo de flujo para sistemas de dos y tres fases (aceite, agua y gas).
- Realizar la optimización de parámetros con método de optimización diferente al utilizado en esta tesis.

Referencias bibliográficas

- Akin, S. (2003). Integrated nonlinear regression analysis of tracer and well test data. *Journal Of Petroleum Science And Engineering*, 39(1-2), 29-44. [https://doi.org/10.1016/s0920-4105\(03\)00038-x](https://doi.org/10.1016/s0920-4105(03)00038-x).
- Aydin, H., Temizel, C., & Kabir, C. S. (2024). Surveillance Data Analysis Reveals Well Performance and Reservoir Connectivity: A Case Study in Alasehir Geothermal Field. *SPE Journal*, 29(09), 5022-5035. <https://doi.org/10.2118/221454-pa>.
- Barenblatt, G., Zheltov, I., & Kochina, I. (1960). Basic concepts in the theory of seepage of homogeneous liquids in fissured rocks [strata]. *Journal Of Applied Mathematics And Mechanics*, 24(5), 1286-1303. [https://doi.org/10.1016/0021-8928\(60\)90107-6](https://doi.org/10.1016/0021-8928(60)90107-6).
- Bogatkov, D., & Babadagli, T. (2010). Fracture network modeling conditioned to pressure transient and tracer test dynamic data. *Journal Of Petroleum Science And Engineering*, 75(1-2), 154-167. <https://doi.org/10.1016/j.petrol.2010.11.004>.
- Coronado, M., Ramírez-Sabag, J., & Valdiviezo-Mijangos, O. (2011). Double-porosity model for tracer transport in reservoirs having open conductive geological faults: Determination of the fault orientation. *Journal Of Petroleum Science And Engineering*, 78(1), 65-77. <https://doi.org/10.1016/j.petrol.2011.04.002>.
- Da Prat, G., Mannucci, J., Prado, L., & Millan, E. (1984). Use of Pressure Transient Testing To Evaluate Fractured Reservoirs in Western Venezuela. *SPE Annual Technical Conference And Exhibition*. <https://doi.org/10.2118/13054-ms>.
- Di Donato, G., Obi, E., & Blunt, M. J. (2003). Anomalous transport in heterogeneous media demonstrated by streamline-based simulation. *Geophysical Research Letters*, 30(12). <https://doi.org/10.1029/2003gl017196>.
- Ferreira, W. C., Hilterman, F., Diogo, L. A., Santos, H. B., Schleicher, J., & Novais, A. (2016). Global optimization for AVO inversion: A genetic algorithm using a table-based ray-theory algorithm. *Seg Library*, 543-547. <https://doi.org/10.1190/segam2016-13959198.1>.

- Gardien, C., Pope, G., & Hill, A. (1996). Hydraulic fracture diagnosis using chemical tracers. SPE Annual Technical Conference And Exhibition. <https://doi.org/10.2118/36675-ms>.
- Ghori, S. G., & Heller, J. P. (1992). The Use of Well-to-Well Tracer Tests To Determine Geostatistical Parameters of Permeability. SPE/DOE Enhanced Oil Recovery Symposium. <https://doi.org/10.2118/24138-ms>.
- Gómez, S., Ramos, G., Mesejo, A., Camacho, R., Vásquez, M., & Del Castillo, N. (2014). Well Test Analysis of Naturally Fractured Vuggy Reservoirs with an Analytical Triple Porosity – Double Permeability Model and a Global Optimization Method. *Oil & Gas Science And Technology – Revue D'IFP Energies Nouvelles*, 69(4), 653-671. <https://doi.org/10.2516/ogst/2013182>.
- Guan, L., Du, Y., Johnson, S., & Choudhary, M. (2005). Advances of Interwell Tracer Analysis in the Petroleum Industry. *Journal Of Canadian Petroleum Technology*, 44(05). <https://doi.org/10.2118/05-05-tn2>.
- Güven, O., Falta, R. W., Molz, F. J., & Melville, J. G. (1985). Analysis and interpretation of single-well tracer tests in stratified aquifers. *Water Resources Research*, 21(5), 676-684. <https://doi.org/10.1029/wr021i005p00676>.
- Hamdi, S., Schiesser, W., & Griffiths, G. (2007). Method of lines. *Scholarpedia*, 2(7), 2859. <https://doi.org/10.4249/scholarpedia.2859>.
- Henderson, D., Jacobson, S. H., & Johnson, A. W. (2006). The Theory and Practice of Simulated Annealing. En *Kluwer Academic Publishers eBooks* (pp. 287-319). https://doi.org/10.1007/0-306-48056-5_10.
- Hernandez-Coronado, H., Coronado, M., & Herrera-Hernandez, E. C. (2012). Transport in fractal media: An effective scale-invariant approach. *Physical Review E*, 85(6). <https://doi.org/10.1103/physreve.85.066316>.
- Ji, B., Sui, X., Wang, Q., Li, Q., Anjian, L., & Liu, T. (2002). Advance on the Tracer Test Technology among Wells. SPE Asia Pacific Oil And Gas Conference And Exhibition. <https://doi.org/10.2118/77874-ms>.

- Kumar, A., Seth, P., Shrivastava, K., Manchanda, R., & Sharma, M. M. (2020). Integrated Analysis of Tracer and Pressure-Interference Tests To Identify Well Interference. *SPE Journal*, 25(04), 1623-1635. <https://doi.org/10.2118/201233-pa>.
- Lange, A., Bouzian, J., & Bourbiaux, B. (2005b). Tracer-Test Simulation on Discrete Fracture Network Models for the Characterization of Fractured Reservoirs. *SPE Europec/EAGE Annual Conference*. <https://doi.org/10.2118/94344-ms>.
- Li, L., Jiang, H., Li, J., Wu, K., Meng, F., & Chen, Z. (2017). Modeling tracer flowback in tight oil reservoirs with complex fracture networks. *Journal Of Petroleum Science And Engineering*, 157, 1007-1020. <https://doi.org/10.1016/j.petrol.2017.08.022>.
- Liro, L. M. (1993). Sequence Stratigraphy of a Lacustrine System Upper Fort Union Formation (Paleocene), Wind River Basin, Wyoming, U.S.A. En *American Association of Petroleum Geologists eBooks*. <https://doi.org/10.1306/m58581c12>.
- Philip, J. R. (1973). *Dynamics of Fluids in Porous Media*. By JACOB BEAR. Elsevier, 1972. 764 pp. Dfk 94.00. *Fundamentals of Transport Phenomena in Porous Media*. Elsevier, 1972. 392 pp. Dfl 65.00. *Differential Equations of Hydraulic Transients, Dispersion, and Ground Water Flow*. By WEN-HSIUNG LI. Prentice-Hall, 1972. 316 pp. *Journal Of Fluid Mechanics*, 61(1), 206-208. <https://doi.org/10.1017/s0022112073210662>.
- Pilotta, E. A. (2021). El método de Nelder-Mead para minimización irrestricta sin derivadas. *Revista de Educación Matemática*, 17(3). <https://doi.org/10.33044/revem.10873>.
- Ramírez, J. (2008). Pruebas de trazadores en la recuperación de hidrocarburos. [Tesis doctoral, Academia de Ingeniería México]. <https://ai.org.mx/miembros/jetzabeth-ramirez-sabag/>.
- Thomas, J. W. (1995). *Numerical partial differential equations: finite difference methods*. En *Texts in applied mathematics*. Springer New York. <https://doi.org/10.1007/978-1-4899-7278-1>.

- Warren, J., & Root, P. (1963). The Behavior of Naturally Fractured Reservoirs. Society Of Petroleum Engineers Journal, 3(03), 245-255. <https://doi.org/10.2118/426-pa>.
- Yang, H., Guo, K., Zhu, G., & Gao, X. (2022). Application of trace substance tracer test method in low permeability reservoir-CQ oilfield. Energy Reports, 8, 11309-11319. <https://doi.org/10.1016/j.egyr.2022.08.247>.
- Yates, S. R. (1990). An analytical solution for one-dimensional transport in heterogeneous porous media. Water Resources Research, 26(10), 2331-2338. <https://doi.org/10.1029/wr026i010p02331>.
- Zemel, B. (1995). Tracers in the Oil Field: Vol. Volume 43 (1st Edition). Elsevier. eBook ISBN: 9780080543147.

Anexos

Anexo 1: Nomenclatura

c_f	Compresibilidad de la fractura
c_m	Compresibilidad de la matriz
C_0	Concentración inicial
C_{fD}	Concentración adimensional en la fractura
C_{mD}	Concentración adimensional en la matriz
C_f	Concentración en la fractura
C_m	Concentración en la matriz
D_f	Coefficiente de dispersión en la fractura
D_m	Coefficiente de dispersión en la matriz
D_{fD}	Coefficiente de dispersión adimensional en la fractura
D_{mD}	Coefficiente de dispersión adimensional en la matriz
k_f	Permeabilidad de la fractura
k_m	Permeabilidad de la matriz
M	Nodos espaciales
N	Nodos temporales
p_0	Presión inicial en el yacimiento
p_f	Presión en la fractura
p_m	Presión en la matriz
p_{fD}	Presión adimensional en la fractura
p_{mD}	Presión adimensional en la matriz
r	Posición radial en el yacimiento
r_e	Radio exterior del yacimiento
r_{eD}	Radio exterior adimensional
r_w	Radio de pozo

r_{wD}	Radio adimensional de pozo
Δr	Incremento en la posición radial
t	Tiempo
Δt	Incremento temporal
\bar{v}	Velocidad de Darcy

Símbolos griegos

α	Factor de intercambio entre matriz y fractura
γ	Parámetro característico del modelo de transporte
λ	Coefficiente de flujo interporoso
μ_o	Viscosidad de aceite
τ	Frecuencia característica
ϕ_f	Porosidad en la fractura
ϕ_m	Porosidad en la fractura y matriz
ω	Coefficiente de almacenamiento

Superíndices y subíndices

0	índice indicador de valor inicial
f	Fractura
j	Índice del cambio de posición
m	Matriz
n	Índice del cambio en el tiempo

Anexo 2: Índice de figuras y tablas

Figura 1.1 Conectividad entre pozos: a) Interconectividad entre los pozos productores y el inyector b) Dirección del sistema de fracturas de los pozos con mayor comunicación con el pozo inyector (Aydin et al., 2024)

Figura 1.2 Procesos de iteración k del Algoritmo de Nelder-Mead (Pilotta, 2021)

Figura 1.3 Estructura del algoritmo de recocido simulado. (Henderson et al., 2006)

Figura 1.4 Esquema del algoritmo genético simple. (Ferreira et al. 2016)

Figura 2.1 Diagrama de la metodología utilizada para la conducción de este trabajo.

Figura 2.2 Idealización de la heterogeneidad del medio poroso. (Adaptado de Warren y Root, 1963).

Figura 2.3 a) Flujo radial en un yacimiento finito, b) Esquema radial con posición del pozo y la frontera externa y c) La representación del modelo en forma 1D.

Figura 2.4 Extensión de discretización por métodos de diferencias finitas explícitas. j son los nodos espaciales y n los nodos temporales.

Figura 3.1 Distribución radial de la presión en la fractura.

Figura 3.2 Distribución radial de la presión en la matriz.

Figura 3.3 Curva de arribo de la presión en la fractura para diferentes posiciones de observación.

Figura 3.4 Curva de arribo de la presión en la matriz para diferentes posiciones de observación.

Figura 3.5 Perfil radial de concentración en la fractura.

Figura 3.6 Perfil radial de concentración en la matriz.

Figura 3.7 Curva de arribo de la concentración en la fractura para diferentes posiciones de observación.

Figura 3.8 Curva de arriba de la concentración en la matriz para diferentes posiciones de observación.

Figura 3.9 Efectos del parámetro ω en la a) Presión en la fractura, b) Concentración en la fractura, c) Presión en la matriz y en la d) Concentración en la matriz.

Figura 3.10 Efectos del parámetro λ en la a) Presión en la fractura, b) Concentración en la fractura, c) Presión en la matriz y en la d) Concentración en la matriz.

Figura 3.11 Efectos del parámetro τ en la a) Presión en la fractura, b) Concentración en la fractura, c) Presión en la matriz y en la d) Concentración en la matriz.

Figura 3.12 Efectos del parámetro D_f en la a) Concentración en la fractura y en la b) Concentración en la matriz.

Figura 3.13 Efectos del parámetro D_m en la a) Concentración en la fractura y en la b) Concentración en la matriz.

Figura 3.14 Efectos del parámetro γ en: a) Concentración en la fractura y en la b) Concentración en la matriz.

Figura 3.15 Sensibilidad de la función objetivo variando los parámetros de flujo: a) ω vs τ , b) τ vs λ y c) λ vs ω , en los rangos ω (0.36, 0.04), λ (1.2×10^{-7} , 1×10^{-6}) y τ (8.6×10^{-4} , 0.0077).

Figura 3.16 Sensibilidad de la función objetivo variando los parámetros de transporte: a) D_m vs D_f , b) D_f vs γ , c) D_m vs γ , D_f (0.1175, 1.05), D_m (1.95×10^{-7} , 3.51×10^{-7}), γ (0.37, 3.33)

Figura 3.17 Generación datos sintéticos Caso 1: a) Curva de presión en la fractura creada sintéticamente, b) Curva de concentración en la fractura creada sintéticamente, c) Curva de presión en la matriz creada sintéticamente y d) Curva de concentración en la matriz creada sintéticamente.

Figura 3.18 Gráficas de optimización Caso 1: a) Curva de presión en la fractura con parámetros optimizados, b) Curva de concentración en la fractura con parámetros optimizados, c) Curva de presión en la matriz con parámetros optimizados y d) Curva de concentración en la matriz con parámetros optimizados.

Figura 3.19 Generación datos sintéticos Caso 2: a) Curva de presión en la fractura creada sintéticamente, b) Curva de concentración en la fractura creada sintéticamente, c) Curva de presión en la matriz creada sintéticamente y d) Curva de concentración en la matriz creada sintéticamente.

Figura 3.20 Gráficas de optimización Caso 2: a) Curva de presión en la fractura con parámetros optimizados, b) Curva de concentración en la fractura con parámetros optimizados, c) Curva de presión en la matriz con parámetros optimizados y d) Curva de concentración en la matriz con parámetros optimizados.

Índice de tablas

Tabla 3.1 Condiciones iniciales y de frontera

Tabla 3.2 Propiedades petrofísicas

Tabla 3.3 Parámetros adimensionales

Tabla 3.4 Condiciones iniciales y de frontera

Tabla 3.5 Propiedades petrofísicas

Tabla 3.6 Parámetros adimensionales

Tabla 3.7 Comparación de parámetros obtenidos por optimización vs parámetros reales Caso 1

Tabla 3.8 Comparación de parámetros obtenidos por optimización vs parámetros reales Caso 2

Anexo 3: Parámetros y variables adimensionales del sistema de ecuaciones del modelo de flujo

Fórmulas para generar los parámetros adimensionales responsables del comportamiento el modelo de flujo.

$$p_{iD} = \frac{p_i}{p_0}, \quad i = m, f$$

$$r_D = \frac{r}{r_w}$$

$$\lambda = \frac{\alpha k_m r_w^2}{k_f}$$

$$\omega = \frac{\phi_f c_f}{\phi_m c_m + \phi_f c_f}$$

$$\tau = \frac{\omega k_f}{c_f \phi_f \mu r_w^2}$$

Anexo 4: Parámetros y variables adimensionales del sistema de ecuaciones de transporté

Fórmulas para generar los parámetros adimensionales responsables del comportamiento del modelo advección-dispersión.

$$C_{iD} = \frac{C_i}{C_0}; i = m, f$$

$$D_{iD} = \frac{D_i (c_m \phi_m + c_f \phi_f) \mu}{\phi_i k_f}$$

$$\alpha_D = \left[\frac{(c_m \phi_m + c_f \phi_f) \mu r_w^2}{k_f} \right] \frac{\alpha}{\phi_f} = \frac{\alpha}{\tau \phi_f}$$

$$\gamma = \frac{(c_m \phi_m + c_f \phi_f) p_0}{\phi_f}$$

Anexo 5: Código para la resolución del problema directo

Código de Matlab utilizado para la resolución del problema directo; Resolver el problema directo significa encontrar los valores de los parámetros que se ajusten al modelo. Para saber si estos datos realmente están llevando al resultado correcto es necesario tener una noción de cómo se comporta el modelo y su sensibilidad a los parámetros adimensionales de flujo y de advección-dispersión. Por lo anterior, el siguiente código se encarga de otorgar un punto de vista grafico sobre el comportamiento de los modelos en los medios de matriz y fractura.

```
%-----Solución del problema directo-----  
%=====
```

```
%=====Nomenclatura=====
```

%tiempohr --Tiempo de prueba, hrs
%t_inyeccion --Tiempo de inyección, hrs
%ps0 --Presión inicial, Psi
%piny --Presión de inyección, Psi
%rw --Radio de pozo, ft
%reorg --Distancia frontera externa, ft
%dis --Distancia del pozo observador, ft
%M --Nodos espaciales
%N --Nodos Temporales
%pinyd --Presión de inyección adimensional
%rwd --Radio de pozo adimensional
%red --Distancia frontera externa adimensional
%omega --Parámetro adimensional omega
%lambda --Parámetro adimensional lambda
%tau --Parámetro adimensional tau
%Df --Parámetro adimensional dispersivo de la fractura
%Dm --Parámetro adimensional dispersivo de la matriz
%gamma --Parámetro adimensional dispersivo
%pf --Presión de fractura adimensional
%pm --Presión de matriz adimensional
%cf --Concentración de fractura adimensional
%cm --Concentración de fractura adimensional

```
%Condiciones iniciales y de frontera
```

```
tiempohr = 200; %hr  
t_inyeccion = 200; %hr  
ps0 = 1450; %psi  
piny = 2000; %psi  
rw = 0.656168; %ft  
reorg = 500; %ft  
M = 100;  
N = 1e5;
```

```
%Conversiones
```

```
tiempos = tiempohr*3600; %s  
tiny = t_inyeccion*3600; %s  
ps0 = ps0*6894.76; %pa  
piny = piny*6894.76; %pa  
rw = rw*0.3048; %m  
re = reorg*0.3048; %m
```

```
%Adimensionalización
```

```
pinyd = (piny)/ps0;  
rwd = 1;  
red = re/rw;
```

```

%Distancia desde el pozo
dis =50; %ft
nod =dis*M/reorg ;
delta =1900;

%Vectores
t =linspace(0,tiempos,N);
thr =t*0.000277778;
r =linspace(rwd,red,M);
drd = r(end)-r(end-1);
dt =t(end)-t(end-1);
dtiny =tiny/dt ; %s

%Propiedades petrofísicas
u = 0.001; %Pa.s
kf = 10; %Darcy
kf = kf*9.86923e-13; %m^2
km = 0.001*9.86923e-13; %m^2
Dfi = 10e-5; %m^2.s^-1
Dmi = 10e-9; %m^2.s^-1
cof = 9.997e-6; %pa-1
com = 6.89e-6;
of = 0.05;
om = 0.20;
alfa = 0.005 ; %d-1
alfa = alfa/(24*60*60); %s-1

%Parámetros adimensionales
omega = 0.2662;
lambda = 0.0000006;
tau = 0.1314;
Df = 0.3805;
Dm = 9.5137E-06;
gamma = 0.786;

%omega = (of*cof)/((om*com)+(of*cof));
%lambda = (0.15*km*rw^2)/kf;
%tau = (kf*omega)/(cof*of*u*rw^2);
%Df = Dfi/(of*tau*rw^2);
%Dm = Dmi/(om*tau*rw^2);
%gamma = ps0*cof/omega;

parametros = [omega,lambda,tau,Df,Dm,gamma];

% Agrupación de parámetros
alfad = alfa/(tau*of);
a = (dt*tau)/(omega*drd^2);
b = (dt*tau)/(2*r*omega*drd^2);
c = (2*dt*tau)/(omega*drd^2);
d = (1-omega)/omega;
e = (lambda*tau*dt)/(1-omega);
f = (dt*tau)/(drd^2);
g = (dt*tau)/(2*drd*r);
h = dt*tau*alfad;

% Condición inicial
pf = ones(M,N);
pm = ones(M,N);
cf = zeros(M,N);
cm = zeros(M,N);

%Problema directo
%-----

```

```

%-----
for n=2:N

    if (n<=dtiny)
        %Periodo de Inyección

        for j=1:M

            if(j==1)
                %Condiciones en radio de pozo
                pm(j,n) = e*pf(j,n-1)+pm(j,n-1)*(1-e);

                pf(1,n) = pinyd;

                cm(j,n) = cm(j,n-1)*(1-h-2*Dm*f)...
                    +cm(j+1,n-1)*(2*f*Dm)...
                    +cf(j,n-1)*h;

                cf(j,n) =1;

            elseif(j==M)
                %Condiciones de frontera externa
                pm(j,n) = e*pf(j,n-1)+pm(j,n-1)*(1-e);

                pf(M,n) = (2*a)*pf(M-1,n-1)+(1-c)*pf(M,n-1)+...
                    -d*(pm(M,n)-pm(M,n-1));

                cm(M,n) = cm(M-1,n-1)*(2*Dm*f)...
                    +cm(M,n-1)*(1-h-2*f*Dm)...
                    +h*cf(M,n-1);

                cf(M,n) = cf(M-1,n-1)*2*Df*f...
                    +cf(M,n-1)*(1-h-2*f*Df-2*pf(M,n-1)*f*gamma+pf(M-1,n-1)*2*f*gamma)...
                    +h*cm(M,n-1);

            else
                %Condiciones intermedias
                pm(j,n) = e*pf(j,n-1)+pm(j,n-1)*(1-e);

                pf(j,n) =(a-b(j))*pf(j-1,n-1)+(1-c)*pf(j,n-1)+(a+b(j))*pf(j+1,n-1)...
                    -d*(pm(j,n)-pm(j,n-1));

                cm(j,n) = cm(j-1,n-1)*Dm*(f-g(j))...
                    +cm(j,n-1)*(1-h-Dm*(2*f))...
                    +cm(j+1,n-1)*Dm*(g(j)+f)...
                    +cf(j,n-1)*h;

                cf(j,n) =cf(j-1,n-1)*(Df*(f-g(j))+(f*gamma/4)*pf(j-1,n-1)-(f*gamma/4)*pf(j+1,n-1))...
                    +cf(j,n-1)*(1-h-2*f*Df+pf(j-1,n-1)*gamma*(f-g(j))-2*f*gamma*pf(j,n-1)+pf(j+1,n-1)*gamma*(g(j)+f))...
                    +cf(j+1,n-1)*(Df*(g(j)+f)-(f*gamma/4)*pf(j-1,n-1)+(f*gamma/4)*pf(j+1,n-1))...
                    +h*cm(j,n-1);

            end

        end

    else
        %Periodo después de la Inyección

        for j=1:M

```

```

if(j==1)
    %Condiciones en radio de pozo
    pm(j,n) = e*pf(j,n-1)+pm(j,n-1)*(1-e);

    pf(j,n) = (a-b(j))*pf(j+1,n-1)+(1-c)*pf(j,n-1)+(a+b(j))*pf(j+1,n-1)...
              -d*(pm(j,n)-pm(j,n-1));

    cm(j,n) = cm(j,n-1)*(1-h-2*Dm*f)...
              +cm(j+1,n-1)*(2*f*Dm)...
              +cf(j,n-1)*h;

    cf(j,n) = 0;

elseif(j==M)
    %Condiciones de frontera externa
    pm(j,n) = e*pf(j,n-1)+pm(j,n-1)*(1-e);

    pf(M,n) = (2*a)*pf(M-1,n-1)+(1-c)*pf(M,n-1)+...
              -d*(pm(M,n)-pm(M,n-1));

    cm(M,n) = cm(M-1,n-1)*(2*Dm*f)...
              +cm(M,n-1)*(1-h-2*f*Dm)...
              +h*cf(M,n-1);

    cf(M,n) = cf(M-1,n-1)*2*Df*f...
              +cf(M,n-1)*(1-h-2*f*Df-2*pf(M,n-1)*f*gamma+pf(M-1,n-1)*2*f*gamma)...
              +h*cm(M,n-1);

else
    %Condiciones intermedias
    pm(j,n) = e*pf(j,n-1)+pm(j,n-1)*(1-e);

    pf(j,n) = (a-b(j))*pf(j-1,n-1)+(1-c)*pf(j,n-1)+(a+b(j))*pf(j+1,n-1)...
              -d*(pm(j,n)-pm(j,n-1));

    cm(j,n) = cm(j-1,n-1)*Dm*(f-g(j))...
              +cm(j,n-1)*(1-h-Dm*(2*f))...
              +cm(j+1,n-1)*Dm*(g(j)+f)...
              +cf(j,n-1)*h;

    cf(j,n) = cf(j-1,n-1)*(Df*(f-g(j))+(f*gamma/4)*pf(j-1,n-1)-(f*gamma/4)*pf(j+1,n-1))...
              +cf(j,n-1)*(1-h-2*f*Df+pf(j-1,n-1)*gamma*(f-g(j))-2*f*gamma*pf(j,n-1)+pf(j+1,n-
1)*gamma*(g(j)+f))...
              +cf(j+1,n-1)*(Df*(g(j)+f)-(f*gamma/4)*pf(j-1,n-1)+(f*gamma/4)*pf(j+1,n-1))...
              +h*cm(j,n-1);

    end
end
end
end
%-----
%-----

pmat_model = ((ps0/6894.76)*pm(nod,:))/(piny/6894.76).';
pfrac_model = ((ps0/6894.76)*pf(nod,:))/(piny/6894.76).';
Cmat_model = cm(nod,:);
Cfrac_model = cf(nod,:);

tiempo_ = thr(1:delta:end);

```

```

pfrac_model = pfrac_model(1:delta:end);
pmat_model = pmat_model (1:delta:end);
Cmat_model = Cmat_model(1:delta:end);
Cfrac_model = Cfrac_model(1:delta:end);

%-----
%-----
%Grificación

figure (1)
hold on
h=plot(tiempo_,pfrac_model,'-');
%Grafica
hold off;
legend(h,'Datos experimentales','Location','northwest');
legend('boxoff') ;
title('Curvas de presión en la fractura','FontName','Times New Roman','FontSize', 16);
saveas(gcf, 'Curvas de presión en la fractura', 'fig');

figure (2)
hold on
p=plot(tiempo_,Cfrac_model,'-');
%Grafica
hold off;
legend(p,'Datos experimentales','Location','northwest');
legend('boxoff') ;
title('Curvas de concentración en la fractura','FontName','Times New Roman','FontSize', 16);
% Guardar la figura como archivo fig
saveas(gcf, 'Curvas de concentración en la fractura', 'fig');

figure (3)
hold on
m=plot(tiempo_,pmat_model,'-');
%Grafica
hold off;
legend(m,'Datos experimentales','Location','northwest');
legend('boxoff') ;
title('Curvas de presión en la matriz','FontName','Times New Roman','FontSize', 16);
saveas(gcf, 'Curvas de presión en la matriz', 'fig');

figure (4)
hold on
f=plot(tiempo_,Cmat_model,'-');
%Grafica
hold off;
legend(f,'Datos experimentales','Location','northwest');
legend('boxoff') ;
title('Curvas de concentración en la matriz','FontName','Times New Roman','FontSize', 16);
saveas(gcf, 'Curvas de concentración en la matriz', 'fig');

%Fin
%-----

```

Anexo 6: Código para la resolución del problema inverso

Código de Matlab utilizado para la resolución del problema inverso; La resolución del problema inverso consiste en obtener los parámetros optimizados con los métodos de búsqueda global de Nelder-Mead, método por recosido simulado y por el método de algoritmos genéticos. Con los cuales se llevará a cabo la graficación del comportamiento de la presión adimensional con los parámetros optimizados para poder realizar la comparación con la presión de los datos sintéticos.

```
%-----Solución del problema Inverso-----
%=====
%=====
%=====
%=====Nomenclatura=====

%tiempohr --Tiempo de prueba, hrs
%t_inyeccion --Tiempo de inyección, hrs
%ps0 --Presión inicial, Psi
%piny --Presión de inyección, Psi
%rw --Radio de pozo, ft
%reorg --Distancia frontera externa, ft
%dis --Distancia del pozo observador, ft
%M --Nodos espaciales
%N --Nodos Temporales
%pinyd --Presión de inyección adimensional
%rwd --Radio de pozo adimensional
%red --Distancia frontera externa adimensional
%omega --Parámetro adimensional omega
%lambda --Parámetro adimensional lambda
%tau --Parámetro adimensional tau
%Df --Parámetro adimensional dispersivo de la fractura
%Dm --Parámetro adimensional dispersivo de la matriz
%gamma --Parámetro adimensional dispersivo
%pf --Presión de fractura adimensional
%pm --Presión de matriz adimensional
%cf --Concentración de fractura adimensional
%cm --Concentración de fractura adimensional

%Condiciones iniciales y de frontera
tiempohr = 200; %hr
t_inyeccion = 200; %hr
ps0 = 1450; %psi
piny = 2000; %psi
rw = 0.656168; %ft
reorg = 500; %ft
M = 100;
N = 1e5;

%Distancia desde el pozo
dis=50; %ft
delta=1900;
nod=dis*M/reorg;

%Valores iniciales de parámetros para la optimización
omega = 0.25;
lambda = 5e-7;
tau = 0.13;
```

```

Df = 0.3;
Dm = 5e-6;
gamma = 0.5;

%Vectores
constante = [tiempohr,t_inyeccion,rw,reorg,ps0,piny,N,M];
par = [omega,lambda,tau,Df,Dm,gamma];

%Función objetivo
funcion_objetivo=@(par)FunObjetivo(par,constante,dis,delta);

%Argumentos de entrada
A = []; b = [];
Aeq = []; beq = [];

%Limite superior
lb = [0.1 4e-7 0 0 3e-6 0];
%Limite Inferior
ub = [0.3 9e-7 0.3 0.5 1e-5 0.8];

IntCon = []; nonlcon = [];
nvar = 6;

%-----
%-----
%Algoritmo Genético
TAG=tic;
options = optimoptions('ga','TolCon',1.0e-19,'TolFun',1.0e-30,...
'Display','iter','Generations',50);
%Aquí usamos el método de Algoritmo Genético
par_optimos_GA = ga(funcion_objetivo,nvar,A, b, Aeq, beq,...
lb,ub,nonlcon,IntCon,options);
%Tiempo de optimización
TAGEnd = toc(TAG) ;

%Nelder_Mead
TNM=tic;
options = optimset('MaxIter',1000,'MaxFunEvals',...
1000,'FunValCheck','on','Display','iter');
%Aquí usamos el método de Nelder-Mead
par_optimos_NM = fminsearchbnd(funcion_objetivo,par,lb,ub,options);
%Tiempo de optimización
TNMEnd = toc(TNM) ;

%Recocido simulado
TRC=tic;
options = optimoptions('simulannealbnd','MaxIter',1000,...
'MaxFunEvals',1000,'Display','iter');
%Aquí usamos el método de Recocido simulado
par_optimos_SA = simulannealbnd(funcion_objetivo,par,lb,ub,options);
%Tiempo de optimización
TRCEnd = toc(TRC);

%-----
%-----

%Grafica datos experimentales
pfrac_exp = load('pfrac_noise.txt');
Cfrac_exp = load('Cfrac_noise.txt');
pmat_exp = load('pmat_noise.txt');
Cmat_exp = load('Cmat_noise.txt');

```

```

%-----
%Grafica datos experimentales Algoritmo Genético
[pf,pm,cf,cm]=Problema_directo(par_optimos_GA,constante);

%Presion de fractura
pfrac_ga_model =(ps0*pf(nod,))/piny).';
pfrac_ga_model = pfrac_ga_model(1:delta:end);

%Presion de matriz
pmat_ga_model =(ps0*pm(nod,))/piny).';
pmat_ga_model = pmat_ga_model(1:delta:end);

%Concentracion de fractura
cfrac_ga_model =cf(nod,).';
cfrac_ga_model = cfrac_ga_model (1:delta:end);

%Concentracion de matriz
cmat_ga_model =cm(nod,).';
cmat_ga_model = cmat_ga_model (1:delta:end);

%-----
%Grafica datos experimentales Nelder_Mead
[pf,pm,cf,cm]=Problema_directo(par_optimos_NM,constante);

%Presion de fractura
pfrac_NM_model =(ps0*pf(nod,))/piny).';
pfrac_NM_model = pfrac_NM_model(1:delta:end);

%Presion de matriz
pmat_NM_model =(ps0*pm(nod,))/piny).';
pmat_NM_model = pmat_NM_model(1:delta:end);

%Concentracion de fractura7p
cfrac_NM_model =cf(nod,).';
cfrac_NM_model = cfrac_NM_model (1:delta:end);

%Concentracion de matriz
cmat_NM_model =cm(nod,).';
cmat_NM_model = cmat_NM_model (1:delta:end);

%-----
%Grafica datos experimentales Recocido simulado
[pf,pm,cf,cm]=Problema_directo(par_optimos_SA,constante);

%Presion de fractura
pfrac_SA_model =(ps0*pf(nod,))/piny).';
pfrac_SA_model = pfrac_SA_model(1:delta:end);

%Presion de matriz
pmat_SA_model =(ps0*pm(nod,))/piny).';
pmat_SA_model = pmat_SA_model(1:delta:end);

%Concentracion de fractura
cfrac_SA_model =cf(nod,).';
cfrac_SA_model = cfrac_SA_model (1:delta:end);

%Concentracion de matriz
cmat_SA_model =cm(nod,).';
cmat_SA_model = cmat_SA_model (1:delta:end);

%-----
%-----

```

```

%Grafica Curvas de presión en la fractura
figure (1) ;
hold on
h(1)=plot(pfrac_exp(:,1),pfrac_exp(:,2),'.');
h(2)=plot(pfrac_exp(:,1),pfrac_ga_model,'-*');
h(3)=plot(pfrac_exp(:,1),pfrac_NM_model,'o');
h(4)=plot(pfrac_exp(:,1),pfrac_SA_model,'-s');
%Grafica
hold off;
legend(h,'Datos experimentales','Algoritmo Genético','Nelder Mead','Recocido
simulado','Location','northwest');
legend('boxoff') ;
title('Curvas de presión en la fractura','FontName','Times New Roman','FontSize', 16);
saveas(gcf, 'Curvas de presión en la fractura', 'fig');
%-----
%Grafica Curvas de concentración en la fractura
figure (2) ;
hold on
p(1)=plot(Cfrac_exp(:,1),Cfrac_exp(:,2),'.');
p(2)=plot(Cfrac_exp(:,1),cfrac_ga_model,'-*');
p(3)=plot(Cfrac_exp(:,1),cfrac_NM_model,'o');
p(4)=plot(Cfrac_exp(:,1),cfrac_SA_model,'-s');
%Grafica
hold off;
legend(p,'Datos experimentales','Algoritmo Genético','Nelder Mead','Recocido
simulado','Location','northwest');
legend('boxoff') ;
title('Curvas de concentración en la fractura','FontName','Times New Roman','FontSize', 16);
% Guardar la figura como archivo fig
saveas(gcf, 'Curvas de concentración en la fractura', 'fig');

%-----
%Grafica Curvas de presión en la matriz
figure (3) ;
hold on
m(1)=plot(pmat_exp(:,1),pmat_exp(:,2),'.');
m(2)=plot(pmat_exp(:,1),pmat_ga_model,'-*');
m(3)=plot(pmat_exp(:,1),pmat_NM_model,'o');
m(4)=plot(pmat_exp(:,1),pmat_SA_model,'-s');
%Grafica
hold off;
legend(m,'Datos experimentales','Algoritmo Genético','Nelder Mead','Recocido
simulado','Location','northwest');
legend('boxoff') ;
title('Curvas de presión en la matriz','FontName','Times New Roman','FontSize', 16);
saveas(gcf, 'Curvas de presión en la matriz', 'fig');

%Grafica Curvas de concentración en la matriz
figure (4) ;
hold on
f(1)=plot(Cmat_exp(:,1),Cmat_exp(:,2),'.');
f(2)=plot(Cmat_exp(:,1),cmat_ga_model,'-*');
f(3)=plot(Cmat_exp(:,1),cmat_NM_model,'o');
f(4)=plot(Cmat_exp(:,1),cmat_SA_model,'-s');
%Grafica
hold off;
legend(f,'Datos experimentales','Algoritmo Genético','Nelder Mead','Recocido
simulado','Location','northwest');
legend('boxoff') ;
title('Curvas de concentración en la matriz','FontName','Times New Roman','FontSize', 16);
saveas(gcf, 'Curvas de concentración en la matriz', 'fig');
%-----
%-----
% Tiempo de optimización
fprintf('Tiempo optimización Algoritmo Genético (min): %.4f\n',TAGEnd/60 );
fprintf('Tiempo optimización Nelder Mead (min): %.4f\n',TNMEnd/60 );

```

```
fprintf('Tiempo optimización Recocido simulado (min): %.4f\n',TRCEnd/60 );
```

```
%Fin
```

```
%=====
```

```
function FOT =FunObjetivo(par,constante,dis,delta)
```

```
%-----Función_Objetivo-----
```

```
%=====
```

```
%=====
```

```
%Introducción datos experimentales
```

```
pfrac_exp = load('pfrac_noise.txt');
```

```
pmat_exp = load('pmat_noise.txt');
```

```
Cfrac_exp = load('Cfrac_noise.txt');
```

```
Cmat_exp = load('Cmat_noise.txt');
```

```
%Función problema directo
```

```
[pf,pm,cf,cm]=Problema_directo(par,constante);
```

```
    %Constantes
```

```
    tiempohr = constante(1); %hrs
```

```
    t_inyeccion = constante(2);%hrs
```

```
        rw = constante(3);%ft
```

```
        reorg = constante(4);%ft
```

```
        ps0 = constante(5);%psi
```

```
        piny = constante(6);%psi
```

```
        N = constante(7);
```

```
        M = constante(8);
```

```
tiempos = tiempohr*3600;
```

```
    t = linspace(0,tiempos,N);
```

```
    thr = t*0.000277778;
```

```
%Distancia desde el pozo
```

```
nod=dis*M/reorg ;
```

```
pmat_model =((ps0/6894.76)*pm(nod,:))/(piny/6894.76).';
```

```
pfrac_model =((ps0/6894.76)*pf(nod,:))/(piny/6894.76).';
```

```
Cmat_model =cm(nod,:).';
```

```
Cfrac_model =cf(nod,:).';
```

```
tiempo_ =thr(1:delta:end);
```

```
pfrac_model = pfrac_model(1:delta:end).';
```

```
pmat_model = pmat_model (1:delta:end).';
```

```
Cmat_model = Cmat_model(1:delta:end);
```

```
Cfrac_model = Cfrac_model(1:delta:end);
```

```
pfrac_model = pfrac_model/max(pfrac_exp(:,2));
```

```
pmat_model= pmat_model/max(pmat_exp(:,2));
```

```
Cmat_model = Cmat_model/max(Cmat_exp(:,2));
```

```
Cfrac_model = Cfrac_model/max(Cfrac_exp(:,2));
```

```
pfrac_exp(:,2)=pfrac_exp(:,2)/max(pfrac_exp(:,2));
```

```
pmat_exp(:,2)=pmat_exp(:,2)/max(pmat_exp(:,2));
```

```
Cfrac_exp(:,2)=Cfrac_exp(:,2)/max(Cfrac_exp(:,2));
```

```
Cmat_exp(:,2)=Cmat_exp(:,2)/max(Cmat_exp(:,2));
```

```

%Valores Función objetivo
F01 = sum((pfrac_exp(:,2)-pfrac_model).^2);
F02 = sum((Cfrac_exp(:,2)-Cfrac_model).^2);
F03 = sum((pmat_exp(:,2)-pmat_model).^2);
F04 = sum((Cmat_exp(:,2)-Cmat_model).^2);

FOT=(F01+F02+F03+F04)*1000;
end

%Fin
%=====

function [pf,pm,cf,cm]=Problema_directo(par,constante)
%-----Solución del problema directo-----
%=====
%Constantes
    tiempohr = constante(1); %hrs
    t_inyeccion = constante(2);%hrs
        rw = constante(3);%ft
        reorg = constante(4);%ft
        ps0 = constante(5);%psi
        piny = constante(6);%psi
        N = constante(7);
        M = constante(8);

%Parámetros
    omega = par(1);
    lambda = par(2);
    tau = par(3);
        Df = par(4);
        Dm = par(5);
    gamma = par(6);

%Conversiones
    tiempos = tiempohr*3600; %s
    tiny = t_inyeccion*3600; %s
    ps0 = ps0*6894.76; %pa
    pwf = ps0*0.05; %pa
    piny = piny*6894.76; %pa
    rw = rw*0.3048; %m
    re = reorg*0.3048; %m

%Adimensionalización
    pwfd = (pwf)/ps0;
    pinyd = (piny)/ps0;
    rwd = 1;
    red = re/rw;

%Vectores
    t = linspace(0,tiempos,N);
    thr = t*0.000277778;
    r = linspace(rwd,red,M);
    drd = r(end)-r(end-1);
    dt = t(end)-t(end-1);
    dtiny = tiny/dt ; %s
    alfad = 8.808e-06;

% Agrupación de parametros
a = (dt*tau)/(omega*drd^2);

```

```

b = (dt*tau)./(2*r*omega*drd^2);
c = (2*dt*tau)/(omega*drd^2);
d = (1-omega)/omega;
e = (lambda*tau*dt)/(1-omega);
f = (dt*tau)/(drd^2);
g = (dt*tau)./(2*drd*r);
h = dt*tau*alfad;

% Condición inicial
pf = ones(M,N);
pm = ones(M,N);
cf = zeros(M,N);
cm = zeros(M,N);

%Problema directo
%-----
%-----
for n=2:N

    if (n<=dtiny)
        %Periodo de Inyección

        for j=1:M

            if(j==1)
                %Condiciones en radio de pozo
                pm(j,n) = e*pf(j,n-1)+pm(j,n-1)*(1-e);

                pf(1,n) = pinyd;

                cm(j,n) = cm(j,n-1)*(1-h-2*Dm*f)...
                    +cm(j+1,n-1)*(2*f*Dm)...
                    +cf(j,n-1)*h;

                cf(j,n) =1;

            elseif(j==M)
                %Condiciones de frontera externa
                pm(j,n) = e*pf(j,n-1)+pm(j,n-1)*(1-e);

                pf(M,n) = (2*a)*pf(M-1,n-1)+(1-c)*pf(M,n-1)+...
                    -d*(pm(M,n)-pm(M,n-1));

                cm(M,n) = cm(M-1,n-1)*(2*Dm*f)...
                    +cm(M,n-1)*(1-h-2*f*Dm)...
                    +h*cf(M,n-1);

                cf(M,n) = cf(M-1,n-1)*2*Df*f...
                    +cf(M,n-1)*(1-h-2*f*Df-2*pf(M,n-1)*f*gamma+pf(M-1,n-1)*2*f*gamma)...
                    +h*cm(M,n-1);

            else
                %Condiciones intermedias
                pm(j,n) = e*pf(j,n-1)+pm(j,n-1)*(1-e);

                pf(j,n) =(a-b(j))*pf(j-1,n-1)+(1-c)*pf(j,n-1)+(a+b(j))*pf(j+1,n-1)...
                    -d*(pm(j,n)-pm(j,n-1));

                cm(j,n) = cm(j-1,n-1)*Dm*(f-g(j))...
                    +cm(j,n-1)*(1-h-Dm*(2*f))...

```

```

+cm(j+1,n-1)*Dm*(g(j)+f)...
+cf(j,n-1)*h;

cf(j,n) =cf(j-1,n-1)*(Df*(f-g(j)))+(f*gamma/4)*pf(j-1,n-1)-(f*gamma/4)*pf(j+1,n-1))...
+cf(j,n-1)*(1-h-2*f*Df+pf(j-1,n-1)*gamma*(f-g(j))-2*f*gamma*pf(j,n-1)+pf(j+1,n-
1)*gamma*(g(j)+f))...
+cf(j+1,n-1)*(Df*(g(j)+f)-(f*gamma/4)*pf(j-1,n-1)+(f*gamma/4)*pf(j+1,n-1))...
+h*cm(j,n-1);

end

end

else
%Periodo despues de la Inyección

for j=1:M

if(j==1)
%Condiciones en radio de pozo
pm(j,n) = e*pf(j,n-1)+pm(j,n-1)*(1-e);

pf(j,n) =(a-b(j))*pf(j+1,n-1)+(1-c)*pf(j,n-1)+(a+b(j))*pf(j+1,n-1)...
-d*(pm(j,n)-pm(j,n-1));

cm(j,n) = cm(j,n-1)*(1-h-2*Dm*f)...
+cm(j+1,n-1)*(2*f*Dm)...
+cf(j,n-1)*h;

cf(j,n) =0;

elseif(j==M)
%Condiciones de frontera externa
pm(j,n) = e*pf(j,n-1)+pm(j,n-1)*(1-e);

pf(M,n) = (2*a)*pf(M-1,n-1)+(1-c)*pf(M,n-1)+...
-d*(pm(M,n)-pm(M,n-1));

cm(M,n) = cm(M-1,n-1)*(2*Dm*f)...
+cm(M,n-1)*(1-h-2*f*Dm)...
+h*cf(M,n-1);

cf(M,n) = cf(M-1,n-1)*2*Df*f...
+cf(M,n-1)*(1-h-2*f*Df-2*pf(M,n-1)*f*gamma+pf(M-1,n-1)*2*f*gamma)...
+h*cm(M,n-1);

else
%Condiciones intermedias
pm(j,n) = e*pf(j,n-1)+pm(j,n-1)*(1-e);

pf(j,n) =(a-b(j))*pf(j-1,n-1)+(1-c)*pf(j,n-1)+(a+b(j))*pf(j+1,n-1)...
-d*(pm(j,n)-pm(j,n-1));

cm(j,n) = cm(j-1,n-1)*Dm*(f-g(j))...
+cm(j,n-1)*(1-h-Dm*(2*f))...
+cm(j+1,n-1)*Dm*(g(j)+f)...
+cf(j,n-1)*h;

cf(j,n) =cf(j-1,n-1)*(Df*(f-g(j)))+(f*gamma/4)*pf(j-1,n-1)-(f*gamma/4)*pf(j+1,n-1))...
+cf(j,n-1)*(1-h-2*f*Df+pf(j-1,n-1)*gamma*(f-g(j))-2*f*gamma*pf(j,n-1)+pf(j+1,n-
1)*gamma*(g(j)+f))...

```

```
+cf(j+1,n-1)*(Df*(g(j)+f)-(f*gamma/4)*pf(j-1,n-1)+(f*gamma/4)*pf(j+1,n-1))...  
+h*cm(j,n-1);
```

```
end  
end
```

```
end
```

```
end
```

```
%-----  
%-----
```

```
end
```

```
%Fin
```

```
%=====
```