La formación de las Habilidades del Pensamiento Matemático

N. F. Talizina
Compiladora

Facultad de Psicología
Universidad Autónoma de San Luis Potosí

San Luis Potosí, S.L.P., México, 2001

LA FORMACIÓN DE LAS HABILIDADES DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO

N.F. TALIZINA
(Compiladora)

LA FORMACIÓN DE LAS HABILIDADES DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO

N.F. TALIZINA
(Compiladora)

Facultad de Psicología
Universidad Autónoma de San Luis Potosí

San Luis Potosí, S.L.P., México, 2001

Traducción del ruso al español:
Yulia V. Solovieva
Luis Quintanar Rojas

Corrección de estilo:
Amparo Ravelo Suárez
José de Jesús Rivera Espinosa

Diseño de tablas y gráficas:
Oscar Linares Alonso

Diseño editorial y formación:
Carlos F. Lobato Moreno

ISBN 968-7674-88-1
0705-00114-A 0216

Editorial Universitaria Potosina

Indice

Prólogo
A la edición mexicana

A partir del inicio de los años noventas, casi cada año yo visito México. Durante este tiempo he logrado conocer no sólo las investigaciones que se realizan en el campo de la educación, sino también, la práctica de la educación media y superior en México.

En esta esfera, en México, así como en la mayoría de los países hay muchos problemas. El sistema tradicional de la educación ya no satisface aquellas exigencias que nos ponen las condiciones de la vida contemporánea. En todos los países se realiza la búsqueda y la aprobación de nuevas vías en la educación. Este tipo de trabajo se realiza también en Rusia de manera muy amplia. La particularidad de la búsqueda en Rusia es el hecho de que, en este caso, se unen la ciencia y la práctica. Los aspectos nuevos y más productivos , introducidos en la práctica de la educación, se basan en la teoría de la actividad de la enseñanza y del aprendizaje (elaborados por parte de los autores, tales como P.Ya. Galperin, D.B. Elkonin, V.V. Davidov, N.G. Salmina, Z.A. Reshetova y otros).

Esta teoría continúa con el desarrollo de la aproximación histórico-cultural hacia la psique del hombre, iniciado en los trabajos de L.S. Vigotsky. De acuerdo a esta aproximación, las capacidades del hombre no son innatas, sino que se adquieren durante su vida y se forman durante el proceso de la asimilación de la experiencia de las generaciones anteriores.

Sin embargo, se sabe que la calidad de los métodos del pensamiento que se asimilan, no siempre es suficientemente alta; esto depende del maestro, con el cual el sujeto aprende estos métodos.

La teoría de la actividad de la enseñanza hizo el paso muy importante hacia la solución de este problema. Actualmente, esta teoría permite modelar los métodos más racionales para la solución de unos u otros tipos de problemas.

Probablemente, estos métodos debido a que nadie los usa, en la práctica no están descritos, pero son productivos y, lo que es más importante, pueden ser formados en los alumnos. En el libro propuesto para su atención, se describen estos métodos en relación con las matemáticas. Aquí, el lector encontrará también la metódica de su formación.

Espero, que este libro sea de interés para los lectores mexicanos y les ayude en la solución de algunos problemas de la educación escolar.

N.F. Talizina

Introducción

Con frecuencia se considera a las matemáticas como una de las materias más difíciles durante la enseñanza escolar. La razón de ello se explica por el carácter abstracto de su contenido. Esta explicación es correcta cuando se trata del nivel escolar primario. Se sabe que el intelecto de los niños escolares normalmente se puede ubicar en la etapa sensomotora, lo que significa que para ellos las acciones con objetos abstractos son muy complicadas.

Desde nuestro punto de vista, las dificultades que se presentan en los escolares durante el aprendizaje de las matemáticas tienen otras causas, las cuales se relacionan con la base psicológica sobre la que se apoya el proceso de la enseñanza: a) ¿cómo se comprende a la naturaleza de las capacidades humanas que participan en este proceso?; b) ¿cómo se presenta al proceso de desarrollo del intelecto y el carácter de las relaciones entre la enseñanza y el desarrollo?; c) ¿qué tipo de modelo de proceso de asimilación se encuentra en la base del proceso de la enseñanza?

De acuerdo con los parámetros anteriores, en psicología no existe un punto de vista único pero, consecuentemente, la elección de una postura es indispensable. Naturalmente que el maestro de manera consciente no hace esta elección y, en general, no piensa acerca de la **base psicológica** que se realiza en el proceso de enseñanza. Sin embargo, en la base de dicho proceso de enseñanza, siempre se encuentra una u otra concepción acerca de los componentes mencionados, concepción que podemos identificar.

Si consideramos al primer componente — la naturaleza de las capacidades humanas — entonces vemos que en psicología existen dos puntos de vista opuestos. De acuerdo a uno de ellos, las capacidades humanas están determinadas por la herencia, lo que significa que el hombre al nacer ya posee el tipo de capacidades que tendrá y cuál será el nivel de su desarrollo.

Los partidarios del segundo punto de vista también reconocen el papel que desempeña la herencia en el desarrollo de las capacidades pero, en la herencia, ven no la fuente de su desarrollo, sino solamente la condición para este desarrollo. En calidad de fuente del desarrollo de las capacidades humanas participa la experiencia social, la cual tiene que ser transmitida a las nuevas generaciones durante el proceso de enseñanza. De acuerdo al primer punto de vista, el desarrollo de las capacidades humanas se rige por las leyes biológicas. Los partidarios del segundo punto de vista establecen una dependencia de las capacidades respecto a las leyes sociales y subrayan su naturaleza social. Este punto de vista está ganando cada vez más un mayor número de adeptos. Si el maestro de matemáticas es partidario del primer punto de vista, es decir, que considera que los matemáticos nacen, entonces su tarea principal es identificar estas capacidades y formar las condiciones para la autorrealización de los escolares.

Si los maestros son partidarios del segundo punto de vista, entonces la tarea del maestro se hace mucho más compleja, porque tiene que garantizar la formación de las capacidades matemáticas en los escolares durante el proceso de enseñanza.

Desafortunadamente, en la práctica se observa que la mayor parte de los matemáticos son partidarios de la concepción de la naturaleza genética de las capacidades matemáticas. Así, frecuentemente los maestros de matemáticas explican los fracasos del alumno argumentando que no tiene las capacidades matemáticas. A ello se puede añadir que los padres de este alumno tampoco tuvieron buenos éxitos en las matemáticas. Evidentemente, estos maestros reconocen el carácter innato de las capacidades matemáticas y no consideran posible la formación de las mismas durante el proceso de enseñanza. Por lo tanto, en este caso el maestro no se hace responsable por los éxitos o fracasos de sus alumnos.

Una situación similar se observa con el problema relacionado con el desarrollo del intelecto en general. La teoría más conocida del desarrollo intelectual es la de J.

Piaget. De acuerdo a esta teoría, la etapa de las operaciones lógicas aparece hasta la adolescencia. Pero al mismo tiempo, las operaciones lógicas son necesarias para el niño desde los primeros momentos para el estudio de las matemáticas. Sin la utilización de estas operaciones, las matemáticas no se pueden comprender ni asimilar adecuadamente. Si estamos de acuerdo con el punto de vista de Piaget, entonces no es necesario estudiar las matemáticas antes de la adolescencia o estudiarlas de manera inadecuada y acostumbrarse a los malos resultados en esta materia. Aceptar este punto de vista soluciona también el problema acerca de las correlaciones entre la enseñanza y el desarrollo: la enseñanza tiene que apoyarse en el nivel de desarrollo alcanzado, seguir a dicho nivel. Por el contrario, si reconocemos la naturaleza social de las leyes del desarrollo de la psique del hombre y, entre ellas, las del intelecto, entonces se resolverán de otra manera los problemas de la aplicación del pensamiento lógico y de las correlaciones entre la enseñanza y el desarrollo.

La base psicológica de las investigaciones, cuyos resultados se exponen en este libro, incluye la comprensión de los siguientes componentes: los autores parten del hecho de que las capacidades humanas tienen una determinación social y no hereditaria. Esto significa que el hombre no nace con capacidades acabadas sino que, las adquiere durante el proceso de su vida. La fuente de las capacidades humanas es la experiencia social. La experiencia social se enriquece a través de los logros individuales, pero estos logros sólo tienen lugar después de que el hombre asimila una parte determinada de la experiencia social.

Cuando analizamos el proceso de desarrollo intelectual es importante señalar que éste se da a través de dos líneas. La primera línea es el desarrollo funcional. Ésta se relaciona con la acumulación de nuevos tipos de acciones intelectuales y con la asimilación de diferentes tipos de actividad cognoscitiva. Esta es la línea de los cambios cuantitativos. La segunda línea del desarrollo intelectual es la línea de los cambios cualitativos en el funcionamiento del intelecto del hombre, el paso de una etapa a otra etapa. Estas dos líneas de desarrollo no se dan de manera aislada una de la otra, sino que cada una influye sobre la otra. La enseñanza tiene una relación directa con la primera de las líneas señaladas y, a través de ella, influye sobre la segunda línea.

Para la solución del problema acerca de la correlación entre la enseñanza y el desarrollo, los autores del presente libro están de acuerdo con el punto de vista de L. S. Vigotsky: **la enseñanza conduce al desarrollo**. Estar de acuerdo con este punto de vista significa plantear el problema de la identificación de las condiciones que garantizan un mayor efecto sobre el desarrollo.

Debido a esto, una de las tareas básicas es determinar cuáles son los tipos de actividad cognoscitiva cuya asimilación influye sobre el desarrollo de manera efectiva.

Los resultados de las investigaciones realizadas muestran que, una de las exigencias importantes para estos tipos de actividad, es su apoyo no en los conocimientos particulares sino, en aquellos conocimientos que constituyen la base de muchos contenidos de las materias escolares, los cuales son los conocimientos **invariantes.** La formación de estos tipos de actividad cognoscitiva, constituye prácticamente, la vía que garantiza las capacidades cognoscitivas en los escolares. Durante el estudio de cualquier materia y, antes que nada de las matemáticas, se requieren dos tipos de habilidades de actividad cognitiva: generales y específicas. Entre las habilidades generales el lugar principal lo ocupan las estrategias lógicas del pensamiento. En lo que se refiere a las habilidades específicas, éstas dependen de las características de las materias escolares. Así, el estudio de las matemáticas se relaciona con los tipos matemáticos específicos de la actividad cognoscitiva (capacidades matemáticas), los cuales no se pueden formar durante el estudio de otras materias. Lo mismo se observa en otras áreas del conocimiento.

En este libro se presentan tanto tipos lógicos como matemáticos de la actividad cognoscitiva, los cuales se apoyan en conocimientos invariantes. En todos los casos, durante la organización de la asimilación de estos tipos de actividad, se utilizó la **teoría de la actividad de la enseñanza** elaborada por P. Ya. Galperin. De acuerdo a esta teoría de la asimilación, los conocimientos siempre constituyen los elementos de uno u otro tipo de actividad, de las acciones del hombre. La acción es aquella unidad que tenemos que utilizar para el análisis de cualquier proceso de aprendizaje. Sin considerar a las acciones, es imposible construir los objetivos de la enseñanza de manera correcta y fundamentada, ni controlar la calidad de la asimilación de conocimientos. En realidad, qué significa ¿sabe?, ¿no sabe?, ¿cuál es el criterio del conocimiento?, ¿cómo podemos lograr la valoración objetiva del nivel de conocimientos? No se puede responder a ninguna de estas preguntas sin considerar a las acciones (habilidades, hábitos, capacidades) en las cuales tienen que funcionar dichos conocimientos. Debido a esto, en la enseñanza de cualquier materia tiene que existir no sólo un programa de conocimientos sino, también, un programa de aquellas acciones (habilidades) en las cuales los escolares tienen que aplicar estos conocimientos. En relación con esto, durante la organización del proceso de asimilación del conocimiento, se presta gran atención a aquellas acciones que utilizan los escolares en calidad de medios de asimilación de dichos conocimientos. Si los objetivos de la enseñanza presuponen la aplicación de los conocimientos, en aquellas acciones que los escolares no poseen, entonces, la enseñanza debe garantizar la asimilación simultánea tanto de las acciones como de los conocimientos.

De acuerdo a esta teoría, el proceso de asimilación incluye seis etapas, durante las cuales las acciones y los conocimientos que se asimilan se convierten gradualmente de habilidades externas materializadas en habilidades internas, intelectuales. Los cambios se realizan también de acuerdo a otra serie de características, tales como el nivel de generalización, de independencia y de automatización.

El considerar las exigencias de la teoría de la asimilación, permite **dirigir** los procesos de asimilación y, formar las acciones cognoscitivas y los conocimientos relacionados con estas acciones con cualidades establecidas anteriormente[1].

Los resultados presentados en este libro muestran que, la organización de la enseñanza con la utilización de la base psicológica expuesta anteriormente permite a todos los escolares tanto de primaria como de secundaria, asimilar las matemáticas exitosamente y aplicar libre e independientemente los conocimientos obtenidos en nuevas condiciones.

1 Para mayores detalles acerca de esta teoría, ver: P. Ya. Galperin "Desarrollo de las investigaciones acerca de la formación de las acciones intelectuales". En: La ciencia psicológica en la URSS. Tomo I. Moscú, 1959; P. Ya. Galperin "Resultados básicos de las investigaciones acerca del problema de la formación de las acciones intelectuales y de los conceptos". Moscú, 1965 (*); N. F. Talizina "La dirección del proceso de la asimilación de los conocimientos". Moscú, Ed. Universidad Estatal de Moscú, 1984 y N. F. Talizina "La formación de la actividad cognoscitiva en escolares menores", Ed. Educación, 1988. (*) Versiones en español de P. Ya. Galperin se puede consultar en: L. Quintanar La formación de las funciones psicológicas durante el desarrollo del niño. México, U. A. T., 1995 (Nota del traductor).

En este libro se incluyeron los trabajos realizados con el material de matemáticas en la escuela primaria, así como con material de diferentes partes del curso de planimetría.

En el capítulo de N. F. Talizina: La formación de los conceptos matemáticos se consideran una serie de aspectos lógicos, psicológicos y didácticos relacionados con el proceso de asimilación de conceptos matemáticos en la escuela.

Antes que nada, la autora considera el problema del formalismo en la asimilación de los conceptos matemáticos y descubre sus causas. En relación con esto, se analiza el papel de las definiciones en el proceso de elaboración de conceptos y, se muestra la necesidad de la formación de acciones cognoscitivas específicas en los escolares. El concepto participa como producto de las acciones de los escolares, las cuales se dirigen hacia los objetos de aquella clase cuyo concepto se forma de ellos. Se muestra que el proceso de asimilación de conceptos tiene que ser organizado como proceso de resolución de problemas seleccionados especialmente.

El capítulo de N. G. Salmina: La enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria se dedica al análisis de las condiciones importantes que determinan el éxito de la etapa inicial, en la educación matemática.

Antes que nada, la autora analiza los componentes básicos que tienen que incluirse en el contenido del curso inicial de matemáticas. Además de las acciones y conocimientos matemáticos, también son necesarios otros dos componentes: a) los conocimientos y acciones de signos y símbolos y b) acciones y conocimientos lógicos. En el capítulo se muestra, que sin estos dos últimos componentes, no se puede dar una asimilación adecuada del contenido matemático del curso. El lector encontrará no sólo el señalamiento de estos componentes, sino también su verdadero contenido: los conocimientos y las acciones básicas que se relacionan con los tres componentes del curso inicial de matemáticas.

El segundo aspecto del análisis del curso señalado, se refiere a los principios de la estructura del contenido matemático. La autora muestra los conocimientos y las acciones que constituyen la base del sistema de numeración y, no únicamente, del sistema decimal sino, también, de cualquier otro sistema de numeración.

Finalmente se consideran los problemas de la organización del proceso de asimilación. La autora considera, tanto las exigencias generales relacionadas con todos los componentes mencionados, como las exigencias específicas que reflejan las particularidades de cada uno de dichos componentes.

En el capítulo de G. Nikola y N. F. Talizina: La formación de las habilidades generales para la resolución de problemas aritméticos se analizan las causas de las dificultades que presentan los escolares, durante la resolución de aquellos tipos de problemas aritméticos los cuales, normalmente, se relacionan con albercas, trabajos, movimientos, etc. El análisis realizado mostró que en el curso de aritmética existen más de treinta tipos de problemas relacionados con diferentes procesos. Cada tipo representa para los alumnos un tipo independiente de problema (con movimientos, con trabajos, etc.). Debido a esto al aprender a resolver uno de estos tipos de problema, los escolares, frecuentemente, tienen dificultades para la resolución de problemas de otro tipo. Esto significa que ellos no ven la base común que se encuentra detrás de los diferentes temas en tales problemas. Todos estos tipos de problemas poseen una base común: todos ellos se relacionan con el análisis de los procesos. Evidentemente que si el alumno no comprende lo que es el proceso, no sabe cuáles magnitudes se relacionan con el proceso, cuáles son las relaciones entre estas magnitudes, entonces no puede elegir la operación aritmética adecuada, ni la secuencia correcta para la resolución del problema. En la escuela los alumnos estudian los procesos después de estudiar la aritmética: en el curso de física y, sólo, en relación con tipos particulares de movimientos. Debido a esto, muchos escolares que estudian la aritmética no tienen los conocimientos necesarios acerca de los procesos y, no pueden resolver los problemas, relacionados con el análisis de diferentes tipos de procesos. De esta manera, las dificultades en la resolución de problemas de este tipo, rebasan los límites de la aritmética. Normalmente, los alumnos no tienen dificultades aritméticas puras: ellos solucionan exitosamente los ejemplos con la aplicación de las cuatro operaciones aritméticas básicas. Pero, en el problema, lo más importante es **elegir** correctamente la operación. Y esto presupone la comprensión de aquella situación que se describe en el problema.

En este trabajo se describen no únicamente las causas de las dificultades durante la resolución de problemas de este tipo sino, también, la vía que permite superar dichas dificultades.

Durante la enseñanza experimental, la atención básica de los autores se dirigía al hecho de cómo presentarles a los alumnos los métodos generales para el análisis de estos procesos. Los alumnos se orientaban en las magnitudes básicas del proceso (las fuerzas que actúan, la velocidad, tiempo, producto del proceso) y en sus relaciones.

Este tipo de orientación es invariante y permite comprender y resolver cualquier tipo de problema aritmético de esta clase.

El capítulo de G. A. Butkin: La formación de las habilidades que se encuentran en la base de las demostraciones geométricas, se dedica al análisis de las acciones que constituyen una de las habilidades básicas de las demostraciones. Se sabe que, la demostración de problemas constituye una de las dificultades básicas para los escolares durante el estudio de la materia escolar de planimetría. Ellos memorizan demostraciones preparadas, reproduciéndolas según las exigencias del maestro y las olvidan rápidamente. Cabe señalar que, si nosotros cambiamos la posición del dibujo y denominamos sus elementos con otras letras, los escolares normalmente ya no pueden demostrar el teorema. Esto demuestra, una vez más, el hecho de que el estudio de los teoremas en estos alumnos, se queda en el nivel de una simple memorización y no conduce a la formación de las estrategias para las demostraciones, las cuales constituyen la parte fundamental del pensamiento matemático.

Los estudios basados en las posiciones psicológicas señaladas permitieron establecer que todos los teoremas que se estudian en la escuela se pueden demostrar con ayuda de tres métodos:

a) Método de conducción al concepto a través de la identificación del sistema de las características necesarias y suficientes que se encuentran escondidas detrás de estos conceptos.

b) Método de demostración a la inversa (método de reducción al absurdo).

c) Método de aplicación de construcciones complementarias (como ejemplo puede servir la demostración del problema de Pitágoras, acerca de que la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa).

Hasta la fecha se ha estudiado el contenido de cada uno de estos métodos, se ha realizado la enseñanza experimental de alumnos sobre la formación de las acciones que conforman cada uno de ellos. En todos los casos, después de la enseñanza de este tipo, los escolares eran capaces de demostrar nuevos teoremas de manera independiente pero, además, frecuentemente, utilizando métodos diferentes. Es importante señalar también que los escolares conservaban estas posibilidades durante largos periodos de tiempo. Los resultados muestran que en estos casos, los escolares adquieren los métodos generales del pensamiento matemático y, gracias a ellos, se observa una independencia de las características concretas, no sólo de los dibujos técnicos y sus indicadores, sino también, del contenido mismo de los teoremas.

En el capítulo de G. A. Butkin se presentan los resultados de la formación del primer método de demostraciones geométricas. Se describen todas las acciones cuya formación es indispensable para que los alumnos aprendan este método. Se describe también la metódica de la enseñanza y sus resultados. Los resultados obtenidos señalan un alto grado de efectividad de esta aproximación para el estudio de los teoremas geométricos. Además, debemos señalar que el método formado puede ser aplicado no sólo en geometría, sino también en otras áreas muy lejanas. En particular este método constituye la base del diagnóstico médico. La posibilidad de uso de áreas diferentes se explica por el hecho de que, las bases de su contenido son las operaciones lógicas, las cuales son independientes de cualquier contenido concreto del material. Durante la utilización de este método en nuevas condiciones, tanto dentro de la geometría como en otras áreas, la lógica general de razonamiento se conserva; los cambios se relacionan con el sistema concreto de conceptos y de sus propiedades que caracterizan a cada situación concreta.

El capítulo de I. A. Volodarskaya: La formación de las habilidades generalizadas del pensamiento geométrico se dedica al análisis de las transformaciones afines (grupo de movimientos). La lógica de este trabajo coincide con la lógica de los estudios anteriores. Antes que nada, la autora analiza los tipos concretos de transformaciones que se estudian en la escuela durante varios años. Además, cada tipo particular de estas transformaciones constituye para los alumnos un nuevo objeto de asimilación, como resultado, los alumnos no ven la base común que se encuentra detrás de cada caso particular de transformaciones. La investigación de I. A. Volodarskaya mostró que esta base común (invariante consiste de cuatro componentes: 1) el objeto inicial de las transformaciones; 2) el objeto, en relación con el cual se realiza la transformación; 3) las acciones, con cuya ayuda se realiza la transformación; 4) el objeto final de las transformaciones. Estos elementos son invariantes: ellos participan en cualquier caso de transformaciones de este tipo. Pero en cada caso particular de transformaciones, estos elementos participan como variantes de componentes invariantes. Si consideramos a los elementos invariantes veremos que, el primero de ellos (el objeto inicial), puede ser muy variable: este puede ser cualquier figura geométrica (punto, coma, segmento, circunferencia, etc.). Las variantes del segundo elemento invariante son limitadas: este puede ser un punto, una línea recta, un plano. Una situación similar observamos con el tercer elemento: la transformación se realiza a través de la rotación del paso de vectores o a través de una combinación de ambas. El último elemento invariante (producto final de las transformaciones) también puede ser variable. La variante concreta del producto final se determina por las exigencias concretas desde el punto de vista de su forma, de sus tamaños y de su posición espacial. En estos casos, el objeto inicial conserva su forma y sus tamaños, pero cambia su posición espacial (por ejemplo, en el caso de una rotación). En otros casos, cambia la posición y los tamaños (semejanza); en terceros casos, los cambios se relacionan con las tres características (homotesia).

De esta forma, todo el conjunto de transformaciones de este tipo puede ser obtenido a través de la variación de los elementos invariantes de acuerdo a una o varias líneas.

La enseñanza experimental mostró que el proporcionar conocimientos invariantes y los métodos generalizados para el trabajo con estos conocimientos, les permite, a los alumnos, obtener de manera independiente, todos los tipos particulares de transformaciones, observarlas como elementos de un sistema único y, establecer fácilmente las características generales y diferenciales durante la comparación de diferentes variantes. Es importante señalar que, esta forma de enseñanza, les permite a los escolares comprender de manera más profunda la esencia de las transformaciones geométricas.

En el capítulo de I. A. Volodarskaya y T. K. Nikitiuk: La formación del método general para la resolución de problemas sobre construcciones geométricas se realizó el análisis de un componente más del curso inicial de geometría. Antes que nada, los autores presentaron los resultados del análisis del problema dado, tanto que en la práctica de la enseñanza, como en la literatura didáctica. En el capítulo se muestra que, los metodólogos constantemente buscan los métodos racionales para el estudio de la parte dada de la geometría y, entre otras cosas, aspiran a identificar los momentos generales durante la resolución de problemas sobre construcciones geométricas. Sin embargo, este problema no se ha resuelto de manera definitiva y, los escolares, normalmente, dirigen su atención a la parte ejecutiva. Frecuentemente reproducen mecánicamente las construcciones, sin comprender por qué hay que actuar así y de ninguna otra forma.

Posteriormente, los autores presentan los resultados del análisis de diferentes problemas sobre construcciones geométricas. El objetivo básico de este análisis es identificar la base invariante. Así, en el capítulo se muestra que, durante la resolución de casi todos los problemas sobre construcciones con ayuda de regla y compás, se utilizan las mismas acciones modificando únicamente la secuencia de las operaciones.

En el capítulo se presenta el contenido del método general para la solución de problemas sobre construcciones con ayuda de regla y compás. Este método incluye trece componentes. En la última parte del capítulo, los autores muestran las posibilidades de la aplicación de este método durante la resolución de problemas concretos sobre construcciones geométricas.

Como vemos, en general, en el libro se presenta una nueva aproximación a todas las partes básicas de las matemáticas, tanto de la escuela primaria, como del curso de planimetría.

Antes que nada, este libro se recomienda a los maestros de matemáticas de la escuela básica y media pero, también tiene interés para los maestros de otras materias escolares. Además, los lectores pueden ser metodólogos, psicólogos y todos aquellos que se interesen sobre nuevas aproximaciones en la esfera de la educación.

N. F. Talizina.

Capítulo 1
La formación de los conceptos matemáticos

N. F. Talizina

Los conceptos son unos de los componentes importantes del contenido de cualquier materia y, entre ellas, también de los cursos de matemáticas.

Uno de los primeros conceptos matemáticos al que el niño se enfrenta en la escuela es el concepto del número. Si este concepto no es asimilado de manera adecuada, los escolares tendrán serias dificultades para el estudio posterior del sistema de numeración y, entre otras cosas más, para la comprensión del concepto mismo de sistema de numeración.

En otras disciplinas matemáticas también desde el inicio mismo, los estudiantes se enfrentan a los conceptos. Así, al iniciar el estudio de la geometría los escolares de inmediato se enfrentan a los conceptos de punto, de línea y de ángulo y, posteriormente, con todo un sistema de conceptos relacionados con diferentes tipos de objetos geométricos (líneas, ángulos, triángulos, etc.).

La tarea del maestro es garantizar la asimilación completa de estos conceptos. Considerando a la práctica escolar vemos que, esta tarea se resuelve no tan exitosamente como lo exigen los objetivos de la educación escolar.

La principal insuficiencia de la asimilación de los conceptos escolares es su formalismo. Su esencia consiste en el hecho de que, los estudiantes reproducen correctamente las definiciones de los conceptos, es decir, tienen conciencia de los contenidos pero no saben utilizarlos durante la orientación en la actividad concreta, durante la resolución de problemas donde se requiere la aplicación de estos conceptos. Pondremos algunos ejemplos típicos. Los escolares acaban de estudiar el concepto de circunferencia. Ellos fácil y correctamente reproducen la definición de circunferencia señalando que, ésta es una línea curva cerrada cuyos puntos se encuentran a la misma distancia de un punto al cual se le denomina centro. Después de esto se les propone a los escolares el dibujo de una elipse, dentro de la cual se coloca un punto ("centro"). A los escolares se les pregunta si se puede denominar o no a esta línea curva cerrada circunferencia. La mayor parte de los alumnos responde afirmativamente. Ante la pregunta de por qué consideran que esta línea curva es una circunferencia, ellos responden: "porque también tiene centro".

Segundo ejemplo. Los escolares acaban de estudiar los triángulos rectángulos. Ellos dicen muy seguros de sí mismos que un triángulo rectángulo es aquel triángulo que tiene un ángulo recto. En este momento se les propone un triángulo rectángulo con un ángulo recto en la posición del vértice (es decir, en una posición diferente de la que acaban de aprender). Los escolares miden el ángulo y están de acuerdo en que el ángulo tiene 90 grados, pero se niegan a llamar al triángulo como un triángulo rectángulo.

Un tercer ejemplo. Los escolares dan la definición correcta de ángulos adyacentes suplementarios. Ellos señalan que éstos son dos ángulos que poseen un vértice común y un lado común, y que los otros dos lados son la continuación uno del otro. Los escolares representan correctamente los ángulos adyacentes suplementarios en el pizarrón y los reconocen entre una multitud de ángulos diferentes. Parecería ser que todo está bien. Después se les presenta el siguiente problema: "Tenemos dos ángulos con vértice común. La suma de ellos es igual a 180 grados. ¿Serán éstos ángulos adyacentes suplementarios o no?" La mayoría de los escolares responde afirmativamente. La respuesta es incorrecta. Las condiciones de este problema no señalan la presencia de un lado común en estos ángulos y, al mismo tiempo, no se posee información acerca de que estos ángulos no tengan un lado común, es decir, tenemos una situación indeterminada. En realidad, estas condiciones pueden corresponder no únicamente a los ángulos adyacentes suplementarios, sino también, a los ángulos rectos opuestos por el vértice: están presentes las características de que éstos tienen un vértice común y su suma es igual a 180 grados. Si los alumnos hubieran utilizado el contenido de la definición, tendrían que haber respondido: "No lo podemos saber" (dichos ángulos pueden ser adyacentes suplementarios pero, también, pueden no serlo).

Se pueden poner muchos ejemplos acerca de la incapacidad para utilizar los conceptos matemáticos por parte de los alumnos durante el trabajo con objetos reales y durante el análisis de las condiciones de los problemas. Y todos estos ejemplos nos indican que memorizar formalmente una definición, no significa que el alumno haya asimilado lo esencial de este concepto.

¿Qué es lo que garantiza la asimilación adecuada de los conceptos matemáticos? Para poder responder a esta pregunta es necesario considerar algunos problemas:

1. **¿Qué es un concepto?**
2. **¿Cuál es el papel de la definición en el proceso de asimilación del concepto?**
3. **¿Qué significa asimilar un concepto?**
4. **¿Cuál es el criterio de la asimilación?**
5. **¿En qué consiste el proceso de asimilación de un concepto?**
6. **¿Cuáles son las regularidades de este proceso?**
7. **¿Cómo puede dirigir el maestro este proceso?**

1. Los conceptos matemáticos y sus tipos

La lógica en cualquier concepto diferencia el volumen y el contenido. Por volumen se comprende a aquella clase de objetos que se relacionan con este concepto, que se unen a través del mismo. Así, en el volumen del concepto "triángulo" se incluye a toda una multitud de triángulos, independientemente de sus características concretas (tipos de ángulos, longitud de lados, etc.). Por contenido del concepto se comprende a aquel sistema de características esenciales, sobre cuya base surge la unión de los objetos dados en una clase. El concepto de "triángulo", se relaciona con las siguientes características: figura cerrada que consta de tres segmentos rectos. Al conjunto de características que unen a los objetos en clases únicas, se les denomina como características necesarias y suficientes. Es importante señalar que la relación entre estas características es diferente en conceptos diferentes. En unos conceptos estas características se complementan unas a otras, conformando así el contenido que une a los objetos en una clase. Ejemplos de estos conceptos pueden ser el triángulo, la bisectriz, la mediana y muchos otros. Así, los objetos relacionados con el concepto "triángulo", necesariamente deben poseer las dos características mencionadas. De manera aislada ninguna de ellas permite reconocer a los objetos de esta clase. En la lógica, los conceptos con este tipo de relaciones se denominan conjuntivos: las características se unen a través de la conjunción "y" (en el caso de los triángulos la figura tiene que ser cerrada y consistir de tres segmentos rectos).

En otros conceptos, las relaciones entre las características necesarias y suficientes son otras: estas características no se complementan unas a otras, sino que se cambian unas por otras. Esto significa que una característica es equivalente a otra. Como ejemplo de este tipo de relaciones entre características, pueden ser citadas las características de igualdad de los segmentos o de los ángulos. Se sabe que, con la clase de los segmentos iguales, se relacionan aquellos segmentos que: a) coinciden al colocarlos uno sobre el otro; o b) por separado son iguales a un tercer segmento; o c) consisten de partes iguales, etc.

En este caso no se requieren, de manera simultánea todas las características mencionadas, como lo observado en los conceptos conjuntivos; aquí es suficiente una sola característica de todas las mencionadas; cada una de ellas es equivalente a cualquier otra. Gracias a esto las características se relacionan a través de la conjunción "o". Dicha relación de las características se denomina disyuntiva y, consecuentemente, los conceptos se llaman disyuntivos.

Además, es importante considerar la división de los conceptos en absolutos y relativos. El nombre mismo del concepto habla sobre lo específico de cada grupo. Los conceptos absolutos unen a los objetos en clases de acuerdo a características determinadas, las cuales señalan la esencia de estos objetos como tales. Así, el concepto de "ángulo" contiene características que reflejan la esencia de cualquier ángulo como tal. Lo mismo se observa en otros conceptos geométricos, tales como la circunferencia, el rombo, la semi-recta, etc.

En el caso de los conceptos relativos los objetos se unen en clases a través de las características que señalan su relación con otros objetos. Así, en el concepto "rectas perpendiculares" se fija aquello que caracteriza la interrelación entre dos líneas: el cruce y la formación del ángulo recto. De la misma manera, en el concepto de "tangente", se reflejan las características específicas que señalan la relación de la línea recta con la circunferencia.

La experiencia muestra que, los conceptos relativos producen mayores dificultades en los escolares, que los conceptos absolutos. Y la esencia de estas dificultades consiste precisamente en el hecho de que, los alumnos no consideran el **carácter relativo** de los conceptos y, los aplican como si fueran conceptos absolutos. Así, cuando se les pide a los alumnos representar una perpendicular, algunos de ellos representan la vertical. Es necesario detenernos de manera especial en el concepto de "número".

El número es la relación entre aquello que se somete a una valoración cuantitativa (longitud, peso, volumen, etc.) y el patrón que se utiliza para dicha valoración. Es evidente que el número depende tanto de la magnitud que se mide, como de este patrón. Entre mayor sea la magnitud que se mide, mayor será el número, siempre y cuando se utilice el mismo patrón. Por el contrario, entre mayor sea el patrón (medida), menor será el número siempre y cuando midamos la misma magnitud. Consecuentemente, los alumnos desde el inicio deben de comprender que la comparación de los números, de acuerdo a sus magnitudes, se puede realizar siempre y cuando detrás de ellos se encuentre el mismo patrón. En realidad el cinco no siempre es mayor que tres: por ejemplo, durante la medición de la longitud obtuvimos cinco utilizando como patrón los centímetros mientras que, al utilizar como patrón los metros obtuvimos tres; entonces, tres significa una mayor magnitud que cinco. Si los escolares no asimilan la naturaleza relativa del número, entonces tendrán severas dificultades durante el estudio del sistema de numeración. Si los alumnos no comprenden que las operaciones de la suma o de la resta se pueden realizar sólo con aquellos números detrás de los cuales se encuentra el mismo patrón, no siempre serán capaces de explicar, por ejemplo, la regla de la suma "por escrito" (en columna). Supongamos que al sumar las unidades el niño obtuvo trece. Él señala correctamente que tenemos que anotar tres en la posición de las unidades y el uno lo anotamos arriba de las decenas. Sin embargo, ante la pregunta: "¿Por qué se hace así?", los alumnos frecuentemente dicen: "Así dijo la maestra". Ellos no comprenden que la decena que obtuvieron significa la inclusión de las unidades a la otra medida que es diez veces mayor y, por esta razón, se puede sumar únicamente con las decenas. La incomprensión del principio de posición en el sistema de numeración y, del reflejo de este principio durante la escritura de los números por parte de alumnos, se manifiesta claramente durante la solución del siguiente problema: "Tenemos 111899 dulces. Elige la cifra en este número que determine la mayor cantidad de dulces". Normalmente, los niños escogen nueves. Esto precisamente nos dice que, para ellos, el número es un concepto absoluto y no relativo.

Las dificultades en la asimilación de los conceptos relativos se observan también en escolares mayores e, incluso, en los grados superiores.

No analizaremos otros aspectos de los conceptos matemáticos y sólo señalaremos que todos ellos participan, ante los alumnos, como elementos de la experiencia social. En estos conceptos se fijaron los logros de las generaciones anteriores en el área de las matemáticas. Los escolares tienen que convertir esta experiencia social en experiencia individual, en los elementos de su desarrollo intelectual.

El concepto asimilado por el hombre se convierte en una imagen, pero en una imagen especial: abstracta y generalizada. En realidad, se puede pensar a través de triángulos, de líneas paralelas, de radios, etc., sin imaginar algún objeto concreto relacionado con este concepto. En principio, es imposible imaginar un concepto de manera concreta: cualquier representación constituye una imagen de algún objeto concreto; dicha imagen necesariamente tendrá algunas características irrelevantes. Por ejemplo, si nos imaginamos un triángulo, entonces éste tendrá una longitud determinada de sus lados, un determinado tamaño de sus vértices, etc. En el concepto triángulo estas características concretas no participan pero, sin ellas, la representación sensorial (concreta) es imposible. Gracias a esto el concepto no puede ser una imagen concreta sensorial, sino que, es una imagen abstracta que funciona dentro de nuestro pensamiento en estrecha relación con la palabra y con el lenguaje. Al mismo tiempo es una imagen generalizada que acumuló, no las características de algún objeto aislado, sino las características de toda una clase de objetos.

Todo lo anterior significa que la tarea del maestro de matemáticas consiste en formar, en los escolares, las imágenes generalizadas abstractas, las cuales reflejan diferentes clases de objetos matemáticos. Es evidente que una simple memorización de la definición del concepto no produce dicha imagen. La formación de la imagen se da a través de otra vía.

2. El papel de la definición del concepto durante el proceso de su asimilación

El concepto no puede ser transmitido a los alumnos en forma acabada, ellos mismos deben obtenerlo interactuando con los objetos relacionados con este concepto. ¿Cuál es el papel de la definición para este proceso de interacción? La definición proporciona un cierto punto de vista (base orientativa) para la valoración de los objetos con los cuales interactúa el alumno. Así, con la definición de **ángulo,** el alumno puede analizar diferentes objetos desde el punto de vista de la presencia o ausencia de ángulos en estos objetos. De la misma forma con la definición **circunferencia,** el alumno puede analizar diferentes objetos desde el punto de vista de aquellas características que contienen la definición de circunferencia. Este trabajo es real, sobre la valoración de diferentes objetos, desde el punto de vista de las definiciones dadas, el concepto ideal se forma gradualmente en la mente de los escolares, como una imagen generalizada y abstracta de los objetos de la clase dada.

De esta forma, la obtención de la definición no constituye la etapa final en la asimilación del concepto, sino sólo el primer paso. El siguiente paso es la inclusión de la definición del concepto, en aquellas acciones que los escolares realizan con los objetos correspondientes y, con ayuda de los cuales, construyen en su cabeza, el concepto acerca de estos objetos.

Evidentemente surge la pregunta: ¿Por qué en los ejemplos mencionados los escolares, reproduciendo sin errores las definiciones de los conceptos, daban valoraciones erróneas de los objetos sin coincidir con el contenido de estas definiciones? Esto se explica por el hecho de que, el conocimiento mismo de la definición es insuficiente para el trabajo correcto con los objetos proporcionados.

El siguiente paso importante consiste en enseñarles a los alumnos a orientarse en el contenido de la definición, durante la realización de diferentes acciones con los objetos. En otras palabras es necesario, no únicamente proporcionar el punto de vista sobre cosas, sino también, lograr que este punto de vista sea adoptado y aplicado realmente por los escolares. Si esto no se garantiza, entonces, en algunos casos, la definición se deja a un lado: el alumno va a apoyarse en otras características, las cuales, él mismo identificó en los objetos.

En otros casos los alumnos pueden utilizar sólo una parte de las características señaladas; en terceros casos, ellos pueden añadir sus propias características a las ya señaladas en la definición, lo que también conduce a errores. En los ejemplos mencionados encontramos todos estos casos. Así, reconociendo a una perpendicular como una línea vertical, el alumno se apoya en una característica que no se encuentra en la definición de las líneas perpendiculares. Relacionando a la elipse con la clase de circunferencias, el alumno considera sólo una parte de las características señaladas en la definición de la circunferencia. Lo mismo sucede en el ejemplo con el reconocimiento de los ángulos adyacentes suplementarios. Durante el reconocimiento de triángulos rectángulos, por el contrario, los alumnos añadieron una característica complementaria: la posición espacial del ángulo recto. Desde el punto de vista de estos alumnos, el ángulo recto no tiene que encontrarse en el vértice de triángulo.

Así, la causa básica del formalismo durante la asimilación de los conceptos matemáticos, consiste en el hecho de que no se presta la atención necesaria a la organización del trabajo de los alumnos con la definición de los conceptos. Sólo así se puede explicar el hecho sorprendente que, en algunos manuales de geometría, se proporcionaban definiciones erróneas y de esto no se daban cuenta ni maestros, ni metodólogos, ni alumnos. Como ejemplo podemos tomar el manual de Kiseliov[1]. Hasta la fecha éste se considera como uno de los mejores manuales y, frecuentemente, se realizan peticiones para utilizarlo nuevamente. Sin dudar de la calidad de este manual en general, señalaremos que en éste también hay

1. El Manual de geometría del autor Kiseliov para secundaria se utilizó anteriormente en Rusia; actualmente usan otros manuales. (Nota del traductor).

muchas definiciones incorrectas. En realidad, los ángulos adyacentes se definen como dos ángulos que tienen un vértice común. Si estamos de acuerdo con esto y, sobre la base precisamente de estas características para reconocer los ángulos adyacentes, entonces tendremos que relacionar, con ángulos adyacentes, a los ángulos siguientes: AOC y AOB y también a los ángulos AOC y BOC (Figura 1).

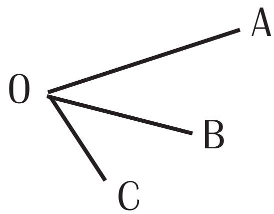


Figura 1

En realidad estos ángulos tienen todas las características que se señalan en la definición: dos ángulos, un vértice común, (punto O) y un lado común (en el primer caso, el lado común es AO, en el segundo caso es CO). Pero estos ángulos no son adyacentes. Esto significa que la definición de Kiseliov no permite distinguir la clase de ángulos adyacentes de manera correcta.

Una situación similar se observa con los ángulos opuestos por el vértice. Éstos se definen como dos ángulos que tienen un vértice común, donde los lados de un ángulo constituyen la continuación de los lados del otro. De acuerdo a esta definición tenemos que reconocer como ángulos opuestos por el vértice (Figura 2), no únicamente los ángulos AOD y COB, sino también el ángulo AOD y el ángulo complementario para el ángulo COB, debido a que éste se forma a través de las mismas semi-rectas que el ángulo COB y su vértice se encuentra en el mismo punto. Sobre esta misma base, el ángulo COB será opuesto por el vértice para el ángulo complementario del ángulo AOD.

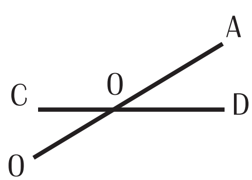


Figura 2

De la misma forma se puede demostrar que la definición de los ángulos adyacentes suplementarios, de acuerdo al manual de Kiseliov, también es incorrecta. Con esto la lista de errores que contiene el manual de Kiseliov no concluye. Señalaremos que muchos de estos errores, los descubrieron los alumnos a quienes hemos enseñado a trabajar con las definiciones de los conceptos. Cuando la definición se guarda sin ninguna utilidad en la memoria del sujeto, entonces no se pueden descubrir las insuficiencias de estas definiciones.

Nosotros hemos mostrado la necesidad de trabajar con las definiciones y, ahora, pasaremos a considerar la organización de este trabajo.

3. Tipos de acciones que se utilizan para la formación de los conceptos matemáticos

Las definiciones de los conceptos matemáticos se pueden aplicar en diferentes tipos de acciones. Gracias a ello, de inmediato surge la pregunta acerca de su elección. La elección de la acción se determina, antes que nada, a través del **objetivo** de la asimilación del concepto. Supongamos que el concepto se asimila para poder reconocer objetos relacionados con la clase dada. En este caso, es necesario utilizar la acción de reconocimiento, la acción de inducir al concepto. Si los escolares no conocen dicha acción, entonces es necesario descubrirles su contenido, mostrarles cómo se deben realizar estas acciones.

En los ejemplos mencionados anteriormente, a los alumnos se les pedía realizar la **acción de inducción al concepto.** En realidad, a ellos se les proponían objetos determinados (elipse, líneas rectas, líneas cruzadas que forman ángulos rectos, etc.) y fue necesario establecer si estos objetos se relacionaban o no con los conceptos correspondientes (circunferencia, líneas perpendiculares, etc.). ¿Cuál es el contenido de esta acción? ¿Qué lugar debe ocupar la definición del concepto en esta acción? ¿Cómo podemos lograr que la definición realmente funcione y ayude a los alumnos a reconocer sin errores los objetos relacionados con el concepto correspondiente? La acción de inducción al concepto consiste de los siguientes componentes:

a) Señalar el sistema de las características necesarias y suficientes de los objetos de la clase dada. Con esto se supone que los escolares ya conocen las particularidades de estas características y las diferencian unas de otras: esenciales –no esenciales; suficientes– necesarias; y al mismo tiempo suficientes. Generalmente las últimas se señalan en las definiciones de conceptos. Consecuentemente, los escolares deben distinguirlas en la definición.

Establecer si el objeto dado posee o no las características identificadas. La ejecución correcta de esta parte de acción de inducir al concepto, presupone que el escolar ya asimiló los medios para el reconocimiento de las características verificadas. Así, si es necesario verificar si las líneas son rectas o no, entonces el escolar tiene que saber utilizar la regla. De la misma manera, durante la verificación de la magnitud del ángulo, él tiene que saber utilizar el transportador, la escuadra, etc. Pero las habilidades prácticas le ayudan al alumno, sólo cuando el objeto que él tiene que reconocer se representa en forma de dibujo técnico, de dibujo del objeto real. Si el objeto se da a través de una descripción, entonces, el alumno tiene que saber analizar las condiciones del problema, identificar en ella la información sobre la característica que se está verificando.

b) Establecer la relación del objeto con el concepto dado. Para la realización correcta de esta parte de la acción, los escolares tienen que saber cuáles son los tipos de estructuras lógicas de las características: conjuntivas o disyuntivas. Si los escolares no saben esto, entonces, no pueden valorar, de manera correcta, el resultado obtenido. En realidad, cuando la estructura de las características del concepto es conjuntiva, es necesario aplicar las siguientes reglas:

- El objeto se relaciona con el concepto dado, siempre y cuando éste contenga todo el sistema de características suficientes y necesarias.
- Si el objeto no posee, por lo menos una de las características, éste no se relaciona con el concepto dado.
- Si no se sabe nada de, por lo menos acerca de una de las características, entonces, a pesar de la presencia del resto de las mismas, no se sabe si el objeto se relaciona o no con el concepto dado.

  Para los conceptos con una estructura disyuntiva de las características, las reglas son las siguientes:

- El objeto se relaciona con el concepto dado, si éste posee por lo menos, una de las características alternativas.
- Si el objeto no posee ninguna de estas características, éste no se relaciona con el concepto dado.
- Si no se sabe nada acerca de todas las características, si éstas están presentes o no, entonces no se sabe si este objeto se relaciona o no con el concepto dado.

En los ejemplos mencionados, los conceptos (circunferencia, perpendicular, ángulos adyacentes suplementarios) poseen una estructura conjuntiva de las características, por ello es que la respuesta positiva tendrá lugar, sólo cuando está presente todo el sistema de las características señaladas en la definición.

Como podemos ver, el contenido de la acción de inducir al concepto, requiere de un análisis especial que presupone todo un sistema de conocimientos y habilidades previos y no sólo de las matemáticas, sino también de la lógica. La definición del concepto se incluye en el contenido de la **base orientadora** de esta acción. Además de la definición del concepto, en la base orientadora también participa la regla lógica de inducción al concepto. El escolar debe apoyarse tanto en una regla como en la otra, durante la ejecución de la acción dada.

4. La organización del proceso de la asimilación

No es necesario hacer que los alumnos, aprendan de memoria el contenido de la base orientadora de la acción. Su memorización puede darse de manera involuntaria, como resultado de su utilización durante la solución de problemas para la inducción al concepto. ¿Pero cómo puede utilizar el alumno aquello que aún no memoriza? Para ello se utilizan diferentes formas externas de presentación de la información necesaria: el contenido de la base orientadora de la acción. La forma más accesible es el mapa escolar. Después de la explicación de la esencia del concepto y de la presentación para el reconocimiento de los objetos relacionados con este concepto, el maestro propone a los alumnos los mapas escolares ya preparados, o ellos mismos los elaboran con ayuda del maestro, lo cual es más recomendable para mantener la motivación de los escolares. En este caso, el mapa es más o menos como sigue (en relación con el concepto “líneas perpendiculares”):

Las características del concepto:

1. Dos líneas rectas.
2. Se cruzan.
3. Forman un ángulo de 90 grados.

Regla para el reconocimiento de las líneas perpendiculares:

1. Verificar si el objeto dado tiene o no las características señaladas.
2. Señalar el resultado de la verificación de cada característica: + = presente; – = ausente; ? = no se sabe.
3. Valorar el resultado obtenido de acuerdo a la regla lógica.

La regla lógica:

1. El objeto se relaciona con el concepto dado sólo cuando posee todas las características señaladas.
2. Si el objeto no posee por lo menos una característica, éste no se relaciona con el concepto dado.
3. Si no se sabe nada de la presencia o ausencia de por lo menos una característica, entonces, a pesar de la presencia del resto de las características, tampoco se sabe si el objeto se relaciona o no con el concepto dado.

Esquema de la regla lógica

No. 1

$$\begin{array}{cc|c} 1 & + & \\ 2 & + & + \\ 3 & + & \end{array}$$

No. 2

$$\begin{array}{cc|c} 1 & + & \\ 2 & + & - \\ 3 & - & \end{array}$$

No. 3

$$\begin{array}{cc|c} 1 & + & \\ 2 & + & ? \\ 3 & ? & \end{array}$$

No. 4

$$\begin{array}{cc|c} 1 & + & \\ 2 & + & - \\ 3 & ? & \end{array}$$

Utilizando el mapa escolar durante la solución de los problemas sobre la inducción al concepto, los escolares gradualmente aprenderán su contenido y dejarán de utilizarlo. Después de esto, ellos reproducirán el contenido del mapa escolar en forma oral y actuarán en correspondencia con el mismo. Es muy importante que los alumnos repitan varias veces y en forma completa, todas las recomendaciones, señaladas en el mapa. Con este objetivo, se debe trabajar en parejas para hacer natural la pronunciación, en voz alta, del contenido del mapa escolar. Después, los alumnos trabajarán en silencio de manera individual, recordando las recomendaciones necesarias[2]. Queremos señalar que para el trabajo es necesario proporcionar los problemas con todas las variantes posibles de respuestas. Sólo en este caso surge, no únicamente la formación completa del concepto, sino también, el grado suficiente de su generalización. Finalmente, con dicha organización del trabajo surgen, tanto la formación del concepto, como la formación de inducción al concepto, en donde el último funcionará exitosamente.

Evidentemente, para una asimilación más profunda de los conceptos es importante utilizar no sólo una acción, sino varias: comparación, deducción de consecuencias, clasificación, etc. La validez y la cantidad de las acciones en las cuales funciona el concepto dado, sirve precisamente como señal de la cantidad de su asimilación. Consideraremos algunos detalles de esta acción. La deducción de la consecuencia, prácticamente es una acción contraria, en comparación con la inducción al concepto. En realidad, durante la inducción al concepto es necesario, de acuerdo a las características determinadas, resolver el problema acerca de la relación del objeto dado, a la clase de objetos fijados en el concepto. Sin embargo, durante la deducción de las consecuencias, desde el inicio mismo, se sabe que el objeto se relaciona con la clase dada. El problema consiste en que se tienen que obtener las consecuencias y, hacer las conclusiones acerca de las características, utilizando la confirmación dada. De esta manera, en el primer caso, se realiza el paso de las características del objeto a la relación con la clase, mientras que en el segundo caso, sucede lo contrario. Por ejemplo se sabe que la figura es un triángulo. ¿Qué podemos decir acerca de esta figura? ¿Qué características tiene? La ejecución de esta acción presupone que los alumnos tienen conocimiento de varios tipos de estas características. En este caso, la solución del problema se

2. Sobre este tema se puede consultar el libro: N. F. Talizina (1988). La formación de la actividad cognoscitiva en niños escolares. Moscú, Ed. Educación.

basa en las características necesarias. Cada objeto de una clase determinada necesariamente posee un cierto sistema de características sin las cuales, no puede ser relacionado con la clase dada de objeto. En el caso del triángulo, éstas, antes que nada, son las características señaladas en la definición: figura cerrada que consiste de tres segmentos de línea recta. Estas características son no únicamente necesarias, sino al mismo tiempo suficientes, para poder reconocer la figura como un triángulo. Además de estas características, cualquier triángulo tiene las siguientes características necesarias: la suma de los ángulos internos es de 180 grados; la suma de cualquiera de dos de sus lados es mayor que el tercer lado; cualquier ángulo externo es igual a la suma de dos ángulos internos, los cuales no son adyacentes suplementarios de este ángulo, etc. La acción de la deducción de las consecuencias enriquece el concepto del triángulo y amplía su contenido.

La acción de la comparación les ayuda a los escolares a comprender el lugar del concepto, que están asimilando, entre otros conceptos. Como las acciones anteriores, la comparación se realiza sobre la base de las características esenciales. Así, el triángulo puede ser comparado con el ángulo, con la circunferencia y con el cuadrilátero, de acuerdo a las características señaladas en la definición: lo cerrado de la figura, la cantidad de segmentos y los segmentos de línea recta.

En lo que se refiere a la clasificación, ésta requiere de la comprensión complementaria de las relaciones de especies y géneros y, naturalmente, presupone la presencia de conceptos acerca de tipo y género. La clasificación es indispensable para el estudio de las matemáticas. Así la división de triángulos, de acuerdo a los ángulos, en triángulos rectángulos, con ángulos agudos y ángulos obtusos, ya es una clasificación elemental. En calidad de concepto de género participa el concepto de triángulo; en calidad de concepto de especie participan las tres subclases mencionadas de triángulos. Cabe señalar que en los manuales se pueden encontrar clasificaciones incorrectas, las cuales, naturalmente, producen una ausencia de lógica en el pensamiento de los alumnos. Veamos un ejemplo.

Le pedimos a una alumna de sexto grado que nos diga qué tipo de triángulos se llama equilátero. Obtenemos la respuesta correcta. La alumna responde también correctamente a la pregunta: ¿qué tipo de triángulo se llama isósceles? Después de esto le hacemos la tercera pregunta: ¿podemos llamar al triángulo equilátero como triángulo isósceles? La respuesta es: “No”. Continuamos el diálogo:

– ¿Cuántos lados iguales tiene un triángulo isósceles?
– Dos.
– ¿Y un triángulo equilátero, cuántos lados iguales tiene?
– Tres.
– Entonces, si en un triángulo equilátero todos sus lados son iguales entre ellos, entonces ¿entre ellos se pueden encontrar dos lados iguales?
– Sí, se pueden.
– Entonces, ¿podemos llamar al triángulo equilátero como triángulo isósceles?
– No.
– ¿Por qué?
– Porque el tercer lado también es igual.

Como vemos, la alumna no comprende las relaciones entre los diferentes tipos de triángulos, los cuales se determinan de acuerdo a las correlaciones entre sus lados. Pero la misma incomprensión se observó también, en el autor del manual en el cual aprendió esta alumna. En este manual los triángulos se clasifican como escalenos, equiláteros e isósceles. Como consecuencia de todo esto, en la alumna se formó el concepto equivocado de triángulos isósceles como de aquellos triángulos en los cuales, con la igualdad de dos lados, el tercer lado necesariamente tiene que ser desigual a los otros dos. Si seguimos las exigencias de la lógica, entonces los tipos señalados de triángulos no se pueden considerar como tipos del mismo nivel: los triángulos equiláteros constituyen un caso en particular de triángulos isósceles, es decir, se relacionan con otro nivel de clasificación.

La acción de la clasificación es aún más compleja que el ejemplo mencionado. La clasificación permite, por un lado, integrar el concepto que estamos estudiando en el sistema de otros conceptos anteriormente aprendidos y, por otro lado, ver las subclases de objetos que se incluyen en este concepto. Así, un cuadrilátero puede ser considerado como uno de los tipos de polígonos y, como un concepto general (de género) que incluye a toda una multitud de diferentes tipos: rectángulos, cuadrados, rombos, paralelogramos, etc. La clasificación incluye a una serie de acciones y requiere de la ejecución de una serie de condiciones. Antes que nada, los escolares tienen qué aprender a elegir la base para la clasificación y conservarla hasta el final de su trabajo, mientras que no se termine todo el volumen del concepto. En calidad de la base para la clasificación, evidentemente se retoman las características esenciales del concepto.

Sin detenernos en otras acciones relacionadas con la asimilación de los conceptos, señalaremos únicamente el hecho de que precisamente las acciones, con las características de los conceptos, sirven como medio para la asimilación. La calidad para la asimilación del concepto se determina por aquello que puede hacer el alumno con este concepto. De esta manera, la acción y su validez nuevamente constituye el criterio del conocimiento. El concepto se relaciona estrechamente con las acciones, tanto durante el proceso de su formación, como de su funcionamiento.

Sin considerar detalladamente el proceso de la asimilación, sólo enfatizaremos que éste será como un proceso de solución de problemas. No se puede asimilar la acción sin realizarla y, la realización de la acción, presupone un problema adecuado para la misma. De esta forma, el proceso de la asimilación tiene constantemente un carácter problemático. Las acciones realizadas con las características de los objetos, sirven, precisamente como un instrumento para la construcción del concepto, para su surgimiento. El concepto es un producto de las propias acciones de los escolares. La segunda observación importante se refiere al hecho de que, los conceptos matemáticos (como cualquier otro concepto), no pueden ser asimilados sin la asimilación de todo un sistema de conocimientos y actividades lógicas iniciales.

Muchos estudios han mostrado que la realización de las recomendaciones señaladas, conduce a la asimilación exitosa de conceptos científicos. Además, los escolares desde el inicio se orientan únicamente sobre las características esenciales utilizándolas de manera consciente y voluntaria.

En conclusión, señalaremos que los estudios contemporáneos, también han demostrado la importancia del carácter sistémico de la asimilación de los conocimientos, incluyendo a los conceptos. Gracias a ello, los conceptos tienen que asimilarse, no de manera aislada unos de otros, sino como elementos de un sistema único. Así, en Geometría, durante el estudio de diferentes tipos de ángulos, los alumnos frecuentemente y gradualmente aprenden diferentes tipos de ángulos de acuerdo a su tamaño (del ángulo agudo hasta el ángulo completo) después, aprenden tipos particulares de relaciones entre dos ángulos (opuestos por el vértice, adyacentes, con lados paralelos y perpendiculares, etc.). Cada vez los escolares memorizan las definiciones pero, no siempre son capaces de comparar estos ángulos, de comprender la base que une la multitud de variantes particulares.

Pero si consideramos a esta multitud de variantes desde el punto de vista de la **invariante** (base), que constituye su origen, no es necesario estudiar cada caso particular de manera aislada: los escolares pueden obtenerlos independiente y simultáneamente. Para ello, el objeto de la asimilación tiene que ser la **invariante** y el método de trabajo con la misma. En el caso dado, como **invariante** participa el sistema de elementos constantes, sin los cuales no puede existir ningún ángulo: 1) presencia del vértice; 2) presencia de los lados y 3) la posición espacial de ambas. Variando estos elementos podemos obtener todos los tipos de ángulos. Así, cambiando la posición espacial del ángulo obtendremos los ángulos agudos, rectos, obtusos, llanos y completos. Los alumnos fácilmente obtienen todos estos casos particulares y, el maestro únicamente tiene que decir cómo se llaman. De esta manera, tampoco hay necesidad de memorizar la definición: los alumnos pueden elaborarla de manera independiente si es que ellos, anteriormente, conocieron los principios para la construcción de las definiciones y asimilaron los conceptos del género y tipo.

Los diferentes tipos de relaciones entre dos ángulos se obtienen variando las posiciones espaciales entre sus vértices y lados. En lo que se refiere al vértice, éste puede ser común o no; los lados dan mayor cantidad de variantes: común, no común, los lados no comunes pueden continuarse uno del otro, pueden ser paralelos o perpendiculares. Los escolares con gusto buscan cada vez nuevas variantes y, gradualmente, obtienen todo un sistema completo con el cual pueden trabajar fácilmente, estableciendo las características generales y particulares de las variantes y elaborando definiciones para casos concretos.

La aproximación sistémica a los conceptos permite, no solamente reducir notablemente el tiempo de la enseñanza de los conceptos, sino también, lograr una asimilación más profunda y exacta.

Capítulo 2
La enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria

N. G. Salmina

Los objetivos de la enseñanza del curso inicial de matemáticas, se formulan de acuerdo a una nota explicativa del programa de matemáticas de la manera siguiente: "Garantizar el conocimiento correcto de los números y las habilidades, para realizar las operaciones aritméticas con los números positivos enteros; formar los hábitos elementales para el trabajo con micro-calculadora y computadora; proporcionar el desarrollo matemático inicial que incluya las habilidades para observar y comparar, analizar, realizar las generalizaciones elementales e interpretarlas sobre la base de ejemplos concretos nuevos; desarrollar la memoria matemática y el lenguaje"[3]. Sin embargo, como muestra la práctica de la enseñanza, no todos los alumnos de la escuela primaria logran estos objetivos y, como se sabe, muchos tienen dificultades no sólo para la resolución de problemas, sino también para las técnicas del cálculo. Esto plantea el problema de la identificación de las condiciones que, permitan la asimilación del programa al nivel necesario que exige el programa de la escuela primaria y, lograr de esta manera, los objetivos por parte de todos los escolares.

Una de tales condiciones es la introducción de los conceptos básicos en la etapa inicial de la enseñanza. Otra condición es la organización de cursos propedéuticos, cuyo objetivo sea incrementar el nivel básico de los escolares que inician el

3 Nota explicativa del Programa de Matemáticas para la Escuela Primaria. Moscú, 1992.

estudio de las matemáticas básicas. La realización de estas condiciones permite eliminar las dificultades básicas que surgen en los niños durante la etapa inicial del estudio de las matemáticas.

Consideremos una de las aproximaciones, posibles para la realización de las condiciones mencionadas que garanticen no sólo la eliminación de las dificultades sino, también, la formación efectiva de los conceptos matemáticos básicos en los escolares.

1. Exigencias básicas para la elaboración del curso de matemáticas en la escuela primaria

De acuerdo a los estudios realizados, es importante introducir, durante las primeras etapas de la enseñanza, aquellas posturas teóricas que garanticen posteriormente la orientación de los escolares en las matemáticas. Gracias a su alto nivel de generalización, estas posturas dan la posibilidad de utilizarlas ampliamente en diferentes áreas de conocimiento, de construir sobre su base conocimientos y habilidades. En relación con esto, surge el problema de la identificación, por un lado, de las habilidades generales que son importantes para el dominio de cualquier conocimiento y, por otro lado, de las habilidades matemáticas que determinan la formación del sistema concreto de conocimientos de la materia escolar dada.

El problema de la estructura de los conocimientos y de las habilidades matemáticas se resuelve, de manera diferente, en diferentes concepciones de la educación matemática. Sobre la base de los datos obtenidos en estudios anteriores, nosotros identificamos los componentes básicos siguientes:

1) **Los conocimientos y las operaciones lógicas básicas.**
2) **Los tipos necesarios de la actividad simbólica y semiótica.**
3) **Los conceptos y las relaciones matemáticas elementales.**

Estos componentes deben constituir el objeto de la asimilación del curso propedéutico, como antecedente del curso de matemáticas básicas.
Nos detendremos en el contenido de estos componentes.

El curso propedéutico de la lógica. En los trabajos de matemáticos famosos se señala que, gran parte de los conocimientos matemáticos, presuponen la habilidad para manejar operaciones lógicas. Como mostraron los trabajos realizados bajo la dirección de P. Ya. Galperin y N. F. Talizina estas habilidades, no se desarrollan por completo, sin la enseñanza dirigida. ¿Qué tipo de operaciones lógicas es necesario enseñar a los niños de 6 a 7 años de edad, quienes inician el aprendizaje de las matemáticas?

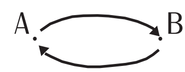
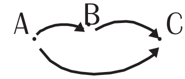
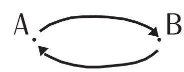
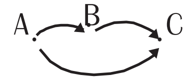
De acuerdo a J. Piaget el número es la síntesis de la conservación, de la clasificación y de la seriación, las cuales tienen que formarse previamente en los niños que inician el estudio de las matemáticas. El análisis teórico experimental realizado por V. V. Davidov, mostró que la síntesis de estas operaciones no se realiza sin una enseñanza especial. En la base de estas síntesis se encuentra una acción específica, relacionada con la búsqueda de las relaciones múltiples entre las magnitudes, en condiciones de su igualación mediatizada. Durante el proceso de realización de esta acción, surge la síntesis de la clasificación y de la seriación y, sobre esta base también, el verdadero concepto de número.

Estudios realizados bajo la dirección de P. Ya. Galperin cuyo inicio proporcionó L. Gueorguiyev mostraron que, sobre la base de las soluciones erróneas en los problemas de conservación, se encuentra la inhabilidad para diferenciar las características del objeto, así como la inhabilidad para identificarlas. La enseñanza de la habilidad para diferenciar las características de los objetos, condujo a la desaparición de los errores de este tipo. Nuestra experiencia mostró que es necesario ampliar el conjunto de características y no limitarse en la identificación de la longitud, de la amplitud, de la altura, de la forma, del color, del área y de la masa, sin incluir también las características topológicas, las características no esenciales de los objetos, las cuales los niños tienen que saber ver en los objetos. Todo esto sirvió como base para la selección del contenido del curso propedéutico lógico, el cual incluye la habilidad para distinguir las características de los objetos, las operaciones de conservación, de seriación, de clasificación y de sus síntesis en condiciones de igualación mediatizada. La asimilación de este contenido sirve como base para la formación del concepto de número.

El curso se inicia con el dominio de la habilidad para distinguir las características (del objeto, etc.), porque ésta es necesaria para la realización de las tareas en todos los temas posteriores (operaciones lógicas, aciones sobre conjuntos, orientación espacial, etc.).

El tema: "la identificación de las características de diferentes objetos" se incluyó en todos los programas de enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria. Generalmente en los manuales de matemáticas, se incluyen varias tareas sobre este tema en los primeros cursos. Las diferencias de este tema, en nuestro programa, en comparación con otros programas consisten no solamente en los objetivos, sino también, en los tipos de tareas así como en los medios para su ejecución. Este tema se trabaja durante todo el primer año. El propedéutico lógico presupone la formación de la comprensión y la utilización de algunos axiomas para la descripción de las magnitudes, así como para las operaciones lógicas.

Como objeto de asimilación fueron retomados los axiomas que descubren el concepto magnitud, a través de la relación de comparación, así como los medios para la representación de estas relaciones. Representaremos este contenido en la siguiente tabla:

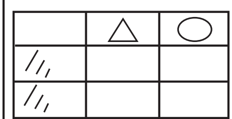
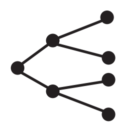
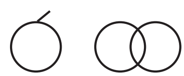
Habilidades	Características	Esquemas de relaciones
Compresión y utilización de axiomas de magnitudes		
a) si A=B, entonces B=A		
b) si A=B y B=C, entonces A=C		
c) si A>B, entonces B<A		
d) si A>B y B>C, entonces A>C		

Las operaciones lógicas se forman en correspondencia con el contenido necesario para la asimilación completa del concepto de número.

La **seriación** es el orden de los objetos de acuerdo a una base determinada, la cual incluye una serie de habilidades; éstas se presentan en la tabla siguiente, así como las características que participan como base, el material utilizado para el trabajo y los símbolos de esta operación.

Habilidades	Caracteristicas	Material	Signos
I. Identificación de la característica (una o varias) ante su cambio en la serie de objetos o figuras.	De acuerdo a diferentes características (una o varias): forma, detalles, color, tamaño, posición espacial de la figura o de sus elementos aislados, etc.	Utilización de objetos reales y representaciones gráficas.	
II. Construcción de la serie según la carcterística (entre otras casos, el número) cambiante.	Incluyendo todas las características, entre otras cosas, el medio de la unión de las figuras, de los elementos de las figuras, simetría, cambio secuencial.	Variación de la cantidad de elementos, que cambian en los objetos en las series.	
III. Construcción de la figura de acuerdo al principio identificado del cambio de las figuras en las series.			

La **clasificación** incluye un sistema complejo de acciones, cuya asimilación representa un problema difícil para los alumnos, lo cual presupone la elaboración de tareas de complejidad creciente en diferentes direcciones y, sobre todo, de acuerdo a la composición de las habilidades correspondientes. Representaremos en la tabla siguiente el conjunto de habilidades y características sobre cuya base se forman dichas habilidades, y los medios esquemáticos utilizados durante la ejecución de las tareas.

Habilidades	Características	Material	Signos
1. Habilidad para formar las clases de objetos: a) identificación de la base para la unión de objetos en grupos; b) búsqueda del concepto generalizador para grupo de objetos y su determinación con símbolo; c) identificación de las características esenciales y no esenciales de objetos y de la base para la clasificación; d) cambio de la base de la agrupación, es decir, la formación de diferentes clases con los mismos objetos (de acuerdo a una característica); e) clasificación dicotómica, negación del concepto; f) clasificación de acuerdo a dos o más características; g) relaciones de género-especie: (conceptos orgánicos (búsqueda del concepto de la especie para el del género), generalización de problemas para la inclusión de clases, exclusión de elementos que no se relacionan con la clase, intercección de conceptos.	Se utilizan todas las características.	Objetos reales, incluyendo botones, que se diferencian en material, color, dibujo, forma, cantidad de hoyitos, etc.; figuras geométricas (planas y con volumen), figuras de forma no determinada, etc.; material gráfico (dibujos de objetos, de formas geométricas).	1) Signos de objetos, signos de características, 2) Tablas,  Árbol  Diagramas de Venn 

El curso propedéutico de símbolos. Éste se dirige a la asimilación de habilidades para la creación de signos y de símbolos para determinar a los objetos, a las características, etc.; para operar con los sistemas de símbolos y signos; para expresar el contenido (objetos, fenómenos, características, relaciones, acciones, transformaciones) en diferentes formas de símbolos y de signos; para pasar de un idioma a otro, de un plano a otro (reconstruir la realidad según los signos y a la inversa); para separar el contenido de la forma de la representación.

L. S. Vigotsky y A. R. Luria escribieron acerca de las regularidades del desarrollo psicológico del hombre: durante el proceso de su desarrollo psicológico, el hombre perfecciona el trabajo de su intelecto, básicamente, gracias al desarrollo de los medios técnicos específicos complementarios del pensamiento y de la conducta de la misma forma como, durante el proceso de desarrollo histórico el hombre cambia, no sus órganos naturales sino, los instrumentos. El desarrollo psicológico del hombre se realiza a través de la asimilación de toda la experiencia anterior y de la cultura, la cual incluye, entre otras cosas, diferentes sistemas de símbolos y signos. En la psicología, desde L. S. Vigotsky, se le da una gran importancia a la asimilación de los sistemas de signos durante el desarrollo psicológico del niño; se presta cada vez mayor atención a la elaboración de este problema.

La ejecución de tareas matemáticas, ya desde el inicio mismo de cualquier programa que se use, requiere de la utilización de diferentes símbolos y signos (cifras, letras, esquemas) los cuales nunca participan como el objeto específico de la asimilación, desde el punto de vista de las características que los determinan, como sistemas de signos. Con el objeto de introducir a los niños a los símbolos científicos es necesario, desde nuestro punto de vista, formar previamente la actividad de codificación – decodificación, inicialmente con la creación voluntaria e independientes de símbolos por parte de los niños, para pasar gradualmente a los símbolos adoptados en la sociedad. Además, los símbolos y los signos deben incluirse en la actividad concreta, antes que nada para la solución de problemas cercanos a la vida cotidiana y, posteriormente, para la solución de problemas matemáticos. Esto motiva y hace más comprensible a la matemática simbólica y a las tareas que presuponen la realización de codificación – decodificación.

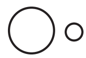
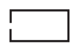
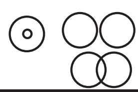
Una de las condiciones importantes para la formación completa de conocimientos es la utilización de diferentes idiomas para la expresión del mismo contenido, como un medio para la separación del contenido de la forma. Aquí no se trata de signos aislados, sino de sistemas que existen en la ciencia (simbólica de letras y cifras, diferentes tipos de cuadros, gráficos, árbol lógico, etc.). Así, por ejemplo, durante la formación de la operación lógica de la clasificación, es útil pasar el contenido representado verbalmente a un idioma gráfico (diagramas de Venn, cuadros, árbol lógico, etc.) y, a la inversa.

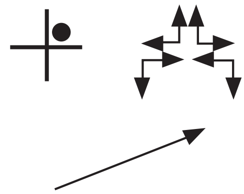
Para los niños que aún no dominan la actividad de la lectura de manera suficiente, la forma de representación de las tareas puede ser esencial. Los textos verbales que se presentan en los manuales (formulaciones de tareas, problemas temáticos), producen grandes dificultades en los niños que inician el estudio de las matemáticas básicas. Una de las causas puede ser la comprensión incorrecta del texto del problema; los niños frecuentemente cambian la formulación de los problemas de manera incorrecta. Los medios efectivos de inclusión de los niños a la ejecución de los problemas, pueden ser, tanto la introducción de los símbolos en la formulación de las tareas, como la visualización de las mismas. La representación de las tareas en símbolos y en signos, utilizando cuadros y esquemas de diferentes tipos conservando el mismo sistema de significación, hacen que las tareas sean más comprensibles para todos, incluyendo los niños que leen con dificultades.

La formación de las actividades simbólicas se garantiza sobre la base del material lógico. El tema identificación de las características resultó ser útil para la selección de este material. Este tema sirvió como base para la formación de la codificación – decodificación. Identificando las características los alumnos las fijaban en signos y símbolos.

Lo importante para la asimilación de este tema fue el hecho de que en el programa dado, durante largo tiempo se utilizan los símbolos voluntarios inventados por los niños; después, gradualmente, se realiza el paso a los símbolos usuales. Inicialmente, los signos y los símbolos se incluyen en la actividad objetal de los niños para la resolución de problemas bien conocidos para ellos. En la tabla siguiente se presentan los signos, a los cuales pasan gradualmente los alumnos, durante la ejecución de las tareas. Posteriormente, éstos se cambian por los símbolos que se utilizan normalmente, en las matemáticas.

El contenido del programa incluye la formación de habilidades que se identifican en este tema. Describiremos la estructura de las habilidades y, las características sobre cuya base se forman estas habilidades, así como los símbolos aplicados para la ejecución de las tareas.

Habilidades	Características	Signos de características y operaciones
I. Codificación de objetos (decodificación). **II.** Identificación de características de objetos y su codificación: a) en símbolos involuntarios, creados independientemente; b) en símbolos dados, normalmente usados en la sociedad. **III.** Descripción de objetos de acuerdo a conjuntos de características con su representación en símbolos. Comparación de objetos de acuerdo a características. Identificación de características esenciales y no esenciales.	Forma	
	Color	
	Tamaño	
	Área	
	Volumen	
	Cantidad	
	Altura	
	Ancho	
	Longitud	
	Figuras cerradas y abiertas	
	Material	
	Función (cómo se utiliza)	
	Línea curva y quebrada	
	Relaciones espaciales de figuras (dentro, fuera, intersección)	

Habilidades	Características	Signos de características y operaciones
	Posición en el espacio (arriba, abajo, derecha, izquierda) Dirección	
IV. Codificación (decodificación) de operaciones con características: a) negación de característica (redondas – NO redondas, etc.). b) cambio de característica.		

El componente matemático del curso propedéutico

P. Ya. Galperin, sobre la base de sus investigaciones, llegó la siguiente conclusión: los conceptos matemáticos pueden formarse de manera completa, sólo después de la previa asimilación de las operaciones matemáticas generales, de los conceptos y de las relaciones. Aquí se incluye a la medición, la cual utiliza el método de señalización para la fijación de sus resultados y para la comparación mediatizada de las magnitudes; también se incluye el dominio de las relaciones más – menos, igual – desigual; y de la operación de las magnitudes.

En nuestro curso, aún antes de la introducción del número, los alumnos asimilan las relaciones matemáticas generales más, menos, más menos que, igual, desigual, tanto como, sobre la base del establecimiento de la mutua correlación (inmediata y mediatizada con ayuda de la señalización). La elaboración de estas habilidades es indispensable para la posterior introducción del número en la acción de la medición. En la tabla siguiente ejemplificamos el conjunto de habilidades que los alumnos deben asimilar antes de pasar a las mediciones.

Habilidades	Material	Signos
I. Correlación de elementos de los conjuntos (1:1; 1:2, 1:3, etc.), de clases; operación de colocación de elementos de diferentes conjuntos para determinar su correlación y orden.	Utilización de objetos reales y sus representaciones gráficas ante diferentes posiciones espaciales de los elementos de los conjuntos y clases.	
II. Comparación de conjuntos y establecimiento de su equivalencia con la formulación de los resultados de comparación: “tanto como” (la mitad), “más – menos”, “más - menos que”.	–⊗–	
III. Utilización de la señalización en lugar de los elementos de los conjuntos o clases para comparalos por su cantidad: a) Comprensión de la señalización como sustituto del elemento del conjunto o de la clase; b) Sustitución de cada elemento de conjunto por la señalización. Cada conjunto se sustituye por sus propios señales (lo que impide confundir los elementos de los diferentes conjuntos); c) Establecimiento de la mutua correlación entre las señalizaciones; d) Comparación de series de señalizaciones; Sobre la base de la correlación de las señalizaciones y de la comparación de series, se formulan los resultados de la comparación de conjuntos reales o de clases.	–⊗–	

Habilidades	Material	Signos
IV. Igualación de cantidades de elementos de diferentes conjuntos y de clases a través de dos medios: a) Eliminación de los elementos sobrantes de conjunto mayor; b) Adición de elementos faltantes de conjunto menor.	–⊗–	
V. Organización de los conjuntos: para los elementos de un conjunto encontrar los elementos correspondientes de acuerdo a diferentes características (funciones, etc.) de otros conjuntos.	Utilización de objetos reales y de representaciones gráficas de objetos.	

En la estructura de estos conocimientos previos se incluye también el concepto de medida, sobre cuya base se construyen todas las partes posteriores del curso relacionadas con la asimilación del número y de las acciones con él. El concepto de medida se introduce y se refuerza dentro de la acción de la medición. Sobre la base de la medida se introduce el concepto de unidad. La unidad es la relación de aquello que se mide y que es igual a su medida. Con esta introducción de la unidad, la valoración inmediata de las relaciones cuantitativas, típica para los preescolares, y reforzada con el paso al estudio de las matemáticas básicas dentro de la enseñanza tradicional (de acuerdo al programa general, la unidad se introduce contraponiendo a un objeto con una serie de objetos), se cambia por la valoración mediatizada a través de la relación con la medida. El concepto de medida en realidad se puede considerar como un concepto estructurado, debido a que, colocándolo sobre la base de la unidad, podemos formar el número como una relación entre la magnitud y la medida, lo que es fundamental durante la formación del concepto de número. La igualdad de los conceptos número y relación debe encontrarse en la base de cualquier enseñanza racional de numeración.

En la tabla siguiente presentamos al conjunto de habilidades que incluyen el contenido de medición de magnitudes, cuya asimilación, así como el material mencionado anteriormente, hace posible la formación completa del concepto de número. Señalaremos una vez más que, la elaboración de la medición se considera, no con el objetivo de enseñarles a los alumnos las habilidades prácticas sino, con el objetivo de introducir el concepto de número.

Habilidades	Características	Material	Signos
I. Medición de magnitudes: a) Elección de la magnitud para la medición; b) Elección de la medida que corresponda a la magnitud que se mide; c) El proceso de la medición: exactitud, finalidad de la acción, obtención del resultado entero o con fracción; La comprensión del hecho de que una señalización-sustitución es igual a la medida; el conjunto de las señalizaciones-sustituciones de de la magnitud que se mide, número.	Longitud, amplitud (ancho), tamaño, volumen, cantidad, altura.	Longitud, amplitud (ancho) de los objetos; líneas rectas, curvas y quebradas; agua y diferentes materiales como arena o arroz. Inicialmente, se miden objetos reales, después, sus representaciones gráficas.	

Habilidades	Características	Material	Signos
II. Comparación de magnitudes: a) Qué magnitudes se pueden comparar; b) La comparación puede o no realizarse con cualquier medida, (lo que se midió con la misma medida); La comprensión de la posibilidad de comparación los resultades obtenidos a través de diferentes medidas ante diversas cantidades de señalizaciones; c) Método de la comparación a través de la mutua correlación de las señalizaciones. Si en el caso de la medición de diferentes magnitudes se obtiene la misma cantidad de señalizaciones, entonces, la magnitud será mayor, donde es mayor la medida.		Comparación de magnitudes, después de la medición real, con los resultados de la medición realizada con otras señalizaciones. Vaciar cantidades iguales de líquidos en recipientes de diferente forma, altura y ancho.	$>, <$ $=, \neq$

Habilidades	Características	Material	Signos
III. Introducción de Nº 1 como de la relación de la magnitud con la medida; el cero como el inicio de la medición; el cero como la cantidad el conjunto vacío.		Medición de objetos reales y de sus representaciones gráficas.	
IV. La ley de la formación del siguiente número a+1 y del número anterior a-1. Obtención del número de 0 a 9; cálculo ordinal y cardinal.		Utilización de la serie (semi-recta) de números para el cálculo ordinal y cardinal. Signos de operaciones: +, -; símbolos con segmentos de colores.	

Curso básico. El contenido del curso básico consiste en la asimilación del concepto del sistema de numeración, incluyendo al sistema decimal, de operaciones aritméticas, del método generalizado para la solución de problemas aritméticos y los elementos de geometría.

Uno de los defectos serios de la enseñanza contemporánea de las matemáticas consiste en el hecho de que, los alumnos no diferencian el número de la cifra, la cantidad real de su fijación en los signos. Además del curso propedéutico para la superación de estos defectos, se puede incluir el estudio de los sistemas de numeración con diferentes bases, hasta llegar al sistema decimal. El trabajo con diferentes sistemas de numeración, permite separar los aspectos formales y los aspectos del contenido del concepto de número, para establecer las variantes de la representación simbólica de las magnitudes. Además, el concepto de medida permite identificar el principio de la construcción y de la escritura de los números y considerar al sistema decimal de númeración, como un caso particular. Esta introducción da la posibilidad para formar el concepto de número, comprender la simplicidad genial del sistema decimal y asimilar las operaciones aritméticas.

La asimilación del concepto del sistema de numeración incluye la formación de una serie de habilidades, la cual tiene que ser parte del curso propedéutico, donde se considera el conocimiento previo de diferentes componentes del concepto de sistema de numeración. Como componentes del concepto sistema de numeración se incluyen las siguientes habilidades:

I. Identificación de la medida y de la formación de grupos de objetos

1) Identificación de la medida del cálculo. Determinación del sistema de numeración según la señalización de diferentes componentes.

2) Formación de grupos de objetos en correspondencia con la medida. Completar los grupos en correspondencia con la medida.

3) Ley de la formación de la clase superior en cualquier sistema de numeración en correlación con la clase (posición).

II. Escritura del número obtenido

1) Construcción de la red de clases en correspondencia con la medida elegida.

2) Identificación de la cantidad de cifras en el sistema.

3) Construcción de la serie de números.

4) Escritura del número.

III. Reconstrucción de grupos y de diferentes elementos según su escritura en la red de posiciones según la medida señalada. Divisiones de objetos agrupados.

IV. Comparación de números durante la agrupación de cantidades iguales de objetos a través de diferentes medidas

Después de la asimilación de estas habilidades, se pasa gradualmente al sistema decimal de numeración. La decena se considera como una medida nueva en la que la medida anterior se incluye diez veces (nos referimos a la misma base de uno). De manera similar se comprenden otras unidades y clases (posiciones). La correlación entre las clases participa como la relación de las medidas. Sobre la base del concepto de medida se introduce también la multiplicación, en la que el multiplicando participa como la medida y la diferencia entre los números adyacentes que se multiplican es igual a la magnitud de la medida. La identificación del principio básico del sistema y de las acciones relacionadas con él, simplifica mucho la enseñanza y la asimilación de acciones con números grandes, elimina las dificultades para el paso al manejo de quebrados y de fracciones decimales, así como de las acciones con ellos y de la posibilidad para la utilización amplia de este principio.

Durante el estudio de sistema decimal de numeración, nosotros partimos del hecho de que, puede ser mejor asimilado si éste no se divide en sus partes constitutivas, sino que se introduzca como el sistema de clases.

Como escribió A. S. Pchiolko, la simpleza genial del sistema decimal y el ritmo decimal de su estructura, se asimilan fácil y claramente sólo cuando el mundo de los números grandes se despliega ante nosotros a grandes escalas. La unidad de principio en la construcción de toda la multitud de números, se manifiesta con la gran fuerza en la estructura de los números grandes. Los detalles particulares de este problema se pueden asimilar mejor sobre el fondo general. Desgraciadamente, esto no se realiza en la enseñanza. A. S. Pchiolko relacionaba estas recomendaciones con la enseñanza de la aritmética en el tercer grado pero, el estudio de los números y de las operaciones con ellos, se inicia desde el primer año de primaria.

No se puede mostrar el principio decimal, el principio de la posición sólo con dos grados de números. La introducción del sistema decimal da la posibilidad para trabajar de inmediato con el principio general de operaciones de suma y resta, sin determinar los medios dependientes de la magnitud y de la estructura del número.

El sistema descrito de enseñanza, permite eliminar las repeticiones y los errores en el proceso de la enseñanza de la numeración y de las operaciones, evitar aquella asimilación en la cual la habilidad particular participa como la regularidad general y la asimilación de otras habilidades se da a través de la destrucción de la habilidad asimilada anteriormente. La enseñanza de las operaciones a través de la asimilación del principio de construcción del sistema de numeración, la consideración de las acciones como los medios que descubren las particularidades del sistema decimal, conducen a la formación consciente de la técnica del cálculo. Las acciones generalizadas y la asimilación del principio general de la acción, se realizan sólo, si desde el inicio mismo, los principios se aprenden y se asimilan sobre diferentes bases. La formación posterior de las generalizaciones significa, psicológicamente, una sobre-enseñanza debido a que se forman las generalizaciones particulares.

2. Organización de la asimilación de conocimientos por parte de los alumnos

Para la formación de los componentes señalados se elaboró un programa de enseñanza. No podemos presentar aquí con detalles todo el programa y, sólo describiremos las orientaciones básicas del trabajo con los alumnos, sobre cada uno de los componentes del curso. Debemos señalar además que, a pesar de que los objetivos que se encuentran en tales componentes del curso son diferentes y, de la existencia de un sistema especial de tareas para cada uno de ellos, la elaboración de componentes se realizaba paralelamente. De esta forma, el curso propedéutico y el curso de lógica, se realizaban no de manera secuencial, sino simultáneamente. Aquí también se realizaban las tareas sobre la asimilación de relaciones (igual, diferente, etc.). El número y las operaciones con él, se introducían a través de mediciones, después de una buena asimilación de los componentes mencionados. El número acumula en sí todos estos conocimientos. Con el paso a la asimilación del concepto de número, el trabajo con las habilidades lógicas y simbólicas no termina sino que, gradualmente, pasa a niveles más complejos de la actividad, los cuales se consideran en las tareas de seriación y clasificación, así como en las tareas sobre la actividad de signos y símbolos (por ejemplo transmisión de la información expresada en un idioma a otro idioma, etc.).

Las tareas para la formación de la actividad simbólica y del componente lógico incluyen el trabajo con las habilidades mencionadas anteriormente. El incremento de la complejidad de las tareas se realiza no sólo de acuerdo a las características formales (desde la identificación de una o dos características del objeto hasta la identificación de sus características complejas, de uno o dos objetos hasta grupos de objetos), sino también, al análisis por niveles de características. Inicialmente, los alumnos aprenden a identificar las características y a codificarlas; posteriormente, ante ellos se plantea la tarea de analizar las características desde el punto de vista de su carácter esencial para la determinación del objeto. El trabajo se realiza considerando lo relativo de las características, tanto esenciales como no esenciales. Además, las tareas se diferencian una de otra porque constituyen el objeto de análisis y de codificación: ya sean los objetos mismos o sus características, los fenómenos o las relaciones, los procesos o las acciones. La complejidad de la ejecución de las tareas también se determina por la forma de su representación y, correspondientemente, por la forma de su resolución. Durante la asimilación se utilizan ampliamente la matriz y la red de coordenadas, con el objetivo de fijar en ellas las características y las relaciones.

El contenido de las habilidades señaladas, dicta las exigencias específicas sobre el material didáctico indispensable para la formación de los conocimientos. El conjunto de figuras geométricas utilizado ampliamente para la enseñanza de la identificación de las características y, durante la asimilación de los conceptos lógicos iniciales, no tiene que participar como el medio didáctico básico. El problema no sólo consiste en el hecho de que los bloques geométricos constituyen el material purificado, que facilita y reglamenta la cantidad de características identificadas. Pero, el conjunto mismo de las formas, es muy limitado (círculos, cuadrados, triángulos y rectángulos).

Es importante incluir la mayor cantidad posible de formas, y entre ellas, formas poco usuales. La cantidad limitada de características que se encuentran en el conjunto de las figuras geométricas, conduce al análisis estereotipado de los objetos y, todos los juegos lógicos con estas características, se formalizan y se memorizan rápidamente. La habilidad para identificar las características de las figuras geométricas y, para realizar las operaciones lógicas con ellas, no significa que el alumno pueda tan fácilmente describir las características de los objetos reales o de otros tipos de material didáctico. Así, el primer objetivo es ampliar el conjunto de características y utilizar material didáctico muy semejante a los objetos reales. Además, es importante que las características de los objetos (durante la formación de la habilidad para identificarlas) no sean introducidas ni gradual ni consecutivamente sino, simultáneamente, es decir, el objeto tiene que considerarse a través del conjunto de las características. Pondremos algunos ejemplos de estos tipos de tareas.

Establecimiento de relaciones espaciales

Tarea 1. A los niños se les proporciona la red o matriz (figura 1), en la que se colocan las figuras sobre la intersección de las líneas. A ellos se les dice que hay que pasar de una figura a otra (de una celda a otra), señalando con flechas cada una de las celdillas. La cantidad de las flechas tiene que corresponder a la cantidad de celdillas mientras que, la dirección de las flechas, a la orientación del movimiento.

Inicialmente los niños tienen que colocar las flechas en la matriz y, después reproducirlas entre las mismas figuras pero, fuera de la matriz. En el modelo se muestra cómo tiene que ejecutar la tarea el alumno, moviéndose del rombo hacia el cuadrado (en la matriz y después fuera de ella). El alumno ejecuta la tarea siguiente de manera independiente, inicialmente colocando las flechas en la matriz del □ hacia el Δ (→↓↓) y del Δ hacia ○ el (→↓↓), reproduciéndolo después entre las mismas figuras fuera de la matriz.

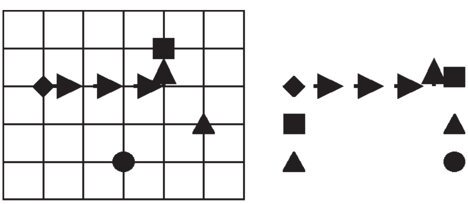


Figura 1

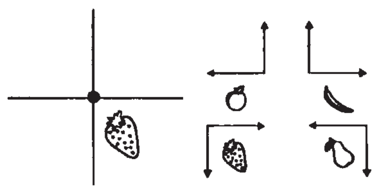


Figura 2

Tarea 2. Las tareas de este tipo tienen como objetivo establecer la formación de la habilidad para orientarse en el sistema de coordenadas: identificar la parte superior derecha, la parte inferior derecha, la parte superior izquierda y la parte inferior izquierda (figura 2). Para la ejecución de la tarea se utiliza el sistema de símbolos ( ) que corresponde a estas orientaciones. En las tareas se les exige a los niños que dibujen las frutas en la red de coordenadas. El lugar de cada figura se determina con una flecha representada cerca de las frutas. Se presenta el modelo de ejecución de la tarea. Finalmente, el alumno tiene que dibujar un plátano en la parte superior derecha, una manzana en la parte superior izquierda, una pera en la parte inferior izquierda.

La mayor parte de las tareas se orienta a la formación de habilidades para diferenciar figuras cerradas y no cerradas, así como líneas curvas o quebradas.

Tarea 3. Una de estas tareas se puede denominar encuentra la casa para la figura (figura 3). Los alumnos tienen que colocar, en las celdillas, las figuras dibujadas una sobre otra (en total hay cinco figuras y para facilitar la explicación cada una tiene su número correspondiente). Las señales que poseen las celdillas ayudan a encontrar la celdilla para la figura: en el cuadrado superior izquierdo "viven" las figuras no cerradas formadas por líneas curvas (Nº. 3); en el cuadrado superior derecho "viven" las figuras no cerradas formadas por líneas quebradas (Nº 4,5); en el cuadrado inferior izquierdo "viven" las figuras no cerradas formadas por líneas curvas (Nº. 2); en el cuadrado inferior derecho "viven" las figuras cerradas formadas por líneas quebradas (Nº. 1).

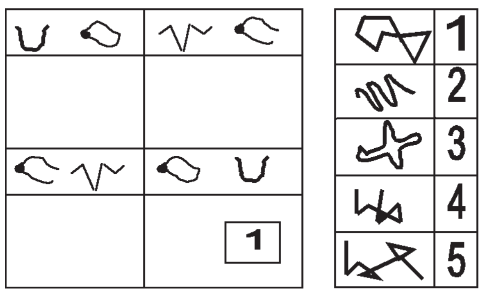


Figura 3

Se elaboró una gran cantidad de tareas para trabajar con los cambios de las características (ya sea cambiar la característica en correspondencia con el signo o determinar qué característica cambió en el objeto y colocar el signo). Este tipo de problemas, además de los objetivos de formación de la orientación en las características y, la determinación de las interacciones lógicas durante los cambios de las características en cadenas cerradas, posee un objetivo más:

preparar la introducción del operador. La identificación de esta función del número, normalmente produce ciertas dificultades en los alumnos. Inicialmente, el incremento de la complejidad de las tareas, se realiza con el aumento de la cantidad de características que se tienen que cambiar. Así, los alumnos, orientándose sobre una característica que tienen que cambiar en la figura dada (por ejemplo, cerca de Δ se encuentra el signo para el cambio del color) , tienen que cambiar sólo una característica (por ejemplo, en el caso dado, en lugar de un triángulo amarillo, tiene que estar un triángulo del mismo tamaño, pero de cualquier otro color). Ante el signo del cambio de la forma se cambia solamente la forma y se conservan otras características: color, tamaño, etc. Posteriormente, los cambios se realizan de acuerdo a dos o tres características (de acuerdo a los signos para los cambios). Además del color, de la forma y del tamaño, también puede cambiar la posición espacial del objeto, sus características topológicas, etc.

Durante la selección de dichas tareas, es importante utilizar no únicamente el conjunto de figuras geométricas, con cuyas operaciones se asimilan rápidamente, sino también, dibujos de objetos y de animales cada uno de los cuales, además de las características de la forma y del color, posee también otras. Después de la asimilación de las habilidades para cambiar las características de objetos aislados, se les proponen a los alumnos tareas similares en cadenas cerradas, en las que antes de cambiar las características y colocar los signos correspondientes se tiene que ver si éstas se contraponen o no a otros elementos de la cadena. Mostraremos esto en el siguiente ejemplo.

Tarea 4 (figura 4). A los niños se les propone una tarea en la que, los juguetes dibujados forman un círculo con ayuda de flechas con orientaciones determinadas. Sobre cada una de las flechas se coloca el signo para el cambio. Así, entre las tortugas (Nº. 1 y Nº. 2) se coloca el signo para el cambio de la posición espacial , el cual corresponde con sus diferentes posiciones espaciales. Entre la tortuga Nº. 2 y el carrito Nº. 3 se encuentra el signo para el cambio de la forma (la forma de estos juguetes es diferente). Además, (Nº. 4) el dibujo de un carrito igual, se diferencia del Nº. 3 por el color. Los alumnos tienen que colocar en el círculo punteado, el signo con el cual cambia el juguete ( ). La última y más compleja tarea es colocar los signos en el último eslabón de la cadena, comparando las características según las cuales se diferencian los juguetes (color y forma).

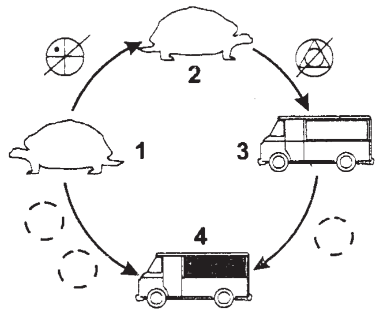


Figura 4

Para la formación de las habilidades para identificar las relaciones espaciales, también se utilizan las tareas en las que, orientaciones de las flechas entre dos dibujos, son bidireccionales. Los alumnos tienen que reproducir las orientaciones y, el dibujo de las flechas, entre los objetos aislados apoyándose en el esquema de sus posiciones.

El siguiente es un ejemplo de esta tarea
A la izquierda se presenta el esquema de la posición de las "casas" en donde viven la gata, el perro y el ave. Entre las casas hay caminos de diferentes colores y orientaciones. A la derecha están dibujadas las mismas casas en pares y en diferentes combinaciones. Utilizando el esquema de la posición de las casas, hay que dibujar las flechas de diferentes colores y orientaciones que, muestren cómo se puede caminar de una casa a otra. Se presenta el modelo (con la ejecución de las dos líneas de la tarea en la figura 5).

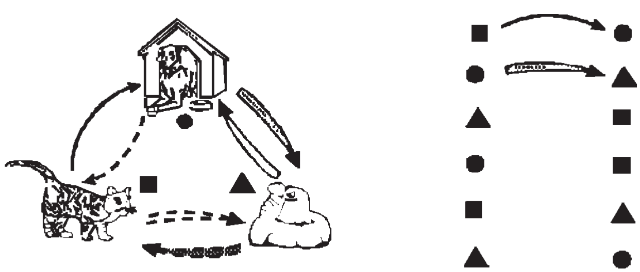


Figura 5

Además de la organización de la actividad para la identificación de las características, la formación del componente lógico se realizaba, básicamente, en tareas que presuponían la utilización de axiomas y de operaciones lógicas (seriación, clasificación y conservación). Las tareas se diferenciaban entre sí por la utilización del axioma y de la operación que requiere la ejecución de la tarea. El aumento de su complejidad se lograba gracias al incremento de la cantidad de las características que se cambiaban, así como gracias a la complejidad de la distinción de las características que participaban como base para estos cambios. Pondremos un ejemplo de la tarea de seriación, en el que se presenta una serie-conjunto de figuras (Nº. 1). Estas figuras forman una fila. Partiendo del lugar que ocupa cada figura en esta fila, se deben colocar las figuras faltantes en las filas (2 y 3), las cuales forman parte de la serie completa (Figura 6).

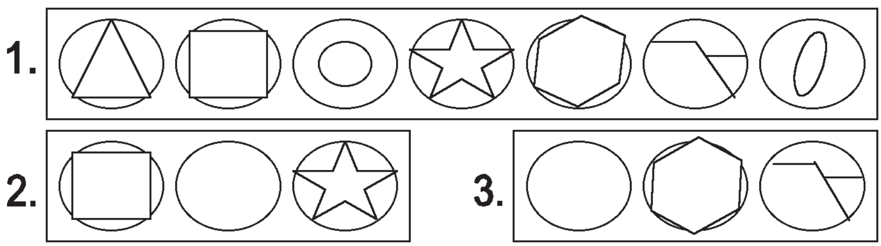


Figura 6

Para encontrar la figura faltante en la fila Nº. 2, el alumno tiene que ver la figura que sigue. En este caso es una estrella (antes de ésta hay un círculo vacío el cual se tiene que completar). El alumno tiene que encontrar la estrella en la serie (fila Nº. 1) y ver qué figura está antes de ella (círculo doble). El alumno tiene que dibujar esta figura en el círculo vacío. Para verificar la elección correcta de la figura es necesario verificar la coincidencia con otras figuras (en el caso dado con la primera). De manera similar se elige la figura en otra fila (Nº. 3 en el círculo vacío tiene que estar la estrella).

Las tareas para la clasificación presuponen no sólo la formación de esta operación con el conjunto de sus componentes, sino también, de las habilidades para resolver tareas de clasificación y seriación simultáneamente, así como las habilidades para pasar de unos medios de representación de clases y de relaciones a otros.

Como ejemplo pondremos la tarea de clasificación de acuerdo a dos características (se utiliza la tabla de arriba).

Los alumnos reciben la tabla, en la que se señalan las características: arriba – tazas de diferentes colores; a la izquierda – platos con diferentes dibujos. Los alumnos tienen que completar la tabla dibujando la taza o el plato con colores o dibujos determinados. Se presenta el modelo para la ejecución de la tarea, colocando la taza y el plato con color y dibujo determinados donde se cruzan las líneas vertical y horizontal (Figura 7).

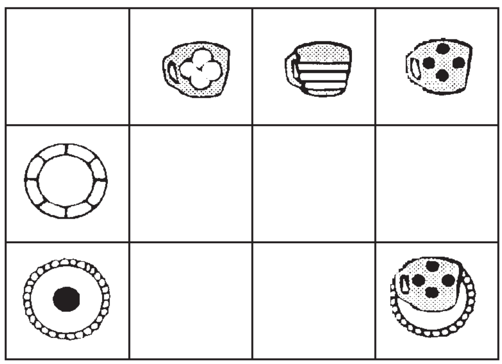


Figura 7

Conjuntamente con las tareas de clasificación y de seriación, los alumnos ejecutan tareas de conservación. Estas tareas se dirigen a la formación de la comprensión del hecho de que, la misma cantidad de líquido (o materiales como arena, arroz, etc.), al vaciarla en recipientes de diferentes formas, conserva su cantidad pero cambia su nivel. Tareas similares se aplican para la medición de las áreas, etc. Veamos un ejemplo. A los alumnos se les propone la tarea, en la que dos cantidades iguales de leche (de un litro cada una) se vacían en recipientes de diferentes formas. Se tiene que comparar el contenido de estos recipientes; colocar los signos de comparación, señalando las características según las cuales, se realiza la comparación (cantidad, nivel, etc.) (Figura 8).

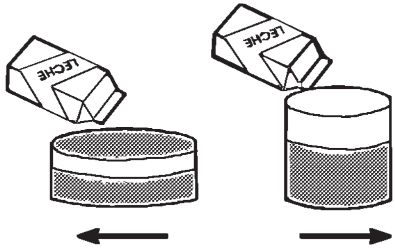


Figura 8

La formación de los conocimientos y de las habilidades matemáticas generales, se realizaba con ayuda de tareas para el establecimiento de la correspondencia mutua de los elementos y para la medición de las magnitudes. Estos ejemplos no se presentan en este capítulo, debido a que, por un lado, muchos de éstos tienen poca diferencia con las tareas utilizadas en la práctica de la enseñanza, y por otro lado, están descritas detalladamente en nuestras publicaciones.

Pondremos un solo ejemplo de la tarea de comparación de dos grupos de objetos de acuerdo a diferentes características, incluyendo la comparación de cantidades de elementos de diversos conjuntos y su igualación posterior.

Se tienen que comparar dos grupos de globos y anotar los signos de las características de acuerdo a las cuales se parecen (junto con el signo =) y de acuerdo a las cuales éstos se diferencian (junto con el signo ≠). ¿De acuerdo a qué características se pueden igualar estos grupos y cómo se puede hacer? (Figura 9).

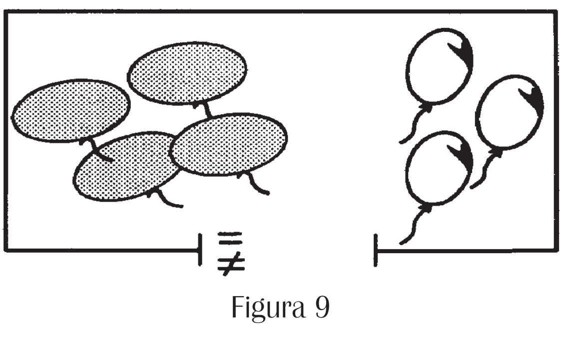


Figura 9

Conjuntamente con las exigencias que se refieren al trabajo, con cada uno de los componentes, la organización del proceso de asimilación de los conocimientos se somete a los principios generales –que queremos mostrar con el material– de la formación de conocimientos y de habilidades en la parte básica del curso.

El proceso de asimilación del contenido del curso, se apoya en la teoría psicológica de la formación de conocimientos y de habilidades por etapas. De acuerdo a esta teoría, la asimilación de conocimientos nuevos tiene que iniciar, con la organización de la actividad objetal con objetos reales o con sus sustitutos; posteriormente, es necesario pasar esta actividad a nivel intelectual, a través de la utilización de signos y símbolos. Además, se dirige gran atención al desarrollo del lenguaje del niño; con este objetivo se utiliza ampliamente el trabajo grupal. Mostraremos la organización de la actividad objetal con la formación del concepto de número y de las operaciones aritméticas. Las exigencias de la materialización de la acción se realizan de tal forma que, la asimilación de todos los conocimientos matemáticos se efectúa a través de las acciones con los objetos reales o con sus modelos. Así, durante la asimilación del principio decimal, de la estructura del número, de las operaciones de adición y de sustracción y de otros conocimientos, desde la primera hasta la última sesión, los alumnos trabajan con material concreto en la red de posiciones de los números.

La red de posiciones de los números siempre está presente en el pizarrón del maestro y, sobre la mesa del alumno durante el trabajo con nuevo material, para la enseñanza del sistema de numeración. En la red de posiciones de los números se trabaja con todas las posiciones básicas relacionadas con la numeración y con la asimilación de las operaciones aritméticas. Se presta especial atención al trabajo con objetos reales en la red de posiciones de los números y, al paso de una medida a otra, lo cual necesariamente se acompaña por la escritura de las cifras. De acuerdo a nuestra opinión, el ábaco, que se recomienda en los manuales didácticos para la explicación del principio decimal con la utilización de diferentes símbolos, para la representación de las unidades de cada clase (por ejemplo círculos de diferentes colores), es más útil en las etapas posteriores de la enseñanza debido a que, los símbolos no descubren el significado de las interrelaciones entre las clases de números y del paso de una fila a otra fila; cada fila utiliza sus propios símbolos. El ábaco se puede utilizar efectivamente sólo durante la etapa posterior. Las tareas para la estructura de los números, para la transformación y la división de las medidas, etc., durante mucho tiempo se han ejecutado sólo con apoyos materializados. Nosotros prestamos gran atención al trabajo con el principio decimal y, así garantizamos la asimilación consciente de las operaciones de adición y de sustracción, con el paso por las clases (filas) de números. Con el estudio de este tipo de operaciones se inicia la enseñanza de las operaciones matemáticas. Sólo así se pueden formar los hábitos completos del cálculo: cuando los alumnos comprenden el principio de la estructura del número y de las interrelaciones entre las clases de números.

La forma materializada de la acción se facilita de manera significativa durante el proceso de asimilación. Esta forma descubre la lógica y el contenido de la acción. Todas las condiciones se manifiestan en el plano externo, el alumno no necesita guardar en su interior el objeto y el sistema de operaciones; no es necesario memorizar previamente la acción para su posterior ejecución. Así, durante la adición y la sustracción de números con el paso por la clase, el sumando o el sustraendo se dividen en sus componentes de manera concreta. Estos componentes corresponden a la secuencia posterior de las operaciones. Todo esto se fija en forma material hasta que desaparecen las dificultades relacionadas con el paso por las clases.

Por ejemplo:

$$25 - \underbrace{7}_{5\ \ 2} = \qquad\qquad 36 + \underbrace{8}_{4\ \ 4} =$$

En este caso, el "7" se divide en el componente "5", que corresponde a la primera operación intermedia, y en el componente "2", que corresponde a la segunda operación intermedia.

Posteriormente, algunas operaciones intermedias ya no requieren de la fijación material; por ejemplo, en este caso, el "8" ya no es necesario dividirlo en sus componentes y anotarlo. Esta operación ya puede realizarse sin apoyos externos y gradualmente se eliminan la fijación material de todas las operaciones intermedias. Pero para algunos alumnos todavía se conserva el hábito de subrayar las mismas clases de números en los componentes de la operación.

Por ejemplo:

$$\underline{\underline{3}}\,\underline{2} + \underline{\underline{2}}\,\underline{7} =$$

Este hábito de subrayar, conjuntamente con la regla (“la operación se puede realizar sólo con números obtenidos a través de la misma medida”), constituye el medio que facilita las operaciones de acción o de sustracción.

Una de las exigencias de la teoría de la formación de las acciones intelectuales por etapas, es el carácter desplegado de la acción durante sus primeras etapas, en correspondencia con el nivel de preparación de los alumnos.

Los estudios acerca de la formación de las acciones mentales mostraron que, en cualquier tarea se puede identificar y presentar a los alumnos, el sistema de las condiciones que garantizan de inmediato la ejecución correcta de la tarea. Estas condiciones consisten en lo siguiente: los alumnos, además del modelo de la acción, obtienen también las orientaciones que garantizan la ejecución correcta de la tarea. Además, si durante la ejecución el alumno comete errores esto significa que, alguna parte de las condiciones, no se incluyó en el sistema de orientaciones.

Con este objetivo, es necesario dividir la acción en las operaciones que sean necesarias para que, el alumno ejecute la acción de manera independiente, después de la explicación del maestro. Este carácter desplegado prolonga el tiempo de la enseñanza sólo durante las primeras etapas, pero, el aprendizaje se convierte en un proceso consciente y con sentido, debido a que descubre la lógica objetiva del proceso. Durante las primeras etapas de la enseñanza, es necesario cuidar la asimilación consciente del material, desplegando al máximo todo el proceso. Así por ejemplo, el cálculo, en grupos, normalmente se realiza con una denominación secuencial de los números: 0, 3, 6, 9, etc., lo cual ya constituye el resultado de una operación perfeccionada; en nuestro programa, el trabajo con el cálculo en grupos se realiza a través de las operaciones: 0, 3... ¿Cómo se obtuvo el 3? (0 + 3 = 3), y lo mismo en el orden inverso: 9, 6... ¿Cómo se obtuvo el 6? (9 – 3 = 6), etc.

El trabajo con el cálculo en grupos se realiza no verbalmente, sino con el modelo de la serie de números. De acuerdo a la asimilación, el cálculo en grupos pasa a nivel oral, pero, inicialmente, con la conservación de las operaciones aritméticas desplegadas como la base para obtención de cada número posterior. Después, el cálculo se realiza de manera reducida. El regreso posterior a las operaciones aritméticas tiene un carácter de control. En nuestro programa experimental, la sustracción, con el paso por la clase se realiza a través de la ejecución de todas las operaciones intermedias y, a través de su fijación material: la resta de las unidades libres, la ocupación de la clase posterior (“lo que se lleva”), su paso y división de la unidad en las unidades de la clase correspondiente, la resta de las unidades restantes, etc.

Por ejemplo:

$$\begin{array}{rrrr} & & \dot{10} & 10 \\ & \dot{3} & 0 & 7 \\ - & 1 & 6 & 9 \\ \hline \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{rrrr} & & 14 & 15 \\ & \dot{4} & \dot{5} & 5 \\ - & 2 & 7 & 8 \\ \hline \end{array}$$

Esta fijación de todas las operaciones intermedias ayuda a comprender el principio de la operación, facilita la realización de estas operaciones y permite, no guardar en la memoria, todos los datos numerales sino tenerlos ante los ojos.
Durante la asimilación del material, las operaciones intermedias dejan de fijarse y sólo se pronuncian (se denominan). Gradualmente también se elimina esta pronunciación y, la operación, reduciéndose, adquiere un carácter cada vez

más intelectual. Así, posteriormente, no se debe realizar el cálculo en grupos de manera tan desplegada ni realizar las operaciones de adición y de sustracción dividiéndolas en todas sus operaciones intermedias. Gradualmente las operaciones intermedias desaparecen.

Durante el trabajo para la asimilación de los conceptos por etapas, es necesario considerar lo siguiente: no se puede automatizar la acción durante las etapas intermedias de su asimilación, de otra forma puede surgir una fijación indeseable de la acción en el nivel más inferior. Por ejemplo, puede fijarse el cálculo a través de palitos (etapa de la acción materializada). Es necesario pasar al alumno al siguiente nivel del aprendizaje en el momento, cuando la acción durante la etapa dada, se realiza fácil y rápidamente, aunque no haya llegado hasta su automatización.

3. Resultados de la enseñanza

Durante muchos años se verificaron experimentalmente diferentes variantes de este programa en las escuelas de las ciudades de Moscú, Izhevsk, Simferopol, Kolomna, etc. Durante los últimos años, el curso propedéutico se aplica ampliamente, en los últimos años de jardines de niños en las ciudades de Moscú, Simferopol, Kolomna.

La aplicación constante del programa en la enseñanza de las matemáticas ha mostrado su alta efectividad.

El curso propedéutico de lógica, durante el primer año de la enseñanza escolar permite a los alumnos, no solamente ejecutar correctamente las tareas con las operaciones lógicas (seriación, clasificación y conservación de la magnitud y de la cantidad), explicando los criterios identificados, sino también, ejecutar correctamente todas las tareas relacionadas con el concepto de número y con las diferentes bases de los sistemas de numeración.

La realización del curso propedéutico de los símbolos en la enseñanza, mostró que los niños se forman los conocimientos matemáticos completos, con la división exacta del plano del contenido y de la forma de su representación y, con las habilidades para operar con signos y símbolos, para expresar el mismo contenido a través de diferentes medios, es decir, se forman los conocimientos polimodales orientados hacia el sentido y no hacia los aspectos formales. Se puede considerar como resultado importante el hecho de que, además de los conocimientos matemáticos, los niños adquieren la habilidad para determinar, independientemente, el sentido de la tarea y organizar la actividad de su ejecución. Se observaron buenos efectos en el desarrollo intelectual, pero sobre todo, en los siguientes aspectos: en la creatividad, en el plano de las acciones internas y, en la formación de los intereses cognoscitivos.

En el curso de matemáticas básicas, la introducción de los símbolos y el trabajo constante con el aspecto de la "realidad y los símbolos que la determinan", fueron indispensables para la formación de los conceptos completos y para la división del plano del contenido y del plano de su representación, debido a que en las matemáticas, a partir de las primeras etapas de su enseñanza, los símbolos se utilizan ampliamente. El curso propedéutico de los símbolos y el trabajo con las regularidades semióticas, posteriormente proporcionan grandes posibilidades para la aplicación independiente de los símbolos y, para descubrir la realidad y las relaciones matemáticas que se encuentran detrás de los símbolos.

La realización del curso básico mostró que el programa dado forma en los alumnos buenos niveles, tanto en lo referente a los conocimientos teóricos, como a las técnicas del cálculo. Los alumnos asimilan correctamente las interrelaciones entre las clases de los números, el paso de los números a través de las clases y su representación en las unidades de las diferentes clases. Ellos pueden determinar, tanto en forma oral como escrita, la estructura de cualquier número señalando sus clases y sus unidades. El trabajo se realiza correctamente con las operaciones de la adición y de la sustracción, con y sin el paso a través de las clases, con cualquier número de manera oral y escrita.

Se establecen las dependencias entre los componentes en forma generalizada. Además, los alumnos pueden encontrar no solamente los componentes, sino también, los cambios de los resultados de la operación en dependencia de los cambios de los datos (de las condiciones). Los alumnos operan libremente con las fórmulas y las letras; como se observó, para ellos no tiene significado especial, la forma (letras o números) en la cual se tiene que representar una u otra dependencia.

Además de los hábitos del cálculo cuyos indicadores son las operaciones con los números de cualquier clase, en los alumnos, se forma la aproximación matemática a la determinación de las relaciones cuantitativas reales. Debido a que las bases de la enseñanza son las operaciones con cantidades reales y con los símbolos o los esquemas, los alumnos siempre pueden realizar el paso hacia cualquier dirección: de los números hacia los objetos reales (reproducir la situación objetal que corresponde a las representaciones escritas y, a la inversa: expresar la situación concreta a través de la fórmula con letras o con números). Las habilidades para determinar verbalmente el medio elegido de la resolución, constituyen el indicador de alto nivel de la asimilación consciente.

Finalmente, quisiéramos dirigir la atención a la relación de alumnos con el proceso de enseñanza, al interés hacia el proceso de su aprendizaje. En su tiempo, A. I. Markushevich, analizando las causas de las dificultades para la asimilación de las matemáticas señaló que, lo más importante es la imperfección de la organización misma del trabajo de la enseñanza y de la educación: "movilizar el interés de los alumnos significa resolver _ partes del problema". El problema de la organización del interés de los alumnos no es causal. El proceso de aprendizaje posee un carácter aburrido y poco interesante para los alumnos debido a: la selección de tareas homogéneas, la utilización de material invariable, el reforzamiento de una memorización mecánica y la pérdida de tiempo para la memorización de las tablas de la suma, de la multiplicación, de la división, etc. Sabemos que durante todo el primer año de primaria, los escolares solucionan ejemplos con operaciones que no rebasan el número 20; pero debemos señalar que este año es muy importante para la formación de las actitudes hacia los estudios, debido a que los alumnos se enfrentan, por primera vez, a nuevas formas de actividades y como lo muestra la práctica, estas primeras impresiones juegan un papel determinante.
Las diferencias observadas en los conocimientos de los niños que ingresan a la primaria (algunos no pueden asimilar los nombres de las cifras, mientras

que otros pueden calcular fácilmente no sólo usando hasta el número 20 sino, incluso, hasta el número 100 realizando operaciones de adición y de sustracción), así como el sistema de enseñanza prevaleciente, decrementan el interés hacia el aprendizaje en la gran mayoría de los alumnos. Por ello es que en los trabajos didácticos se presta especial atención a la organización de la actividad de los escolares.

La realización del programa descrito en la práctica de la enseñanza mostró que, en los alumnos surgen intereses estables hacia la ejecución de las tareas. La estructura de la enseñanza, a través de la introducción de los principios generales, conduce a la asimilación consciente del material. La presentación de diferentes tareas (y no de ejemplos invariables) a los alumnos despierta su interés para la solución de las mismas debido a que, cada vez, se requiere de nuevos medios para su resolución.

La participación activa de los alumnos durante las sesiones, la alta productividad de su trabajo, la creación independiente de diversas tareas fuera de la escuela (en casa o en grupos sin participación del maestro), demuestran la aparición de los intereses cognoscitivos hacia las matemáticas.

La estructura de esta materia escolar y la organización de su proceso de enseñanza, determinan la motivación hacia el aprendizaje (ya sea que surja la necesidad para la organización constante de la motivación de los alumnos o, que surja un interés estable, hacia el aprendizaje).

De esta forma los resultados de la enseñanza, de acuerdo al programa descrito, proporcionan bases para considerar que, ya durante la etapa inicial de la enseñanza, se pueden introducir los conceptos matemáticos en correspondencia con la lógica y garantizar así la asimilación a través de la organización de la actividad de los escolares por etapas. Así se establece la posibilidad de superar la ruptura entre la escuela primaria y la enseñanza escolar posterior. El cambio del proceso de enseñanza, no solamente incrementa la cantidad de los resultados de la misma sino que, también cambia la propia relación de los escolares hacia los estudios, creando un interés estable para la materia escolar.

4. Programa de enseñanza de las matemáticas (Escuela primaria I-IV) Primer año (170 horas, 5 horas semanales)

I. Identificación de las características de los objetos y su codificación
La descripción de los objetos de acuerdo al conjunto de sus características y su fijación en los símbolos. La comparación de los objetos de acuerdo a sus características. La identificación de las características esenciales y no esenciales. La codificación (decodificación) de operaciones con características (negación de características, cambio de características, establecimiento de la secuencia de las operaciones).

II. Relaciones entre los objetos y entre los conjuntos de objetos
El establecimiento de las relaciones de equivalencia entre los objetos y los conjuntos de objetos (según una o varias características): las características cualitativas (tener la misma forma, color, etc.), las relaciones "igual", "desigual", "más", "menos". El establecimiento de las relaciones de equivalencia entre los números (3 = 2 + 1). La orientación en la matriz. La determinación de la posición del objeto en la matriz.

La construcción de cadenas consecutivas de relaciones entre los objetos. El establecimiento de relaciones de orden entre los números.

III. La correlación de los elementos de los conjuntos como uno de los medios para el establecimiento de la equivalencia
La correlación de los elementos de los conjuntos; la operación de la ordenación de los elementos de diferentes conjuntos para la determinación de las correlaciones y de su secuencia. La comparación de los conjuntos; el establecimiento de su equivalencia con la formulación de los resultados de la comparación: "tanto como", "más - menos", "tantas veces más – menos". La utilización de señales como sustituto de los elementos de los conjuntos para la comparación de éstos según las cantidades: la comprensión de la señal como el elemento sustituto del conjunto; el cambio de cada elemento por la señal; el establecimiento de correlaciones mutuas entre las señales de diferentes conjuntos; la comparación de las series de señales; la formulación de los resultados de la comparación

de los conjuntos reales sobre la base de la correlación de las señales y de la comparación de las series. La igualación de las cantidades de los elementos de los diferentes conjuntos a través de 2 medios: eliminación de los elementos sobrantes de los conjuntos grandes y suma de los elementos faltantes en los conjuntos pequeños. El complemento de los conjuntos: encontrar los objetos correspondientes de acuerdo a diferentes características (función, etc.) en diferentes conjuntos.

IV. Seriación

La identificación de la característica (una o más) durante los cambios de sus características en la serie de los objetos o de las figuras. La construcción de las series de objetos de acuerdo a su característica cambiante. La construcción de la figura en correspondencia con el principio identificado de los cambios seriales de la figura.

V. Clasificación

Habilidad para formar clases de objetos; la identificación de la base para la formación de grupos; establecimiento del concepto generalizado para los grupos de objetos y la determinación de éste con un símbolo; la identificación de las características esenciales y no esenciales de los objetos y de la base para la clasificación; cambio de las bases para la agrupación, es decir, la formación de diferentes clases de los mismos objetos; la clasificación dicotómica, la negación del concepto; la clasificación de acuerdo a dos o más características; la limitación del concepto y la generalización del concepto.

VI. Medición de magnitudes

La elección de la magnitud para la medición; la elección de la medida correspondiente a la magnitud que se mide: el carácter adecuado (que se puede medir con qué), la comodidad; el proceso de medición (exactitud, finalidad de la acción, la obtención del resultado con lo restante, sin lo restante); la comprensión de que la señal es el sustituto de un paso de la medición; el conjunto de señales es el sustituto de la magnitud que se mide, es decir, el número. La comparación de magnitudes: qué magnitudes se pueden comparar; ante la medida se puede realizar la comparación. La comprensión de la imposibilidad de comparación de los resultados obtenidos, a través de la medición con medidas diferentes ante diferentes cantidades de señales; el método de comparación a través de la correlación mutua de las señales. La dependencia entre la magnitud, la medida y la cantidad de señales obtenidas como resultado de la medición: durante la medición de la misma magnitud a través de diferentes medidas, hay más señales donde la medida fue menor; durante la medición de la misma magnitud a través de diferentes medidas, la medida es mayor donde hay menos señales; si durante la medición de diferentes magnitudes, a través de diferentes medidas, se obtuvo la misma cantidad de señales, entonces la magnitud será mayor donde sea mayor la medida. La introducción del número 1 como la relación de la magnitud con la medida; el cero como el inicio de la medición.

VII. Sistemas de numeración
La identificación de la medida para el cálculo. La formación de grupos de objetos, en correspondencia con la medida y la escritura del número obtenido en la red de las posiciones de los números. La agrupación en correspondencia con la medida. La identificación de la cantidad de cifras en el sistema. La determinación del sistema de numeración de acuerdo a sus componentes estructurales.

Segundo año (170 horas, 5 horas semanales)

I. Relaciones lógicas entre los objetos y los conjuntos

1) La descripción de objetos según el conjunto de características y su fijación en símbolos. La comparación de objetos según sus características. La identificación de las características esenciales y no esenciales. La codificación (decodificación) de operaciones con características: la negación de la característica, el cambio de la característica y la secuencia de operaciones.

2) La comprensión y la utilización de axiomas:
   a) si $A = B$, entonces $B = A$
   b) si $A = B$ y $B = C$, entonces $A = C$
   c) si $A > B$, entonces $B < A$
   d) si $A > B$ y $B > C$, entonces $A > C$.

3) La resolución de problemas relacionados con la inclusión de clases, la exclusión

de los elementos no relacionados con la clase; la mezcla de clases. La resolución de problemas sobre seriación y clasificación simultánea. El paso de unos medios representativos a otros (esquemas). La comparación de números durante la agrupación de cantidades iguales de objetos a través de medidas diferentes.

II. El número

1. El cero como característica del conjunto vacío. La regla de la formación de la serie de los números naturales (n ± 1). El número anterior y posterior. La construcción de cualquier número anterior y posterior en forma general. La adición y la sustracción (con la utilización del 0 : 0 ± número, número ± 0).

La formación de los números del 4 al 10 (de acuerdo a la regla n ± 1). El establecimiento de las relaciones entre el número nuevo y el número conocido. El cálculo ordinal y cardinal directo e inverso de cualquier miembro intermedio de la serie.

Características de la serie de números. El segmento de la unidad (medida). Los números del cero al infinito (semi-recta).

La estructura del número (a través de la adición y de la sustracción, oral y escrita). La multiplicación y la división hasta el número aprendido.

Las leyes aritméticas (cambios y combinaciones) de la adición y de la multiplicación. La independencia de los resultados del cálculo de los objetos del orden del conteo. El cálculo por unidades y por grupos (de 2, de 3, de 4, de 5). El concepto de número: pares e impares. La correlación entre la magnitud, la medida y el número. La dependencia del número de la magnitud, de lo que se mide y de la medida del cálculo. La determinación de la cantidad de acuerdo al número y a la medida.

2. La ley de la formación de la posición del número en cualquier sistema de numeración. Las correlaciones entre las posiciones de los números. La construcción de la red de posiciones de los números, en correspondencia con la medida elegida y, la escritura del número. La reconstrucción del número de acuerdo a su escritura en la red de posiciones, tanto por las medidas de los grupos, como por elementos aislados.

El principio del sistema decimal de numeración. La necesidad de introducir una medida mayor. La decena como una nueva medida del cálculo.

El significado de la posición de la cifra y la introducción de la red de posiciones (concepto de la posición de la cifra). El número, la cifra y la medida (las centenas y las decenas como denominaciones de las diferentes medidas). La explicación de la denominación de los “números de dos y de tres cifras”.

3. La adición y la sustracción. La escritura lineal. La denominación de los componentes de la adición y de la sustracción. La adición y la sustracción oral de números de dos cifras. Los métodos para la realización del cálculo oral (durante el paso de las decenas). La utilización de las leyes aritméticas (cambios y combinaciones) de la adición. La adición y la sustracción con el paso, a través de la clase (posición), con números de dos o más cifras.

La identificación de uno de los sumandos a partir del resultado y, del otro sumando. La representación de la dependencia entre los componentes de la adición en forma general. La determinación del minuendo a partir del sustraendo y del resultado y, del sustraendo a partir del minuendo y del resultado. La representación de la dependencia entre los componentes de la sustracción en forma general. El cambio de los resultados de las operaciones en dependencia de los cambios de los datos.

La adición y la sustracción escritas. Los casos de la adición y de la sustracción. La adición y la sustracción de números denominados y representados a través de las medidas métricas.

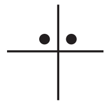
III. Problemas
La reconstrucción de la situación objetal. El análisis de los textos. La identificación de los componentes del problema. El establecimiento de las relaciones entre los componentes del problema.

IV. El curso propedéutico de geometría
1. La identificación de las relaciones espaciales entre los objetos y la orientación en el sistema de coordenadas:

a) A la izquierda, a la derecha

b) Arriba, abajo

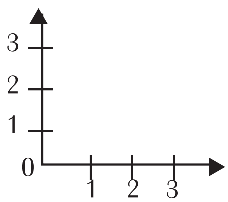
c) La simetría



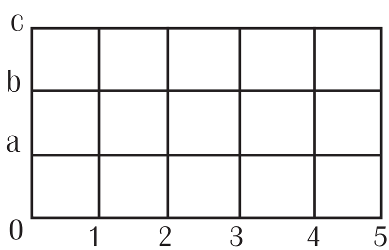
d) La dirección

2. La determinación de la posición:

a) En el sistema de coordenadas



b) En la matriz rectangular



Los movimientos en la matriz y en el sistema de coordenadas (problemas directos e inversos).

3. La línea recta. La longitud del segmento. Las unidades de longitud. Las correlaciones entre las unidades de longitud. La línea quebrada. La longitud de la línea. El triángulo. El perímetro del triángulo. El rectángulo. El polígono. La división de las figuras geométricas en partes. Las figuras formadas de partes iguales.

4. Problemas no estandarizados (el tangram y el pentamimo). Las construcciones de los objetos de acuerdo a los modelos.

Tercer año (170 horas)

I. Las relaciones lógicas entre los objetos y los conjuntos

1. La equivalencia y las relaciones: (=), desigual (≠) (según las diferentes características).

2. Las desigualdades. Las relaciones: más – menos (>, <) según las diferentes características.

3. La simetría entre los elementos de los conjuntos y entre los conjuntos.

4. La transitividad: a) igualdades, b)desigualdades.

5. La utilización de la transitividad y de la simetría durante la solución de problemas verbales (textos) para las relaciones entre los objetos.

6. La seriación y la clasificación en los problemas con textos. La utilización de las operaciones lógicas.

   a) La utilización y la elaboración independiente de los esquemas, de los diagramas y de las gráficas.

   b) La utilización de la teoría de los conjuntos durante la solución de problemas para la identificación de la clase ($\cap$, $\cup$,).

   c) Problemas no estandarizados.

II. El número

1. El número como la relación de la magnitud con la medida. La formación de la serie n. Las características de la serie de número. Los sistemas de numeración.

La identificación de la medida para el cálculo. La formación de los grupos de objetos en correspondencia con la medida y, con la escritura del número obtenido en la red de posiciones. La agrupación en correspondencia con la medida. La identificación de la cantidad de cifras en el sistema y la construcción de la serie de números. El trabajo con la ley de la formación de la clase en cualquier sistema y, con las correlaciones entre las clases.

2. La introducción a la teoría de los conjuntos:
   - La unión,
   - La intersección,
   - La resta,
   - El complemento.

Los ejemplos simples y los problemas para las operaciones con diferentes conjuntos (incluyendo matrices rectangulares).

3. El paso a las decenas. La aproximación. La valoración previa de los resultados de la operación.

4. La adición y la sustracción como el paso de la teoría de los conjuntos a las operaciones con números: a) en el sistema decimal de numeración, b) en otros sistemas de numeración.

5. Las ecuaciones y las desigualdades simples.
   $X + 1 = 3$
   $X < 3$
   $4 < 5 < 6$

6. El establecimiento de las relaciones:
   a) las equivalencias (=, -)
   b) las desigualdades (>, <) entre los números y sus representaciones.

La construcción de la red de posiciones en correspondencia con la medida elaborada y la escritura del número. La reconstrucción de los números según la escritura en la red de posiciones, de acuerdo a la medida de los grupos y de los elementos aislados. La determinación del sistema de numeración de acuerdo a cada uno de sus componentes. La comparación de los números durante la agrupación de cantidades iguales de objetos con diferentes medidas. El paso de la escritura del número, en cualquier sistema, al decimal. La división de grupos de objetos. La adición y la sustracción con el paso por las clases.

La demostración del principio de posición –en el sistema decimal de numeración– con cualquier número. Las clases y las posiciones en el sistema decimal de numeración.

Las reglas de la lectura y de la escritura de cualquier número. Los ejercicios para lectura y la escritura de cualquier número. La estructura del número. El cálculo ordinal y cardinal, directo e inverso a partir de cualquier número. El cálculo por grupos, directo e inverso a partir de cualquier número y, en cualquier clase. La comparación de los números. La división del número en sus componentes. El valor posicional dentro del sistema decimal. La correlación entre las clases como la correlación entre las medidas.

La multiplicación y la división para las unidades con ceros (en 10, 100, 1000, etc.). La regla de la multiplicación y de la división para la unidad con ceros. La multiplicación y la división oral y escrita.

El principio de la multiplicación y de la división. La medida como la base de la multiplicación y de la división. La relación entre la multiplicación y la adición. Las denominaciones de los componentes de las operaciones. La construcción independiente de las tablas de multiplicar y de dividir.

La relación entre los componentes de las operaciones. La determinación de uno de los multiplicandos a partir de otro multiplicando y, del resultado. La identificación del dividendo a partir del divisor y del resultado. La representación de la relación entre los componentes de la multiplicación y, entre los componentes de la división en forma general. Los cambios de los resultados de la multiplicación y, de la división, en dependencia de los cambios de los datos. La representación de estas regularidades en forma general. La división con números decimales (el residuo como la medida incompleta). Las relaciones entre los componentes de la relación.

La multiplicación escrita de números simples por números compuestos; la multiplicación de números compuestos por números compuestos. La división escrita de números simples; la división de números compuestos; la división de números con el residuo.

Las leyes de la multiplicación (los cambios, las combinaciones y la distribución). Su representación en forma general.
La multiplicación y la división oral de centenas y decenas.

III. Problemas
La traducción del texto al idioma matemático. El establecimiento de las relaciones entre los componentes del problema y las secuencias de las operaciones. La composición de las ecuaciones simples. La formación del método general para la solución de problemas. Habilidades para la clasificación de los problemas de acuerdo a la forma de su resolución.

IV. El curso propedéutico de geometría
1. La posición en el sistema de coordenadas y en la matriz rectangular.
2. Los movimientos en el sistema de coordenadas y en la matriz rectangular. El dictado en el sistema de coordenadas.
3. La simetría: axial y central.
4. El coloreado de los planos (el mapa, el volumen).
5. Los problemas no estandarizados.
6. El perímetro de las figuras geométricas. El perímetro de figuras compuestas por partes iguales. La representación de figuras con volumen. Las figuras desplegadas. La construcción del rectángulo a partir de sus lados, del perímetro y de uno de sus lados. La circunferencia, el círculo, el anillo y el óvalo.

Cuarto año (204 horas)

I. Las relaciones lógicas entre los objetos y los conjuntos de objetos

1. El establecimiento de las relaciones: la equivalencia, la desigualdad, la simetría y la transitividad:

1) $a = b$, $b < c$, $c = d$. Comparar d y a.
2) $b < d$, $c = d$, $d < a$. Comparar a y b, etc.

2. La resolución de problemas con textos para el establecimiento de estas relaciones. La fundamentación de la resolución. El señalamiento de las posibles variantes de la resolución. La inclusión de los cambios en las condiciones de los problemas.

La elaboración de los problemas para las relaciones lógicas a partir de datos aislados (dibujos, esquemas, gráficas).

Los problemas para la seriación y la clasificación.

3. Los problemas no estandarizados.

II. El número

1. Los sistemas de numeración.
2. La adición y la sustracción en los diferentes sistemas de numeración. La multiplicación y la división en el sistema decimal de numeración.
3. Las características de la serie de números.
4. Los números negativos.
5. La resolución de las ecuaciones y de las desigualdades ($x + 2 = 1$; $6 < x < 10$; $-5 < x < 2$, $6 - 3 < x < 10$).
6. La igualación ($10 + 4 < 10 + a < 10 + 6$).
7. La aproximación.
8. Los problemas relacionados con la utilización de los conceptos de la teoría de conjuntos.
9. Las fracciones decimales. La medida es menor que la primera clase. Las fracciones decimales como la continuación del sistema de numeración hacia la derecha. El principio unitario de la lectura y de la escritura de los números en el sistema de numeración (incluyendo las fracciones decimales). La lectura

de las fracciones decimales. Las características de las fracciones decimales. La comparación de las fracciones decimales (más, menos). La multiplicación y la división de las fracciones decimales en 10, 100, 1000, etc. La adición y la sustracción de las fracciones decimales. La multiplicación y la división.

10. El sistema métrico de medidas. Las medidas de peso, de longitud, de tiempo, de área y de volumen. Los conceptos temporales: el día, la hora, el minuto, el segundo, el mes, la semana, el año y el siglo.

La división y la transformación de los números.

11. Las fracciones (quebrados). La medida es menor que la primera clase. Las representaciones de las fracciones. El significado del denominador y del numerador. La comparación de las fracciones según sus magnitudes. El cambio de la magnitud de la fracción con el cambio de sus componentes. Las fracciones propias e impropias. Los números mixtos. La transformación de la fracción impropia en el número mixto y la transformación inversa. La transformación del número en la fracción impropia.

Las características básicas de las fracciones. La reducción de las fracciones. La identificación del común denominador menor.

Las operaciones con las fracciones. La adición y la sustracción de las fracciones. La distribución de las características de la adición y de la sustracción en fracciones. La multiplicación y la división de las fracciones. La distribución de las características de la multiplicación y de la división en fracciones. Los números inversos. La sustitución de la división por la multiplicación.

III. Los problemas
La formación del método generalizado para la resolución de los problemas

IV. El curso propedéutico de geometría
1. El sistema de coordenadas. El dictado en el sistema de coordenadas (en cualquier dirección). Las matrices.
2. Los problemas no estandarizados para la construcción.

3. La presentación del área. Las unidades de área. El área del cuadrado y del rectángulo. Las figuras de áreas iguales. El área de las figuras integradas por partes iguales.
4. Las figuras desplegadas.
5. La construcción del rectángulo:

a) A partir del perímetro y de uno de sus lados.
b) A partir del área y de uno de sus lados.

Capítulo 3
La formación de las habilidades generales para la solución de problemas aritméticos

G. Nikola y N.F. Talizina

Durante la elaboración de este estudio nos hemos basado en la comprensión del pensamiento, no como de una función formal preparada que se utiliza para la solución de los problemas aritméticos, sino de un sistema del contenido de los actos de la actividad que se forma durante el proceso de la solución de los problemas correspondientes y que pasa por una serie de etapas que cambian, una a otra, de manera secuencial.

Así como en el caso de los conceptos, durante el análisis de las habilidades generales del pensamiento, es necesario considerar el hecho de que pueden haber dos vías para su asimilación: la vía espontánea y la vía dirigida. En el primer caso, los hábitos del pensamiento no participan como objetos específicos de la asimilación; su formación se da solamente de acuerdo a la asimilación de conocimientos y a la solución de problemas, en las que estos hábitos ocupan el lugar de los medios y, por eso, no tienen carácter consciente. En este caso, el proceso de la formación de los métodos (medios) del pensamiento se prolonga y no siempre conduce a los resultados deseables. Sin embargo, incluso en los casos, en los que se forman estos hábitos del pensamiento, ellos no son suficientemente conscientes, suficientemente generalizados y, en el resultado de lo anterior, son limitados en su aplicación por parte de aquellas condiciones particulares en las cuales ellos surgieron.

Con la segunda vía, las habilidades del pensamiento participan como objetos de la asimilación especial. Debido a la dirección, el proceso de su formación se reduce notablemente en el tiempo y conduce a la asimilación de los medios dados con las cualidades determinadas previamente. Nosotros hemos utilizado precisamente a esta vía.

Finalmente nos hemos apoyado en la posición acerca del hecho de que, la formación exitosa de las acciones, se determina por la calidad de su base orientadora. Los problemas aritméticos atrajeron nuestra atención porque, el contenido de la base orientadora de las acciones que se incluyen en los medios para la solución de dichos problemas, se encuentra fuera de los límites de la aritmética.

La parte de la aritmética que incluye los problemas participa como el área aplicada: el alumno debe describir la situación, utilizada como el tema del problema a través del idioma de las matemáticas. El puede hacer esto únicamente en el caso de que sea capaz de identificar en el problema (ejemplo) los elementos básicos y comprender sus relaciones. Las particularidades específicas de la situación, descrita en el problema, necesitan participar para el alumno en calidad de base orientadora que determina la vía de la solución del problema.

Así, entre los problemas aritméticos, ocupan un gran lugar aquellos cuyo tema es el de “compra - venta”. Para poder solucionar exitosamente los problemas de este tipo, hay que comprender: qué es precio, valor, las relaciones entre precio, valor y la cantidad de productos. Enseñándoles a los alumnos cómo solucionar los problemas el maestro, normalmente, presupone que ellos tengan alguna experiencia cotidiana y, no dirige la atención especial, al análisis de aquella situación objetal que se tiene que modelar y traducir en el idioma de las matemáticas.

Si para los problemas cuyo tema es “compra - venta”, la experiencia cotidiana de los alumnos resulta ser más o menos suficiente, esto no se puede decir acerca de aquellos problemas cuyo tema es “albercas”, “trabajo”, “movimientos”, etc. Muchos de estos tipos de problemas se estudian en la escuela como tipos independientes. Además, la atención básica de los alumnos se dirige hacia el sistema de las operaciones ejecutivas. El análisis de las situaciones, incluso si tiene lugar, se da únicamente en aquel tipo demasiado concreto que se observa en las condiciones del ejemplo dado: los alimentos que se gastaron durante un día; la distancia que atravesó el peatón durante una hora, el agua que se gastó durante un minuto, etc. Con esto, de manera indirecta, se supone que los alumnos comprenden, qué es la velocidad, el tiempo y qué tipo de relaciones existen entre estas magnitudes. Por primera vez, los alumnos se encuentran con el estudio de los elementos básicos de un proceso y de las relaciones entre ellos en el curso de física y, además, en el tipo particular para el estudio del movimiento. Sin embargo, en la aritmética, los problemas que incluyen procesos se solucionan mucho antes y éstos se relacionan no únicamente con el movimiento, sino también, con procesos muy diferentes.

Considerando todo lo anterior y comprendiendo el significado de la base orientadora de las acciones, nosotros hemos llegado a la conclusión de que la causa básica de las dificultades que, normalmente, surgen en los alumnos durante la solución de los problemas para los "procesos" consiste, no en la parte ejecutora aritmética de la acción, sino en la parte orientadora, es decir, en el contenido que se encuentra fuera de la aritmética.

Debido a esto en nuestro estudio, dirigido a la búsqueda y a la formación posterior de los métodos generales para la solución de los problemas que incluyen a los "procesos", en el centro de la atención, se encontró la base orientadora de las acciones que conforman la habilidad dada.

El primer objetivo del estudio era establecer el contenido y la estructura de la base orientadora de las acciones.

Para ello, inicialmente era necesario identificar todos los elementos que se incluyen en ella y, posteriormente, analizar sus relaciones y solamente sobre esta base construir el modelo del método en general.

Debido a que, la formación del método de partida para la solución de problemas se planeaba con la utilización de la base orientadora del tercer tipo, entonces era necesario encontrar aquellos elementos, aquellas "unidades estructurales" que constituyen la esencia de cualquier problema del tipo dado.

Analizando el contenido de los problemas aritméticos que se relacionan con diferentes procesos (trabajo, movimiento, gasto de energía, llenar y vaciar las albercas, etc.), así como los métodos particulares para su solución, nosotros vimos la generalidad de su base orientadora. Se encontró que más de 30 variedades de problemas, que se diferencian uno del otro a través de sus temas y del sistema operacional de la parte ejecutora del problema, requieren para su solución, la orientación en aquellas magnitudes y relaciones que caracterizan cualquier proceso: velocidad del proceso (V), tiempo de su transcurso (T) y el producto –el resultado al cual conduce este proceso o el cual el proceso destruye– (S). Además, la solución exitosa de los problemas de esta clase presupone la comprensión de las relaciones que existen entre estas magnitudes, tanto en las condiciones de un solo participante en el proceso, como en las condiciones de varios participantes. Así, el alumno debe comprender que la magnitud del producto existe en la proporción directa a la velocidad y al tiempo del proceso; el tiempo, necesario para la obtención del producto dado, tiene la proporción directa a la magnitud del producto y la proporción inversa a la velocidad, etc. Posteriormente, el alumno debe de comprender que, de acuerdo a dos de estos elementos, él siempre puede obtener el tercer elemento. Finalmente, si el producto lo forman varios participantes, entonces, en este caso, aparece un sistema nuevo de las relaciones: las relaciones entre los significados particulares y generales de las magnitudes que se determinan por el carácter de la participación de diferentes fuerzas. Es importante comprender, si los participantes ayudan uno al otro o actúan uno en contra del otro; si ellos participan en el proceso simultáneamente o no, etc.

Por ejemplo, la velocidad general del proceso (Vo) participa no solamente como la función del tiempo general (To) y del producto (resultado) general de este proceso (So), sino también, como la función de las velocidades de diferentes participantes: $V_0 = V_1 \pm V_2 \pm \ldots \pm V_i$.

Los elementos señalados y sus relaciones conforman la esencia de todos los problemas mencionados, por eso, la consideración de todos estos problemas como de tipos aislados no tiene ninguna razón. Así, por ejemplo, los problemas con los temas de “el movimiento hacia el encuentro”, “las albercas”, “el trabajo” y muchos otros constituyen sólo los casos particulares de las situaciones de las “acciones conjuntas”.

En realidad, comparemos los problemas (ejemplos) siguientes:

Ejemplo 1. En un rancho[4], para la alimentación de vacas y caballos prepararon 240 000 kilos de heno. ¿Para cuántos días va a alcanzar el heno, si en un día se gastan 800 kilos de heno para los caballos y 400 kilos de heno para las vacas?

Ejemplo 2. Entre dos ciudades la distancia es de 760 km., simultáneamente salen dos trenes hacia su encuentro, uno con la velocidad de 50 km. por hora y el otro de 45 km. por hora. En qué tiempo se van encontrar los trenes?.

Ejemplo 3. Dos obreros, que trabajan simultáneamente, necesitan hacer 120 detalles. En qué tiempo ellos van a terminar con el trabajo, si uno de ellos hace 7 detalles en una hora y el otro hace 5 detalles en una hora?

Ejemplo 4. Simultáneamente abrieron 3 llaves, de cada una de ellas salen 150 litros de petróleo en una hora. Después de qué tiempo se deben cerrar las llaves si es necesario acumular 1350 litros de petróleo.

En todos estos problemas se necesita encontrar el tiempo (T) del transcurso de algún proceso: de gasto de heno, tiempo del paso por la distancia, de ejecución del trabajo, etc., en la situación de la "acción conjunta".

El tiempo (T) es la función del "producto general" (So) y la suma de las velocidades de los participantes ($V_1 + V_2 + ... +V_i$). El carácter de la dependencia funcional es el mismo en todos los problemas y, debido a esto, ellos tienen el mismo método para su solución.

Debido a que el método de la solución del problema se determina por el carácter de las relaciones funcionales descritas en el problema, la solución exitosa de los problemas para los "procesos" presupone la asimilación de los conceptos básicos que se relacionan con el proceso y, de sus relaciones funcionales.

4 En el texto original en ruso se utiliza la palabra koljoz lo cual significa la economía colectiva. Durante el régimen socialista, el koljoz era la forma básica de las economías agrícolas. Actualmente, se puede decir, que koljoz ya no existe en Rusia. El traductor utilizó la palabra más frecuente en español para la economía agrícola, que es "rancho". (Nota del traductor).

Después de la asimilación de estos conceptos y sus relaciones, los alumnos deben asimilar el método general del análisis, que permite establecer el sistema de las magnitudes y de las relaciones entre ellas, en las condiciones del problema concreto para los "procesos".

De esta forma, considerando la enseñanza de la solución de los problemas como la formación del tipo determinado de la actividad intelectual en los alumnos, nosotros hemos llegado a la conclusión de que es necesario poner en el centro de la atención de los escolares, la base orientadora de esta actividad. El alumno, al asimilar los elementos básicos que forman la base orientadora, sus relaciones y el método de elaboración de un problema en las condiciones concretas, podrá solucionar independientemente cualquier problema de la clase dada. Simultáneamente, esto significa que, en la base de la clasificación de los problemas aritméticos, es necesario colocar no el tema del ejemplo (problemas para las "albercas", para el "trabajo", etc.) y, no el sistema concreto de las operaciones aritméticas que se utilizan para la solución del problema sino, el contenido y la estructura de la base orientadora de los escolares que se necesita para la solución del problema.

Entonces, la velocidad del proceso, su tiempo y su "producto" hacia el cual conduce el proceso o el cual destruye el proceso, así como las relaciones funcionales entre estas magnitudes en la situación de la acción aislada o conjunta, precisamente constituyeron el contenido de la primera parte de nuestro programa de enseñanza. La segunda parte era el método general para el análisis de estas magnitudes y, de las relaciones entre ellas en las condiciones de cualquier problema concreto del tipo dado (problemas que incluyen "procesos").
Además de las series de la enseñanza, se realizaron también las series de constatación y de control.

I. Experimento de constatación

Se seleccionaron 20 alumnos de los grados 3º y 4º de las escuelas oficiales que tenían dificultades para el aprendizaje de la aritmética. Casi todos ellos tenían la relación negativa con la solución de problemas aritméticos.

El objetivo, de la serie del experimento de constatación, consistía en el establecimiento del nivel de partida de los conocimientos y de las habilidades necesarias para la asimilación del método general de la solución de problemas para los "procesos". Se verificaron los siguientes conceptos y habilidades:

1. El concepto de velocidad, los medios para su determinación y las unidades de su medición.
2. El concepto de tiempo del proceso y las habilidades para diferenciar el intervalo de tiempo, del momento del tiempo.
3. El concepto de "producto" (resultado) del proceso y las unidades para su medición (con ejemplo de problemas para el "trabajo" y del "movimiento hacia el encuentro").

Los experimentos se realizaron de manera individual.

Ninguno de los escolares pudo descubrir el concepto de la velocidad. Todos ellos daban las respuestas del tipo siguiente: "La velocidad la tienen los carros" o "La velocidad la hay en carros cuando se van".

Para la pregunta, cómo encontrar la velocidad, 15 sujetos de 3º grado contestaron: "No lo hemos visto" o "No nos enseñaron". Los alumnos del 4º grado intentaron contestar, pero dieron respuestas incorrectas.
Pondremos algunos ejemplos de sus respuestas:

Sujeto Sasha G.
Experimentador. ¿Cómo encontrar la velocidad?
Sujeto. Multiplicar por horas.
Experimentador. ¿Multiplicar qué cosa?
Sujeto. El camino.

Sujeto Tolia L.
Experimentador. ¿Cómo encontrar la velocidad?
Sujeto. Con la división.
Experimentador. ¿Qué hay que dividir en qué?
Sujeto. Horas en la velocidad.

Uno de los sujetos contestó a la pregunta señalada del experimentador de manera siguiente: “Los mecanismos muestran”.

Los sujetos no tenían ninguna consideración correcta acerca de las unidades de la medición de la velocidad (“Se mide con el reloj”, “Se mide con los mecanismos”).

Ninguno de los sujetos logró solucionar los problemas simples para la determinación de la velocidad. Un ejemplo de estos problemas: “Durante 30 días se construyó la carretera de 10 kilómetros. Cómo saber, ¿cuántos kilómetros se construyeron durante 1 día?”/ Ninguno de los sujetos solucionó este problema.

La búsqueda de la solución se daba de manera caótica, al azar. Por ejemplo, el sujeto Yura M. (4º grado) solucionaba de la manera siguiente: “Vamos a multiplicar 30 por 10... O mejor. inicialmente, vamos a sumar...”. Los demás actuaban de manera similar.

Los alumnos tampoco poseían el concepto del tiempo del proceso.

Para determinar, si los escolares saben o no diferenciar intervalo de tiempo de momento de tiempo, nosotros les pedíamos que ellos contestaran una serie de preguntas y que solucionaran algunos problemas.

Para la primera pregunta: “¿Cuántas horas duermen Ustedes?”, dos alumnos de 4º grado y un alumno de 3º grado contestaron correctamente, mientras que los demás contestaron de manera incorrecta. Así, uno de los sujetos contestó, que duerme 7 horas. Cuando se le preguntó, por qué él pensaba que dormía 7 horas, él dijo: “A nosotros nos despiertan a las 7”.

A la segunda pregunta: “Cuántas horas pasan de las 12 del día hasta las 9 de la noche?”, la mayoría de los sujetos contestó “3 horas”. Sólo dos alumnos del 3º grado contestaron correctamente a esta pregunta. Los resultados similares se obtuvieron también, en la solución de problemas que requerían la utilización del concepto del tiempo del proceso. Como ejemplo podemos poner la solución del siguiente problema:

“El tren salió con la velocidad de 65 km. por hora a las 6 de la mañana. ¿Qué hora será cuando el tren lleve 650 km. de camino?". Todos los sujetos "solucionaban" a través de multiplicar 65 por 6. Ellos de manera mecánica utilizaron la regla conocida en la enseñanza escolar: "Para encontrar la distancia hay que multiplicar la cantidad de horas por tanto, cuánto "paso en 1 hora". En calidad de la cantidad de horas ellos tomaron el momento de la salida del tren ("a las 6 de la mañana").

Los escolares tampoco poseían el tercer concepto: "producto" (resultado) del proceso. El análisis de los intentos para solucionar estos problemas muestra que, los sujetos no entienden nada de las relaciones entre la velocidad, el tiempo y el resultado ("producto") del proceso. Debido a esto, ellos no saben qué necesitan encontrar para contestar a la pregunta del problema. Entre los ejemplos fáciles había uno más complejo: "De dos ciudades, la distancia entre las cuales es de 800 km., salieron dos trenes hacía el encuentro uno con el otro. Uno de los trenes iba a la velocidad de 60 km. por hora y el otro a 84 km. por hora. ¿Por cuál distancia pasaron los trenes hasta el momento de su encuentro?".

Lo más importante, lo que participó como algo típico durante la solución de este problema, fue que ninguno de los alumnos pudo decir lo que él tiene que saber para poder contestar a la pregunta del problema. Los escolares eran absolutamente incapaces, su búsqueda se redujo a la realización mecánica de todas las operaciones aritméticas con los números presentados en las condiciones del problema: "Vamos a multiplicar 800 por 69... es correcto esto? Entonces, multiplicamos por 84... No, dividimos 800 en 60?" etc.

Este era el caso típico de la búsqueda de la solución a través del "ensayo y error". Por un lado, el experimento de constatar demostró lo correcto de nuestra suposición acerca de que la fuente de las dificultades durante la solución de los problemas para los "procesos" se encuentra, no en la parte ejecutora (aritmética) de la acción sino, en la parte orientadora que incluye el sistema de las magnitudes físicas que caracterizan el proceso y las relaciones entre estas magnitudes.

Por otro lado, el experimento de constatar mostró que en todos nuestros sujetos la habilidad para la solución de problemas para los "procesos", así como el sistema de los conceptos previos, en los que se apoya la base orientadora de este método, no se han formado. De esta forma, todos estos alumnos fueron retomados para el experimento de enseñanza.

II. Experimento de enseñanza

Como se señaló anteriormente, la primera parte del programa de enseñanza incluyó aquel sistema de las condiciones objetivas relacionadas con la situación específica descrita en el problema, sobre los cuales se debe de orientar durante la solución de los problemas aritméticos para los “procesos”. La segunda parte del programa, constituía el método general para la modelación de cualquier situación que se describe en el problema aritmético para los “procesos”. Como de un caso particular del proceso.

De esta forma, nuestra atención se concentró en aquellos conocimientos y habilidades que son necesarios para la utilización adecuada de las operaciones aritméticas y, consecuentemente, para la solución correcta del problema. Las mismas operaciones aritméticas y la secuencia de su aplicación no se incluyeron en el programa, debido a que el contenido de las operaciones aritméticas es conocido para los alumnos de 3º y de 4º grados mientras que para la secuencia de su utilización en los problemas concretos ellos debían determinar de manera independiente. En otras palabras, nuestro programa de la enseñanza se dirigía a la formación del medio generalizado, para la elaboración de la base orientadora del método de la solución del problema. Esto tendría que servir como el apoyo para que los escolares pudieran de manera independiente determinar la parte ejecutora de la solución, que corresponda a las condiciones dadas de un problema concreto. De esta forma los alumnos debían identificar, de manera independiente, el método de la solución que se comprende como la secuencia de las operaciones aritméticas.

La enseñanza se realizaba en el siguiente orden:

1. La formación de los conceptos generalizados acerca de las tres magnitudes básicas que constituyen lo específico de todas las situaciones descritas en los problemas para los “procesos”.

   A. El resultado (“producto”) del transcurso de cualquier proceso (cantidad de productos de labor o la distancia del camino, etc.) o aquello que se tiene que destruir por parte de este proceso (volumen del agua, que tiene que gastar o los alimentos que se tienen que gastar para el ganado, etc..). (A esta magnitud la determinaremos posteriormente como S).

B. El tiempo del transcurso del proceso (T).

C. La velocidad del transcurso del proceso, es decir, aquella parte de S que se obtiene (se destruye) en unidad de tiempo. (A esta magnitud la determinaremos posteriormente como V).

2. La asimilación de las relaciones que existen entre las magnitudes señaladas (cada una de ellas es la función de otras dos).

   A. El resultado de cualquier proceso (S) es la función de tiempo (T) y de la velocidad (V), es decir, $S = V \times T$.

   B. El tiempo del transcurso del proceso depende de la magnitud del producto del proceso y de la velocidad del proceso: $T = S : T$.

   C. La velocidad del transcurso del proceso (V) se determina como $S : T$.

3. La asimilación de las relaciones entre el significado particular (p) y general (g) de cada magnitud. En las situaciones donde actúan varios participantes del proceso, cada magnitud participa no solamente como una función dependiente (f) de otras magnitudes del proceso ($S = f\ (V, T)$ etc.), sino también como la función del significado particular (general) de la misma magnitud: $[So = f\ (Sp); Sp = f(So)]$.

4. La formación del método general para la modelación de cualquier tipo de situación que se describe en los problemas para los “procesos”.

Durante la formación del sistema de los conceptos básicos (S, T y V) en los alumnos y de la organización de la asimilación de las relaciones entre ellos, nosotros estábamos introduciendo sólo aquellas situaciones, en las que había un solo participante en el proceso. Después de esto, los sujetos pasaban al análisis de situaciones con varios participantes. Con estos ejemplos los sujetos asimilaban las relaciones entre los significados particulares y generales de cada una de las magnitudes, así como el método general de la solución de los problemas para los ”procesos”.

En las situaciones de la “acción conjunta”, todas las tres magnitudes señaladas adquieren las características nuevas. Cada una de ellas se tiene que valorar desde el punto de vista del hecho, si ella es :particular” o “general”, es decir, si ella se relaciona con un solo participante o con todos ellos.

De esta forma, en las situaciones de la “acción conjunta”, se daba la ampliación del contenido tanto de las mismas magnitudes básicas, como de sus relaciones funcionales.

El programa de enseñanza se construyó en correspondencia con la teoría de la formación de las acciones mentales por etapas de P.Ya. Galperin. La enseñanza se realizaba de manera individual.

La formación de los conceptos acerca de las magnitudes básicas del proceso y de sus relaciones alcanzaba la forma mental (intelectual). La formación del método de la modelación de las situaciones con problemas, descritas en los ejemplos, se concluía con la forma materializada.

La generalización de todos los conceptos y acciones mencionadas se planeaba dentro de los límites de los procesos con la velocidad constante de su transcurso.

1. La formación de los conceptos acerca de las magnitudes básicas del proceso y de sus relaciones

La formación del concepto tiempo en el transcurso del proceso

La formación del concepto dado incluía los siguientes aspectos: identificación del inicio y del final de la medición del tiempo; la diferenciación del momento del tiempo del intervalo del tiempo; identificación de las unidades de tiempo, como de los intervalos temporales determinados (el tiempo se mide a través de tiempo); la medición de tiempo.

Con el objetivo de la materialización de las acciones de los escolares se utilizaron los modelos espaciales, en las que el tiempo se representaba como parte del segmento de la línea recta. Esto les permitía a los alumnos modelar los intervalos temporales, identificar los números ordinales de las unidades de tiempo, contar su cantidad, etc.

Por ejemplo, representando una hora como el segmento de 1 cm, el experimentador les proponía a los alumnos representar 4 horas, después la primera hora, la segunda hora, la última hora, las primeras dos horas, el inicio de la medición, su final, etc. Estos modelos eran especialmente efectivos para la diferenciación de un intervalo temporal (cantidad de tiempo), tanto del momento del tiempo, como del número ordinal de la unidad de tiempo.

Durante la medición del tiempo se trabajaba de manera especial con los intervalos de tiempo en los pasos por 12 horas del día y por 12 horas de la noche.

Los escolares obtenían las tareas del tipo siguiente: “Representen el tiempo que ustedes duermen”... Este era el periodo de las 9 horas de la noche hasta las 7 horas de la mañana. Los sujetos, aceptando la longitud de un segmento como una hora, representaban de manera secuencial cada hora en el intervalo dado, fijando el inicio, el final de la medición y los límites de cada hora. Después de esto, ellos contaban la cantidad obtenida de las unidades de tiempo. Gradualmente la acción se reducía. Los sujetos representaban el inicio, el paso por 12 horas y el final de la medición. La medición se realizaba, ya no de acuerdo a las unidades aisladas, sino de acuerdo a los intervalos: del inicio del conteo hasta 12 horas y después de 12 horas hasta el final de la medición. Por ejemplo, durante la realización de la tarea: “Determinar cuántas horas pasan de 5 de la mañana hasta 10 de la noche” los alumnos modelaban las condiciones de la tarea de manera siguiente:

Figura 1

Inicialmente el conteo se realizaba de 5 a 12 y después de 12 a 10. Los resultados se sumaban y, el número obtenido se anotaba por debajo del segmento que modelaba el intervalo de tiempo entre 5 horas de la mañana y 10 horas de la noche.

La acción de la medición de tiempo y la habilidad de diferenciar el momento de tiempo y la cantidad de tiempo se asimilaron exitosa y rápidamente, y llegaron hasta la forma verbal. En la forma materializada se realizaron de 6 a 7 tareas (ejercicios); después de esto, los alumnos pasaron a la forma verbal, realizando la tarea en voz alta sin apoyo en los modelos y sin señalar con el dedo o con el lápiz en las unidades de tiempo. La ejecución en la forma verbal se realizaba de manera siguiente.

Sujeto Zhenia K.

Experimentador. ¿Cuántas horas hay de 9 de la mañana hasta 12 del día?

Sujeto. ¿De 9 hasta 12? Aquí no hay paso por las 12. Cuánto falta de 9 a 12... La respuesta es 3 horas.

Experimentador. ¿Cuántas horas son de 7 de la noche hasta 3 de la madrugada?

Sujeto. Aquí tenemos el paso por las 12 de la noche. De 7 hasta 12 tenemos 5 horas, de 12 a 3 tenemos 3 horas, en total son... 5 sumar 3, serán 8 horas.

En la forma verbal se solucionaban de 5 a 6 tareas entre las cuales había ejemplos temáticos, en los cuales el tiempo participaba como el tiempo de transcurso de algún proceso.

La formación posterior del concepto del tiempo se realizaba durante el trabajo con los conceptos "producto de tiempo" (S) y velocidad (V), donde ellos llegaban hasta la forma intelectual (mental).

La formación del concepto acerca del
producto (resultado) del proceso (S) y de la velocidad (V)

Para la materialización del producto (resultado) del proceso se utilizaron los pedazos largos de papel, así como la representación en el tipo de segmentos de la línea recta.

Durante el trabajo con este concepto, la atención de los escolares se dirigía al proceso que conduce a uno u otro resultado (producto), a la diferenciación del proceso mismo y en el tiempo de su transcurso, a la identificación de los participantes del proceso (fuerzas que actúan) y a la identificación de la propiedad del producto y del tiempo que se necesita para su obtención por parte de una u otra fuerza que actúa.

Al obtener la tarea, los escolares modelaban por separado el producto (el resultado) del proceso y el tiempo de su transcurso. Por ejemplo, las condiciones del problema, en el que se trataba de que un equipo construyó 3 edificios durante 21 días, se modelaba en el tipo de dos segmentos de la recta. El segmento superior se determinaba con el símbolo S y el segmento inferior se determinaba con el símbolo T, además este último fue dividido en 21 partes iguales. A los alumnos se les proponía mostrar en los modelos el tiempo de trabajo, su inicio y su final y el resultado de trabajo, etc. Para la identificación del tiempo y del producto que se relacionan con un participante del proceso, los segmentos, que representaban las magnitudes, se unían con flechas. Por ejemplo, si algún producto se obtenía por algún participante del proceso durante la unidad de tiempo, entonces, el alumno representaba el modelo siguiente:

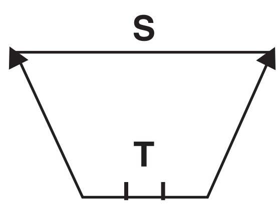


Figura 2

Éste se obtenía en el resultado de las respuestas de los escolares a las siguientes preguntas: 1. ¿Quién actúa? 2. ¿Cuánto él hace? 3. ¿Durante qué tiempo?

Después del trabajo con los aspectos mencionados del “producto del proceso” en la forma materializada, el experimentador pasaba a la formación de concepto de la velocidad del proceso, donde simultáneamente se realizaba la asimilación posterior de los conceptos del “producto” (resultado) y de tiempo del proceso.

Asimismo, durante las primeras etapas, con la ayuda de los modelos se descubría y se asimilaba el concepto de la "velocidad del proceso": se utilizaban los pedazos largos de papel, las representaciones en el tipo de los segmentos de la recta, así como las representaciones condicionales de objetos en el tipo de "circuitos" y de "cruces".

Inicialmente, el concepto de la velocidad se formaba con la utilización de los tipos señalados de representaciones. Sin embargo, se encontró que en el caso dado, este método no era suficientemente efectivo para la modelación, por eso, posteriormente, se utilizaron los pedazos de papel en calidad de modelos. El trabajo con ellos se realizaba en todos los sujetos de aproximadamente la misma manera. Pondremos el ejemplo de trabajo con una de las tareas del sujeto Igor B. Se le presenta la tarea al sujeto:

"El tren avanzó 180 km. durante 3 horas. ¿Cuántos kilómetros hace el tren en una hora?."

El experimentador le propuso al alumno un pedazo estrecho de papel aclarando que éste representa toda la longitud de la distancia y le pidió al alumno que él escribiera "S=180". El sujeto lo escribió.

Experimentador. Dame la velocidad.

Sujeto. (con prisa parte el pedazo de papel en tres partes, tomó uno y anotó sobre éste "V"). ¡Aquí está! ¡Tome Usted!

Experimentador. Es correcto. ¿Cuántos kilómetros señala éste pedazo?

Sujeto. ¿Cuántos kilómetros?. Ahora... en total eran 180 (soluciona por escrito: 180 km.: 3=60 km.)...60 km.

Experimentador. Dime, si tus amigos te piden explicar, qué es la velocidad, ¿cómo vas a contestar?

Sujeto. La velocidad / aquí está (muestra un pedazo de papel) el pedazo de "trabajo"; lo obtenemos con la división de trabajo en las horas... este pedazo se hizo durante una hora. ¿No está claro?

Experimentador. Sí, está claro.

Los escolares muy rápidamente asimilaron que la velocidad es el "pedazo del producto" y que ésta se obtiene con la división del "producto" en la cantidad de las unidades de tiempo. Con más dificultades se asimilaba que este producto se obtiene durante "1 unidad de tiempo". Esto se manifestó también en la escritura del resultado: inicialmente, los escolares no escribían "en una hora".

Para la aclaración del hecho de que esta parte del "producto" se relaciona con una unidad de tiempo era necesario introducir los ejemplos de siguiente tipo:

"Yo representé el trabajo que se realizó durante 5 unidades de tiempo y señalé su parte: La podemos determinar como V? (Se muestra el "pedazo" que se hizo en 2 horas).

Durante la solución de la primera tarea 13 sujetos contestaron: "Sí, se puede".

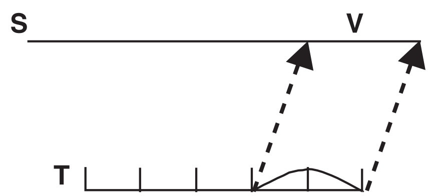


Figura 3

Nosotros les hemos propuesto a los sujetos leer en la tarjeta las características de la velocidad, después de lo cual ellos de inmediato se corrigieron: "No!, es aquello, lo que se hizo en 1 unidad de tiempo, pero aquí es en 2 horas, es incorrecto". Después de la solución de las tareas de este tipo, el concepto de la velocidad se hizo exacto, y los sujetos ya no escribían la respuesta: V=50 km, sino siempre escribían: V=50 km por hora.

Para poder verificar, qué tan conscientemente los alumnos operan con los modelos, en qué tipo de las características se orientan ellos en las condiciones de problemas, identificando la velocidad, nosotros les hemos propuesto los ejemplos con aquel conjunto de datos numéricos, que podrían provocar las acciones incorrectas. Pondremos un ejemplo:

"Durante 12 días un equipo construyó tres edificios. Cuánto construyó el equipo en un día?".

El "producto" del proceso (3 edificios) y el tiempo (21 días) se modelaban en el tipo de segmentos de la recta. La particularidad de este ejemplo consiste en el hecho de que la expresión numérica de la velocidad es complicada debido a que, con la división del "producto" en el tiempo no se obtiene el número entero, y la mayoría de nuestros sujetos aún no conocía las fracciones. Al mismo tiempo, en este ejemplo, es fácil realizar la división del tiempo entre el "producto".

Considerando todo lo anterior, nosotros tomábamos la respuesta correcta en estos ejemplos como muy demostrativa. La solución se daba de manera siguiente:

Experimentador. ¿Quién actúa?

Alumno. Un equipo.

Experimentador. ¿Cuánto hizo?

Alumno. 3 edificios.

Experimentador. Muestra en el dibujo todo el producto de trabajo.

Alumno. (Muestra el segmento S).

Experimentador. ¿Durante qué tiempo se hizo esto?

Alumno. Durante 12 días.

Experimentador. ¡Muestra!

Alumno. (Muestra la representación T).

Experimentador. ¿Sobre qué se pregunta en el ejemplo?

Alumno. ¿Cuánto se hacía en cada unidad de tiempo?
12 sujetos de inmediato contestaron correctamente:
"Dividimos esto... (muestra el segmento S) en 21".

Experimentador. Divida el trabajo (el segmento) en 21 partes.

Alumno. (Lentamente con ayuda de sus ojos divide el segmento que representa el trabajo en 21 partes).

Experimentador. Muestra, cuánto trabajo hicieron en 1 día.

Alumno. (Muestra el primer pedazo).

Experimentador. ¿Cómo determinar esto? Escribe allá, donde tu mostraste.

Alumno. (Escribe V).

Experimentador. ¿Puedes mostrar en otro lugar V?

Alumno. (Muestra otras partes obtenidas).

Todos los 15 sujetos, que antes no han estudiado las fracciones, elaboraron correctamente la fórmula con letras. Cuando empezaron a colocar los números concretos, 10 escolares dijeron que a ellos no les habían enseñado, cómo dividir 3 en 21 (3:21), 5 escolares anotaron los números de manera incorrecta (21:3) pero fácilmente corrigieron su error.

Durante la etapa de acciones materializadas, a los sujetos se les proponía no solamente solucionar los ejemplos preparados, sino también elaborarlos.

Así, el experimentador les proponía dos segmentos, uno de los cuales representaba el "producto" (S) y el otro representaba algún número de unidades de tiempo (T).

El sujeto tenía que pasar por la vía contraria: a partir del modelo abstracto hasta la situación concreta del problema. Todos los sujetos lograron realizar esta tarea. Pondremos el ejemplo del protocolo de trabajo de Seriozha P.

Sujeto. Aquí se dan 5 unidades de tiempo, 5 horas, aquí se da el trabajo (muestra el segmento S). ¿Hay que inventar el trabajo?

Experimentador. Primero di, quién actúa.

Sujeto. Rancheros.

Experimentador. ¿Qué trabajo hacen ellos?

Sujeto. Recolectan las papas.

Experimentador. ¿Cuánto? Muestra en el dibujo.

Sujeto. 50 kg. (Escribe por abajo del segmento S = 50 kg).

Experimentador. Correcto. ¿Durante qué tiempo se hizo esto?

Sujeto. Durante 5 horas, aquí está (muestra T).

Experimentador. ¿Cuál es la pregunta de tu ejemplo?

Sujeto. Encontrar V; aquí dividimos S (muestra el segmento correspondiente) en 5 ; ahora...(realiza la división en el segmento, señala una parte obtenida con la letra V).

Experimentador. Muy bien. ¿Durante qué tiempo se hace este pedazo de trabajo?

Sujeto. Durante 1 hora.

Experimentador. Claro, por eso tu lo señalaste como V. Y ahora dime, ¿qué tan grande es este pedazo o algún otro pedazo?

Sujeto. Aquí está (muestra el segmento V).

Experimentador. ¿De cuántos kilos va ser este pedazo si todo el trabajo es de 50 kg.?

Sujeto. (Da la respuesta correcta).

La etapa materializada del trabajo con la velocidad y de otros conceptos relacionados con ella, se concluía con la introducción de la tarjeta escolar que contenía los señalamientos necesarios para el análisis de las condiciones del problema. La tarjeta se introducía de la manera siguiente:

Sujeto. (Lee el ejemplo en voz alta). El carro hizo 300 km de camino durante 7 horas. ¿A qué velocidad iba el carro?

Experimentador. Anota los datos del problema!

Sujeto. ¿Cómo anotar?

Experimentador. Toma esta tarjeta, ella te va ayudar. Lee una por una cada pregunta y busca la respuestas para ellas en el problema.

Al escolar se le proporciona la tarjeta de tipo siguiente:

TARJETA Nº 1.

Identificar en el problema:

1. ¿Quién actúa?
2. ¿Qué hace el que actúa (S)?
3. ¿Cuánto tiempo hace (T)?
4. ¿Cuánto hace durante la unidad de tiempo (V)?

Los escolares contestaban una por una las preguntas, buscaban las respuestas correspondientes en las condiciones del problema y anotaban las respuestas bajo los números necesarios de las preguntas. En el resultado, ellos obtenían la anotación breve de las condiciones y de la pregunta del problema. El trabajo sobre la búsqueda de los elementos señalados en la tarjeta se realizaba en correspondencia estricta con las observaciones del experimentador: 1) lee las condiciones del problema; 2) lee en la tarjeta lo que dice con el número uno; 3) encuentra esto en las condiciones del problema y 4) anota en el cuaderno lo que encontraste.

El sujeto realizaba las operaciones 2, 3 y 4 en relación con cada punto de la tarjeta. El contenido de esta prescripción no se le daba al sujeto en la forma escrita. El experimentador denominaba todos los puntos de manera secuencial.

En la tarjeta escolar se pregunta acerca de los elementos básicos de los problemas para los "procesos" en la forma general abstracta. En las condiciones de los problemas concretos, ellos pueden tener tipos muy diferentes debido a las variaciones de la naturaleza del proceso, de las fuerzas que actúan, de las unidades de la medición, etc., pero cada vez todos ellos adquieren el carácter consciente desde el punto de vista de aquello general que caracteriza a cualquier proceso: velocidad, tiempo y resultado. A la comprensión de estos datos concretos les ayudaban los símbolos que, a partir de las primeras tareas hacían que los escolares vieran lo particular y lo concreto, a la luz de lo general y lo típico.

Después de la escritura de los datos, el texto del problema se escondía y, se le pedía al sujeto que relatara el problema utilizando la escritura y las preguntas anotadas en la tarjeta. El relato de los escolares era del siguiente tipo: “Actúa el carro, su “trabajo” = 300 km., etc.” Después de esto, el experimentador proponía representar los datos en modelo espacial y “construir” la solución; después se proponía representar el medio de la solución con la fórmula, leerla y encontrar el resultado numérico de acuerdo a ella utilizando los números dados en las condiciones del problema.

Durante la etapa materializada se solucionaban de 2 a 3 problemas más con ayuda de la tarjeta.

Sin embargo, antes de pasar a la etapa del lenguaje oral de la formación de conceptos acerca de las magnitudes básicas del proceso, nosotros formábamos en los sujetos, los conceptos acerca de las relaciones que existen entre estas magnitudes en la forma materializada.

Organización de la asimilación de las relaciones entre la velocidad y el “producto” del proceso

Debido a que la velocidad es el concepto relativo, que contiene en sí las relaciones entre S y T, entonces, durante la formación precisamente de este concepto, era necesario enseñarles a los sujetos a establecer las relaciones entre las magnitudes básicas que caracterizan al proceso.

Es evidente que durante la organización de la asimilación de las correlaciones entre S, V y T, nosotros hemos omitido a propósito la deducción formal de las magnitudes de acuerdo a las fórmulas. Nosotros queríamos que los escolares trabajaran con las magnitudes como tales y obtuvieran la magnitud que se busca inicialmente, con los modelos. Sin esto no pueden ser comprendidas y asimiladas las relaciones entre las magnitudes mencionadas, que caracterizan a cualquier proceso, de manera válida y completa.

Antes que nada, los sujetos tenían que asimilar que la velocidad se puede determinar solamente con la presencia del “producto” obtenido, por parte de la fuerza dada que actúa y, del tiempo que se necesita para su obtención. Con este objetivo se proponían varios problemas con las condiciones abundantes y faltantes. Pondremos un ejemplo del problema con las condiciones faltantes: "El caminante salió a las 5 de la madrugada. Con qué velocidad caminaba él si hizo 20 km del camino?". Pondremos un ejemplo de la solución de este problema.

El sujeto Lena R. lee el problema, anota los datos con ayuda de la tarjeta y obtiene dos desconocidos: representa en el modelo el camino (S) y lo quiere dividir, pero no encuentra T, se queda callada.

Experimentador. ¿Qué hay que encontrar?

Sujeto. La velocidad.

Experimentador. ¿Qué hay que saber para esto?

Sujeto. S y T.

Experimentador. ¿Qué es lo que te hace falta?

Sujeto. ¿Por qué es que en el problema no se da T? Se da sólo cuándo salió.

Experimentador. Podemos solucionar el problema si no sabemos...

Sujeto. No, no podemos solucionar, no sabemos cuánto tiempo caminaba el caminante.

Experimentador, Es correcto. Anota la conclusión: "El problema no tiene solución".

Los problemas con las condiciones abundantes daban la posibilidad de mostrar, no solamente la necesidad de la presencia de dos magnitudes (por ejemplo, de S y T) para la obtención de una tercera magnitud (V), sino también la pertenencia de todas estas magnitudes a una fuerza que actúa. Además, en estos problemas, el papel de la pregunta del problema como del director de la búsqueda de los datos necesarios se manifestó de manera muy clara. Así, durante la solución del problema: "El equipo de tres choferes de tractor trabajó en 38 hectáreas de tierra. El chofer Vania, el miembro de éste equipo trabajó con 12 hectáreas por hora. ¿Con qué velocidad trabajó Vania?", 14 sujetos empezaron a anotar todos los datos presentes en las condiciones del problema. A la pregunta "¿Quién actúa?", contestaban: "El equipo". A la pregunta: "¿Qué hace?", contestaban: "S=38 hectáreas". Todos estos eran los datos abundantes.

Cuatro sujetos, desde el inicio mismo, empezaron buscar los datos relacionados con Vania, precisamente acerca de la velocidad del trabajo de él se preguntaba en el problema. La escritura hecha por parte de ellos era del tipo siguiente: 1) Vania; 2) S=12 hectáreas; 3) T=6 horas y V=?

Posteriormente con ayuda de estos problemas, en todos los sujetos se creaba la disposición hacia la pregunta, como hacia el inicio directos para la búsqueda de los datos necesarios.

Durante la etapa material los sujetos solucionaron de 6 a 7 problemas para el encuentro de la velocidad. Cuando los escolares podían determinar de manera exacta el concepto "velocidad" y describir el medio para su obtención (fórmula), nosotros pasábamos a la magnitud del "producto" del proceso (S) como a la relación entre V y T.

Inicialmente, los sujetos construían el "producto" del proceso de acuerdo a la velocidad y el tiempo dados. Se proponía el problema siguiente: "¿Cuántos árboles plantaron los escolares durante 7 horas, si durante una hora ellos plantaban 3 árboles?". Para el problema se añadía el modelo siguiente:

V ***x x x***

T 

El sujeto leía el problema y explicaba qué estaba representado en el modelo. Todos los sujetos lo lograban fácilmente con esto. Después, ellos pasaban a la escritura breve de los datos con ayuda de la tarjeta No. 1 representada anteriormente. Cinco sujetos cometieron el error durante la escritura: la velocidad del trabajo (3 árboles durante la hora) tomaron por todo el trabajo y escribieron "S=3 árboles" pero, después de la observación del experimentador, corrigieron su error.

En el esquema, representada por abajo del texto del problema, los sujetos modelaban S. Aquí está el protocolo del sujeto Seriozha P.:

Experimentador. Muestra la primera hora del trabajo.

Sujeto. (Muestra).

Experimentador. ¿Cuántos árboles plantaron los alumnos durante esta hora?

Sujeto. ...3 árboles.

Experimentador. Y durante la segunda hora?

Sujeto. 6 árboles (incorrecto).

Experimentador. ¡Muestra la segunda hora!

Sujeto. Aquí está (muestra).

Experimentador. Cuántos árboles plantaron los alumnos durante esta segunda hora?

Sujeto. También 3 árboles.

Experimentador. ¿Y durante la tercera hora?

Sujeto. También 3.

Experimentador. Construye todo el trabajo que hicieron los escolares durante 7 horas; cada hora ellos plantaban 3 árboles. ¿Cómo se pueden dibujar todos los árboles plantados por ellos?.

Sujeto. (Para cada hora señala 3 puntos y obtiene la serie de S).

Experimentador. ¿Obtuviste S? ¿Qué vale?

Sujeto. (Cuenta). 21 árboles.

Experimentador. Escriba la fórmula para encontrar S.

Durante la construcción de S, cinco sujetos tachaban una unidad de tiempo por una de manera secuencial y la representaban con 3 árboles. Todos estos sujetos tenían dificultades para la escritura de fórmula (“Yo resté el tiempo...

No, dividí T”). Este hecho muestra que, la acción material tiene que ser construida de tal forma que aquella característica o transformación, que queremos identificar, se manifieste claramente. Ante la organización dada de la acción, los alumnos tomaban simultáneamente 3 árboles 7 veces y, además restaban las unidades de tiempo. La escritura de la fórmula, como de la característica verbal condensada, tiene que reflejar, de manera significativa, la acción del alumno. Por eso, durante el trabajo con los demás sujetos, nosotros construíamos S sin tachar las unidades utilizadas de tiempo.

Para la correlación de las unidades de tiempo con el trabajo que se realiza durante cada unidad, se pueden utilizar las flechas. El alumno identifica la unidad correspondiente del tiempo en el modelo y, representa el trabajo correspondiente:

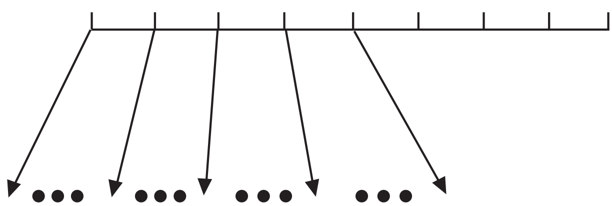


Figura 4

Los escolares solucionaron de 5 a 6 problemas más, de diferentes tipos (con los datos faltantes, con las condiciones abundantes, etc.), obteniendo el “producto” del proceso en la forma materializada. Cuando los alumnos determinaban el concepto del “resultado del proceso” de manera exitosa y solucionaban los problemas ya, sin el apoyo en la tarjeta, nosotros pasábamos a la organización de la asimilación del tiempo del transcurso del proceso, como de la relación entre el “resultado” del proceso y la velocidad.

Inicialmente, la enseñanza se realizaba también con los modelos materializados. Se representaban por separado la velocidad y el “producto” del proceso. Así, por ejemplo, para el problema: “El equipo plantó 24 árboles. Se sabe, que durante una hora el equipo plantaba 4 árboles. Cuánto tiempo necesitó el equipo para concluir el trabajo”, se daba el esquema siguiente:

S 000000000000000000000000

V 0000

Figura 5

Después del análisis de los datos de acuerdo a las instrucciones expuestas anteriormente, el sujeto determinaba el tiempo T a través de dividir S en V. El experimentador le hacía al sujeto las preguntas siguientes:

1. ¿Qué señala V? (que durante una hora se plantaron 4 árboles).
2. ¡Señale los primeros 4 árboles en S y subráyelos!
3. ¿Durante qué tiempo se plantaron ellos? (durante 1 hora).
4. Señale otros 4 árboles; ¿cuánto tiempo más pasó mientras se plantaban estos árboles? (una hora más).
5. Señale estas dos horas y represéntelas más abajo.
6. Señale 4 árboles más. ¿En cuántas unidades se incrementó el tiempo de trabajo? (en 1 unidad). Posteriormente, el sujeto continuaba identificando las unidades de tiempo de manera independiente; se obtenía este esquema:

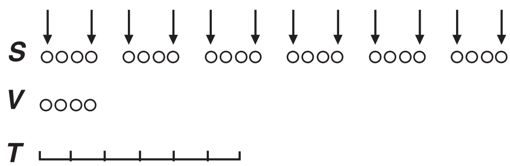


Figura 6

En los siguientes 5 ó 6 problemas para la búsqueda de tiempo, los datos se materializaban con ayuda de los pedazos de papel. Los problemas tenían tanto los datos numéricos, como no numéricos.

La parte final de la etapa materializada era la solución de problemas con los modelos abstractos, sin los datos numéricos o, solamente con algunos números. Nosotros considerábamos que esto era importante para el paso de la acción a la forma verbal. El experimentador le proponía al sujeto las tareas del siguiente tipo:

Experimentador. ¡Toma algún trabajo, sólo su representación!

Sujeto. (Representa y determina el segmento S).

Experimentador. Supongamos, que este trabajo se realizó en 6 horas.

Sujeto. (Representa 6 horas).

Experimentador. Vamos a determinar, “cuánto” se hizo durante una hora.

Sujeto. (Divida el segmento S en 6 partes iguales y una de éstas se determina con la letra V).

Los problemas sin datos numéricos también se utilizaban para la búsqueda del tiempo y de la velocidad utilizando diferentes modelos: segmentos o pedazos de papel. Después de cada solución, nosotros exigíamos expresar la acción realizada con la fórmula.

Cabe señalar que a los escolares les gustaba mucho trabajar con estos problemas y ellos los solucionaban exitosamente.

La etapa de la representación previa de los conceptos básicos (S, T y V) y de sus relaciones, así como la etapa de las acciones materializadas, requirieron aproximadamente de 10 sesiones para un sujeto que duraba 30 minutos. Durante estas sesiones cada sujeto solucionó de 20 a 24 problemas.

Durante la etapa del lenguaje en voz alta, de la formación de las magnitudes básicas, los escolares solucionaban los problemas para la búsqueda de las magnitudes que caracterizan al proceso sin la utilización de los modelos de estas magnitudes y, sin la utilización de la tarjeta que señala el orden del análisis del problema. El paso a esta nueva etapa se daba de la siguiente manera:

Sujeto. (Lee el problema). La distancia entre dos ciudades es de 200 km. El ciclista hizo esta distancia en 10 horas. ¿Cuántos kilómetros hizo el ciclista en una hora?

Experimentador. Anote los datos.

Sujeto. ¿Y dónde está la tarjeta?

Experimentador. Yo no traje la tarjeta conmigo, porque yo noté que tu ya puedes trabajar bien sin ella.

Sujeto. Ahora... Lo primero: "¿Quién actúa?" ciclista (anota en el cuaderno con el número 1); lo segundo: "Trabajo - S" (busca en el problema), S - 200 km. (anota); lo tercero: "Durante qué tiempo - T" (busca en el texto del problema). Nosotros tenemos 10 horas, T=10; lo cuarto: "¿Cuánto durante una hora?" - Acerca de esto se pregunta: ¿escribo el signo de interrogación?

Experimentador. ¡Muy bien! Repite el problema de acuerdo a los datos.

Sujeto. Actúa el ciclista, él hizo S=200 km durante T=10 horas; hay que encontrar la velocidad.

Experimentador. ¿Qué fórmula vamos a utilizar para solucionar el problema?

Sujeto. La formula V (anota): V = S : T (después de ésto coloca los números en la fórmula y obtiene el resultado).

Durante la etapa del lenguaje en voz alta, el problema específico era el análisis de las condiciones del problema. Las magnitudes básicas que caracterizan al proceso se proporcionaban, ya no en el tipo de los modelos sino, con ayuda de la descripción. Entonces, era necesario enseñarles a los alumnos a identificarlas en la forma nueva.

De acuerdo a la instrucción, a los alumnos se les proponía identificar: quién actúa, con qué velocidad y durante qué tiempo.

Después de leer el texto del problema, los escolares denominaban –por orden– qué requería cada punto de la instrucción. El experimentador les proponía encontrar esto en las condiciones del problema, identificar con paréntesis y escribir el símbolo correspondiente sobre las palabras del texto. Si la magnitud identificada era conocida, entonces, el símbolo se incluía en el círculo entero; si la magnitud era desconocida, el símbolo se incluía en el círculo de la línea punteada. Después de esto, seguía la escritura de las magnitudes señaladas (con símbolos) en el cuaderno.

Durante esta etapa, el experimentador no tenía que repetir las instrucciones sobre el análisis del problema: su contenido ya fue asimilado por parte de los sujetos en la etapa materializada. Durante la solución, ya del segundo problema en la etapa de voz alta, los sujetos realizaban todo lo que requería la instrucción sin observaciones del experimentador.

Inicialmente, el proceso de la identificación de las magnitudes en las condiciones del problema se realizaba lentamente y, en el orden que se señalaba en las instrucciones. A final de esta etapa, los escolares trabajaban mucho más rápidamente y tenían una relación más libre con la instrucción, frecuentemente identificando las magnitudes según el orden en el problema y, no como en la instrucción.

Durante esta etapa, el experimentador realizaba básicamente las funciones del control.

Pondremos un ejemplo de la solución del problema durante esta etapa.

El sujeto Lena L. lee el problema: "A las 13 horas, de la ciudad A a la ciudad B –que se encuentra en la distancia de 350 km. de la ciudad A–, sale el tren con la velocidad 70 km por hora. ¿Cuándo va llegar el tren a la ciudad B?".

> **Sujeto.** La distancia entre las ciudades es de 350 km, esto es S (identifica en el texto y señala con el símbolo)... con la velocidad 70 km por hora (señala). "Cuándo va a estar el tren en la ciudad B"... se pregunta acerca del tiempo de la acción. Esto es T (señala con el círculo de línea punteada y determina con el símbolo T).

Nosotros hemos dirigido la atención especial a la identificación de las magnitudes en el texto del problema; la identificación incorrecta, por lo menos de una magnitud, conduce a la solución incorrecta del problema. Así, por ejemplo, en el problema mencionado, la identificación incorrecta ... [70 km] por hora, conduce al hecho de que "70 km" se comprende como S en lugar de V. Durante la etapa del lenguaje en voz alta se solucionó un total de 12 a 14 problemas que significaban 4 sesiones, con una duración de 30 minutos aproximadamente.

La etapa del lenguaje en voz alta y de la formación de las magnitudes básicas, se combinaba con la forma materializada de la asimilación de los "bloques" básicos del método general para la solución de los problemas para los "procesos". Estos "bloques" fijaban las relaciones básicas entre el "producto" del proceso, su velocidad y el tiempo de su transcurso.

Durante la etapa anterior, los sujetos "prácticamente" asimilaron que, de acuerdo a cualquier tipo, de dos magnitudes se puede obtener la tercera magnitud. Durante esta etapa, dichas relaciones se materializaban en el tipo de los esquemas. Las fórmulas que reflejan estas relaciones muestran, no solamente qué magnitudes son necesarias para la obtención de lo que se busca sino, también el medio para la obtención de esto. Sin embargo, en los esquemas se materializaban estas relaciones; se fijaban solamente las mismas magnitudes, mientras que, el tipo concreto de las relaciones entre las magnitudes, no se representaba en los esquemas.

Estos esquemas eran del tipo siguiente:

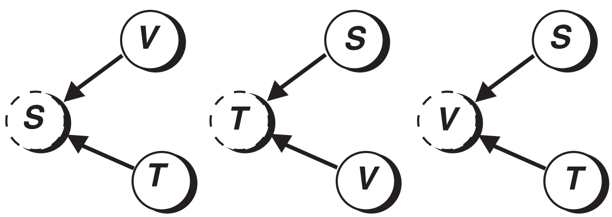


Figura 7

Estos esquemas de las relaciones entre S, V y T constituyen los "bloques" básicos de la solución de los problemas complejos para los "procesos".

Los esquemas se introducían de la manera siguiente: al sujeto se le proponía el problema para la búsqueda de la velocidad. Después de que el sujeto anotaba las condiciones del problema, con ayuda de los símbolos, el experimentador le hacía una serie de preguntas.

Experimentador. ¿Acerca de qué se pregunta en el problema?

Sujeto Igor B. Se pregunta acerca de V.

Experimentador. ¿Qué se necesita para encontrar V?

Sujeto. Hay que tener S y T.

Experimentador. Esto se puede representar así: lo desconocido lo encerramos en los círculos punteados; hacia esto dirigimos dos flechas que significan que nosotros tenemos que encontrar dos "cosas". ¿Cuáles son éstas?

Sujeto. S y T.

Experimentador. Señálalas.

Sujeto. (Señala). **Ver la figura 8.**

Experimentador. Ahora veamos, se conocen S y T. En el problema no se sabe que S es igual a 400 kg. Lo que se nos da, lo vamos a encerrar en los círculos enteros y vamos a anotar aquí su magnitud. Lo mismo vamos hacer en relación con T.

El esquema obtuvo el siguiente tipo **(figura 9)**.

Experimentador. ¿Cómo encontrar V, si se conocen S y T?

Sujeto. Dividimos S en T (soluciona).
Los escolares aceptaron con gusto estos esquemas y, de inmediato, los empezaron a utilizar.

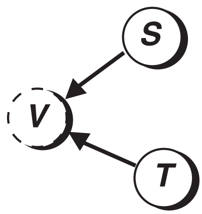


Figura 8

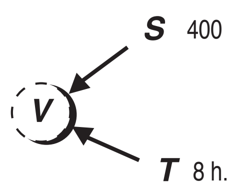


Figura 9

Ellos los utilizaban no solamente para la solución de los problemas que se les proporcionaban, sino también, para la elaboración de los problemas nuevos. Así, cuando nosotros les pedíamos inventar algún problema para el encuentro del tiempo del transcurso de algún proceso, entonces, la mayoría de los sujetos –sin recomendación alguna del experimentador– iniciaba la elaboración a partir del esquema y, después, inscribía en él los datos correspondientes. Por ejemplo, así era un problema inventado por parte del alumno Igor B. (Figura 10).

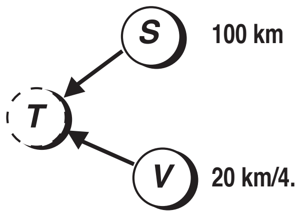


Figura 10

Este esquema dirige la atención central a lo buscado: T, por eso, después de la utilización de los esquemas, los errores que, anteriormente cometían algunos sujetos al inventar los datos numéricos para lo dado y para lo buscado, se eliminaron por completo.

Las relaciones entre el "producto" del proceso, la velocidad y el tiempo de su transcurso que, participaban en calidad de elementos básicos en el método general para la solución de los problemas para los "procesos", se quedaban en la forma materializada hasta el final de la enseñanza experimental.

La etapa final de la formación, es decir, la etapa del trabajo mental con las magnitudes básicas, se caracterizaba por el hecho de que el sujeto solamente leía el problema o lo escuchaba, cuando éste se presentaba de forma oral, y lo solucionaba mentalmente. Así, por ejemplo, se realizaba la solución en el sujeto Vera S.

> **Experimentador.** ¿Cuántas horas es necesario tener la llave abierta, si hay que soltar 400 litros de agua y, de esta llave salen 50 litros por hora?
>
> **Sujeto.** 400 litros... 50 litros por hora...es necesario...son en total 8 horas.

Otros sujetos solucionaban de manera similar.

A los escolares se les proporcionaban los problemas con las condiciones abundantes y faltantes, con diferentes formas de expresión de los datos (numérica, simbólica o verbal). Se les proponía también inventar los problemas para encontrar el "producto" del proceso, la velocidad o el tiempo, así como comparar dos o varios procesos de acuerdo a una magnitud que los caracteriza.

Por ejemplo: "Dos sujetos realizan la misma tarea. ¿Quién de ellos tiene mayor velocidad: el que termina el trabajo en 6 horas o el que termina en 8 horas?".

Todos los sujetos contestaron correcta y rápidamente que el primer sujeto tiene mayor velocidad. Los alumnos demostraban de manera muy segura lo correcto de sus respuestas. Ellos tomaban el segmento S y lo dividían, inicialmente en 6 y después en 8 partes; evidentemente que cada una de las partes (V) resultaba ser mayor en el primer caso.

Así como en las etapas anteriores se observaba la reducción gradual de tiempo de la solución de problemas. Durante las primeras tres sesiones (de 30 minutos) cada alumno realizaba de 22 a 26 tareas.

La rapidez y exactitud de la solución y de la elaboración de los problemas basados en los conceptos del "producto" del proceso, de la velocidad y del tiempo de su transcurso eran, para nosotros, los indicadores de la asimilación exitosa de estos conceptos.

Después de esto, nosotros consideramos posible pasar a los problemas para la "acción conjunta" en la que había varios participantes en el proceso.

2. Formación del concepto de la acción conjunta

El segundo nivel de la complejidad de los problemas para los "procesos" se relaciona con la situación de la "acción conjunta". La solución de estos problemas es más compleja debido a los siguientes factores:

1. **La cantidad de los "participantes": actúa no sólo una fuerza sino, dos, o más.**
2. **El carácter de la interacción de las fuerzas: éstas se ayudan una a otra o se obstaculizan.**
3. **El tiempo de la inclusión de las fuerzas que actúan: los participantes se incluyeron en la acción conjunta simultáneamente o en diferentes tiempos.**

4. **Las relaciones complementarias entre las magnitudes básicas: además de las relaciones de una magnitud con otras dos magnitudes que se relacionan con la fuerza dada que actúa, aparecen las relaciones entre los significados particulares y generales de cada una de las magnitudes. Así, ahora la velocidad general (Vo), no es únicamente la función de tiempo general (To) y del "producto" sumado (general) (So) sino, también, la función de los significados particulares de las velocidades (Vi) y representa la suma algebraica de las velocidades particulares.**

Estos factores se incluyen en el conjunto de las condiciones que se deben considerar durante la solución del problema. Esto significa que, todas ellas tienen que convertirse en las orientaciones para los alumnos y encontrar en el contenido de la base orientadora del método general de la solución.

Para esto era necesario organizar la asimilación de estas condiciones.

La metódica de trabajo –con el sistema dado de las relaciones en su principio– era la misma, como durante la formación de los conceptos acerca de las magnitudes básicas y de sus relaciones en la situación de un solo participante en el proceso.

Inicialmente, nosotros hemos organizado la asimilación de las relaciones entre el "producto" sumado, como entre el resultado de las acciones de todos los participantes y los "productos" particulares obtenidos por parte de los participantes aislados del proceso. La atención especial se dirigió al carácter de la participación: ¿les ayuda a los otros participantes en el proceso o se contrapone a ellos?

Durante la etapa de las acciones materializadas, se utilizaron, igual que antes, los pedazos de papel y los segmentos de la recta, que son cómodos para modelar las relaciones que se asimilan. Así, por ejemplo, durante la solución del problema: "En el rancho trabajaban tres equipos. Dos equipos recolectaban las frutas y, el tercer equipo las vendía. Se sabe que el primer equipo recolectó 800 kg y el segundo 700 kg de frutas, mientras que el tercer equipo vendió 900 kg. ¿Cuántas frutas se quedaron en el rancho?", los escolares señalaban en el pedazo de papel los resultados de las acciones del primer y del segundo equipos (en escala determinada); determinaban sus magnitudes numéricas y, después, tomaban una parte de papel que modelaba el “producto” de las acciones del tercer equipo.

Durante la etapa de las acciones materializadas, simultáneamente se preparaba el paso a la etapa verbal en voz alta. Con este objetivo, a los escolares se les proponía trabajar no solamente con los modelos, sino también, anotar los datos en la forma verbal con la utilización de los símbolos para la determinación de las magnitudes básicas. Ellos realizaban el análisis de las condiciones del problema de acuerdo al plan proporcionado (tarjeta No 2), que era del tipo siguiente:

TARJETA Nº. 2.

Determinar:

1. ¿Cuántos participantes actúan?
2. ¿Ellos inician y terminan juntos o no?
3. ¿Cómo actúan ellos?
   a) ¿Ayudan?
   b) ¿Se contraponen?
4. ¿Qué se conoce en el problema acerca de las magnitudes generales (So, To y Vo)?
5. ¿Qué se conoce acerca de las magnitudes particulares (Si, Ti y Vi)?
6. ¿Qué hay que encontrar en el problema?

Los escolares anotaban las respuestas a todas estas preguntas abajo de los números correspondientes y, en el resultado se obtenía la escritura breve del problema. Así, el problema mencionado anteriormente era escrito de la manera siguiente:

1) 3 part.
2) Juntos (es decir, simultáneamente).
3) I y II se ayudan, III en contra.

4) Nada.

5) S1 = 800 kg; S2 = 700 kg y S3 = 900 kg.

6) So =?

Después de la solución de varios problemas, para el encuentro de los “productos” generales y particulares con la utilización de los modelos, los escolares pasaban a la etapa de las acciones verbales en voz alta (lenguaje externo) y, trabajaban solamente con el apoyo de la escritura.

Se solucionaron varios problemas más del mismo tipo, después de que nosotros pasamos a los problemas que exigían la comprensión de las relaciones entre las velocidades general y particulares. Nosotros no teníamos el objetivo para pasar todas las acciones a la forma mental, por eso la enseñanza se concluía en la etapa del lenguaje externo.

Durante la formación del concepto, acerca de las relaciones entre las velocidades de participantes aislados en el proceso y la velocidad general, la atención especial se dirigía no solamente al carácter de interacciones de los participantes (se ayudan o se contraponen uno al otro), sino también, a las relaciones temporales de sus acciones: los participantes actúan simultáneamente o no.

Los escolares tenían que comprender que, la velocidad general en uno u otro intervalo temporal, puede ser obtenida a través de sumar las velocidades particulares solamente en las condiciones de la acción simultánea de todos los participantes en el proceso. Para esto nosotros proponíamos los problemas de este tipo:

> “Tres equipos construyeron la carretera durante 10 días. El primer equipo trabajó solamente los primeros 3 días y construía 200 metros por día. Después de esto, empezaron a trabajar el segundo y el tercer equipos. El segundo equipo construía 300 metros por día, mientras que el tercero construía 350 metros por día. ¿Con qué velocidad se construía la carretera después de que los equipos segundo y tercero iniciaron a trabajar?”.

Durante la etapa materializada de la asimilación, nosotros necesariamente exigíamos de los escolares la representación de todos los datos en el esquema. Aquí está uno de los esquemas para el problema mencionado:

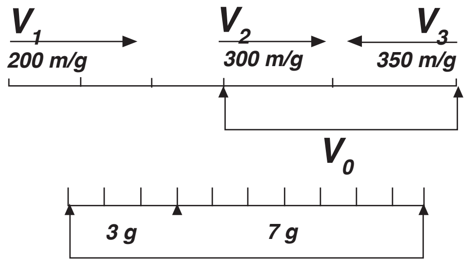


Figura 11

En el esquema elaborado por parte de los sujetos, se ve fácilmente que durante los primeros tres días la carretera se construye con la velocidad igual a 200 m/día, mientras que durante los siguientes 7 días la carretera se construye con la velocidad de 650 m/día.

Los tipos de las interacciones entre los participantes, se asimilaron por los alumnos prácticamente durante el análisis de las relaciones entre los "productos" general y particulares del proceso, por eso, durante el trabajo con las velocidades esto no producía ningún tipo de dificultades en ellos.

Los sujetos diferenciaban fácilmente los casos, cuando las velocidades se deben de sumar y cuando hay que restar una de otra. Por ejemplo, en la situación: a) el movimiento del barco en contra de la corriente del río y b) el movimiento de dos trenes en la dirección hacia su encuentro (opuesta).

Las relaciones entre las velocidades se formaban también en el nivel de la etapa del lenguaje externo.

Finalmente, se trabajaba con las relaciones entre el tiempo general del proceso y el tiempo particular de las acciones de los participantes aislados. Con el tiempo general (To) se comprendía el tiempo necesario para todo el "producto" (So), cuando los participantes actúan simultáneamente.

En este caso, el tiempo general es igual al tiempo de la acción de cada uno de los participantes. Si las acciones se realizan en diferentes tiempos, al tiempo que se necesita para la producción del producto nosotros hemos llamado como el tiempo sumado (Ts). Su relación con el producto general permite obtener, no la velocidad general sino, la velocidad media[5]. Por ejemplo, supongamos que se conoce que en la producción de detalles participaron tres equipos. El primer equipo trabajó 5 horas con la velocidad: 10 detalles por hora; el segundo equipo trabajó 10 horas con la velocidad: 20 detalles por hora y, el tercer equipo trabajó 5 horas con la velocidad: 20 detalles por hora. En el caso dado, la velocidad general es de 50 detalles por hora (Vo=V1+V2+V3=10d/h+20d/h+20d/h=50d/h).

El tiempo sumado (Ts) de la producción de los detalles es igual a 20 horas

$$\mathbf{Ts = T1 + T2 + T3}$$

Para la obtención del tiempo general (To), nosotros tenemos que conocer anteriormente la magnitud de todo el producto (So) y dividirlo entre la velocidad general (Vo). En el caso dado, el "producto" general que puede ser obtenido como la suma de los "productos" particulares, los cuales, por su parte, pueden ser obtenidos como la multiplicación de las velocidades particulares correspondientes por el tiempo particular correspondiente:

$$\mathbf{(V1xT1)+(V2xT2)+(V3xT3)=50d+200d+100d=350d.}$$

Consecuentemente, el tiempo general es igual a 7 horas (To = So : Vo = 350 d : 50 d=7). Esto significa que si todos los tres equipos hubieron trabajado simultáneamente, entonces, ellos hubieron necesitado 7 horas para la producción de los detalles. La velocidad media (Vm) es igual a 17,5 d/hora

$$\mathbf{(Vm=So:Tm=350d:20\ horas).}$$

Los conceptos del tiempo general y del tiempo sumado se diferencian no tan fácilmente: los sujetos intentan obtenerlo por analogía con la velocidad general

5 Nosotros no hemos introducido el concepto de la velocidad media y no hemos propuesto los problemas para su utilización. (Nota de los autores).

y el "producto" general, es decir, a través de sumar los intervalos parciales de tiempo. Solamente la modelación de las magnitudes y de sus relaciones permite mostrar que el tiempo general tiene lugar únicamente en los casos, en los que el "producto" se produce con la velocidad general, es decir, de manera simultánea por parte de todos los participantes del proceso.

No todos los sujetos lograron de inmediato captar el concepto acerca de las relaciones entre las magnitudes básicas del proceso, asimilado con los problemas con un solo participante, a la situación de la "acción conjunta". Sin embargo, era suficiente trabajar una vez con los modelos para comprender el carácter idéntico de las relaciones entre las magnitudes que se relacionan, con uno de los participantes del proceso, o con todos ellos conjuntamente.

Para la generalización de las relaciones en la situación de la acción conjunta, nosotros, en la etapa final, les estábamos proponiendo a los sujetos los problemas abstractos cualitativos del siguiente tipo: "Se da alguna acción conjunta con dos "participantes". ¿De acuerdo a qué datos se puede encontrar V2?".

Durante esta etapa, todos los sujetos lograron solucionar estos problemas. Normalmente, la solución se realizaba de la manera siguiente:

> **Sujeto.** De acuerdo a S2 y T2, a través de la división, aquí está (escribe): V2 = S2 : T2.
>
> **Experimentador.** Y si no hay estos datos, entonces, ¿cómo se puede encontrar V2 de acuerdo a otros datos?
>
> **Sujeto.** De acuerdo a Vo y V1... aquí está (escribe): V2 = Vo - V1.

El reforzamiento de los conceptos relacionados con la situación de la acción conjunta se concluía en la etapa del lenguaje externo. Los sujetos no solamente solucionaban exitosamente los problemas, sino también ellos ya podían actuar en la forma mental. Durante la etapa del lenguaje externo, cada sujeto realizó de 10 a 13 tareas de diferentes tipos.

De esta forma, en el resultado de la enseñanza realizada, los escolares asimilaron todos los elementos y todas las relaciones entre ellos, que constituyen el contenido básico de la solución de los problemas para los "procesos". Nosotros suponíamos que, después de esto, este método no produciría dificultades en nuestros sujetos, lo cual se demostró posteriormente de manera definitiva.

3. La formación del método general para la solución de los problemas para los "Procesos"

Para la asimilación del método general de la solución de los problemas dados, en complemento a los conceptos y habilidades formadas anteriormente, era necesario enseñarles a los escolares a construir el esquema de la situación del problema y el esquema para la resolución, elaborar el plan y elegir el medio para la solución.

La elaboración del esquema para la situación representa la "traducción" del texto del problema en el idioma del modelo abstracto concreto, en la que todas las relaciones participan de manera simultánea ante los sujetos. Evidentemente, este paso se tiene que basar en las reglas determinadas de la correlación de los elementos en la situación del problema y sus relaciones con la estructura del esquema. El esquema, así como los símbolos, permiten abstraerse de los datos concretos de la situación y ver el problema dado, como el caso particular de las relaciones entre las magnitudes básicas que caracterizan a cualquier proceso. Era necesario enseñarles a los alumnos a elaborar estos esquemas de manera independiente. En el caso de los problemas sencillos, nosotros ya hemos mostrado, cómo los sujetos elaboraban los esquemas y cómo trabajaban con ellos.

Nosotros hemos iniciado la formación de la habilidad para representar el esquema de la situación compleja, a partir de proponer los modelos abstractos con los cuales los sujetos tenían que establecer el sistema dado de las magnitudes. Aquí está un ejemplo de este modelo:

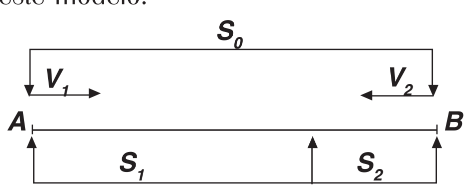


Figura 12

Este modelo se puede interpretar como un encuentro de dos trenes o como el trabajo de dos "participantes" (sujetos, máquinas, llaves, etc.), pero, en todos los casos, el segmento AB modela el resultado de la acción conjunta (distancia que hicieron dos trenes que se mueven hacia el encuentro mutuo; el trabajo que hicieron dos trabajadores, etc.). En este esquema, no hay cantidad de tiempo; éste se puede representar junto a lo demás en la forma conocida o simplemente determinar con el símbolo T.

El esquema dado modela la acción conjunta de dos participantes como en el caso de la colaboración, tanto en el caso de la contracción. Los alumnos consideraban a esta condición, debido a que, durante el análisis ellos establecían todas aquellas preguntas que antes les hacía la "tarjeta": "¿Cómo actúan ellos?". Sin embargo, en este esquema, se puede reflejar fácilmente también el carácter de la acción. La colaboración se puede determinar con el signo "+" sobre la flecha que señala la velocidad del participante dado y, la acción contraria se puede determinar con el signo "-". Después de esto, a los sujetos se les propuso elaborar los esquemas para diferentes situaciones de problemas de manera independiente.

Por ejemplo: "Se conoce la velocidad de dos caminantes, que salieron hacía el encuentro mutuo simultáneamente. Hay que encontrar, ¿qué distancia hicieron ellos hasta su encuentro, si ellos caminaron durante 5 horas?".

El sujeto representa este esquema de la situación: So determina lo que se busca.

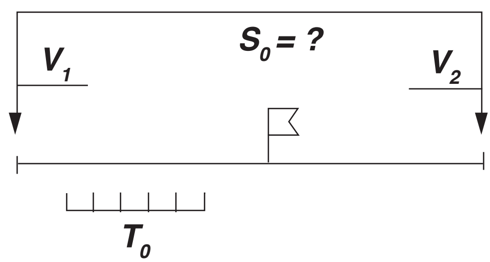


Figura 13

To significa que los participantes iniciaron el movimiento simultáneamente. Todos los sujetos elaboraron de 6 a 7 esquemas cada uno. Después de esto, nosotros les enseñamos a los alumnos elaborar el esquema para la solución del problema. Este esquema tenía el tipo del "árbol del razonamiento" y, se iniciaba con la pregunta del problema que determinaba, tanto la elección de los datos, como la elección de la fórmula.

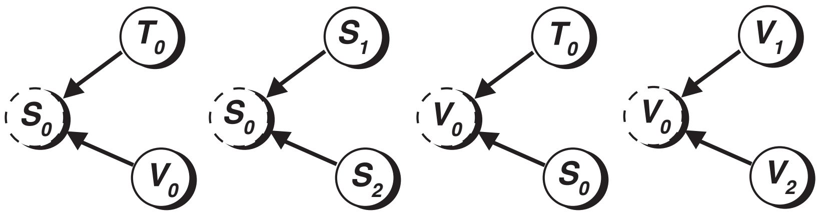


Figura 14

Todos los sujetos ya conocían bien los "bloques" básicos del esquema del razonamiento **(figura 14)**; ellos también conocían los esquemas de los problemas que no tienen solución **(figura 15)**.

Ahora, nosotros teníamos que enseñarles a unir estos bloques en esquemas muy diferentes.

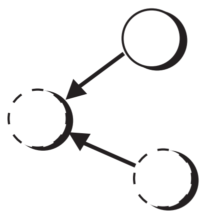


Figura 15

Inicialmente, el experimentador les presentaba a los sujetos el siguiente esquema abstracto y les pedía explicar qué significa este esquema **(figura 16).**

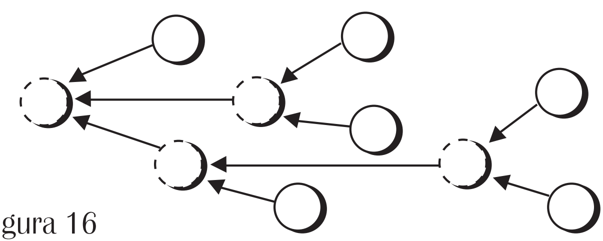


Figura 16

Todos los sujetos comprendieron el esquema y dieron la explicación correcta. Así fue como explicó el sujeto Yura M.

Experimentador. Explica, qué está dibujado.

Sujeto. Es el esquema del problema.

Experimentador. ¿De qué tipo de problema?

Sujeto. Bueno, de algún tipo.

Experimentador. Es correcto. ¿Qué significa el primer círculo del lado izquierdo?

Sujeto. La pregunta del problema.

Experimentador. ¿Y después?

Sujeto. Para contestar a la pregunta, nosotros necesitamos dos datos...no: tres datos - uno ya está (muestra el círculo entero) y no hay dos datos; para encontrar ésta (muestra el primer círculo punteado en la parte superior) son necesarios dos datos, éstos se dan en el problema, aquí están (muestra los círculos enteros, de los cuales se parten dos flechas); para encontrar ésta (muestra el círculo punteado en la parte inferior) son necesarios dos datos, uno ya está, el otro no está, pero éste se puede encontrar (muestra los círculos enteros, de los cuales se parten las flechas hacia este desconocido). ¡Es interesante! Muéstreme este problema.

Experimentador. Nosotros vamos a solucionar estos problemas, pero inicialmente yo quiero saber, qué tan preparado estás tu para esto. Dime, ¿cuántas acciones (operaciones) va a tener el problema?

Sujeto. 6 acciones (incorrecto).
(El conteo de las acciones, de acuerdo al esquema, lo realizaron incorrectamente otros 12 sujetos).

Experimentador. Muestra la primera acción. ¿Qué hay que encontrar en primer lugar?

Sujeto. Aquí (muestra incorrectamente el primer círculo punteado en la parte izquierda).

Experimentador. ¿Tú tienes todo lo necesario para esto?

Sujeto. ¡No!. Sí, aquí está (muestra el círculo punteado superior en la segunda serie vertical).

Experimentador. ¡Es correcto!. ¿O?

Sujeto. ¡Aquí está! (muestra el segundo círculo punteado en la misma serie). No, será ésta. (muestra correctamente el círculo punteado en la tercera serie vertical).

Experimentador. Cuente, cuántas preguntas hay de acuerdo al esquema y, entonces, cuántas acciones hay en el problema. Pon los números ordinales.

Sujeto. (Señala correctamente en el esquema 4 acciones).
En las tareas posteriores, los escolares tenían que elaborar los esquemas para la solución de manera independiente. Se daban los problemas sin los datos numéricos. Por ejemplo:

Experimentador. Hay que encontrar So de tres participantes que trabajan conjuntamente ("amistosamente"); se conocen los resultados del trabajo de cada uno. Elabora el esquema para la solución!

Sujeto. Vera S. Entonces, se conocen S1, S2, S3... Aquí (dibuja). Ponemos en los círculos aquello que se conoce (Figura 17).

Experimentador. ¿Se puede solucionar el problema?

Sujeto. Claro, que si, sumamos S1 + S2 + S3 y obtenemos So.

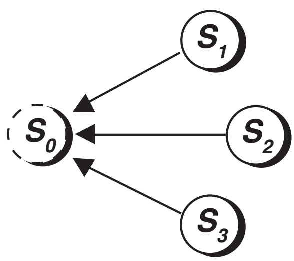


Figura 17

Otros alumnos solucionaban los problemas de manera aproximadamente similar.

Otro tipo de problemas consistía en el hecho de que, a los sujetos se les daba el esquema preparado de acuerdo al cual ellos inventaban los problemas temáticos. Por ejemplo, para el esquema representado abajo, el sujeto Lena G. elaboró el problema siguiente: "Trabajaron dos equipos; el primer equipo recolectó 100 kg de papas y el segundo 150 kg. Ellos trabajaron 3 horas juntos. ¿Cuántos kilos de papas recolectaron ellos en cada hora?".

Cada sujeto ejecutó de 3 a 6 tareas.

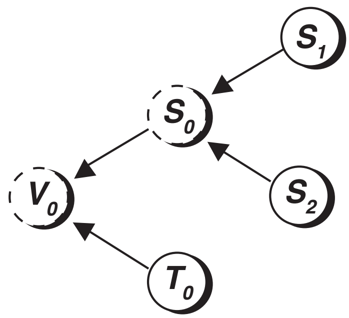


Figura 18

El siguiente componente que se formaba en los escolares: la elección del método de la solución, que tiene lugar durante la solución incluso de un problema sencillo. Esto se determina por el hecho de que, como nosotros vimos, lo buscado puede tener simultáneamente varias relaciones funcionales. Debido a que nuestros sujetos ya han asimilado todos los sistemas de las relaciones, en las cuales pueden encontrarse el tiempo, la velocidad y el "producto" del proceso, a nosotros nos faltaba enseñarles a elegir aquel tipo de las relaciones, el que, en las condiciones del problema dado, conduce a la solución. La enseñanza se inició con el problema siguiente: "Están abiertas dos llaves. Hay que encontrar la cantidad de agua que llenó la alberca, si se sabe que la primera llave estaba abierta durante el tiempo T1 y ella "trabajaba" con la velocidad V1, mientras que la segunda llave estaba abierta durante el tiempo T2 y "trabajaba" con la velocidad V2". El sujeto Sasha M. solucionaba este problema de manera siguiente:

Sujeto. ¿Qué hay que encontrar en el problema? Repita, por favor.

Experimentador. La cantidad de agua en la alberca...

Sujeto. ¿Y trabajaron dos llaves? Entonces, (escribe): So? Se conoce T1, V1, T2 y V2.

Experimentador. Elabora el esquema.

Sujeto. (En el círculo punteado escribe So y dirige hacia él 3 flechas: a partir de T1, V1 y T2**.**(Figura 19). Quiere dibujar una flecha más, pero el esquema obtenido no lo satisface).

Sujeto. Cómo a partir de T1 y V1 obtener So. Tenemos T2... V2; no, a partir de T1 y V1 se puede obtener S1, pero no So (representa otro esquema, Figura 20)**.**

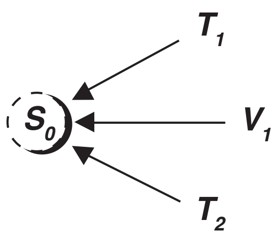


Figura 19

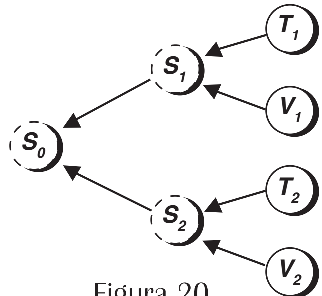


Figura 20

Experimentador. Es correcto. Muy bien. ¿De cuántas acciones es este problema? Señálalas.

Sujeto. De tres acciones (las señala en el esquema).

Nosotros hemos propuesto a algunos sujetos los problemas con datos numéricos para este esquema. Ellos los solucionaron fácilmente.

A pesar de que los escolares ya conocían bastante bien todas las fórmulas, inicialmente, la elección de la fórmula necesaria era difícil. Por eso, nosotros hemos presentado una tarjeta con la escritura de todas las fórmulas básicas.

Normalmente, la solución transcurría de la manera siguiente: los sujetos identificaban las magnitudes en el problema, subrayaban la pregunta, colocaban (en el texto del problema) los datos numéricos en los rectángulos de líneas enteras y determinaban con el símbolo correspondiente, después de esto, anotaban los datos en el cuaderno, repetían el problema de acuerdo a ellos y empezaban a elaborar el esquema. En el esquema ellos señalaban el orden de las acciones y las realizaban utilizando fórmulas y, la escritura de la "solución con preguntas", conocida a partir del trabajo en el salón. Así se veía uno de los problemas después del análisis de sus condiciones:

To **S**o

"[Tres carros] gastaron durante [10 horas] [250 litros] de la gasolina. Se

S1

sabe que, durante este tiempo, el primer carro gastó [60 litros], y el segundo carro

S2

gastó [100 litros]. Encuentren, cuántos litros de gasolina gastó el tercer carro en una hora?

V_3

Así era la escritura de los datos:

To = 10 horas
So = 350 litros
S1 = 60 litros
S2 = 100
V3 = ?

Inicialmente, se observaba en los escolares una tendencia para empezar a utilizar los datos, antes de establecer las relaciones entre ellos. La parte de ejecución, sin ser garantizada por la base orientadora adecuada, evidentemente, puede conducir únicamente a través de la vía de "ensayo y error".

La construcción del esquema (árbol de razonamiento), constituye la forma materializada de la representación de la base orientadora que, hace objetivar los datos y las relaciones entre ellos que se contienen en las condiciones del problema.

Debido a que nosotros, de manera decisiva, hemos cortado estas tendencias los escolares, muy rápidamente, se acostumbraron a pasar después de la escritura de las condiciones a la elaboración del esquema.

Los sujetos conocían las relaciones necesarias entre los elementos básicos de la situación, por eso, ellos comprendían qué tipo de hipótesis son posibles en las condiciones de cada problema concreto. Así, durante la solución del problema mencionado anteriormente, lo buscado (V3) puede ser encontrado solamente a través de dos vías: como la función de S3 y T3 o como la función de Vo, V1 y V2.

Durante la realización de la serie dada de los experimentos, nosotros les permitíamos a los sujetos verificar todas las hipótesis una por una. Posteriormente, nosotros hemos llegado a la conclusión que, para la generalización de las relaciones funcionales entre las magnitudes y, para la elección de la vía más racional de la solución del problema, es más útil, a partir del inicio mismo, modelar todas las vías posibles de búsqueda en el esquema.

Ante las propuestas secuenciales de las hipótesis posibles de los sujetos, inicialmente, los sujetos estaban intentando obtener la velocidad del tercer participante utilizando el "producto" (S3) y el tiempo de la participación. Intentando utilizar la fórmula correspondiente (V3 = S3 : T3), los sujetos veían que para esto era necesario encontrar S3. Este también puede ser obtenido a través de dos vías: 1) como la función de la velocidad y de tiempo del tercer participante y 2) como la función del "producto" general y de "productos" de otros participantes, es decir, como la parte de lo entero (general). La primera hipótesis se rechazaba rápidamente debido a que, la velocidad del primer participante del proceso es lo que se busca. La verificación de la segunda hipótesis condujo a la solución. Aquí pondremos un ejemplo del protocolo:

Variante A

I. V3 = S3:T3.

II. S3 = ? S3= **V3** x T3

III. V3 = ? V3 - es lo que se busca, no lo tenemos. Ese esquema se rechaza.

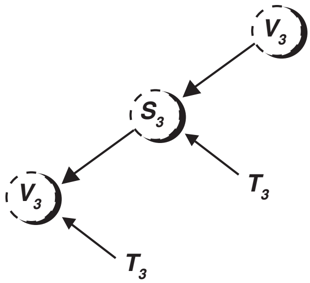


Figura 21

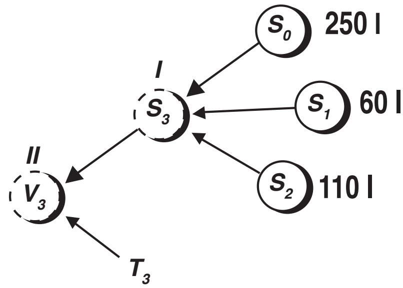


Figura 22

Variante B

I. $V_3 = S_3 : T_3$

II. $S_3 = ?$ $S_3 = S_0 - S_1 - S_2$

III. $T_3 = ?$ $T_3 = T_0$

Conclusión: El problema tiene 2 acciones (operaciones) (se señalan en el esquema f**igura 22:** I y II). Se inicia la solución. Los demás sujetos utilizaron la segunda vía, es decir, decidieron encontrar la velocidad del tercer participante como la función de la velocidad general y, de las velocidades de los otros participantes. En estos casos, los escolares hacían la escritura y representaban el esquema de los tipos aproximadamente siguientes **(figura 23).**

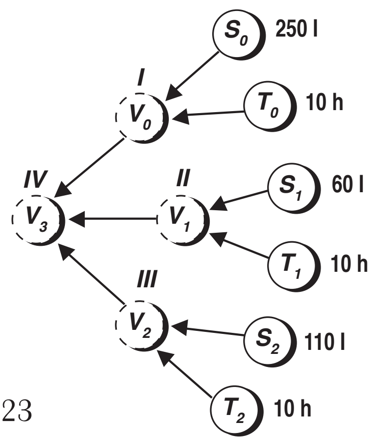


Figura 23

Variante C

I. $V_3 = V_0 - V_1 \quad V_2$

II. $V_0 = ? \quad V_0 = S_0 : T_0$

III. $V_1 = ? \quad V_1 = V_0$

IV. $T_1 = ? \quad T_1 = T_0$ (simultáneamente)

V. $V_2 = ? \quad V_2 = T_2$

VI. $T_2 = ? \quad T_2 = T_0$ (simultáneamente)

Conclusión: El problema tiene 4 acciones (se señalan en el esquema I, II, III y IV). Se inicia la solución.

Como observamos, esta vía no es racional, debido a que para el encuentro de lo que se busca se necesitan el doble de acciones que en el primer caso. Sin embargo, debido a que los sujetos aprobaron esta vía como la primera y ésta los condujo a la solución del problema, ellos no han modelado la segunda vía en el esquema y, consecuentemente, no podían elegir la vía más racional de las dos.

En el caso de la modelación simultánea, de todas las vías posibles de la solución en el esquema, los alumnos aprenderán con facilidad cómo elegir la mejor de ellas. Así, durante la solución del problema dado, el escolar, al identificar lo buscado (la velocidad del tercer participante en el proceso), de inmediato debe de señalar ambas vías posibles **(figura 24).**

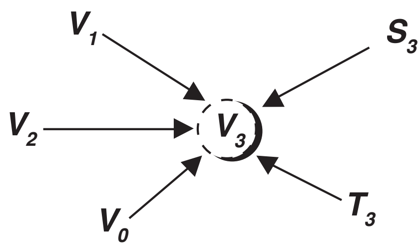


Figura 24

Posteriormente, al analizar las condiciones del problema y al señalar las vías posibles para el encuentro de las magnitudes necesarias, el alumno llega hasta el siguiente esquema **(figura 25).**

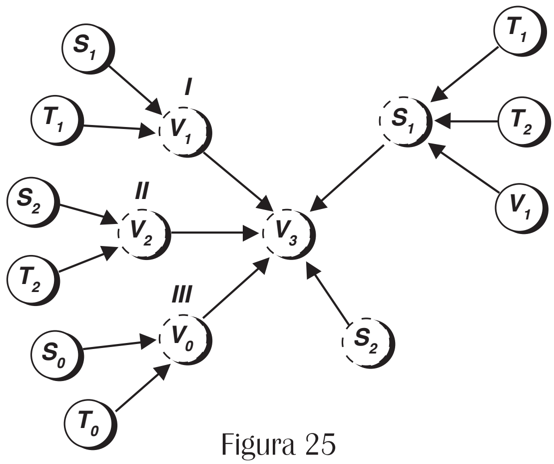


Figura 25

En este esquema, se ve fácilmente que la vía representada a la derecha de la buscada, es más corta que la vía representada a la izquierda.

Posteriormente, cuando el alumno asimile el método general para la solución y aprenda a utilizarlo mentalmente, él, evidentemente, podrá encontrar la vía racional muy rápido sin pasar por su mente todas las vías posibles. Sin embargo, para esto, durante la etapa de las acciones materializadas, él necesita modelar las vías de manera desplegada y representar todo de manera completa.

La efectividad del esquema dado para la solución se explica por el hecho de que éste modela simultáneamente, tanto la situación concreta del problema, como las relaciones generales de aquella esfera de la realidad con la cual se relaciona el problema. Materializando las relaciones, el esquema le permite al escolar representar cualquier tipo de la situación concreta de las relaciones como el caso particular de las relaciones generales que constituyen la esencia de la esfera dada.

Este esquema no contiene las operaciones de ejecución, pero ellas son conocidas para los sujetos y como tales, no representan para ellos ningún tipo de dificultad. Gradualmente, el esquema puede dejar de utilizarse como apoyo material. El mismo destino deben de poseer las fórmulas y, la colocación de los números en ellas, tienen que ceder el lugar a la transformación inmediata de los datos. Sin embargo, nosotros no hemos establecido el objetivo de alcanzar este nivel para la solución de problemas.

Precisamente con el apoyo en los esquemas, los alumnos solucionaban fácilmente los problemas que eran bastante complejos, identificando de manera muy segura, el sistema necesario de las relaciones y, realizando las transformaciones correspondientes. Debido a que la asimilación del método general para la elaboración del esquema de la solución, no producía dificultades en los sujetos, el trabajo posterior condujo, indudablemente, a la elaboración aún más segura y rápida de los esquemas y, a su elaboración para la solución.

La asimilación de los conceptos básicos, relacionados con la situación de la "acción conjunta" y del método general para la solución de los problemas para los "procesos", ocupó de 11 a 12 sesiones (de 30 minutos). La cantidad básica de las sesiones, se requirió para la asimilación de las nuevas relaciones que surgen en la situación de la acción conjunta.

El método general para la solución de los problemas complejos (elaboración del "árbol de razonamiento") se asimiló, por su parte, de manera bastante rápida en el nivel materializado: los escolares solucionaban, normalmente, sólo tres problemas. Nosotros no hemos seguido la vía de esta acción hasta llegar a la etapa de las acciones mentales.

Con esto se concluía la enseñanza de los escolares. Nosotros supusimos que los alumnos, al asimilar las magnitudes básicas que caracterizan a los procesos y las relaciones entre ellas, así como aprender a modelar estas relaciones en las condiciones de los problemas concretos (elaborar la base orientadora en la forma materializada) y realizar las transformaciones correspondientes (acciones de ejecución), podrían solucionar cualquier tipo de problemas para los "procesos".

III. Los experimentos de control y de comparación

Nosotros les hemos anunciado a los sujetos que ellos tendrán examen escrito.

Además, nosotros hemos dicho a los 12 sujetos que el examen se realiza con el objetivo de elegir, quién de ellos continuará las sesiones con nosotros. A los demás sujetos, simplemente se les dijo que ellos obtendrán las calificaciones (durante la enseñanza, nosotros no hemos puesto las calificaciones).

Las sesiones del control eran del siguiente tipo: escribir las fórmulas para algunas magnitudes en las condiciones dadas; verificar una serie de las fórmulas propuestas y solucionar dos problemas para la "acción conjunta".

Aquí está un ejemplo de la tarea del primer tipo:

> "Escribe la fórmula para el encuentro de la velocidad general de dos "participantes", cuando ellos "trabajan" simultáneamente y colaboran". Se dio el total de 10 tareas de este tipo, para cada uno de los sujetos que incluyeron casi todas las relaciones entre las magnitudes, tanto en la situación de un participante del proceso, como en la situación de la acción conjunta. Se elaboraron diferentes variantes de las tareas del tipo dado. En una de las variantes, los sujetos tenían que escribir las fórmulas siguientes:

1) Vo= V1+V2
2) T1= S1:V1
3) To= So:Vo
4) So= ToxVo
5) S1= So-S2
6) So= S1-S2+S3
7) T1= T2=T3=To
8) V1= Vo-V2
9) To= T1=T2
10) V1= S4:T4

Ahora pondremos los ejemplos de las tareas del segundo tipo:

"Verificar las fórmulas siguientes (tachar las fórmulas incorrectas y escribir junto las correctas):

1) S1= So+S2 (cuando trabajan amistosamente)
   (tiene que ser: S1= So-S2)
2) V2= S2:T2
3) To= T1 (cuando trabajan simultáneamente)
4) Vo= To:So (tiene que ser: Vo=So:To)
5) S1= TxV1 (tiene que ser: S1=T1xV1)
6) So= Vo:To (tiene que ser: So=VoxTo)
7) S2= So-S1"

Se proporcionaron los siguientes problemas para la "acción conjunta":

Problema 1. De dos ciudades, la distancia entre las cuales es de 540 km, salieron simultáneamente en la dirección, hacia el encuentro mutuo, dos trenes. Uno de ellos iba con la velocidad 40 km por hora. Los trenes se encontraron en 6 horas. Determinar la velocidad del segundo tren.

Problema 2. Hay que plantar 60 árboles. Si trabajará solamente el tercer grado, entonces, el trabajo se realizará en 3 horas; si trabajara solamente el cuarto grado, entonces, el trabajo se realizará en 6 horas. ¿Durante qué tiempo se realizará el trabajo, si trabajaran dos grados de manera conjunta?

Todas las tareas se realizaron de manera bastante exitosa. Durante la realización del primer grupo de las tareas, se cometieron solamente 6 errores, lo que constituye 3% de la cantidad general de las tareas de este tipo. Además, cabe señalar que, los mismos alumnos corrigieron los errores cuando el experimentador los señaló. Aproximadamente el mismo cuadro se observó para la ejecución de las tareas del segundo tipo.

El primer problema lo solucionaron todos los sujetos, además, casi la mitad de los sujetos inició la búsqueda a partir de la formula V2=S2:T2 y solucionó el problema con tres acciones (inicialmente, encontraron la distancia que hizo el primer tren; después: la distancia que hizo el segundo tren y, finalmente, la velocidad que se buscaba). Los demás sujetos iniciaron a partir de la fórmula V2= Vo-V1 y solucionaron el problema en dos acciones (encontraron la velocidad general y, después, restaron de ella la velocidad del primer tren). Después de la realización del trabajo de control, el experimentador le propuso a cada uno de los sujetos solucionar el problema a través de otra vía. Todos los sujetos lograron realizar esta tarea.

El experimentador no daba nada de instrucciones acerca de la construcción y de la utilización del esquema de la situación y del esquema de la solución. (A los escolares se les dijo: "Solucionen como sea más fácil para Ustedes"). A pesar de esto, 4 sujetos elaboraron el esquema de la situación y, 15 sujetos elaboraron el esquema de la solución en el cual señalaron todos los datos de las condiciones del problema. Los sujetos también anotaban las fórmulas que necesitaban para el proceso de la solución.

Durante la solución del segundo problema, algunos sujetos tuvieron dificultades para el reconocimiento de los "60 árboles". Este dato participa en las condiciones del problema en tres funciones: a) el "producto" de las acciones de los escolares del 3º grado; b) el "producto" de las acciones de los escolares del 4º grado y c) el "producto" general. Este problema tiene las diferencias esenciales de los problemas de la serie de la enseñanza por una particularidad más: en el problema se da el tiempo de la acción de cada participante en la situación de la acción aislada, mientras que se requiere de encontrar el tiempo en la situación de la "acción conjunta", es decir, el tiempo general. En la serie de la enseñanza no hubo problemas de este tipo. Todos los sujetos determinaron los datos en la condición del problema de la manera siguiente: 60 árboles como el "producto" general; 3 horas como el tiempo de la acción del primer participante; 6 horas como el tiempo de la acción del segundo participante y el tiempo buscado como el tiempo general. Todos, sin excepción, iniciaron la búsqueda con la formula To= So:Vo. Ninguno de los sujetos cometió el error muy típico, no solamente para los escolares de la escuela primaria, sino también de la escuela media: sumar el tiempo de cada participante del proceso para obtener el tiempo general.

Sin embargo, 7 sujetos no pudieron construir el esquema para la solución del problema, hasta que el experimentador les ayudó a representar el cuadro de las tres situaciones separadas en el tiempo.

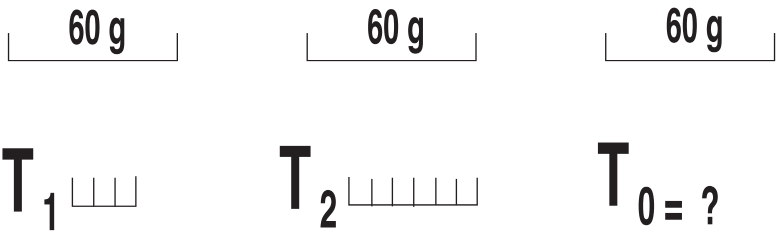


Figura 26

Esto les ayudó a los sujetos; ellos comprendieron que las primeras dos situaciones permiten conocer la velocidades de los participantes y, consecuentemente, también la velocidad general. Posteriormente, el problema se solucionaba con facilidad. Los demás sujetos lograron solucionar el problema exitosamente. Ellos necesitaron sólo una pregunta directora del experimentador: "¿Tu encontraste todo acerca de los participantes?". Antes de esto, los sujetos ya han establecido que S1=60 árboles y que S2=60 árboles. Teniendo S1 y T1, S2 y T2, ellos de inmediato tomaban la decisión de encontrar las velocidades de los participantes del proceso y de sumarlas para obtener la velocidad general.

La ejecución de las tareas del primer y del segundo grupos mostró que los conceptos básicos (S, T y V), y las relaciones entre ellos, se asimilaron por parte de los sujetos en el plano mental. Sin embargo, durante la solución de los problemas, los escolares utilizaban la materialización parcial (elaboraban el esquema de la situación descrita en el problema y el esquema de la solución) y las acciones verbales externas.

Así, el plano de la solución se señalaba en el esquema de la solución con ayuda de la escritura de una serie de las fórmulas, o, a veces, con ayuda del lenguaje oral.

De esta forma, el método general de la solución básicamente se asimiló sólo a nivel de las acciones materializadas pero, en este caso, los escolares trabajaron de manera segura y, en general, solucionaron los problemas exitosamente.

Nosotros hemos realizado el experimento de comparación con 72 alumnos del nivel promedio de calificaciones (éxitos escolares) tomando 18 escolares de los grados 4º, 5º, 6º y 7º y proponiéndoles las tareas del tercer grupo, es decir, dos problemas mencionados anteriormente. A los escolares de grados 4º y 5º se les dieron tareas complementarias para la determinación del tiempo del transcurso de los procesos conocidos para ellos (movimiento y trabajo), del resultado del proceso y de su tiempo. El experimento individual se realizó de manera separada con los 5 escolares de 4º grado y con 8 escolares de 5º grado. Los demás escolares realizaron las tareas por escrito, como el trabajo de control en su salón. De los escolares con los que nosotros hemos trabajado de manera individual, sólo un alumno de 5º grado solucionó el problema Nº 1. El argumentó cada acción y, de inmediato, inició la solución sin algún tipo de ensayo.

Los datos acerca de todos los sujetos se representan en la tabla siguiente.

Tareas	**La cantidad de tareas propuestas en la clase**	**Realización correcta**				**Total**
		IV grado	**V grado**	**VI grado**	**VIII grado**	
Problema 1	18	4 (22%)	7 (39%)	8 (44%)	4 (22%)	3 (16%)
Problema 2	18	4 (22%)	(33%)	10 (50%)	3 (17%)	3 (16%)
Problema 3 (determinación de magnitudes básicas)	54	6 (30%)	7 (50%)	-	-	3 (40%)

Como vemos, la mayoría de los sujetos no logró solucionar el problema.

A los alumnos de los grados 5º y 6º se les permitió solucionar también a través de los métodos algebraicos. Sin embargo, sólo un alumno de 7º grado solucionó el problema con ayuda de la ecuación:

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{x}$$

Para los alumnos, con los que hemos trabajado de manera individual, nosotros hemos dibujado en el pizarrón el esquema de la situación para el problema Nº 1. En el caso de dificultades, nosotros proporcionábamos las mismas preguntas complementarias, las que hemos proporcionado a nuestros sujetos, pero esto era de poca ayuda.

Los escolares realizaban diferentes pruebas, en relación de las transformaciones de números, sin tener algún tipo de plan para la búsqueda. Aquí hay algunos ejemplos:

Problema Nº 1:

– 350 km: 40

– 40 km x 6 = 240 km; 540 : 240 km, etc.

Problema Nº 2:

– 3 horas + 6 horas = 9 horas; 60 : 9 horas, etc.

Los escolares de los grados 4º y 5º, como ya se señaló, obtuvieron la tarea para determinar: qué es la velocidad, en particular, la velocidad del movimiento; de acuerdo a qué datos se calcula la distancia y el tiempo que se necesita. A pesar de que en la escuela a partir de 3º grado, los escolares han solucionado los problemas para el movimiento, ellos presentaron dificultades para definir estos conceptos. Como se ve en la tabla, las respuestas correctas se obtuvieron sólo en 43 casos del total de 108.

De esta forma, la serie comparativa de los experimentos, mostró que la mayoría de los escolares de los grados medios e incluso superiores, ante la metódica existente de la enseñanza de los problemas aritméticos para los “procesos”, no posee las habilidades correspondientes con el grado suficiente de la conciencia y de la generalización. La metódica, propuesta por parte de nosotros, permitió poseer el método general para la solución de los problemas de la clase dada, incluso a los alumnos que se consideraban como débiles para las matemáticas.

* * *

Nuestra hipótesis, acerca de la posibilidad para formar las habilidades generales, para la solución de los problemas de la clase dada al garantizar la base orientadora completa y generalizada de las acciones y, la formación de dichas acciones por etapas, se demostró. Todos los sujetos poseyeron el método proporcionado por nuestra parte, para la solución de los problemas para los "procesos" y, lo utilizaron exitosamente, para diferentes situaciones particulares. Además, nuestros sujetos obtuvieron los conocimientos necesarios, durante el proceso de la ejecución de las acciones adecuadas del pensamiento. Ellos no memorizaban mecánicamente ni una sola fórmula y ni una sola regla para el encuentro de las magnitudes dadas, pero, en cualquier momento, podían determinar estos conceptos y descubrir el sistema de sus relaciones.

Es importante señalar un hecho más. Antes del experimento, todos los sujetos tenía una relación negativa hacia la solución de los problemas; a ellos no les gustaba solucionarlos. La enseñanza, de acuerdo a nuestra metódica, produjo en los niños un gran interés hacia las matemáticas. En cada sesión ellos querían solucionar –posiblemente– más problemas. Después de las primeras 2 ó 3 sesiones, ya desaparecieron la distracción, falta de atención y la lectura superficial de las condiciones de problemas.

Después del "examen" (experimento del control), nosotros les hemos informado a los sujetos que la forma de nuestras sesiones se cambia: ellos mismos tendrán que buscar y solucionar problemas de los manuales de los grados superiores y, entregarnos las soluciones para el control. Todos los alumnos del grupo experimental le entregaron al experimentador los problemas solucionados de manera independiente y correcta. Los escolares no elaboraban el esquema para la solución, señalaban el orden de la solución con fórmulas y el paso determinado de la forma materializada a la forma verbal.

Las soluciones complementarias de los escolares eran el indicador de su interés sincero hacia la solución de los problemas. A nadie se le pedía que lo hiciera; no se les ponía calificación; a nadie se le recordaba acerca de los problemas y nadie controlaba el proceso de su ejecución. La asimilación del método de la elaboración de la base orientadora completa, necesaria para el encuentro de la solución correcta de los problemas de la clase dada, les permitió a los alumnos de manera independiente y exitosa, solucionar incluso los problemas más complejos.

En la práctica existente de la enseñanza, la estructura de la base orientadora de las operaciones ejecutivas no se identifica; a los escolares no se les enseña cómo orientarse en las condiciones que se incluyen en ella. La identificación independiente y la asimilación de estas condiciones resulta ser accesible sólo para algunos alumnos. En el resultado, la mayoría de los escolares no poseen el método general para la solución de los problemas aritméticos.

Para la asimilación del método general tiene un gran significado el esquema que, modela las relaciones entre las magnitudes; ayuda a elaborar fácilmente el plan para la solución y a elegir la vía más racional.

Cabe señalar que la metódica de la enseñanza de la aritmética propone utilizar los esquemas de la solución sólo en el caso de los problemas no típicos[6]. Sin embargo, en este caso, los esquemas tampoco obtuvieron su reconocimiento en la práctica escolar debido a que, los esquemas que se proponen duplican la solución misma por lo que constituyen una representación inútil y complicada de la solución ya una vez encontrada y no la vía para su búsqueda. Pondremos el ejemplo de un esquema propuesto por E.M. Semionov para la solución de problemas para el encuentro de la suma. (Por ejemplo, tenemos el siguiente problema: "En un estante hay 7 libros y, en el otro, hay 5 libros más. Cuántos libros hay en el segundo estante?"). No es difícil ver que elaborar el esquema presentado posteriormente se puede solamente cuando ya se encuentra la solución: para obtener la respuesta de la pregunta del problema hay que sumar un número con el otro[7].

6 Ver: Popova N.S. Metódica de la enseñanza de la aritmética. Moscú, 1954.

7 Ver: Semionov E.M. Las matemáticas. 1er. grado. Metódicas para los maestros. Sverdlovsk, 1963.

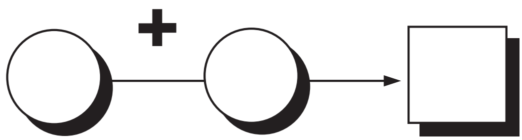


Figura 27

En el experimento de la enseñanza, nosotros hemos utilizado el esquema como el medio para el establecimiento de las dependencias entre las magnitudes que, por su parte, señalaban también el método para la solución.

Mostraremos, con un ejemplo, diferentes posibilidades de dos esquemas en la solución del problema.

Problema: "Si a una vaca le dan 10 kg de heno por día, entonces el heno preparado va alcanzar para 120 días. Para cuántos días va alcanzar el heno, ¿si le dan a la vaca 2 kg más por día?"[8].

El autor del libro propone el esquema siguiente (de acuerdo a L.M. Fridman) (Figura 28). El autor dice que, después de la utilización de este esquema, el escolar podrá solucionar el problema. ¿Cómo elaborar el esquema?, esto no se explica.

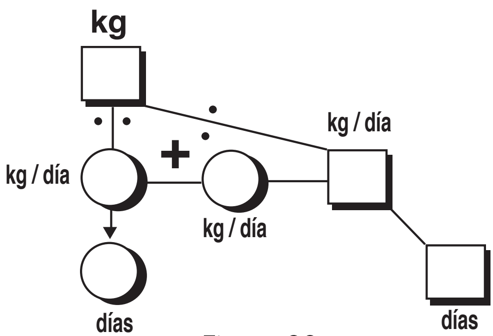


Figura 28

8 El problema se retoma del libro de Semionov E.M. Los ejercicios aritméticos como el medio para la formación del pensamiento lógico en los escolares de la escuela media. (La solución de los problemas aritméticos. I - IV grados. Metódicas para los maestros. Sverdlovsk, 1963.

(En el esquema los círculos determinan lo conocido y los cuadrados lo desconocido). Aquí está el esquema elaborado de acuerdo a nuestro método:

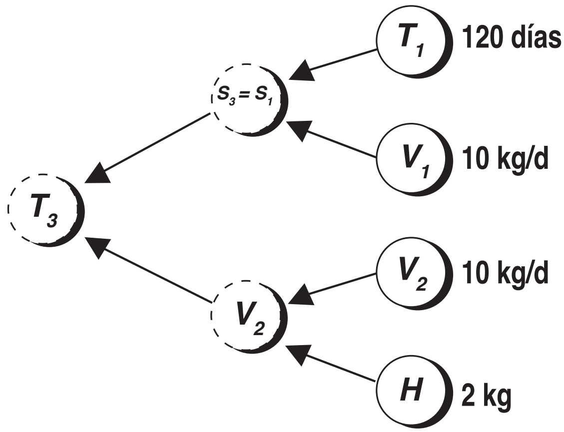


Figura 29

El esquema se elabora de acuerdo al principio funcional: lo que se busca se representa como la función de algunos argumentos.

Este esquema lo podían elaborar nuestros alumnos y sobre su base encontrar la solución del problema.

En el esquema de L.M. Fridman no se identifican las relaciones entre los elementos de la situación y, lo que es lo más importante, a los escolares no les enseñan a comprender estas relaciones y utilizarlas durante la solución del problema.

Finalmente, en este esquema se señalan los datos concretos que tienen lugar en el problema. Consecuentemente, este esquema no puede servir como modelo para el análisis de otros problemas relacionados con la comprensión de otros procesos concretos.

Nosotros, a partir del inicio mismo de la enseñanza, hemos utilizado los símbolos que participaban en calidad de portadores de los significados generales que se encuentran detrás de ellos y, permitían orientarse durante el análisis de cualquier proceso.

La ventaja de la enseñanza a través de la formación, antes que nada, de la base orientadora de las acciones, consiste en el hecho de que ella garantiza la comprensión del sistema dado de las relaciones y, consecuentemente, su traducción adecuada al idioma de las acciones aritméticas. Las acciones aritméticas como tales (parte de ejecución) no presentaban dificultades para los escolares durante la solución de los problemas complejos, porque eran las mismas acciones. Las dificultades en la solución de los problemas consiste no en la realización de las acciones (operaciones) aritméticas, sino en su utilización adecuada.

Los datos obtenidos, nos hacen dudar del carácter correcto de la búsqueda de la base para la clasificación de los problemas aritméticos en las acciones ejecutivas. La lógica de las acciones de la ejecución, se determina por la lógica de las relaciones que se representan en las condiciones del problema.

Precisamente las particularidades de estas relaciones (y no el tema y tampoco las acciones aritméticas) se tienen que encontrar en la base de la clasificación de los problemas aritméticos.

El objetivo principal de la enseñanza tiene que consistir en el descubrimiento de estas relaciones para el alumno; en la formación de la base orientadora completa y adecuada de las acciones ejecutoras en él y, no en el entrenamiento solamente de su parte ejecutiva.

Actualmente, nosotros realizamos estudios sobre la generalización posterior del método considerado. El análisis previo mostró que, los problemas para los “procesos” y los problemas para “compra - venta” poseen un sistema idéntico de relaciones y, que, la diferencia consiste únicamente en el plano concreto objetal, lo cual, en este caso, no es lo esencial. Nosotros pensamos que puede encontrarse el método para el análisis que les permitirá a los escolares acercarse a estas dos grandes clases de problemas aritméticos, como a las variedades del mismo tipo de problemas.

Además, se abre la posibilidad de pasar el método considerado al curso de física, en el cual éste puede ser aplicado exitosamente para el estudio no solamente del movimiento, sino también de presión, de peso y de otros conceptos físicos.

Capítulo 4
La formación de las habilidades que se encuentran en la base de la demostración geométrica

G. A. Butkin

Objeto de la investigación

El presente trabajo pertenece al ciclo de investigaciones realizadas, sobre la base de los principios metodológicos de la teoría de formación de acciones y conceptos mentales de P. Ya. Galperin.

El objeto de nuestra investigación era el problema de las demostraciones en el curso inicial de geometría.

La asimilación de la geometría presupone no sólo el dominio del sistema de conceptos geométricos sino también, una serie de otras habilidades diferentes, entre las cuales, la habilidad para demostrar es la más importante.

Es ampliamente conocido que los escolares de la educación media, normalmente, no poseen dicha habilidad. Los alumnos no sólo no pueden solucionar las tareas para demostraciones y demostrar los teoremas de manera independiente sino, tampoco, son capaces de realizar la reproducción simple de la demostración de un teorema conocido para ellos, si éste se acompaña por el dibujo con otras letras o, si el dibujo se encuentra en alguna posición diferente.

En nuestra investigación, sobre la base del análisis de la habilidad para demostrar, se hizo un intento para descubrir su contenido e identificar sus componentes, así como organizar su asimilación.

El problema interesante para nosotros constituye el objeto de la atención no sólo de los maestros de geometría, de los metodólogos y matemáticos sino, también, de los psicólogos. Sin embargo, en la literatura metodológica y psicológica nosotros no encontramos investigaciones, cuyos autores se hubieran acercado a dicho problema desde el punto de vista del análisis de la habilidad para demostrar y de la identificación de los componentes del contenido de sus acciones y operaciones. Por otra parte, en estas investigaciones tampoco se descubrió el contenido de aquel proceso, cuyo resultado es la asimilación de la habilidad para demostrar.

La realización de la demostración geométrica, es posible sólo con la condición de que los escolares dominen un sistema previo de conocimientos y habilidades geométricas.

La ausencia de los conocimientos necesarios para la solución de las tareas o, su mala calidad, produce en los alumnos diferentes tipos de dificultades. Frecuentemente, este hecho se ha señalado en la literatura metodológica de geometría. En los trabajos de V. I. Zikova y E. N. Kabanova-Meller, éste mismo hecho se sometió a una investigación especial. En particular, éstos autores han demostrado fehacientemente que, la falta de la habilidad para solucionar los problemas puede estar relacionada, por ejemplo, con el hecho de que en los escolares se formó un concepto, o sea muy amplio o sea muy estrecho, de una u otra figura geométrica (8), con una asimilación insuficientemente generalizada del teorema (10) o con la ausencia de conceptos sistematizados (7), etc.

De esta forma, la formación de un sistema completo y válido de los conceptos geométricos iniciales es muy importante, sin embargo, sólo constituye una condición previa para la solución exitosa de los problemas para demostración. La habilidad para solucionar los problemas, es la habilidad de utilizar los conocimientos que ya poseen los escolares, de acuerdo a las condiciones concretas del problema o del teorema.

En relación con esto llama la atención la idea de una serie de matemáticos y metodólogos, acerca de la regulación de la actividad mental en el proceso de la demostración, a través de un sistema de reglas, indicaciones, consejos, etc. (Zh. Adamar (1), D. Poya (12), N. N. Iovlev (9), A. Sontsov (13) y otros).

El reflejo más completo del punto de vista mencionado se encuentra en las investigaciones de L. N. Landa (11). Este autor mostró que las dificultades de los alumnos para demostrar, pueden estar relacionadas no sólo con la ausencia de los conocimientos necesarios para la demostración o con su mala calidad, sino también, con la incapacidad de aplicar correctamente estos conocimientos y analizar correctamente la tarea.

En relación con esto, dicho autor propone, en el proceso de solución de las tareas de demostración proporcionarles a los estudiantes el "método de razonamiento". Para garantizar la formación del método señalado L. N. Landa recomienda, a los escolares, utilizar una regla especial que descubre el contenido y la secuencia del análisis de la condición de la tarea. La regla incluye en sí las siguientes recomendaciones: observar qué es lo que se da y lo que hay que demostrar; hacer las conclusiones a partir de lo que se da; recordar todas las características conocidas de las figuras y compararlas con lo que se da y también con el dibujo; identificar los elementos en el dibujo y aclarar qué otra cosa pueden ser, etc. Hablando acerca del contenido de diferentes puntos de la regla, es necesario señalar que a los escolares se les recomienda realizar acciones que representan habilidades bastante complejas. La formación de estas habilidades requiere de la utilización de una metódica específica y de un sistema especial de ejercicios.

Evidentemente, esto hace dudar acerca del beneficio de la formación del "método de razonamiento" en los escolares, sin el trabajo previo con aquellas acciones como, por ejemplo, la deducción de las consecuencias de aquello que se da en las condiciones o, de la conducción de los fenómenos geométricos dados en las condiciones hacia el sistema de las características de los conceptos que se buscan, etc.

Sin duda, la utilización de este tipo de reglas es necesaria y útil, pero sólo como el medio de regulación del proceso de la aplicación de las acciones ya formadas. En el estudio de N.L. Landa, se observa que, la formación de estas acciones, en general, no se considera.

De esta forma, en las investigaciones dedicadas al problema de la demostración, las acciones que constituyen el contenido de la habilidad para demostrar no se identifican, o en el caso de que se identifiquen, no participan en calidad del objeto especial de asimilación.

La demostración de un teorema (o la solución de un problema de demostración) consiste, como se sabe, en argumentación de la posición del teorema dado a través de axiomas, de conceptos determinados o de posiciones geométricas demostradas anteriormente. Sin embargo, para aclarar el hecho de qué es lo que representa la habilidad para demostrar, es necesario saber qué acciones y operaciones tiene que realizar el alumno para que se de esta argumentación.

Como se sabe, un teorema geométrico (así como un problema de demostración) consiste de las condiciones y de la conclusión. Existe una categoría bastante amplia de teoremas, cuya demostración consiste en la argumentación de la presencia de uno u otro concepto geométrico en las condiciones de estos teoremas. Demostrar un teorema de este tipo significa conducir los fenómenos geométricos dados en sus condiciones hacia el concepto que se busca, es decir, verificar si poseen o no los fenómenos geométricos, dados en las condiciones, todas las características necesarias y suficientes del concepto que se busca, que se encuentra en la conclusión. El carácter de las operaciones de la verificación depende del conjunto de diferentes condiciones, entre otras cosas, también de la estructura lógica del concepto que se busca.[9] Ante la estructura conyuntiva de las características, para la demostración, tienen que ser descubiertas todas las características necesarias y suficientes del concepto. Por el contrario, ante la estructura disyuntiva de las características, la operación de la verificación se limita por el descubrimiento por lo menos de una de estas características.

Evidentemente, la conducción hacia una de las características requiere el establecimiento previo del hecho de qué característica precisa del concepto geométrico que se busca, tiene que ser utilizada en cada caso concreto.

9 Con la estructura lógica de las características del concepto nosotros comprendemos las relaciones internas entre estas características que se determinan por la conjunción lógica que las relaciona entre sí.

De esta forma, ante la estructura disyuntiva de las características del concepto geométrico que se busca, la acción de la conducción se mediatiza a través de la acción de la elección. Además, en la estructura del proceso de la demostración, esta acción participa en calidad de la condición previa necesaria para la realización de la acción básica: la conducción.

Los conceptos geométricos que se buscan, pueden tener, no uno, sino varios sistemas de características suficientes y necesarias, cada uno de los cuales da la posibilidad para verificar la presencia del concepto geométrico que se busca en las condiciones del teorema (o del problema de demostración). Naturalmente, sin conocer estos sistemas, la acción de la conducción y, consecuentemente, el proceso mismo de demostración no pueden realizarse. El dominio de la acción de conducir (en el caso de la estructura disyuntiva de las características, también la acción de elegir), el conocimiento de los sistemas de las características de los conceptos geométricos que se buscan son las condiciones indispensables para la realización exitosa de la demostración geométrica.

Sin embargo, ambas condiciones mencionadas no son suficientes.

Las características del concepto geométrico que se buscan se encuentran en las condiciones en forma mediatizada, es decir, se dan a través del sistema de otros conceptos. Además, el grado de la mediatización puede ser diferente, lo que constituye uno de los indicadores más importantes de la complejidad del teorema. Consecuentemente el alumno que, inclusive domina correctamente la acción de conducir hacia el concepto y conoce las características suficientes y necesarias del concepto que se busca, puede no saber cómo encontrarlas, es decir, cómo detrás de un sistema de conceptos encontrar el sistema de otros. Por ejemplo, para demostrar que las bisectrices de los ángulos adyacentes son recíprocamente perpendiculares, es necesario aclarar si detrás de los conceptos "ángulos adyacentes" y "bisectriz" se esconden las características de las rectas perpendiculares (dos líneas rectas que forman ángulo recto). Para esto es necesario "desplegar" estos conceptos, es decir, de los conceptos "bisectriz" y "ángulos adyacentes" deducir las consecuencias necesarias. El análisis realizado nos permite hablar sobre los siguientes componentes que forman parte de la habilidad de demostrar.

1. La acción de conducir los fenómenos geométricos hacia el concepto. Demostrar, significa establecer si los fenómenos geométricos dados en las condiciones poseen las características necesarias y suficientes del concepto que se busca.
2. El conocimiento de los sistemas de las características necesarias y suficientes de los conceptos geométricos que se buscan.
3. La habilidad de desplegar las condiciones, obtener el sistema de sus consecuencias y descubrir las características del concepto que se busca detrás de los conceptos que se encuentran en las condiciones.

Las acciones identificadas por nosotros son el resultado del análisis lógico de la habilidad para demostrar. El dominio de la habilidad dada, presupone la asimilación de estas acciones por parte de los escolares.

Hay que señalar que, la acción de conducir hacia el concepto se utilizaba también en las investigaciones realizadas anteriormente basadas en la metódica de la formación de las acciones mentales por etapas. Sin embargo, esta acción participaba sólo como medio de la formación de diferentes conceptos (2), (3), (5). En particular, en las investigaciones dedicadas a la formación de los conceptos geométricos iniciales (6), (14), el problema de la demostración no era el objeto específico del estudio. No obstante, entre estos trabajos hay dos que tienen relación directa con el problema que nos interesa.

En estos trabajos se mostró la posibilidad de utilizar la acción de conducir hacia el concepto en las condiciones más complejas. Consecuentemente, los resultados de dichos estudios hablan acerca de la existencia de una relación estrecha entre, la habilidad de los escolares para apoyarse en el conjunto de las características esenciales durante la conducción de uno u otro fenómeno geométrico hacia el concepto y, la habilidad para solucionar los problemas de demostración.

A la luz de los resultados de nuestro análisis de la habilidad para demostrar, el contenido de esta relación se aclara.

Proporcionarles a los escolares el conocimiento de las características esenciales de los conceptos geométricos que se buscan y, la habilidad para conducir diferentes fenómenos geométricos hacia el concepto es, al mismo tiempo, proporcionarles los componentes de la habilidad para demostrar. Consecuentemente, cuando los sujetos se encontraban con problemas de demostración, ellos ya poseían parcialmente la habilidad para demostrar: ellos sabían que demostrar significa establecer si las figuras dadas poseen o no el sistema de características necesarias y suficientes de los conceptos que se buscan.

Se puede suponer que los problemas hubieran sido resueltos de manera aún más exitosa (especialmente en la segunda de las dos investigaciones descritas posteriormente), si nosotros hubiéramos realizado el trabajo también con el tercer componente de la habilidad para demostrar. Para verificar si los componentes básicos de la habilidad para demostrar se han identificado correctamente, es necesario establecer si los escolares (después de aprenderlos) serían capaces o no de mostrar los teoremas y solucionar los problemas de demostración de manera independiente. Para esto es necesario garantizar la asimilación completa y válida de los componentes señalados.

Todo lo anterior precisamente era el objeto de nuestra investigación experimental.

Metódica

Para la elaboración de la metódica, nosotros partimos de las posiciones básicas de la teoría de la formación de las acciones y los conceptos mentales elaborada por P.Ya. Galperin y sus colaboradores.

En una serie de investigaciones concretas dedicadas a la formación de los conocimientos aritméticos, gramaticales y otros, se mostró que, la realización de los principios metodológicos de la teoría dada garantizan, en la enseñanza, la posibilidad para dirigir el proceso de la asimilación, es decir, permiten formar los conocimientos que se programan anteriormente de manera completa y válida (4), (5), etc.

Nosotros hemos retomado los problemas geométricos elementales y los teoremas de igualdad en calidad del material experimental.

De acuerdo a lo expuesto anteriormente era necesario garantizar:

1) **la asimilación en los escolares de la acción de conducir hacia el concepto de la igualdad y, la comprensión del hecho de que, demostrar significa precisamente realizar la conducción hacia el concepto de la igualdad;**

2) **la asimilación de las características de la igualdad de las figuras geométricas;**

3) **el dominio de la acción de desplegar las condiciones y, de la habilidad para encontrar en ellas, las características necesarias y suficientes de las figuras que se buscan.**

En nuestro experimento los sujetos eran 20 alumnos de quinto grado de la escuela media (que no habían estudiado geometría). La formación de conceptos se realizó especialmente sobre la base del material de tareas tales, en los que las características que se buscan de los conceptos fueron dados en forma abierta. Para la realización de las tareas no se exigía la realización de una búsqueda especial de signos significativos. Se daba, por ejemplo, la siguiente tarea: "Aparecen dos radios. Uno parte del punto A, el otro del punto B. ¿Forman estos radios un ángulo?". Para la realización de esta tarea es suficiente comparar los resultantes en sus condiciones; los fenómenos geométricos con los signos del ángulo (dos radios, parten de un mismo punto).

Después que a los escolares se les formaron todos los conceptos previstos en la investigación dada, se les propuso una serie de tareas de control en las cuales, para poder hallar las características significativas de los conceptos, fue necesario realizar determinado cambio en las condiciones. Resultó que los escolares realizaron exitosamente dichas tareas. Así, en el 95% de los casos las respuestas dadas fueron correctas, es decir, las características significativas fueron encontradas. No obstante que el nivel de mediatización de las características significativas fue pequeño, es decir, las tareas en sí mismas no eran difíciles (para poder responder era necesario realizar uno o dos razonamientos). Hay que reconocer que eran tareas que exigían la habilidad de realizar demostraciones sencillas.

En otra investigación, realizada por N.F. Talizina, conjuntamente con el autor de este trabajo, a los experimentados por esta metodología se les formó el mismo grupo de conceptos geométricos. No obstante a diferencia de la investigación anterior, en la serie de control se les propuso a los participantes tareas más complejas: su complejidad radicaba en que las características del concepto que se busca fueron presentadas en una forma aún más "oculta". Para poder solucionar las tareas era necesario utilizar no sólo las características del concepto señaladas en las condiciones de la tarea, sino también, las consecuencias de éstas. Para solucionar dichas tareas se exigía hacer no uno o dos razonamientos, sino tres y cuatro. Resultó, que los experimentos pudieron resolver estas últimas, aunque su solución se desarrolló con facilidad como tuvo lugar en la serie de control de la investigación anterior. En una serie de casos, a los experimentados les surgían dificultades relacionadas con la ausencia de algunos conocimientos geométricos previos o, por la incapacidad de ellos de poder encontrarlos en las condiciones concretas de las tareas.

De acuerdo a sus éxitos escolares, la composición de los sujetos era la siguiente: 18 alumnos con calificaciones regulares, uno con calificaciones bajas y uno con calificaciones excelentes.

El contenido de la parte de la enseñanza del experimento consistía en la formación de estos componentes de la habilidad para demostrar. Pero para acercarse a su formación, era necesario formar anteriormente en los alumnos, un sistema estrictamente determinado de conocimientos y habilidades geométricas iniciales, en el cual se basaban los teoremas y problemas elegidos por nosotros. El contenido de este sistema se reducía, a la formación en los escolares, de los conocimientos y las habilidades siguientes:

1. Los escolares tenían que asimilar los conceptos geométricos iniciales: línea recta, ángulo, triángulo, la bisectriz del ángulo, rectas perpendiculares, ángulos adyacentes, complementarios y opuestos por el vértice, así como ángulos opuestos por el lado y los unilaterales[10].
2. Era necesario presentarles a los sujetos las características de los ángulos adyacentes (la suma de los ángulos adyacentes es 180º) y las caracterís-

10 La formación de los conceptos de los ángulos opuestos por el lado, correspondientes y unilaterales, estaba relacionada con algunas tareas complementarias realizadas en el experimento dado. Los detalles se presentarán más adelante.

ticas de la línea recta (la recta es la distancia más corta entre dos puntos, a través de dos puntos se puede trazar una línea recta y sólo una).

3. A los escolares se les enseñó la acción con segmentos y ángulos.

El trabajo con los alumnos se realizó con el sistema de conocimientos y habilidades previos de acuerdo a la metódica de la formación de acciones mentales. Debido a que esta metódica se describió en las investigaciones de P.Ya. Galperin y N. F. Talizina, en forma detallada, nosotros no la presentaremos. Señalaremos solo los aspectos principales que garantizan la dirección del proceso de formación de los conceptos.

1. Elección de la acción adecuada.

En nuestra investigación, así como en otras investigaciones anteriores, dicha acción era la de conducir los fenómenos geométricos hacia el concepto que se está formando.

2. Encontrar la forma material (materializada) inicial de la acción dada y la construcción de la acción en esta forma.
3. Descubrir –ante el alumno– la composición de las operaciones de la acción dada, el orden de su realización y las reglas para la evaluación de los resultados obtenidos después de la realización de la acción.
4. Realizar el trabajo por etapas en la acción, con el objetivo de pasarla al plano interno (mental).
5. Realizar el control de las operaciones de la acción en todas las etapas de su realización.
6. Elegir el material especial para poder aplicar las características del concepto que se está formando, así como determinar la secuencia de presentación de este material a los escolares.

Después de trabajar con el sistema de conocimientos geométricos previos, nosotros hemos iniciado enseñarles a los alumnos la habilidad para demostrar. La enseñanza se inició con la formación del concepto de igualdad geométrica.

El medio para la formación de este concepto (así como de los conceptos previos) era la acción de conducir diferentes figuras hacia el concepto de la igualdad geométrica. Inicialmente, todos los componentes de la acción se presentaban en forma materializada, posteriormente la acción se realizaba en forma oral en alta voz y, finalmente, se realizaba el trabajo en el plano interno, mental.

Durante todas las etapas de la elaboración de la acción dada, se controlaba la realización de cada una de sus operaciones.

Nosotros hemos retomado las siguientes características de la igualdad.

1. Dos figuras son iguales entre sí, si coinciden al sobreponerlas.
2. Dos figuras que consisten de la misma cantidad de segmentos, son iguales entre sí cuando al sobreponerlas, todos los puntos límites de los segmentos de una figura coinciden con los mismos de la otra figura.
3. Dos figuras son iguales entre sí, cuando, cada una de ellas es igual a una tercera figura geométrica.
4. Si de dos segmentos iguales (o ángulos) restamos segmentos iguales (o ángulos) se obtienen dos segmentos iguales (o ángulos).
5. Si a dos segmentos iguales (o ángulos) sumamos segmentos iguales (o ángulos) se obtienen dos segmentos iguales (o ángulos).

Durante la elaboración del sistema de las características de la igualdad, nosotros hemos intentado darle aquella forma que permitiera la posibilidad de su utilización, con diferentes clases de figuras.

Hay que subrayar que en los manuales escolares de geometría, una serie de características de igualdad, en general, no se señala, a pesar de que la demostración de muchos teoremas del curso inicial de geometría requieren su conocimiento y utilización. Con esas características se pueden relacionar, por ejemplo, las siguientes: dos figuras son iguales, si ellas por separado son iguales a una tercera figura; si a dos segmentos iguales (o ángulos) sumamos un segmento igual (o ángulo) se obtienen dos segmentos iguales (o ángulos). Por otra parte, algunas características de igualdad se introducen en relación con un solo tipo particular de figuras, mientras que ellas pueden utilizarse en diferentes casos. Por ejemplo, aquella característica como la coincidencia de los puntos límites de segmentos, se utiliza sólo para la determinación de la igualdad de los segmentos, se emplea solo para la determinación de la igualdad de los segmentos, sin embargo, puede ser utilizada para la determinación de la igualdad de triángulos y polígonos en general. La introducción de las características generalizadas excluye la necesidad de memorizar una gran cantidad de características concretas de igualdad. Una misma característica de igualdad proporcionada en forma generalizada, puede ser utilizada para la demostración de teoremas diferentes de acuerdo a su contenido, que se relacionan con partes totalmente diferentes del curso de geometría. Además de la identificación de las características de la igualdad geométrica nosotros les hemos presentado a los escolares la estructura de las operaciones de la acción de conducción. Los escolares obtenían las indicaciones precisas acerca de qué operaciones y en qué secuencia ellos tenían que realizar. También se daban las indicaciones correspondientes relacionadas con la forma necesaria de la valoración de los resultados de la acción con las características de igualdad.

En investigaciones anteriores dedicadas a la formación de conceptos geométricos iniciales, así como durante la formación de los sistemas de conceptos previos en esta investigación, los alumnos trabajaron con la estructura conyuntiva de las características de los conceptos que se están formando. Durante la conducción de uno u otro fenómeno geométrico hacia el concepto que se busca, los alumnos tenían que basarse constantemente en todo el conjunto de sus características.

El concepto de igualdad geométrica tiene una estructura disyuntiva. Consecuentemente, para poder determinar si las figuras dadas en las condiciones son iguales o no, es necesario encontrar en ellas por lo menos una de las características de la igualdad. Para ello, es necesario realizar una verificación secuencial de cada una de las características desde el punto de vista de la posibilidad de su utilización para las condiciones de uno u otro teorema.

En nuestra investigación, a los escolares se les proporcionaron todas las características de igualdad simultáneamente. En relación con esto, a la utilización de la característica para las condiciones del teorema (o el problema) tenía que anteceder su elección en el sistema de características equivalentes de igualdad. La acción de la elección presupone la presencia de un sistema especial de orientaciones, que garantiza su realización exitosa. Sin embargo, durante la formación de conceptos geométricos de igualdad, nosotros no hemos identificado las orientaciones de este tipo. La misma acción de la selección no se formaba de manera especial.

Inicialmente, la acción de la conducción se construía en la forma externa (materializada), así como durante la formación del sistema de los conocimientos geométricos elementales. Las características de la igualdad se anotaban en columna bajo números correspondientes en una tarjeta. La regla para su utilización también estaba escrita en una tarjeta especial. En lo que se refiere a las tareas, su materialización tenía un carácter similar. En cada una de las tarjetas estaba escrita una tarea que se acompañaba por un dibujo.

El paso de la acción de conducción hacia el concepto en el plano interno (mental) se realizaba durante el trabajo por etapas. Este último consistía en el paso de las acciones de la forma materializada en la forma del lenguaje oral, posteriormente, en el plano del lenguaje interno en silencio y, finalmente, en el plano interno (mental).

En todas las etapas de la asimilación de la acción de conducción, el experimentador controlaba la realización tanto de diferentes operaciones, como de la acción en general.

La formación del concepto de igualdad geométrica se daba sobre la base de la acción con características del concepto dado. Además, la realización de operaciones para la utilización de estas características para tareas seleccionadas especialmente, se regulaba con ayuda de una regla especial.

En nuestro experimento, cada alumno realizó 72 tareas para la formación del concepto dado.

Además de las tareas con el conjunto completo de las condiciones, a los escolares también se les propusieron tareas con el conjunto de las condiciones abundantes e incompletas, así como tareas, donde la abundancia de unas condiciones se combinaba con la insuficiencia de otras. A los escolares se les propusieron de 12 a 15 tareas para la utilización de cada una de las características de la igualdad. Presentaremos algunos ejemplos de dichas tareas: "Se dan dos segmentos iguales AB y CD. Del segmento AB se restaron el segmento KB, y del segmento CD restaron el segmento ED igual al segmento KB. ¿Serán los restantes segmentos AK y CE iguales entre sí?", o: "Se dan dos ángulos: CEK y MOB. Al ángulo CEK sumaron el ángulo KEH, y al ángulo MOB sumaron el ángulo AOB igual al ángulo MOB. ¿Serán iguales entre sí los ángulos obtenidos CEH y MOA?". Como promedio a los escolares se les propuso de 12 a 15 tareas para la utilización de cada una de las características de la igualdad. El trabajo con el concepto de igualdad geométrica se realizó con segmentos y ángulos simultáneamente.

El resultado de la formación del concepto de igualdad geométrica era que los escolares asimilaron dos componentes de la habilidad para demostrar: la acción de conducción hacia el concepto de la igualdad y el sistema de características concretas de la igualdad.

En lo que se refiere al tercer componente de la habilidad para demostrar, es decir, de la acción de desplegar las condiciones, entonces, éste se formaba de manera especial. Su formación se daba de acuerdo a la misma metódica. Su realización concreta tenía un carácter específico que requería la descripción más detallada de la metódica para la formación de dicho componente.

Elaborando la metódica nosotros partimos de las siguientes consideraciones. La demostración de un teorema (o la resolución de un problema de demostración), en un principio puede ser realizada a través de desplegar las condiciones de manera secuencial, es decir, a través de deducir de manera completa todas sus consecuencias posibles. Sin embargo, esta vía resulta ser demasiado larga. Además, su realización estricta es posible más desde el punto de vista teórico que práctico debido a que, las consecuencias, a partir de las condiciones, se pueden deducir hasta cantidades infinitas. La habilidad para demostrar teoremas (o problemas) requiere no sólo la habilidad para desplegar todo sin orden, sino también, realizar una búsqueda en una dirección determinada que se determina por el contenido específico de las condiciones del problema o del teorema. La acción de desplegar las condiciones, tiene que conllevar al alumno a la identificación de las características del concepto que se busca a través de la vía más corta y económica. En nuestro experimento nosotros partimos de la necesidad para formar en los escolares, tanto la habilidad general de deducir las consecuencias a partir de las condiciones, como la habilidad para realizar su desplegamiento diferencial y dirigido.

Inicialmente, la acción de desplegar se formaba en su tipo general. El análisis de dicha acción nos permitió identificar la regla de su realización. Ésta representaba un sistema determinado de indicaciones que descubría, el contenido y la secuencia de la realización de las operaciones de acción de desplegar las condiciones. Mostraremos algunas de estas indicaciones: señale las figuras mencionadas en las condiciones; comente todo lo que se sabe acerca de ellas; señale qué tipo de figuras nuevas se obtienen a partir de las figuras dadas y nombre todo lo demás que sabe acerca de ellas.

La regla se anotaba en una tarjeta, en la que cada uno de sus puntos estaba numerado. En la etapa de la acción materializada, los escolares tenían que utilizar dicha tarjeta realizando la acción de desplegar correspondencia estricta, con el orden y el contenido de cada punto de la regla. La realización de cada punto de la regla era controlado estrictamente por el experimentador. En la etapa dada, los alumnos también utilizaban una tarjeta con el listado de todas las figuras conocidas para ellos y sus relaciones entre sí.

Realizando el desplegamiento, los escolares debían realizar la verificación sistemática de la presencia o ausencia de las figuras y, las relaciones entre ellas (señaladas en la tarjeta) en las condiciones de la tarea. Esto también era controlado cuidadosamente por el experimentador. En la etapa del lenguaje oral, el contenido de la acción era el mismo, a pesar de que su forma se modificaba. Ahora la acción se realizaba en el plano del lenguaje oral sin apoyo de las tarjetas con la regla y tampoco del listado de las figuras y de sus relaciones.

En esta etapa, la realización de cada punto de la regla también se controlaba estrictamente por el experimentador, quien verificaba si ésta era correcta o no.

En la etapa "del leguaje externo en silencio", nosotros solamente le señalábamos al escolar el número del punto de la regla, pidiéndole recordar su contenido y aplicarlo "en silencio" para las condiciones de la tarea. El alumno debía decir en voz alta sólo el resultado de la aplicación, de acuerdo al cual precisamente se realizaba el control.

La etapa de "lenguaje interno" se caracterizaba por el hecho de que los alumnos utilizaban "en silencio" todos los puntos de la regla, pronunciando en voz alta solo el resultado final. De esta forma, aquí el control se realizó solo de acuerdo al resultado final de la realización de la acción de desplegar.

El trabajo de los alumnos, con la acción dada, se daba durante el proceso de la resolución de tareas especialmente elegidas. La particularidad principal de dichas tareas consistía en el hecho de que, las características de los conceptos que se buscan en ellas se daban en forma "oculta", es decir, a través del sistema de otros conceptos. Por ejemplo, se proponían tareas del siguiente tipo: "Se dan dos ángulos adyacentes iguales: COD y DOK. ¿Qué más se nos da con esto?"; "Del punto O salen dos semirrectas: OB y OC. La recta AD se cruza con las semirrectas en los puntos E y K. Se sabe que los ángulos obtenidos AEB y CKD son iguales. ¿Qué más se nos da con esto?". La resolución de este tipo de tareas requería siempre de la identificación de los datos ocultos, es decir, el desplegamiento de las condiciones. Esto último representaba el contenido principal de la realización de estas tareas, lo cual conducía a la formación de la acción de desplegamiento.

Nosotros proporcionábamos tareas de dos categorías de acuerdo a los dos medios para la obtención de los datos "ocultos" en las condiciones:

1) Las tareas en las que los datos "ocultos" se obtienen como resultado de la presencia en las condiciones de unas u otras figuras geométricas, que poseen (o no poseen) características particulares (para ilustrar este tipo de tareas podemos dirigirnos al primer ejemplo mencionado anteriormente).
2) Las tareas en las que la formación de datos "ocultos" se da, tanto por la presencia, como por las relaciones entre las figuras (o entre sus elementos) dados en las condiciones. (La ilustración puede ser el segundo ejemplo

mencionado, donde los ángulos adyacentes, opuestos por el vértice, etc., se forman en el resultado de la intersección de la recta AD con los segmentos OB y OC).

En la mayoría de las tareas era necesario determinar, qué figuras en general (y sus relaciones) se dan de acuerdo a las condiciones. De esta forma, todas las figuras, sus características y relaciones conocidas por los alumnos representaban aquello que se buscaba en las tareas. Unicamente en algunas tareas que se proponían en las etapas iniciales de la enseñanza, era necesario sólo establecer la presencia de una u otra figura concreta en las condiciones de la tarea. (Por ejemplo: “Se da el triángulo EOM. Del vértice E sale la semirrecta EB, que intersecta el lado OM en el punto K. ¿Se han formado en el punto K ángulos adyacentes?”). Durante el proceso de realización de las tareas para el desplegamiento los alumnos tenían, no solamente que señalar la presencia de figuras “ocultas” en las condiciones (y además sus características y relaciones) sino, también, dar la argumentación completa de su respuesta. Esto último era uno de los criterios esenciales para valorar hasta qué grado era correcta la realización de la tarea.

En aquellos casos, cuando la respuesta era errónea o cuando ésta era correcta pero faltaba su argumentación, nosotros considerábamos la respuesta como incorrecta. Si se observaba solamente el desplegamiento parcial de las condiciones o la respuesta era correcta pero, algunas de sus partes no tenían la argumentación, entonces la solución se consideraba como incompleta. La habilidad para realizar el desplegamiento general, no diferencial, se consideraba formado cuando los escolares iniciaban a identificar el contenido “oculto” de las condiciones de inmediato. Esto se reflejaba en el hecho de que, el alumno, al terminar de leer las condiciones, inmediatamente daba la repuesta exacta y argumentada. Después de esto, nosotros pasábamos a la formación de la habilidad para realizar el desplegamiento diferencial, es decir, realizar la búsqueda selectiva de lo desconocido y no señalar consecutivamente todo el contenido oculto de las condiciones. Elaborando la metódica, nosotros considerábamos el hecho de que la realización de este tipo de búsqueda es posible sólo en caso de que el alumno se dirija siempre por una idea respecto a dónde buscar, es decir, por una imagen de la situación de búsqueda. Evidentemente, las imágenes de este tipo se tienen que formar en los escolares. Con el objetivo de formar dichas imágenes así como de la habilidad misma para realizar la búsqueda de lo desconocido, nosotros hemos identificado los conjuntos de "zonas de búsqueda". Cada zona de búsqueda representaba una "situación geométrica" típica, cuyo desplegamiento necesariamente conduce a la identificación de las características del concepto que se busca. Así, por ejemplo, en las condiciones de la tarea en "forma clara" pueden incluirse conceptos tales como "ángulo recto", "ángulos adyacentes iguales " o "bisectriz de ángulo llano". Cada uno de los conceptos señalados, además de otros conceptos, contiene también el de "rectas perpendiculares". De esta forma, los tres conceptos mencionados, pueden servir en calidad de zonas de búsqueda, es decir, de situaciones geométricas típicas, las cuales orientan la búsqueda del concepto de "rectas perpendiculares". En el ejemplo mostrado anteriormente, el "ángulo recto", los "ángulos adyacentes iguales", etc., son figuras aisladas, cuyo desplegamiento conduce necesariamente a la identificación de las características de las rectas perpendiculares. Obviamente, la "zona de búsqueda" puede ser también un grupo de figuras conectadas entre sí a través de una relación determinada.

Los alumnos elegían las "zonas de búsqueda" de manera independiente. Esto se lograba a través de proporcionarles un sistema de tareas-preguntas, en el que era necesario representar una u otra figura sin decir su nombre ni tampoco sus características en "forma clara" . (Por ejemplo: "¿Cómo se puede presentar un ángulo, sin mencionar ninguna de sus características ni tampoco la palabra ángulo?").

De esta forma, la resolución de dichas tareas consiste, no en la deducción de las consecuencias a partir de los conceptos dados en las condiciones (como se hizo en las tareas con el "desplegamiento") sino al contrario, en la elección de la base, es decir, de las figuras de las cuales se deducen las figuras dadas en las condiciones como consecuencia.

El principio de la elección era el siguiente: buscar aquella figura (o grupo de figuras) que incluyera en sí las características de la figura que se busca.

Nosotros les pedíamos a los escolares que explicaran por qué el "desplegamiento" de las zonas de búsqueda que ellos determinaban, realmente conduce al descubrimiento de las características de los conceptos que se buscan. El conocimiento de qué “situaciones geométricas” incluyen unas u otras figuras, convierte estas situaciones en características, de acuerdo a las cuales los alumnos pueden establecer rápidamente la presencia en las condiciones de la figura geométrica que se busca.

Así, por ejemplo, durante el desplegamiento, ellos ya no necesitaban dar siempre la explicación completa de por qué las condiciones de la tarea incluyen las características de la figura geométrica que se busca. En lugar de esto, ahora era suficiente simplemente señalar la presencia, en las condiciones de la tarea, de la “situación geométrica” que corresponde al concepto que se busca. Evidentemente, todo esto conducía a una reducción notable de todo el proceso del desplegamiento. Por un lado, esto último era la consecuencia del hecho de que los escolares no realizaban una serie de operaciones de la acción dada, por otro lado, de que el proceso de desplegamiento adquiría el carácter selectivo. Debido a que la metódica para la formación de la habilidad para “desplegar” selectivamente era la misma, nosotros no la describiremos. Sólo señalaremos que las “zonas de búsqueda” para cada concepto se anotaban en tarjetas separadas. En la etapa “materializada”, los alumnos realizaban la acción de “desplegar” con la ayuda de dichas tarjetas. Las tareas, con las cuales se formaba la habilidad de desplegar las condiciones con el apoyo de las “zonas de búsqueda”, eran un poco más complicadas en comparación con aquellas tareas que se les presentaban a los escolares durante la formación de la habilidad de “desplegar” las condiciones de manera general. El incremento de la complejidad de estas tareas se debe, no al aumento del grado de la mediatización de las características de los conceptos que se buscan, sino al aumento de la cantidad de datos ocultos en las condiciones de dichas tareas.

Para el trabajo con la acción del “desplegamiento”, los escolares tenían que resolver un total de 18 a 20 tareas. La asimilación de los tres componentes por parte de los escolares, tenía que responder a la pregunta, si los componentes elegidos realmente constituyen o no los componentes básicos de la habilidad para demostrar. Si esto es así, entonces los alumnos, después de asimilarlos, tenían que resolver los problemas con demostración de igualdad y demostrar teoremas de igualdad de manera independiente.

Con el objetivo de verificar esta suposición, en la serie del control del experimento, a los alumnos se les propusieron los teoremas siguientes para la demostración independiente: 1) teorema acerca de la igualdad de dos triángulos de acuerdo a dos lados y al ángulo entre ellos; 2) teorema acerca de la igualdad de los triángulos de acuerdo a un lado y a sus ángulos adyacentes; 3) teorema acerca de la igualdad de los ángulos con lados perpendiculares correspondientes y 4) teorema acerca de la igualdad de los ángulos opuestos por el vértice.

Además de los teoremas mencionados, a los sujetos se les propuso también el teorema acerca de la perpendicularidad de la bisectriz de dos ángulos adyacentes y el problema para su demostración: "Se dan los ángulos adyacentes AOB y BOC. En el interior del ángulo AOB se trazó la bisectriz OH. A partir del vértice de los ángulos adyacentes hacia la bisectriz OH se trazó la perpendicular OK. ¿Será o no la perpendicular OK también bisectriz del ángulo BOC?" . La realización de las dos últimas tareas de control (teorema acerca de la perpendicularidad de la bisectriz de los ángulos adyacentes y, el problema con demostración), también requería el establecer la igualdad. Sin embargo, la igualdad de las figuras no era lo que se buscaba. La igualdad participaba como un medio para encontrar lo que se buscaba.

Cabe señalar que, todos los teoremas presentados a los alumnos, así como el problema, eran desconocidos para ellos. Organizando la asimilación de los tres componentes de la habilidad para demostrar, nosotros partimos del hecho de que los componentes señalados representan acciones y conocimientos que se incluyen en la habilidad para demostrar. Sin embargo, el proceso real de demostración requiere que el contenido de estos componentes se utilice en una secuencia estrictamente determinada, es decir, de acuerdo a la estructura del proceso mismo de la demostración. A partir de esto, nosotros hemos sugerido a nuestros sujetos, durante el proceso de la realización de las tareas de control, apoyarse en una regla especial que consistía de los siguientes puntos: 1) identifica lo que se da en las condiciones; 2) señala lo que se debe demostrar; 3) menciona todas las características, a través de las cuales se puede demostrar aquello que se exige; 4) señala de qué otra forma estas características pueden ser dadas ("ocultas") en las condiciones; 5) compara cada una de las características con la condición y elige aquella que se va a utilizar en la demostración; 6) señala la característica que se debe utilizar para la demostración y 7) explica, por qué consideras que esta característica se encuentra en las condiciones.

De esta manera, los puntos de la regla representaban un sistema de indicaciones acerca de las acciones que los estudiantes tenían que realizar.

Resultados de la serie de la enseñanza

Los resultados de la formación del sistema de los conceptos previos, en general coinciden con aquellos que se obtuvieron en los estudios realizados anteriormente, dedicados a la formación de los conceptos geométricos iniciales (6), (14).

Los alumnos solucionaron la mayoría de los problemas correctamente.

Los resultados de la formación del concepto de la “igualdad geométrica”, que era básico para nuestra investigación, eran los siguientes.

Los sujetos resolvieron los problemas para la determinación de la igualdad exitosamente. De 1440 problemas propuestos, 1371, es decir, 95 % eran resueltos de manera totalmente correcta y sólo en la solución de 69 problemas, es decir, 4.8 % se cometieron errores.

Pondremos los ejemplos típicos que ilustran los pasos de la solución de problemas.

Problema 3: “Se dan segmentos AB y CD iguales entre sí. Del segmento AB restaron el segmento KB y del segmento CD restaron el segmento OD igual al segmento KB. Serán los segmentos restantes iguales entre sí o no?” (Se presenta el dibujo correspondiente).

Sujeto R. I.: Lee las condiciones del problema y la primera característica de la igualdad en voz alta y después dice: “Aquí no sirve la primera característica, porque aquí no estamos sobreponiendo una figura sobre otra (después de leer la segunda característica): la segunda tampoco sirve”.

Experimentador: “¿Por qué lo dices así?”

Sujeto: Lee la segunda característica de la igualdad en voz alta y después dice:

"Aquí dice que las figuras son iguales si los puntos límites de los segmentos coinciden en el caso de sobreponerlos. En las condiciones no hay nada acerca de esto. Aquí los segmentos se restan". Después dice: "Dos figuras geométricas son iguales si cada una es igual a una tercera" pero, en las condiciones no hay nada acerca de esto. Aquí no tenemos ninguna tercera figura." Lee la cuarta característica en voz alta y después dice: "En las condiciones se dice que dos segmentos AB y CD son iguales y de ellos restaron segmentos iguales, entonces se quedaron también iguales. Aquí sirve la cuarta característica. Los segmentos AK y CO serán iguales".

Como se ve en el ejemplo presentado, la solución del problema consiste en conducir el caso concreto de la igualdad dado en las condiciones, hacia una de las características de la igualdad.

Para poder hacer esto, el sujeto inicialmente tenía que elegir una característica de todo el sistema, que puede ser utilizada en el caso concreto dado. La búsqueda de la característica, como se ve en el ejemplo mencionado, transcurría en forma totalmente desplegada. Esta búsqueda consistía en la verificación secuencial y sistemática de la presencia, en las condiciones, por lo menos de una de las características necesarias y suficientes de la igualdad.

Cabe señalar que, los sujetos memorizaban las características de manera bastante rápida (después de solucionar de tres a cuatro problemas) y asimilaban el principio de las acciones con ellas. La acción se hacía independiente. El proceso mismo de la solución adquiría el carácter cada vez más reducido.

Problema 11: "En la línea recta MK se señalaron dos segmentos iguales MO y CK. El segmento CK se señaló de tal forma que el punto C se encuentra entre los puntos M y O del segmento MO. ¿Serán los segmentos MC y OK iguales entre sí o no?" (Para el problema se da el dibujo no adecuado para las condiciones: el segmento CK era más largo que el segmento MO).

Sujeto B.N.: Lee las condiciones del problema y después dice: "Aquí hay que solucionar de acuerdo a la cuarta característica (lee la cuarta característica de la igualdad en voz alta). Del segmento MK hay que restar el segmento CK y vamos a tener el segmento MC. Después del mismo segmento MK hay que restar el segmento MO igual al segmento CK y vamos a tener el segmento OK. Los segmentos MC y OK serán iguales, porque nosotros hemos restado dos segmentos iguales del mismo segmento y se quedaron segmentos iguales." Después el sujeto dice: "Aquí se puede solucionar también de otra forma". El experimentador pregunta: "¿Cómo?". El alumno contesta: "También de acuerdo a la cuarta característica pero hay que tomar otros segmentos. Del segmento MO restar el segmento CO y después del segmento CK restar el mismo segmento CO. Se obtienen los segmentos iguales: MC y CK. De dos segmentos iguales nosotros hemos restado el mismo y nos quedaron iguales".

De esta forma el proceso de búsqueda ya obtiene el carácter reducido. Como se ve en el ejemplo señalado, el sujeto después de leer las condiciones, de inmediato señaló la característica hacia la cual se tiene que conducir la condición, de manera correcta y realizó la acción misma de la conducción.

En lo que se refiere al tercer componente, es decir, a la acción de obtener las consecuencias (la acción de "desplegar" las condiciones), entonces, los resultados de la formación de la habilidad de los escolares para desplegar las condiciones eran los siguientes.

De 200 problemas propuestos a los sujetos, 192, es decir, 96 % se resolvieron correctamente. En ocho casos (que constituyen 4 %), los sujetos dieron soluciones incompletas. No hubo casos cuando los sujetos en general no lograban desplegar las condiciones.

Mostraremos los ejemplos más típicos de la resolución de problemas para la acción de desplegar las condiciones.

Problema 2.: "Se dan dos ángulos adyacentes iguales COB y BOD. ¿Qué más se nos da con esto?"

Sujeto M. T.: Lee las condiciones del problema y después el primer punto de la regla del desplegamiento (señale las figuras dadas en las condiciones). Después dice: "Aquí se trata de los ángulos adyacentes COB y BOD." Después de esto lee el segundo punto de la regla (nombra todo lo que se dice acerca de las figuras dadas) y dice: "Se dice que los ángulos adyacentes son iguales entre sí". Lee el tercer punto de la regla (señale qué nuevas figuras se obtienen a partir de las dadas). El sujeto toma la lista de las figuras conocidas y verifica una por una si éstas se contienen en las condiciones del problema dado: "La línea recta sí la tenemos. CD es la línea recta. Estos son los ángulos adyacentes pero, sus lados que no son compartidos, forman la línea recta. También tenemos la semirrecta OB, que es la parte de la recta, entonces, se nos da otra línea recta".

Posteriormente, el diálogo se continúa de la siguiente manera:

Experimentador: "Sigue".

Sujeto: "Se da la semirrecta. No, son tres semirrectas OC, OB y OD. No hay segmentos de la recta. Hay sólo semirrectas. Se dan también muchos ángulos."

Experimentador: "¿Cuáles?"

Sujeto: "Hay ángulo llano COD. Son dos".

Experimentador: "¿Por qué son llanos?"

Sujeto: "Porque son ángulos adyacentes y su suma es de 180º. Se dan dos ángulos rectos COB y BOD, ellos son rectos porque se dice que se dan ángulos adyacentes iguales... (pausa). Aquí también se dan cuatro ángulos rectos.

Experimentador: "¿Cuáles?"

Sujeto: "OB es semirrecta, pero si vamos a continuar la recta y, por ejemplo, aquí ponemos la letra X, entonces obtenemos otros ángulos rectos COX y XOD. Aquí no hay triángulos.

Experimentador: "¿Por qué?"

Sujeto: "Triángulo es una figura cerrada, pero aquí hay ángulos, éstos no están cerrados. Aquí también hay perpendicular, porque las rectas CD y BX son perpendiculares una a otra. Éstas se cruzan con ángulo de 90º. También se nos dan los ángulos adyacentes, esto se dice en las condiciones.

Experimentador: "Continúa".

Sujeto: "Se dan los ángulos complementarios porque todos los ángulos adyacentes son también complementarios. Aquí no hay ángulos opuestos por el vértice...(pausa). También podemos obtener los ángulos opuestos por el vértice, si vamos a continuar la recta hacia acá (señala en el dibujo la recta cuya parte es la semirrecta OB), entonces, se obtienen los ángulos opuestos por el vértice COB y XOD y, además, BOD y XOC.

Experimentador: "¿Por qué son opuestos por el vértice?"

Sujeto: "Porque COB y XOD son dos ángulos, tienen vértice común y tienen ángulo adyacente común XOC, o podemos tomar también ángulo BOD. Para ángulos COX y BOD el ángulo adyacente común será el ángulo XOD o COB.

En lo que se refiere a otras figuras (así como a sus características y particularidades), entonces, en la etapa de la acción "materializada", los alumnos identificaban su presencia (o ausencia) en las condiciones de manera similar.

El protocolo presentado manifiesta que, el proceso de la deducción de las consecuencias transcurría de manera muy desplegada. Sin embargo, esto se observó sólo en las etapas iniciales del trabajo con la acción dada, cuando nosotros les pedíamos a los sujetos que dieran una argumentación completa de la presencia de unas u otras condiciones "ocultas".[11] Posteriormente, esta exigencia se quitaba de manera gradual. Inicialmente, esto tenía que ver sólo con aquellos conceptos acerca de los cuales nosotros no teníamos la seguridad de que, los sujetos pudieran argumentar de manera correcta, su presencia en las condiciones; más tarde, estas exigencias desaparecían por completo. La posibilidad de quitarlas se basaba en el hecho de que, los conceptos con los cuales se relacionaban los sujetos en el proceso del desplegamiento, se encontraban en diferentes tipos de

11 No hay que confundir la acción del "desplegamiento" con la forma desplegada de su transcurso. En nuestro estudio, con el "desplegamiento" nosotros comprendemos la acción cuyo contenido consiste en deducir las consecuencias a partir de las condiciones. Sin embargo, cualquier acción, entre otras la acción de "desplegar las condiciones" puede transcurrir en forma desplegada (o reducida). El carácter desplegado o reducido es la característica de cualquier acción que se relaciona con la realización completa (incompleta) de sus operaciones.

situaciones geométricas. De esta forma, ahora los sujetos simplemente podían nombrar los "datos ocultos" de las condiciones sin argumentar su presencia. Evidentemente, todo esto conducía a la transformación significativa de la acción del desplegamiento, la cual, en la etapa final de su formación adquiría el tipo de la acción mental reducida, generalizada y automatizada.

Con el ejemplo del siguiente protocolo mostraremos cómo transcurría el "desplegamiento" en la etapa de la acción mental.

Problema 9.: "Se da el triángulo CNB. El ángulo del vértice C es recto. Del vértice C sale la semirrecta CK que coincide con el lado CB de este triángulo. Menciona todo lo que se nos da con esto." (Se proporciona el dibujo correspondiente).

Sujeto A. K.: Lee las condiciones del problema y después dice: "Se dan segmentos, semirrectas y líneas rectas. Además se dan dos ángulos rectos: el ángulo HCB es recto de acuerdo a las condiciones y el ángulo HCK. También se dan los ángulos adyacentes KCH y HCB y la bisectriz, porque los ángulos adyacentes son iguales.

Experimentador: "¿Cuál será la bisectriz?"

Sujeto: "CH. Se dan los ángulos opuestos por el vértice si continuáramos este lado (señala en el dibujo el lado CH). Aquí vamos a poner la letra X, entonces los pares de ángulos KCH-XCB y HCB-KCX serán opuestos por el vértice. Así, también obtendremos más ángulos adyacentes. Si continuáramos todos los lados del triángulo, se pueden obtener muchos ángulos adyacentes y opuestos por el vértice. Se me olvidó decir acerca de los ángulos perpendiculares. El ángulo HCD es recto, entonces, HC es perpendicular a KB".

La identificación de otras condiciones "ocultas" por parte del sujeto se daba de manera similar.

Inicialmente, durante el paso de los sujetos hacia el "desplegamiento" con la orientación en las zonas de búsqueda, nosotros les pedíamos a los sujetos que argumenten la presencia de aquellos conceptos que se buscaban en las condiciones.

El protocolo que mostraremos posteriormente constituye el ejemplo típico del transcurso del proceso del desplegamiento en estos casos.

Problema 9.: "Del punto O salen cuatro semirrectas OA, OB, OC y OD. La línea recta EX cruza las semirrectas en los puntos H, K, M y P. Se sabe que el ángulo AOB es igual al ángulo DCO y HM es igual a KP. Diga que es lo que se nos da con esto." (Se proporciona el dibujo correspondiente).

Sujeto S. M.: Lee las condiciones del problema y después dice: "Se dan los ángulos opuestos por el vértice, es decir, las rectas se cruzan. Aquí hay muchos ángulos opuestos por el vértice. ¿Los tengo que nombrar?"
Después se da el siguiente diálogo:

Experimentador: "No, no es necesario".

Sujeto: "Hay ángulos adyacentes. Si tenemos ángulos opuestos por el vértice, entonces, también tenemos ángulos adyacentes. Se da el triángulo. Aquí hay incluso cuatro triángulos."

Experimentador: "¿Por qué tu consideras que se dan los triángulos? Nómbralos."

Sujeto: (nombra correctamente). "No son cuatro sino seis triángulos, se me olvidaron estos dos (en el dibujo muestra los triángulos HOM y KOP) . También tenemos segmentos iguales."

Experimentador: "¿Cuáles?"

Sujeto: "HM es igual a KP de acuerdo a las condiciones, los segmentos HK y PM también serán iguales de acuerdo a la cuarta característica, debido a que aquí dos segmentos iguales incluyen a otros dos iguales. También se dan los ángulos AOB y COD como iguales, entonces, el ángulo AOC será igual al ángulo BOD. Esta es la quinta característica. Estos ángulos consisten de otros ángulos iguales".

La identificación de otras condiciones "ocultas" se daba de manera similar.

De esta forma, "desplegando" las condiciones con el apoyo en las zonas de búsqueda, los sujetos argumentaban la presencia en las condiciones de una serie de conceptos geométricos en forma "oculta". Como se ve en el ejemplo presentado anteriormente, ahora la argumentación se reducía a un simple señalamiento de la presencia de las "situaciones geométricas", que correspondían a los conceptos que se buscan, en las condiciones del problema. Sin embargo, nosotros gradualmente dejábamos de exigir que los sujetos señalaran estas situaciones, inicialmente en relación con algunos conceptos "ocultos" en las condiciones y, posteriormente, con todos los conceptos.

En general, la realización exitosa de la mayoría de los problemas propuestos en la serie de la enseñanza, nos permite suponer que el objetivo básico de esta serie del experimento se ha logrado: nuestros sujetos asimilaron los tres componentes de la habilidad para demostrar los problemas con demostraciones y aprendieron a demostrar los teoremas, cuyo contenido básico era establecer la igualdad de las figuras.

La serie del experimento de control

Esta serie del experimento se realizó con el objetivo de aclarar qué tan correctamente los alumnos lograron asimilar los componentes básicos de la habilidad de demostrar. A los sujetos se les proporcionaron las tareas de control con los dibujos correspondientes. Esto les ayudaba a los alumnos superar las dificultades que pudieran estar relacionadas con la construcción del dibujo. En la base de la construcción se encuentran las habilidades especiales, que nosotros no estábamos formando en nuestros sujetos.

Las tareas de control propuestas a los sujetos consistían en la demostración de los tres teoremas siguientes: 1) teorema acerca de la igualdad de dos triángulos de acuerdo a dos de sus lados y a un ángulo que se encuentra entre estos dos lados; 2) teorema acerca de la igualdad de los ángulos con sus lados correspondientes perpendiculares y 3) teorema acerca de la igualdad de los ángulos opuestos por el vértice.

Resultados de la ejecución de tareas de control

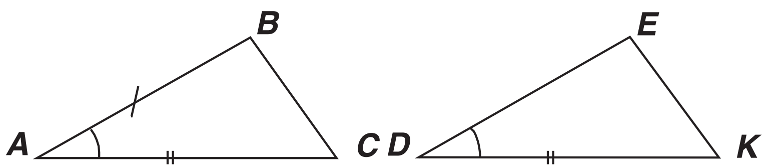
El aspecto cuantitativo de los resultados de la ejecución de tareas de control por parte de los sujetos era el siguiente.

Se proporcionó un total de 50 teoremas y 10 problemas. Todos los teoremas eran demostrados correctamente. También todos los problemas eran resueltos correctamente.

Mostraremos algunos protocolos que reflejan el transcurso típico de la resolución de los problemas de control y la demostración de teoremas por parte de los sujetos de este grupo.

Se propone demostrar el teorema acerca de la igualdad de dos triángulos de acuerdo a dos de sus lados y, a un ángulo que se encuentra entre estos dos lados.

El teorema se formula de la manera siguiente: "Si los dos lados y el ángulo comprendido entre ellos en un triángulo son correspondientemente iguales a los dos lados y el ángulo entre ellos de otro triángulo, entonces, estos triángulos son iguales" (**dibujo 1).**



Dibujo 1

Sujeto Sh. L.: (Lee las condiciones del teorema y el primer punto de la regla: "Señale lo que se da en las condiciones")[12]. "Se dan dos triángulos y también se dice que sus lados correspondientes son iguales".

Experimentador: "¿Cuáles?"

Sujeto: "AB es igual a BD, AC es igual a DK y los ángulos entre ellos son también iguales: el ángulo BAC es igual al ángulo BDK (lee el segundo punto de la regla: "Señale lo que hay que demostrar"), hay que demostrar que los triángulos son iguales."

12 El contenido de los puntos de la regla dada se da en la página 171.

Experimentador: "Continúa".

Sujeto (Lee el tercer punto de la regla: "Nombra todas las características de acuerdo a las cuales se puede demostrar lo necesario"). "Aquí hay que sobreponer los triángulos de acuerdo a la primera o a la segunda característica."
Experimentador: "Lee el siguiente punto de la regla".

Sujeto (Lee el cuarto punto de la regla: "Señale cómo estas características pueden ser dadas u "ocultas" en las condiciones"). "Aquí hay la primera y la segunda características. Estas se dan si algunos elementos de las figuras, cuya igualdad tenemos que establecer, son iguales y aquí, en los triángulos, son iguales sus lados y ángulos".

Experimentador: "¿Todos los lados son iguales?"

Sujeto: "No, sólo dos lados de un triángulo son correspondientemente iguales a dos lados del otro triángulo. También los ángulos entre estos dos lados son iguales. Aquí no se dice nada acerca de BC y EK, pero éstos también serán iguales, porque entre estos dos puntos se puede trazar una línea recta y solamente una."

Experimentador: "Lee el siguiente punto".

Sujeto (Lee el sexto punto de la regla: "Nombra la característica que se puede usar para la demostración"). "Aquí se pueden usar la primera y la segunda características."

Experimentador: "Continúa".

Sujeto: (Lee el séptimo punto de la regla: "Explica, por qué tú consideras que esta característica está en las condiciones"). "Estos triángulos podemos sobreponerlos para que sus lados y ángulos iguales coincidan: AB coincide totalmente con DE, entonces, el punto B coincide con el punto E, el punto A con el punto D, el ángulo BAC con el ángulo EDK y AC coincide con DK.

Experimentador: "¿Por qué?"

Sujeto: "Porque AC es igual a DK. Los puntos C y K van a coincidir. En los triángulos coinciden todos sus vértices, entonces, también serán iguales todos sus lados.”

Experimentador: “¿ Serán iguales o no los lados BC y EK?”

Sujeto: “Ellos también van a coincidir de acuerdo a la segunda característica de la igualdad, porque en estos segmentos ya coincidieron sus puntos límites y entre dos puntos se puede trazar solamente una línea recta. Estos triángulos coincidieron por completo, entonces, ellos son iguales.”

Pondremos un ejemplo de la solución del problema por parte del sujeto M. Sh. La particularidad de este problema consistía en el hecho de que el establecimiento de la igualdad participaba como el medio de su solución.

Sujeto: (Lee las condiciones del problema y el primer punto de la regla”). “En las condiciones se dan los ángulos adyacentes. Se dice que dentro del ángulo BOC se trazó la bisectriz OH, entonces, los ángulos BOH y HOC son iguales entre sí. También se da la perpendicular PK, que se trazó hacia la bisectriz OH. Entonces, está claro que el ángulo KOH es recto. Si continuamos OH y ponemos la letra X, entonces vamos a obtener otro ángulo recto XOK (lee el segundo punto de la regla). Hay que demostrar que la perpendicular OK es la bisectriz del ángulo AOB, entonces, los ángulos AOK y KOB tienen que ser iguales.

Experimentador: “Continúa”.

Sujeto: (Lee el tercer punto de la regla). “Aquí hay que solucionar de acuerdo a las características de la igualdad (nombra las características de la igualdad). Tal vez, aquí hay que usar la cuarta característica, pero tengo que pensar.”

Experimentador: “Lee el siguiente punto de la regla”.

Sujeto: (Lee el cuarto punto de la regla y realiza las acciones que corresponden a su contenido). “Sí, claro, es la cuarta característica”.
Experimentador: “¿Por qué?”

Sujeto: “Vea usted, si nosotros continuamos OH, entonces, obtenemos dos ángulos rectos y estos consisten de otros dos ángulos iguales.”

Experimentador: "¿Cuáles?"

Sujeto (pausa). "Aquí hay que solucionar no solamente de acuerdo a la cuarta característica: hay que usar dos características".

Experimentador: "Explica".

Sujeto: "Si continuamos OH y ponemos la letra X, entonces, se obtienen el ángulo XOA y éste será igual al ángulo BOH."

Experimentador: "¿Por qué?"

Sujeto: "Los ángulos HOC y BOH son iguales entre sí, los ángulos HOC y XOA también serán iguales como opuestos por el vértice, entonces, los ángulos BOH y XOA también serán iguales. Esto está de acuerdo a la tercera característica de la igualdad. Ahora de dos ángulos iguales (rectos) XOK y KOH restamos ángulos iguales KOB y KOA. Entonces, KO será la bisectriz del ángulo AOB."

Experimentador: "Correcto. ¿Se puede solucionar este problema sin continuar OH?"

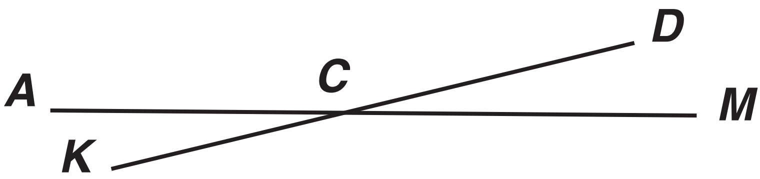
Sujeto (pausa). "Sí, se puede, también de acuerdo a la cuarta característica. Pero yo no sé de donde tomar el otro ángulo recto (pausa). Aquí hay que restar de la suma de dos ángulos. Los ángulos AOK y HOC en su suma dan 90º."

Experimentador: "¿Por qué?"

Sujeto: "El ángulo KOH es recto. El se incluye en el ángulo llano AOC. Del ángulo AOC restamos el ángulo KOH y se obtienen dos ángulos KOA y HOC. Su suma es de 90º. Ahora hay que solucionar de acuerdo a la cuarta característica: del ángulo KOH restar el ángulo BOH y se queda el ángulo KOB. Después, de la suma de los ángulos AOK y HOC restar el ángulo HOC y se queda el ángulo AOK. De dos partes iguales nosotros restamos dos iguales y obtenemos dos ángulos iguales."

Mostraremos un ejemplo de la demostración del teorema acerca de la igualdad de los ángulos opuestos por el vértice.

El teorema se formula de la siguiente manera: "Los ángulos opuestos por el vértice son iguales"



Dibujo 2

Sujeto: (Lee las condiciones del teorema y después el primer punto de la regla). "Se dan los ángulos opuestos por el vértice. También de forma "oculta" se dan los ángulos llanos y adyacentes (muestra en el dibujo y después lee el segundo punto de la regla). Hay que demostrar la igualdad de los ángulos opuestos por el vértice, por ejemplo, ACK y DCM. Hay que solucionar de acuerdo a las características de la igualdad. ¿Puedo decir?"

Experimentador: "Por favor".

Sujeto: "Del ángulo KCD nosotros restamos el ángulo ACD y nos queda el ángulo DCM. Aquí está la cuarta característica. De dos ángulos iguales (llanos) nosotros restamos el mismo ángulo y nos quedan ángulos iguales."

Como se ve en los ejemplos presentados anteriormente, la presencia de la regla para la solución, así como el dominio de la habilidad para desplegar les permitía a los sujetos realizar el análisis secuencial y planeado de las condiciones de teoremas y de problemas. Como se ve en estos ejemplos, este análisis, durante la demostración de algunos teoremas, tenía el carácter demasiado desplegado. Los sujetos realizaban las acciones señaladas en los puntos de la regla de manera estrictamente secuencial y determinada. Sin embargo, en algunos casos, como se ve en los ejemplos mencionados, nuestros sujetos realizaban la demostración sin realizar todas las acciones consideradas en la regla para la demostración. Además, a veces, ellos después de leer las condiciones, se dirigían de inmediato a la regla y daban la demostración correcta. Es interesante señalar que, los sujetos no simplemente realizaban las tareas de control de manera correcta sino que, a veces, proponían dos variantes de la demostración. Por ejemplo, esto se observó durante la demostración del teorema acerca de la igualdad de los ángulos con lados correspondientes perpendiculares, así como durante la solución del problema para demostración. Además, en el último caso, como se ve en el ejemplo presentado, se propuso la variante de la demostración relacionada con la utilización de la construcción complementaria, lo que nosotros no les hemos enseñado a los escolares.

Como mostraron los ejemplos presentados, durante la realización de las tareas de control, "el ensayo y error" no se observó. Los sujetos actuaban con seguridad. El proceso de la demostración tenía el carácter consciente y, en todas las etapas transcurría, prácticamente sin errores.

Los resultados de esta parte del experimento de control, manifiestan acerca de la formación suficiente de los componentes señalados, de la habilidad para demostrar teoremas presentados, tanto en forma de problemas, como con aquellas formulaciones que usualmente se dan en los manuales escolares de geometría. Sin embargo, cabe señalar que, la habilidad formada se aplicaba sólo a los teoremas y problemas para demostración de la igualdad. En relación con esto, es necesario señalar la posibilidad del paso más amplio de la habilidad para demostrar, en particular, hacia teoremas y problemas para demostración de algún otro tipo. De alguna forma, la solución de este problema se reflejó en algunos estudios anteriores dedicados a la formación de los conceptos geométricos iniciales. Como se sabe, la asimilación de los conceptos geométricos, antes que nada, consiste en la asimilación de las acciones y operaciones correspondientes con las características del concepto dado. En el estudio de N. F. Talizina se mostró que, durante la formación del sistema de los conceptos geométricos homogéneos, junto con la asimilación de los primeros conceptos del sistema dado, los escolares, también asimilan las operaciones determinadas del pensamiento que, posteriormente, se utilizan para el dominio de otros conceptos de este grupo. Además, el paso de estas operaciones puede transcurrir a diferentes niveles en dependencia de una serie de las condiciones, sin embargo, aquel siempre tiene lugar y su presencia conduce a una asimilación más rápida de los siguientes conceptos de este sistema.

En el resultado, se logra una formación del sistema de los conceptos geométricos de manera más rápida, en comparación con la enseñanza tradicional. Los resultados de este estudio nos permitieron suponer que, el paso de este tipo, puede tener lugar también durante la demostración de teoremas. Nosotros hemos verificado la posibilidad del paso, de la habilidad para demostrar los teoremas y los problemas, formado durante las demostraciones de la igualdad hacia los teoremas y problemas para la demostración del paralelismo.

Después de la realización de las tareas de control para la igualdad, los sujetos dijeron que los teoremas de la igualdad de los triángulos, de los ángulos opuestos por el vértice, así como de los ángulos con sus lados correspondientes perpendiculares que ellos han demostrado, ahora se pueden considerar como las características especiales de la igualdad de los triángulos y los ángulos.

Con el objetivo de aclarar la posibilidad del paso de la habilidad, para demostrar teoremas de la igualdad hacia los teoremas y los problemas de otro tipo, a los sujetos se les propusieron los siguientes teoremas de paralelismo sin alguna enseñanza complementaria: 1) teorema acerca de la igualdad de los ángulos agudos y obtusos con sus lados correspondientemente paralelos; 2) teorema acerca de la igualdad de los ángulos con sus lados correspondientemente paralelos 2d, si uno de éstos es agudo y, el otro es obtuso y 3) teorema acerca de la paralelismo de las bisectrices de dos ángulos agudos con sus lados correspondientemente paralelos.

Además de los teoremas mencionados, a los sujetos se les propusieron cuatro problemas de demostración. En estos problemas, el establecimiento del paralelismo de las líneas rectas era tanto el objetivo, como el medio para su solución. Cabe señalar que algunos de estos problemas requerían para su solución la utilización de los teoremas de la igualdad, demostrados anteriormente.

Queremos recordar que en los sujetos se formaron especialmente los conceptos acerca de los ángulos opuestos por el lado, correspondientes y unilaterales. Además, a ellos se les proporcionó la definición del paralelismo de las líneas rectas: dos líneas rectas son paralelas si éstas se encuentran en el mismo plano y no se cruzan en su continuación.

Antes de realizar las tareas de control de este tipo, los sujetos obtuvieron una tarjeta con las características del paralelismo.

Nosotros hemos retomado las siguientes características del paralelismo: 1) dos líneas rectas son paralelas si éstas se encuentran en el mismo plano y no se cruzan en su continuación; 2) dos líneas rectas son paralelas si las cruza una tercera línea recta y los ángulos opuestos por el lado que se forman, son iguales; 3) dos líneas rectas son paralelas si las cruza una tercera línea recta y los ángulos correspondientes que se forman son iguales; 4) dos líneas rectas son paralelas si la suma de los ángulos unilaterales es de 180º y 5) dos líneas rectas son paralelas si éstas son perpendiculares a una tercera línea recta.

Los resultados de la realización del segundo grupo de las tareas de control para la determinación de la paralelismo, por parte de los sujetos, eran los siguientes.

En general los sujetos lograron ejecutar teoremas y problemas de control para el establecimiento del paralelismo de las líneas rectas de manera bastante exitosa; ellos dieron la demostración correcta en 63 casos de un total de 70, y sólo en siete casos los sujetos no lograron demostrar los teoremas o solucionar los problemas.

Mostraremos un protocolo que refleja la ejecución típica de las tareas de control de este tipo.

Se propuso el problema siguiente: “Se dan dos triángulos rectángulos OCD y MOK que tienen el vértice común O. Se sabe que un cateto OC del triángulo OCD junto con el cateto OK del triángulo MOK forman una línea recta. Hay que demostrar que los catetos CD y MK son paralelos entre sí”.

> **Sujeto B. T.:** (Lee las condiciones del problema). “Aquí los catetos CD y MK son paralelos. Se puede solucionar de acuerdo a la segunda característica. Aquí los ángulos opuestos por el lado serán iguales.”
>
> **Experimentador:** “¿Cuáles?”
>
> **Sujeto:** “Los ángulos DCO y OKM son opuestos por el lado. La línea de intersección es CK. Se dice que CO y OK forman una línea recta. Los ángulos

opuestos por el lado serán iguales, porque ambos son rectos. Entonces, CD será paralela a MK. También se puede solucionar de acuerdo a la cuarta característica".

Experimentador: "Por favor".

Sujeto: "Aquí CD y MK serán paralelos, si se continúa, por ejemplo, CD y se pone el punto X. Entonces, obtendremos ángulos bilaterales XCO y MKO y su suma será de 180º".

Experimentador: "Correcto. ¿De qué otra forma se puede solucionar el problema?".

Sujeto: "¿De otra forma? A lo mejor, solamente de acuerdo a la quinta característica".

Experimentador: "Intenta".

Sujeto: CK es la línea de intersección y forma ángulos rectos con CD y MK, entonces, ella es perpendicular a ellos. CD será paralela a MK.

Como se ve en el ejemplo mostrado, los sujetos se relacionaban con las tareas de control para el paralelismo también de manera segura, igualmente esto se observó con las tareas para la igualdad.

En una serie de casos, los alumnos daban no sólo una variante de la demostración, sino varias.

Realizando la demostración, los sujetos se orientaban todo el tiempo en las características de la demostración, utilizándolas como el criterio de la presencia de las líneas paralelas. Los escolares no presentaron ninguna dificultad debido a que, en los teoremas y en los problemas, el paralelismo participaba no como lo que se buscaba, sino como el medio para encontrar lo desconocido. Es importante señalar que ellos no tuvieron miedo a las tareas, cuya realización requería la utilización de los teoremas de la igualdad demostrados anteriormente. Ahora, los sujetos consideraban a los teoremas de este tipo como las características complementarias de la igualdad, cuya certeza ya no requiere demostración repetitiva.

Los buenos resultados de la ejecución del segundo grupo de las tareas para el paralelismo permiten ser consideradas, como consecuencia del paso de la habilidad para demostrar los teoremas de la igualdad, así como solucionar los problemas de otro tipo, cuyo contenido básico era establecer el paralelismo de las líneas rectas.

Sin embargo, cabe señalar que, la realización de las tareas de control para el paralelismo no siempre transcurría fácilmente y sin problemas. En algunos casos, la demostración de los teoremas y la solución de problemas producía en los escolares ciertas dificultades.

El análisis de las demostraciones erróneas mostró que, la causa de las faltas en la realización de las tareas por parte de algunos sujetos se relaciona, antes que nada, con su trabajo insuficiente con los conceptos de la igualdad geométrica. Así, en particular, en estos alumnos se observó no sólo la ausencia de la habilidad para cambiar una figura por otra figura igual sino, también, la incomprensión de la posibilidad misma de dicho cambio.

La ejecución errónea de las tareas de control –en los siete casos– se puede explicar con el hecho de que, la demostración de algunos teoremas requería la utilización de las características de la igualdad, las cuales, nosotros, no hemos identificado ni hemos realizado un trabajo especial con ellas.

Nosotros hemos realizado las sesiones complementarias dirigidas a la formación de los conocimientos y habilidades faltantes, con los sujetos que no lograron ejecutar las tareas de control. Después de esto, a ellos se les propusieron una vez más las tareas de control que han producido dificultades. Los sujetos lograron solucionarlas de manera exitosa ante esta presentación repetitiva.

Como se mencionó anteriormente, todos los problemas y teoremas que realizaban los sujetos en la serie de control del experimento, se propusieron también a los alumnos de 5º y 7º grados. Los resultados de la realización de las tareas de control, por parte de los alumnos de 5º y 7º grados, se muestran en la **tabla 1.**

TABLA 1

Sujetos	Tipos de tareas de control	Cantidad de tareas de control propuestas a los sujetos	Cantidad de tareas de control realizadas correctamente	% de la realización correcta de tareas de control	Cantidad de tareas de control realizadas incorrectamente	% de la realización incorrecta de tareas de control
6º grado (grupo de comparación)	Igualdad	60	15	25	45	75
	Paralelismo	70	35	50	37	50
7º grado (grupo de comparación)	Igualdad	60	21	35	39	65
	Paralelismo	70	32	45.7	38	54

Como se ve en la tabla, los escolares de sexto grado realizaron las tareas de control para la igualdad correctamente sólo en 15 casos de un total de 60 y, sólo en 35 casos de un total de 70 lograron realizar los teoremas y problemas para el paralelismo.

Queremos recordar que, los sujetos del grupo experimental realizaron las tareas para la igualdad de manera correcta en 60 casos de un total de 60 y, las tareas para el paralelismo en 63 casos de un total de 70. En lo que se refiere a los escolares de 7º grado, entonces, como se ve en la tabla, sus resultados de las tareas de control de ambos tipos son similares a los de los alumnos del 6º grado. Los escolares de 7º grado y, en particular los de 6º, realizaron las tareas para el paralelismo de manera más exitosa, en comparación con las tareas de control para determinar la igualdad de las figuras. Esto se explica, por un lado, por el hecho de que el tema "líneas paralelas", en el curso de geometría para el sexto grado, se estudia al final del año escolar y, consecuentemente, los escolares no habían olvidado todas las tareas relacionadas con este tema. Por otro lado, esto se puede explicar también por el hecho de que, en el curso de geometría, se identifican las características del paralelismo. A pesar de que no se realiza ningún trabajo especial al respecto, éstas se utilizan durante la demostración de los teoremas concretos de paralelismo y la solución de problemas para demostración.

De esta forma, los resultados del experimento realizado nos hablan acerca de las ventajas de nuestra metódica en comparación con la tradicional. Esto se refleja no sólo en el hecho de que, los sujetos lograron demostrar los teoremas y solucionar los problemas con mayor éxito que los escolares de 6º e, incluso de 7º grado, sino también, mostró que la formación en los sujetos de la habilidad para demostrar los teoremas de la igualdad y del paralelismo, requirió aproximadamente la mitad de tiempo, en comparación con el tiempo considerado en los programas escolares para el estudio de las partes correspondientes del curso.

Los resultados obtenidos en este experimento también nos permiten considerar que, los componentes identificados constituyen en realidad el contenido de la habilidad para demostrar.

En este estudio se identificaron los componentes de la habilidad para demostrar teoremas y solucionar problemas de demostración de un solo tipo. El análisis de otras partes del curso de geometría, permitirá identificar componentes similares en cada uno de ellos. Esto significa que se puede enseñar a todos los escolares a demostrar la mayoría de los teoremas geométricos.

Como mostró el estudio, el trabajo completo con estos componentes, no siempre es necesario. La asimilación de dichos componentes de la habilidad para demostrar los teoremas de la determinación de la igualdad de figuras, era suficiente para que, los sujetos posteriormente, pudieran solucionar exitosamente los teoremas y problemas para el establecimiento del paralelismo de las líneas rectas. El paso de la habilidad para demostrar teoremas de un tipo hacia los teoremas y problemas de otro tipo que, tuvo lugar en nuestro estudio, se explica por la estructura lógica general de las características de los conceptos que, constituían la base para la inclusión de teoremas y problemas dados en grupos específicos. El contenido de los conceptos “igualdad” y “paralelismo” es totalmente diferente, sin embargo, la estructura lógica de la acción de la conducción hacia estos conceptos es la misma. Para poder establecer si unas u otras figuras geométricas son iguales o no, es necesario verificar si éstas poseen por lo menos una de las características de la igualdad. De la misma forma, para poder determinar si las dos líneas rectas son paralelas o no, es necesario verificar también si estas líneas rectas poseen o no por lo menos una de las características del paralelismo. Consecuentemente, tanto el método del desplegamiento de las condiciones, como el orden de su análisis eran iguales.

De esta forma, la estructura general de las habilidades que se utilizaban durante la demostración de teoremas de ambos tipos, precisamente determinó el paso descrito anteriormente.

Durante el estudio de geometría, es muy importante formar en los escolares los métodos generales para la demostración de teoremas geométricos. Sin embargo, en la práctica escolar casi no se presta ninguna atención a la formación de los métodos de este tipo. Los escolares no ven nada general en la demostración de diferentes teoremas. Cada teorema se percibe como un teorema nuevo, cuya demostración sólo se debe memorizar. Esto explica precisamente que, cuando se cambia el dibujo del teorema o se introducen las determinaciones nuevas de letras, los alumnos presentan dificultades para reproducir la demostración memorizada anteriormente.

El experimento realizado mostró la posibilidad para formar en los escolares los métodos generales para la demostración geométrica. La identificación de las características generales de la igualdad, la formación de la acción de la conducción hacia el concepto “igualdad”, así como la acción de “desplegar” las condiciones, garantizan la orientación libre de los sujetos en los teoremas del establecimiento de la igualdad de las figuras geométricas. Nuestros sujetos percibían los teoremas de este tipo como los problemas simples para la utilización de las características de la igualdad. En la práctica escolar, no sólo no se realiza el trabajo con las características generales de la igualdad sino, incluso, éstas no se identifican. Si consideráramos también el hecho de que, en los manuales muchos teoremas de la igualdad se relacionan con diferentes partes del curso de geometría, entonces se aclararía por qué los escolares perciben diferentes teoremas de este tipo como teoremas que no tienen nada en común.

Evidentemente, en el resultado del trabajo constante con los teoremas de uno u otro tipo, en los escolares, se forman los métodos para la demostración de teoremas de manera espontánea. Sin embargo, con este medio de la formación, estos métodos aparecen muy lentamente, casi siempre son incompletos y, como mostró nuestro estudio, no se forman en todos los escolares.

Debido a que, en las condiciones de teoremas y problemas de demostración, las características de los fenómenos geométricos que se buscan se proporcionan en el tipo "oculto", el dominio de los escolares del tercer componente de la habilidad para demostrar a través de la acción de "desplegar" las condiciones (gracias al cual se logra la identificación de las características que se buscan), adquiere un significado muy grande. El trabajo completo y preciso con el componente dado, incrementa significativamente la calidad de la realización de la demostración geométrica.

El estudio mostró la necesidad de formar en los escolares, no sólo la habilidad para "desplegar" las condiciones en tipo general, sino también, realizar la búsqueda en la dirección determinada.

En el experimento se mostró la posibilidad para formar en los alumnos, la habilidad para realizar la búsqueda "dirigida" durante el proceso de la ejecución de la demostración geométrica. Esto último se lograba a través del trabajo con la acción de "desplegar" con el apoyo en las "zonas de búsqueda". Este trabajo permite racionalizar el proceso del "desplegamiento", lo cual conduce a la reducción significativa del tiempo de la búsqueda de las características correspondientes.

De esta forma, el éxito de la realización de la demostración geométrica depende no sólo del hecho de qué tan correctamente se desplegó el contenido real de la habilidad para demostrar, sino también, de qué tan completamente se asimiló este contenido. Así, la realización exitosa de las tareas de control por parte de nuestros sujetos se explica, antes que nada, por el hecho de que al identificar tres componentes básicos de la habilidad para demostrar, nosotros hemos convertido simultáneamente cada uno de ellos en el objeto especial de la asimilación.

En nuestro experimento, durante el proceso de la demostración, la interrelación y el carácter secuencial de la utilización de diferentes componentes se proporcionaban a través de una regla especial que dirigía a los sujetos en la realización de las tareas de control.

Los estudios futuros deberían prestar mayor atención al trabajo con esta regla. El objetivo básico de nuestro siguiente trabajo será la identificación de las condiciones para la formación de los métodos más generales, que garantizarán la aproximación independiente de los sujetos, hacia las clases más amplias de teoremas geométricos y de problemas de demostración.

Indudablemente, la solución de este problema permitirá incrementar el nivel del pensamiento geométrico de los escolares y, dará la posibilidad de obtener un efecto mayor en relación, tanto con la calidad de la enseñanza, como con la reducción del tiempo necesario para la enseñanza de geometría.

LITERATURA

1. Adamar Zh. Geometría elemental. Parte I. Planimetría. Moscú, 1936.

2. Galperin P. Ya. El desarrollo de los estudios para la formación de las acciones mentales. “Ciencia Psicológica en la URSS” .Tomo I. Moscú, Ed.APN de la Federación Rusa, 1959.

3. Galperin P. Ya. Acerca de la formación de las imágenes sensoriales y de los conceptos. “Materiales de Simposium Psicológico de 1955” Moscú, Ed.APN de la Federación Rusa, 1957.

4. Galperin P. Ya. Y Gueorguiyev L.S. Acerca de la formación de los conceptos matemáticos iniciales. “Informes de APN de la Federación Rusa”. Moscú, 1960. No. 1, 3, 4, 5 y 6.

5. Galperin P. Ya. Y Dubrovina A. N. Tipos de orientación en la tarea y la afirmación de los conceptos gramaticales. “Informes de APN de la Federación Rusa”. Moscú, 1957. No. 3.

6. Galperin P. Ya y Talizina N. F. Acerca de la formación de los conceptos geométricos

iniciales sobre la base de la organización de las acciones en los escolares. "Problemas de psicología", 1957. No. 1.

7. Lovlev N. N. Los métodos generales de las matemáticas y de su enseñanza. (Metodología y metódica de las matemáticas). Curso de sesiones. Parte I. Bakú, 1925.

8. Kabanova-Meller E. N. El papel del dibujo para los teoremas geométricos. "Informes de APN de la Federación Rusa". Moscú, 1950. Serie 28.

9. Landa L. N. Acerca de la formación del método general de la actividad intelectual durante la solución de problemas en los escolares. "Problemas de psicología", 1959. No. 3.

10. Poggia D. Cómo solucionar un problema. Moscú, Ed. Uchpedguiz, 1961.

11. Sontsov A. Cómo enseñar la búsqueda consciente de la demostración. "Informes del Instituto Pedagógico Gorsky", 1929.

12. Talizina N. F. Acerca de la Asimilación de los conceptos geométricos iniciales." "Materiales de Simposium Psicológico de 1955" Moscú, Ed.APN de la Federación Rusa, 1957.

13. Zikova V. I. Operaciones con los conceptos durante la resolución de los problemas geométricos. "Informes de APN de la Federación Rusa". Moscú, 1950. Serie 28.

14. Zikova V. I. Notas psicológicas acerca de la asimilación de los conceptos geométricos iniciales. Moscú, Ed. Uchpedguiz, 1953.

Capítulo 5
La formación de las habilidades generalizadas del Pensamiento Geométrico

I. A. Valadarskaya

El presente trabajo pertenece al ciclo de las investigaciones realizadas sobre la base de los principios de la teoría de la formación de las acciones mentales por etapas de P. Ya. Galperin; en particular, ella realiza el tercer tipo de orientación en la organización de la enseñanza.

El objeto de nuestra investigación es la formación de las habilidades generalizadas, sobre la ejecución de las transformaciones geométricas elementales que se estudian en el curso escolar de geometría (transformaciones de un grupo de movimiento, es decir, rotación alrededor de un punto; simetría central y axial; traslación paralela y, en general, las transformaciones de la semejanza y homotecia). Durante la selección de este material nosotros partimos de las consideraciones siguientes:

En primer lugar, las transformaciones geométricas no son otra cosa que una generalización del concepto acerca de las funciones y, por eso, ellas permiten "considerar desde un punto de vista tanto, determinadas partes de la geometría, como sus relaciones mutuas".[13]

Esto significa que, el estudio de las transformaciones geométricas descubre la posibilidad de subordinar a una sola idea toda la geometría escolar, es decir, a la idea de la dependencia funcional.

13 F. Klein. La matemática elemental desde el punto de vista de la matemática superior. Moscú - Leningrado, 1934.

En segundo lugar, lo mucho que tienen en común estas transformaciones da la posibilidad de simplificar significativamente la demostración de muchos teoremas.

En tercer lugar, el estudio de las transformaciones proporciona a los escolares procedimientos (métodos) de solución de problemas de construcción que, constituyen uno de los medios del desarrollo del pensamiento geométrico de los alumnos.

Hasta ahora, en la enseñanza de la geometría no se les ha prestado la atención debida a las transformaciones geométricas mientras que, el desarrollo de la ciencia geométrica hace mucho tiempo mostró que, las transformaciones constituyen una de las áreas más importantes de la geometría científica.

El análisis de los manuales didácticos y de numerosas investigaciones metodológicas acerca del problema del estudio de las transformaciones geométricas en la escuela media, mostró que, estos conocimientos y habilidades están representados no como un sistema, sino, como una serie de fenómenos particulares cuyo estudio se prolonga durante varios años. Además, cada transformación se da de manera aislada, sin relación con otras, a pesar de que tal relación existe.

Las características que poseen las transformaciones se consideran para cada tipo concreto por separado. Al mismo tiempo, muchas características son análogas, por ejemplo, las transformaciones de un grupo de movimientos.

Posteriormente, para cada transformación se da un procedimiento particular para su realización. Además, lo fundamental en las acciones de los alumnos, es la parte ejecutiva: los alumnos producen mecánicamente las construcciones sin tener una base orientadora completa y adecuada. La orientación de los alumnos se da sólo sobre algunos rasgos particulares de cada una de las transformaciones. Esto se explica por el hecho de que, las condiciones que permiten comprender la lógica de la construcción, no se abren ante los alumnos.

El medio irracional de exposición de las transformaciones geométricas, conduce a las dificultades con las que se enfrentan los maestros durante la enseñanza y los alumnos durante la asimilación de esta parte del curso.

La enseñanza transcurre de acuerdo al primer tipo de la orientación con la utilización de elementos del segundo tipo.[14]

En nuestro trabajo se realizó un intento por estructurar el estudio de las transformaciones geométricas elementales, de acuerdo al tercer tipo de la orientación que se caracteriza, en primer lugar, por la identificación de las unidades básicas del material del área dada de los conocimientos y de las reglas de su combinación en fenómenos concretos en el momento inicial de la enseñanza. Las unidades básicas del material son todos aquellos elementos y condiciones objetivas que, son esenciales para cualquier fenómeno en una rama determinada de los conocimientos, y que, descubren las particularidades específicas de la materia que se estudia.

En segundo lugar, la orientación del tercer tipo se caracteriza por proporcionarle al alumno el método para análisis de un nuevo fenómeno en esta área. El método consiste en la búsqueda independiente de la combinación concreta de las unidades básicas del material para cualquier fenómeno. Conociendo las unidades básicas del material y, utilizando conscientemente el método de análisis, el alumno conforma la base orientadora completa de la acción de manera independiente que es adecuada, no sólo para cualquier fenómeno conocido de una área determinada de los conocimientos, sino también, para fenómenos nuevos aún desconocidos pero teóricamente posibles.

El carácter del proceso de la formación de esta acción, así como la calidad del producto final que constituyen conocimientos y habilidades determinadas, depende del tipo de la base orientadora de la acción. Consecuentemente, el tipo de la base orientadora determina el tipo de enseñanza. El tercer tipo de la enseñanza corresponde al tercer tipo de la base orientadora, que se caracteriza por:

1) La formación del método de análisis del material, es decir, la formación de las habilidades para identificar las unidades básicas del material y las reglas de su combinación.

14 Ver P. Ya Galperín. El desarrollo de las investigaciones sobre la formación de las acciones mentales. En: “Ciencia psicológica en la URSS”. Tomo I, Moscú, Academia de Ciencias Pedagógicas de la Federación Rusa, 1959. ; P. Ya. Galperín. Tipos de la orientación y tipos de la formación de acciones y conceptos “Discursos de la Academia de Ciencias Pedagógicas de la Federación Rusa”, 1959, No.2; P. Ya. Galperin: Psicología del pensamiento y el estudio de la formación de las acciones mentales por etapas. En: “Las investigaciones del pensamiento en la psicología soviética”. Moscú, “Ciencia”, 1966.

2) La formación de la habilidad para utilizar este método para cualquier fenómeno del área dada de conocimientos, es decir, la formación de la habilidad para construir independientemente la base orientadora completa, para cada uno de estos fenómenos.

En dependencia de los objetivos de la enseñanza, la actividad de los alumnos puede ser orientada hacia el análisis de todos los fenómenos particulares de una área dada de conocimientos, hacia la reconstrucción de la multitud fenómenos particulares desconocidos por el alumno anteriormente o, hacia la creación de fenómenos nuevos. En cada uno de estos casos, el proceso de construcción independiente de una base orientadora completa de la acción adecuada para cada fenómeno, se realiza a través de vías diferentes.

En el caso, cuando el alumno necesita analizar todos los fenómenos particulares de una área dada de conocimientos, el proceso de construcción independiente de una base orientadora completa de la acción para cada fenómeno se realiza de la siguiente manera. Al alumno se le describe el fenómeno y él debe distinguir en ese fenómeno las unidades básicas conocidas para él, caracterizar la combinación de estas últimas y, construir la base orientadora completa de la acción que le permitirá obtener un producto, según el modelo dado o realizar una caracterización para el análisis del fenómeno dado. Así, durante la enseñanza de la escritura de las letras de diferentes alfabetos[15], el alumno, al obtener el modelo del contorno nuevo de las letras, lo dividía en partes (antes de reproducirlo) que no cambian su dirección (curvas), es decir, distinguía en el contorno las unidades básicas. Después el alumno caracterizaba la posición de cada una de las "unidades" en las líneas de una hoja de papel, es decir, indicaba las reglas de la combinación de estas unidades. De esta manera el alumno elaboraba la base orientadora completa de la acción para la reconstrucción del contorno dado para la escritura correcta de esta letra.

Los alumnos de segundo grado que trabajaron de acuerdo al programa experimental

15 Ver: N.S. Pantina. La formación del hábito motor de la escritura en dependencia del tipo de orientación en la tarea. Problemas de psicología, 1957. No. 4.

de L.N. Aidarova[16], al descubrir la dependencia de la información (significado) de la "anatomía" de la palabra –de determinadas partículas significativas de la palabra (morfemas)– y al dominar, de esta manera, el método de trabajo con el material lingüístico, elaboraban la base orientadora completa de la acción sobre el análisis, no sólo de las palabras de la lengua materna, sino también, de una lengua artificial para la determinación de la estructura morfológica de una serie de palabras desconocidas por los niños en idiomas extranjeros (inglés, alemán, francés), para la aclaración de la estructura de palabras rusas antiguas, etc.

En el caso de la estructuración señalada de la enseñanza, el alumno analiza el fenómeno dado pero no reconstruye los fenómenos desconocidos para él y tampoco, es capaz de crear fenómenos nuevos.

Es posible otra vía cuando el alumno crea fenómenos nuevos, hasta entonces desconocidos para él. En este caso, diferentes variantes de construcción independiente de una base orientadora completa para la obtención de nuevos fenómenos también son posibles: a) a través de variar las unidades básicas de manera inmediata, cuyas características pertenecen a la misma área de los conocimientos que los fenómenos estudiados; b) a través de la vía indirecta con ayuda de las unidades básicas de los productos para los cuales son necesarios los fenómenos reconstruidos. Además, los conocimientos en los cuales se apoya el alumno, durante la reconstrucción de los fenómenos de acuerdo a sus unidades, no se limitan solamente por el área que incluye esos fenómenos. Así, los alumnos que estudian de acuerdo a programas elaborados por I. P. Kaloshina[17], crearon tornos para cortar metales e instrumentos para la preparación de piezas de cualquier forma de manera independiente. En la elaboración de estos nuevos objetos se consideró la naturaleza específica de los tornos y, los instrumentos para reflejar en sus funciones, las propiedades de los productos preparados y parecerse a ellos.

16 Ver A.I. Aidarova. La formación de algunos conceptos gramaticales de acuerdo al tercer tipo de orientación en la palabra. La dependencia de la enseñanza del tipo de actividad orientadora. Moscú, Editorial de la Universidad de Moscú, 1968.

17 Ver: I.P. Kaloshina. Los problemas de la formación del pensamiento técnico. Moscú, Editorial de la Universidad de Moscú, 1974.

En relación con lo anterior, la base para la creación de nuevos tornos e instrumentos eran los conocimientos, en primer lugar, acerca de las unidades básicas de los productos (piezas de diferentes formas obtenidas con la ayuda de los tornos e instrumentos) y de las reglas de su combinación; en segundo lugar, acerca de las dependencias funcionales (leyes de similitud) de las unidades básicas y, de las reglas de su combinación en los tornos e instrumentos a partir las unidades básicas y, reglas de su combinación en las piezas. Además, el alumno obtuvo los conocimientos necesarios acerca de las piezas de las matemáticas y no de la técnica: las unidades básicas de las piezas que representan figuras geométricas de diferentes formas, son aquellas figuras que reproducen las líneas en la cantidad no menor de dos, mientras que las reglas de su combinación se proporcionan a través de la función de la línea (una de ellas es formadora, la línea real, la que debe moverse; la otra, orientadora, la línea ideal, la que determina la dirección del movimiento de la línea formadora); a través del ángulo (la línea formadora se debe de colocar con el ángulo determinado en relación con la superficie de la línea orientadora) y, a través de la forma (las líneas pueden ser de diferentes formas).

Respecto a las transformaciones geométricas las exigencias del tercer tipo de orientación son las siguientes: a) los alumnos desde el inicio mismo deben asimilar aquellos elementos generales, aquellas unidades básicas que caracterizan a todas las transformaciones geométricas que se estudian en la escuela; b) asimilar el método de trabajo con estas unidades que permite obtener todos los tipos de transformaciones dadas. Consecuentemente, los alumnos deben asimilar la habilidad generalizada para ejecutar estas transformaciones.

Los elementos generales de todas las transformaciones que se estudian en la escuela son los siguientes:

1. El objeto inicial de la transformación, es decir, aquello que es lo que hay que transformar (prototipo); cualquier figura geométrica puede ser el objeto inicial.
2. El objeto final de la transformación (imagen), es decir, la figura que se obtiene como resultado de la transformación.
3. El objeto, en relación con el cual se realiza la transformación; este objeto es un punto, una línea recta o un plano.

4. Todas las transformaciones consideradas se caracterizan por:

   a) Correspondencia a los puntos, es decir, todas las transformaciones convierten un punto en otro punto; a cada punto del plano A le corresponde un punto determinado del plano A´, en el cual se transforma el plano A;

   b) Correspondencia biunívoca, es decir, todas las transformaciones convierten un punto en uno y sólo uno mientras que, dos puntos diferentes se convierten en dos puntos diferentes;

   c) Conservación de una relación estrictamente determinada de las distancias entre dos puntos cualesquiera:

$$\mathbf{p\,(A', B') = Kp\,(A, B),}$$

   donde los puntos A´ y B´ son las imágenes de los puntos correspondientes A y B. K es el coeficiente de proporcionalidad.

El significado de K depende solo del tipo de transformación, pero no de la selección de los puntos A y B; para todas las transformaciones de movimiento $|K| = 1$, en el caso de la semejanza (homotecia) $|K| \neq 1$.

5. Para la realización de cualquiera de estas transformaciones es necesario realizar una de las acciones siguientes: rotar el objeto inicial alrededor de un punto (eje; plano), trasladarlo sobre un vector (con diferentes coeficientes de proporcionalidad) o ejecutar ambas acciones una tras otra.

El conjunto de las posiciones generales señaladas conforma la base orientadora completa y adecuada del procedimiento, para la ejecución de las transformaciones geométricas. En calidad de las unidades fundamentales del material, la variación de las cuales ofrece toda una gama de transformaciones que se estudian en la escuela, fueron elegidas las siguientes: 1) el objeto, en relación con el cual se realiza la transformación, 2) la acción de traslación y rotación. Las reglas de su combinación se dan por el ángulo de rotación y el vector de traslación.

En dependencia de las diferentes combinaciones de estos factores se pueden obtener todos los tipos de transformaciones que se estudian en la escuela media.

Así, al tomar un punto en calidad de objeto (en relación con el cual se realiza la transformación) y la acción de la rotación, se pueden obtener diferentes transformaciones, cambiando el valor del ángulo de rotación: si a ϖ 180º la rotación se hace alrededor del punto, si a = 180º la simetría es central. Consecuentemente, ante todas las condiciones iguales la variación del ángulo de rotación puede conducir al cambio del tipo de la transformación. De la misma forma, el cambio del vector de traslación con el mismo objeto, en relación con el cual se realiza la transformación (un punto), la acción de la traslación permite obtener dos tipos diferentes de transformación: si el vector es conocido, la traslación es paralela; si el vector se determina en el resultado del análisis del coeficiente de proporcionalidad dado, es homotecia.

Posteriormente, el cambio del objeto, en relación con el cual se realiza la transformación, sin cambiar la acción conduce al cambio del tipo de la transformación. De esta forma, si la acción es de rotación, a = 180º y el objeto, en relación con el cual se realiza la transformación, es un punto o una recta, entonces, en el primer caso, tenemos una simetría central y en el segundo caso una simetría axial.

Los elementos generales identificados y, las reglas de su combinación, determinan la estructura de la actividad de los alumnos sobre la realización de las transformaciones. Esta actividad incluye los siguientes componentes.

a) El análisis del objeto inicial de la transformación que consiste en la identificación de los llamados puntos determinantes del objeto dado. Con puntos determinantes entendemos, el conjunto finito de los puntos de acuerdo a los cuales puede ser reconstruido el objeto dado. Así, el segmento tiene dos puntos determinantes, éstos son sus puntos límites; para el triángulo los puntos determinantes son sus vértices; los puntos determinantes de una circunferencia serán el centro y cualquier punto situado en la propia circunferencia, etc.

b) La selección del objeto, en relación con el cual se realiza la transformación. Como fue señalado anteriormente, esos objetos en las transformaciones consideradas son un punto, una recta o un plano.

El objeto, en relación con el cual se realiza la transformación, puede ocupar cualquier posición en relación con el objeto transformado. Por ejemplo, durante la transformación del triángulo con ayuda de la simetría central, el centro de la simetría puede encontrarse fuera o dentro del triángulo; por ejemplo, puede coincidir con el punto en que se cruzan las medianas o estar ubicado en uno de sus lados. Durante la construcción de un tetrágono, simétrico a un tetrágono dado a respecto a un eje dado, en calidad de este eje puede servir, uno de los lados del tetrágono, cualquiera de sus diagonales o la bisectriz de uno de sus ángulos (interno o externo), etc.

c) La selección de la acción. Como mostró el análisis de las transformaciones elementales, su realización se resume en acciones tales como: la rotación (alrededor de un punto, de un eje o de un plano) la traslación sobre el vector o la realización secuente de ambas acciones. En realidad, así como la simetría central constituye un caso particular de la rotación alrededor de un punto con el ángulo de 180º y, la simetría axial es la rotación alrededor del eje en 180º, entonces, para la realización de tales transformaciones, como el movimiento giratorio alrededor del punto y del eje (simetría central y axial), es suficiente realizar la rotación alrededor del punto o del eje.

Para la realización de la traslación y la homotecia es necesario pasar el objeto inicial a un vector determinado. Además, en caso de la traslación paralela, se da la magnitud del vector y, en el caso de la homotecia, dicha magnitud se determina con la ayuda del coeficiente de homotecia. La obtención de figuras semejantes se reduce a la realización de la transformación de la homotecia y de uno de los tipos de movimiento: la rotación alrededor del punto o eje, la simetría central o axial, la traslación paralela.

d) La realización de la acción elegida.

e) El análisis del objeto final.

En correspondencia con la estructura de la actividad, se identificaron las instrucciones generales para la ejecución de las transformaciones, las cuales dan el método general de su realización con el siguiente orden de las acciones:

1. Señale el objeto inicial de la transformación.

2. Señale el objeto, con respecto al cual se realiza la transformación.
3. Seleccione los puntos determinantes del objeto inicial.
4. Señale las acciones, con cuya ayuda se pueden realizar las transformaciones.
5. Seleccione la acción necesaria para la solución del problema dado.
6. Realice la acción elegida.
7. Señale el objeto final de la transformación.
8. Compare los objetos inicial y final.

De esta forma, la habilidad generalizada para realizar transformaciones geométricas, consiste de una pequeña cantidad de componentes adecuados al conjunto de las condiciones objetivas que garantizan la realización correcta de cualquier transformación elemental. Además, cada transformación concreta, participa como un caso particular de la realización de estos componentes generales. Los alumnos, al asimilar la habilidad generalizada, obtienen cada transformación particular del grupo dado de manera independiente. El maestro sólo informa el nombre matemático correspondiente.

Cada componente de la habilidad señalada fue objeto de una asimilación especial. Para esto fue indispensable identificar el contenido de las acciones relacionadas con cada uno de los componentes: determinar las operaciones incluidas en ellas (orientadoras y ejecutivas) y elaborar la prescripción para la utilización de la acción en la solución de las tareas concretas. Así, durante la formación de la acción sobre la identificación de los puntos determinantes del objeto que se transforma, en la parte orientadora de esta acción, se incluyen los conocimientos siguientes: cuáles son los puntos necesarios para señalar en el objeto, para después, teniendo estos puntos, construirlo. Por ejemplo, como fue señalado, el segmento se determina completamente con sus puntos límites, el triángulo se determina por sus tres vértices, etc.

La dirección del proceso de asimilación de la habilidad generalizada para la realización, sobre la realización de las transformaciones geométricas elementales, se logró en el resultado del trabajo por etapas, tanto con las acciones, que se incluyen en cada uno de los componentes identificados, como con toda la habilidad. En relación con esto, se planificó anteriormente hasta qué nivel debe llegar la formación de todas las acciones y de la habilidad en general. Así, las acciones: "selección del objeto inicial de la transformación", "selección del objeto con respecto al cual se realiza la transformación", "selección de las acciones", alcanzaron el nivel mental (la parte orientadora y ejecutiva de estas acciones). En las acciones: "identificación de los puntos determinantes", "ejecución de la acción elegida", sólo la parte orientadora alcanzó el nivel mental. La parte ejecutiva se quedaba siempre en la forma materializada externa: el alumno marcaba en el papel los puntos determinantes obtenidos en el resultado de la acción elegida en correspondencia con estos puntos, de acuerdo a los cuales él construía el objeto final.

La organización de la formación de la habilidad generalizada exigió de los alumnos la asimilación del sistema de conceptos y acciones, los cuales ellos no habían estudiado anteriormente: el concepto acerca de la figura orientada, el concepto de vector, ángulo dirigido, sus igualdades y las reglas de su construcción; el concepto de distancia entre figuras, el concepto de coeficiente de congruencia (homotecia) y otros. Todos estos conceptos y acciones previas se formaron antes del estudio de las transformaciones.

El programa experimental se comprobó con 10 niños por la vía de la enseñanza individual y, también con 40 alumnos en condiciones de experimento grupal: un grupo de 16 niños y otro grupo de 24. Los niños que participaron en el experimento fueron alumnos de 7o. grado: dos alumnos tenían buenas calificaciones en matemáticas y los demás tenían malas y regulares.

La investigación incluyó las siguientes series del experimento:

I. Experimento de constatación, cuyo objetivo era la determinación del nivel de partida de los conocimientos y las habilidades que poseían los alumnos.

II. Experimento de enseñanza que incluyó: 1) la formación de los conocimientos y habilidades previas, indispensables para la asimilación de la habilidad generalizada para la realización de las transformaciones geométricas y 2) la formación de la habilidad generalizada para la realización de las transformaciones.

III. La serie de experimento de control.

La determinación del nivel inicial de los conocimientos y las habilidades de los escolares

Antes de pasar a la elección del material que se debe de asimilar y, a la elaboración del programa de la actividad de los alumnos sobre su asimilación y realización, es necesario determinar las posibilidades reales del alumno y establecer el nivel de partida de sus conocimientos y habilidades.

La determinación del nivel inicial de los conocimientos y las habilidades de los alumnos que participaron en el experimento de enseñanza, se realizó en tres direcciones. En primer lugar, debido a que la enseñanza experimental se realizó con los alumnos, quienes de acuerdo al programa de matemáticas en la escuela ya conocieron estas transformaciones geométricas (la simetría central y axial), entonces, antes del inicio de la enseñanza, fue necesario comprobar el nivel de conocimientos de los alumnos acerca de este material. En segundo lugar, se determinó la presencia en ellos, de aquellos conocimientos y habilidades matemáticas que eran necesarias para adquirir los nuevos conocimientos y habilidades. Así, en los alumnos se comprobó el conocimiento de los conceptos matemáticos iniciales, sus características, la habilidad de utilizar el compás, la regla y la escuadra. En tercer lugar, se comprobó si los niños dominaban o no aquellas acciones cognoscitivas, las que se utilizaron, como medios para la asimilación de los nuevos conocimientos. En particular, se determinó si los alumnos pudieron o no utilizar la acción de reconocimiento como medio de asimilación de los conceptos.

Para la determinación del nivel inicial de los conocimientos y las habilidades en las tres direcciones señaladas, a los alumnos se les proporcionó un trabajo de control con 11 tareas.

Las tareas se dividieron en dos grupos: primer grupo (5 tareas) eran tareas para la verificación de los conocimientos, acerca de los rasgos necesarios y suficientes de las figuras (triángulo, segmento, punto y otros) simétricas, con respecto a un punto (eje), y las habilidades para utilizar la acción de reconocimiento; el segundo grupo (6 tareas) eran tareas dirigidas a la verificación de la habilidad de realizar la transformación de figuras, con ayuda de la simetría axial y central y los conocimientos de las características de estas transformaciones. La realización de las tareas, tanto del primero, como del segundo grupo, simultáneamente significó la verificación de los conocimientos acerca de los conceptos geométricos iniciales, sus características, las habilidades para utilizar los instrumentos de dibujo: la regla, la escuadra y el compás.

Durante la realización de cada una de las once tareas la atención se dirigió, no sólo al resultado final, sino también, al hecho de cómo el alumno resolvía esta tarea y cómo él se orientaba. Se consideró también si él podía fundamentar o no las acciones que realizaba.

Para la verificación de los conocimientos acerca de los rasgos de los conceptos de las figuras simétricas (simétricas con respecto al punto o al eje) y, también para verificar si los alumnos dominan o no la acción de reconocimiento, como el medio de asimilación de los conceptos, se les proporcionaron tareas de dos tipos: a) tareas, en las cuales los rasgos de los conceptos que se verificaban, fueron presentados de manera indirecta; b) tareas, en las cuales los rasgos fueron presentados de manera directa.

Al primer tipo de tareas pertenecen los ejemplos 1 y 2.

Ejemplo 1. "En un paralelogramo CDEF las diagonales CE y DF se cruzan en el punto O. ¿Serán simétricos los puntos D y F con respecto al punto O? ¿Serán simétricos los puntos D y F con respecto a la recta CE? Escriba la respuesta de forma detallada"(el dibujo no se presentaba).

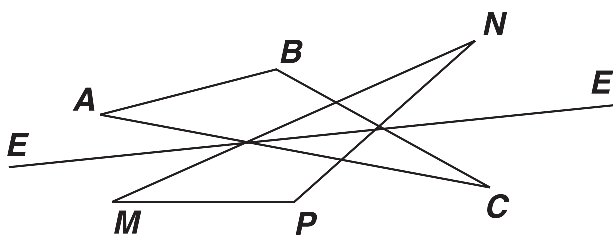
Ejemplo 2. Se da una circunferencia con centro en el punto O; AB y MN son dos diámetros diferentes de esta circunferencia. Escriba detalladamente su respuesta a las tres preguntas siguientes:

1. ¿ Serán los puntos A y B simétricos con respecto al punto O ?
2. ¿ Los puntos A y B serán simétricos con respecto a la recta MN ?
3. ¿ En qué situación recíproca los diámetros AB y MN de la circunferencia dada, los segmentos OA y OB se pueden llamar simétricos con respecto a la recta MN ? (El dibujo no se presentaba).

Con el segundo tipo de tareas se relacionan los ejemplos 3 y 4.

Ejemplo 3. "Se dan la recta l, dos puntos C y C´, situados a los lados opuestos de la recta, y el punto O, perteneciente a la recta l. Se conoce que OC = OC´ y el segmento CO es perpendicular a la recta l. ¿Se podrá llamar a los puntos C y C´ simétricos respecto a la recta l dada? (El dibujo no se presentaba).

Ejemplo 4. ¿Serán simétricos los triángulos ABC y MNP representados en el dibujo, con respecto a la recta EF, si se conoce, que la recta EF es perpendicular a cada uno de los segmentos AM, BP y CN y los divide a la mitad? Para este ejercicio se dio el siguiente dibujo:



Dibujo 1

El orden de la presentación de las tareas fue el siguiente: inicialmente se dieron tareas del primer tipo, después se proporcionaron las tareas de segundo tipo. Aquí nosotros partimos del hecho de que si el sujeto realiza correctamente las tareas, en las cuales los rasgos de los conceptos están dados de manera indirecta (por la realización correcta nosotros entendemos no sólo la respuesta sin errores, sino también, su argumentación completa) entonces, esto demuestra la formación en él de los conceptos de las figuras simétricas con respecto al punto (eje) y las acciones de reconocimiento y, por lo tanto, la realización de las tareas del segundo tipo ya no es tan necesaria. Si las tareas del primer tipo resultan difíciles para el alumno, entonces, a él se le proporcionan las tareas en las cuales, los rasgos de los conceptos se dan de forma directa y, la formación de los conocimientos y las habilidades que nos interesan se comprueban en el transcurso de la solución de estas tareas.

Los resultados de la realización del primer grupo de tareas se presentan en la tabla 1.

TABLA 1

	Conocimiento de los rasgos de las figuras simétricas respecto a:		Habilidad para utilizar la acción de reconocimiento.
	Eje	Punto	
Cantidad de tareas presentadas	200	150	250
Porcentaje de tareas resueltas correctamente del total de las tareas presentadas	6 %	9,3 %	3,5 %

Como muestra la tabla el porcentaje de los ejercicios resueltos correctamente es muy bajo. Así, en la realización del ejercicio 1 antes expuesto, de 50 sujetos sólo 4 (8%) dieron una respuesta correcta y argumentada a la primera pregunta de la tarea y, tres sujetos (6%) a la segunda pregunta, además, dos de estos sujetos habían respondido correctamente la primera pregunta. Las respuestas de los demás alumnos no contenían errores pero, faltaba su fundamentación o, sus respuestas fueron incorrectas. Una parte de los alumnos se negó a resolver el ejercicio, argumentando su rechazo diciendo que “a ellos se les olvidó” o que ellos “no recuerdan”.

Las respuestas incorrectas de los alumnos pudieron deberse a una asimilación incompleta del material matemático antes estudiado, por ejemplo, el desconocimiento de las propiedades de las diagonales del paralelogramo: “las diagonales del paralelogramo, al cruzarse se dividen a la mitad”. Pero, como demostraron las respuestas de los alumnos a las preguntas adicionales, casi todos los sujetos conocían esta propiedad, sin embargo, ellos no detectaron las relaciones entre ellas y el concepto de los puntos simétricos-centrales.

Cuando a los alumnos se les enseñó esta relación algunos de ellos manifestaron sinceramente: “No nos pasó por la cabeza que los puntos D y F pueden verse no sólo como vértices del paralelogramo, sino también, como puntos simétricos con respecto al punto 0".

El error típico en la respuesta a la segunda pregunta del ejemplo 1, consistía en el hecho de que, los alumnos llegaban a la conclusión incorrecta acerca de la simetría de los puntos D y F, respecto a la recta CE, sólo basándose en la propiedad de las diagonales del paralelogramo. Los sujetos, al dar esta respuesta consideraron sólo un rasgo esencial del concepto de los puntos simétricos, respecto al eje que es la igualdad de las distancias a partir de los puntos D y F hasta el eje CE. Ellos no consideraron otros rasgos esenciales de este concepto (a los lados opuestos del eje sobre una perpendicular hacia el eje). Esto nos habla de que, todo un conjunto de rasgos necesarios y suficientes del concepto de los puntos simétricos con respecto al eje, no se ha formado en los niños.

Los resultados de la realización del ejemplo 2 también son bajos: a la primera pregunta respondieron correctamente 5 alumnos (10 %); en la repuesta a la segunda pregunta, ninguno de los alumnos llegó a una conclusión adecuada ("no se conoce") sobre la simetría de los puntos A y B con respecto al eje MN; a la tercera pregunta no se obtuvo ninguna respuesta correcta. El análisis de las respuestas escritas a la segunda y tercera preguntas y, también las conversaciones con los alumnos, mostraron que en la respuesta a la segunda pregunta, los sujetos consideraron solamente una de las posiciones mutuas posibles de los diámetros AB y MN, específicamente en el caso en el que el diámetro AB es perpendicular a MN. Por esto 6 niños escribieron que los puntos A y B serían simétricos con respecto a la recta MN, pero no dieron ninguna fundamentación de su respuesta. Durante la conversación con estos alumnos, tres de ellos dieron una argumentación completa de la respuesta; "las fundamentaciones" de otros tres alumnos se basaron en que, la posición de los puntos A y B "se parecen a la que ellos estudiaron". Al contestar la tercera pregunta, los sujetos escribieron: "No se puede encontrar esta posición en los diámetros AB y MN, para que los segmentos 0A y 0B fueran simétricos"; hubo también respuestas de este tipo: "nosotros no hemos estudiado eso".

Nosotros hemos observado un cuadro similar al analizar los resultados de la realización del ejemplo 3: sólo un alumno (2 %) contestó correctamente a la pregunta del ejercicio: “Aquí no se puede responder ni sí, ni no, para esto es necesario saber si el segmento C´0 será perpendicular o no a MN”. El resto de los sujetos realizó el ejemplo 3 incorrectamente. Entre las respuestas hubo sólo una negativa, lo cual manifiesta el hecho de que, en el resto de los alumnos, ni siquiera surgió la idea de que la posición de los puntos C y C´ (dada en las condiciones del ejemplo) estos puntos no pueden no ser simétricos con respecto a la recta MN. Por eso es que de 50 sujetos, 48 en la respuesta al ejercicio 4 escribieron: “sí” y, algunos intentaron argumentar su respuesta con que, “los segmentos 0C y 0C’ son iguales”. Dicha explicación de los alumnos habla de su incomprensión sobre el hecho de qué tipo de rasgos son esenciales para el concepto de los puntos simétricos con respecto al eje. En las respuestas, los sujetos se orientaron solamente en un rasgo de este concepto, mientras que ellos, no consideraron los otros rasgos necesarios y suficientes de pertenencia a este concepto (a los lados opuestos respecto al eje, en una perpendicular que va hacia el eje). La repuesta correcta (“no se sabe”) en estas tareas, es posible solamente en aquel caso, cuando los alumnos realicen la orientación en todo el conjunto de rasgos esenciales.

Las conclusiones de los sujetos durante la realización de los ejemplos 1, 2, 3 así como durante la respuesta a las preguntas de otras tareas del primer grupo, se hicieron sobre la base de un conjunto de rasgos insuficientes para la determinación de la pertenencia al concepto de las figuras simétricas con respecto al punto (eje). Esto demuestra la mala asimilación de las acciones de reconocimiento por parte de los alumnos: su orientación en algunos rasgos de los conceptos nos habla de la falta de razonamiento en la realización de esta acción y, de la incapacidad para fundamentar sus respuestas, es decir, del carácter inconsciente de estas acciones.

Durante la realización del ejemplo 4, los sujetos intentaron determinar la simetría de los triángulos ABC y MNP con respecto a la recta EF con la ayuda “del doblez de una hoja de papel” y, nadie se orientó en los datos dados, a partir de los cuales se hubiera podido dar de inmediato una respuesta positiva sin tener que doblar el papel.

El ejemplo 4 se les presentó a los alumnos después del ejemplo 3, en el cual se trataba de la simetría de los puntos con respecto al eje. Nosotros tuvimos el temor de que, las respuestas a la pregunta del ejemplo 3, serían un tipo de apoyo para la realización del ejemplo 4. Pero como mostraron los resultados, los conceptos de puntos y triángulos simétricos con respecto al eje, actúan para los alumnos aisladamente; los alumnos no encontraron ninguna relación entre ellos. Si durante la realización del ejemplo 3, los alumnos intentaban recordar el conjunto de rasgos del concepto de los puntos simétricos con respecto al eje, entonces, al responder a la pregunta del ejemplo 4, a ellos se les olvidaba este concepto, de modo que, ellos razonaban acerca de la simetría de los triángulos sobre la base de su coincidencia en el caso de doblar el dibujo en el eje de simetría. Esto nos habla de que, en los alumnos no se ha formado el concepto de las figuras simétricas unas con otras respecto al eje, como de aquellas figuras, una de las cuales está formada por los puntos que son simétricos a los puntos de la otra figura con respecto al eje dado.

Al aplicar el método de "doblez", muchos alumnos no estuvieron seguros de sus respuestas; ellos escribieron: "parece que estos triángulos van a ser simétricos". "Es necesario doblar la hoja en EF". "Pero aquí es difícil hacer esto, ya que un triángulo "toca" al otro". Estas respuestas se deben al hecho de que en el dibujo la posición de los triángulos simétricos uno con el otro, "no se parece" a la que ellos "se acostumbraron" al estudiar la simetría axial, en la escuela. En los cursos escolares de geometría durante el estudio de la simetría axial se le presta gran atención "al doblez de la hoja de papel"; entre muchos ejemplos (con pescados, con manchas de tinta, con hojitas) con los cuales se enseña este método, no hay ninguno que incluyera cada una de las figuras simétricas una con la otra (pero no con ella misma) en los lados opuestos del eje de simetría (como se muestra en el dibujo para el ejemplo 4). La incapacidad de los alumnos de aplicar el método del doblez en diferentes posiciones de la figura que se transforma y, del eje de simetría, mutuamente señala la falta de generalización de esta acción. En este caso, se debe de añadir, que este método como tal tiene la aplicación limitada para la solución de tareas sobre la construcción y sobre la demostración de teoremas.

Se debe señalar que los dibujos no se proporcionaron para ninguno de los ejemplos del primer grupo (con excepción del ejemplo 4) y que, para su realización, éstos no eran necesarios. Pero muchos sujetos pidieron autorización para hacer el dibujo, explicando que "es más difícil resolver la tarea dada, sólo con palabras y que, con el dibujo es más fácil". Algunos sujetos dijeron que ellos "recuerdan el dibujo" dado, en el manual, lo compararon con el suyo y, después, escribieron la respuesta.

La utilización de los dibujos durante la solución de las tareas incrementó un poco el porcentaje de las respuestas correctas. Así, después de la realización del dibujo para el ejemplo 2, dos sujetos llegaron a una conclusión correcta ("no se sabe") acerca de la simetría de los puntos A y B con respecto a la recta MN. Además, ellos dibujaron algunas variantes de posiciones recíprocas de los diámetros AB y MN en la circunferencia dada y, a partir de estos dibujos, respondieron correctamente la segunda pregunta de la tarea. La mayor parte de los sujetos realizó el dibujo, en el cual las diagonales fueron perpendiculares recíprocamente y, su respuesta afirmativa a la pregunta de la tarea fue incorrecta: ellos realizaron las conclusiones orientándose, no en la parte verbal de las condiciones del problema, sino, sólo en el dibujo realizado por ellos. Esto demuestra el bajo nivel de asimilación del concepto de las figuras simétricas, con respecto al punto (eje) por parte de los alumnos. En primer lugar, la actividad de los alumnos sobre la utilización de este concepto, estaba limitada únicamente por la forma material: los alumnos, antes de responder la pregunta acerca de la pertenencia del objeto dado al concepto, necesariamente realizaban el dibujo correspondiente. En segundo lugar, la generalización de la actividad estaba ausente: los alumnos intentaban encontrar en los dibujos realizados, aquella posición de figuras simétricas respecto al punto (eje), la cual se "pareciera" a la posición dada en el manual escolar de geometría.

De esta forma, los resultados de la realización de los ejercicios del primer grupo mostraron que, los conocimientos y las habilidades evaluadas en nuestros sujetos, no se han formado.

Para la verificación del grado de la formación de la habilidad, para realizar las transformaciones de figuras con ayuda de la simetría central y axial, a los alumnos, se les presentaron tareas en las cuales se les pidió construir una figura (segmento, triángulo, paralelogramo, circunferencia, figura, limitada por línea curva cerrada), simétrica con respecto al centro (eje). La posición del centro (eje) con respecto a la figura que se transforma fue diferente: 1. El centro se encontraba en el área interior de la figura que se transforma (el eje, cruzaba el área interior). Además, el objeto con respecto al cual se realiza la transformación fue uno de los elementos básicos de la figura que se transformaba (el vértice del ángulo, el centro de la circunferencia, uno de los lados del polígono, etc.), o algún otro elemento (el punto de intersección de las medianas, la bisectriz de uno de sus ángulos, el diámetro de la circunferencia, etc.) 2. El centro (eje) se encontraba en el área externa de la figura que se transforma. Por ejemplo, se dieron las tareas del siguiente tipo:

Ejemplo 6.: "En el plano se da el paralelogramo ABCD. Construye un paralelogramo simétrico al dado con respecto al centro E del lado CD. Escriba, ¿Qué figura se obtuvo como resultado de la transformación y por qué?

Ejemplo 10: "En el plano se da una figura geométrica F, limitada por una línea curva cerrada y, una recta MN en el exterior de la figura F. Construye una figura, simétrica a la dada con respecto a la recta MN".

Los resultados de la realización del segundo grupo de tareas están expuestos en la **tabla 2.**

TABLA 2

	Realización de transformaciones					
	Simetría axial			Simetría central		
	Segmento	Circunferencia	Otras figuras	Triángulo	Circunferencia	Otras figuras
Cantidad de tareas presentadas	50	50	50	50	50	50
Porcentaje del total de presentaciones de tareas resueltas correctamente.	16%	14%	12%	14%	12%	10%

Como muestra la tabla 2, los resultados de la realización de las tareas del segundo grupo son más altos que los resultados de la realización de las tareas del primer grupo (ver la tabla 1). Esto se explica por el hecho de que, en la escuela, durante el estudio de la simetría central y axial, la atención básica se dirige a la parte ejecutiva de la acción sobre la realización de transformaciones.

Para aclarar en qué condiciones se orientan los alumnos durante la realización de transformaciones, es decir, para verificar el grado de formación de la base orientadora de esta acción, después de la realización de todas las tareas para la construcción, se les propuso responder a una serie de preguntas entre las cuales estaban las siguientes:

1. ¿Se puede o no realizar la transformación de toda la figura, si se sabe, cómo se realiza la transformación de uno de sus puntos?
2. ¿Por qué durante la transformación del segmento, con ayuda de la simetría respecto al eje, es necesario bajar la perpendicular al eje a partir de los límites del segmento?
3. ¿Por qué durante la construcción de los segmentos simétricos, con respecto al centro, usted construye los puntos simétricos sólo con los límites del segmento?, etc.

A pesar de que la mayor parte de los alumnos construyó correctamente las figuras simétricas, con las dadas respecto al centro (eje), ninguno de ellos respondió correctamente a todas las preguntas planteadas, lo cual manifiesta la formación insuficiente de la base orientadora de la acción de la realización de las transformaciones: la simetría central y axial. Esto nos habla de que, frecuentemente, los alumnos realizan las transformaciones mecánicamente sin comprender el sentido de las operaciones que realizan; las acciones de los alumnos no poseen el carácter razonable y consciente necesario.

La no formación de la base orientadora de la acción, en la realización de las transformaciones, puede explicar los errores típicos que cometieron los sujetos durante la realización de las tareas del segundo grupo. Así, durante la construcción de la figura simétrica a la dada, con respecto al eje, los alumnos unieron los puntos determinantes de la figura con el eje, no de acuerdo a la perpendicular, sino de acuerdo a la oblicua. Además, las dificultades surgieron en las tareas, en las cuales, el centro (eje) coincidía con uno de los elementos de la figura que se transforma. Así, durante la construcción de una circunferencia simétrica a la circunferencia dada, con respecto a su diámetro, sólo cinco alumnos realizaron la construcción correctamente, señalando que la figura dada y la simétrica a ella coinciden, es decir, en este caso, la circunferencia se transforma en sí sola. Los resultados de la **tarea 7** fueron similares: "En un triángulo equilátero MNK se traza la altura ME. Construye un triángulo simétrico al dado, con respecto a la recta ME. Escribe, qué triángulo se obtuvo como resultado de la construcción y por qué". Entre las respuestas de los alumnos (con excepción de 6), no se encontró ninguna que señalara que el triángulo dado se transformaba en sí mismo; que como resultado de la transformación, se obtiene otra vez un triángulo equilátero.

La incapacidad de los alumnos para explicar sus construcciones estuvo relacionada con la no formación de la base orientadora de la acción, para la realización de la simetría central y axial, así como con el desconocimiento de las características de estas transformaciones. Por ejemplo, durante la realización del ejercicio 7, los alumnos no pudieron explicar por qué el punto M, que pertenece a la altura ME, (eje de la simetría del triángulo equilátero MNK) no cambió su posición como resultado de la transformación y, por qué el segmento MN coincidió con el segmento MK después de la transformación.

Durante la realización de la tarea 6 los alumnos no sabían por qué la figura obtenida como resultado de la transformación, era un paralelogramo. Además, los sujetos no conocían aquella característica de la simetría axial: como el cambio de la orientación de las figuras como resultado de esta transformación.

Los resultados de la realización de las tareas, sobre el conocimiento de los conceptos acerca de las figuras simétricas con respecto al centro (eje) (las tareas del primer grupo), fueron comparados con los resultados de la realización de las tareas de la transformación de las figuras (las tareas del segundo grupo) por parte de los mismos escolares. Se encontró que, algunos alumnos, al dar el concepto correcto de la figura (segmento, polígono, etc.), simétrica con respecto al centro (eje), no lograron resolver correctamente las tareas para la transformación de estas figuras con ayuda de la simetría central (axial); y viceversa, algunos alumnos daban un concepto erróneo pero, realizaron la construcción de manera correcta. Esto demuestra una vez más, el hecho de que, en los alumnos la base orientadora de la acción para la realización de las transformaciones, no se ha formado: los escolares sólo memorizan mecánicamente las definiciones de las figuras simétricas –con respecto al centro (eje)– por separado y no las relacionan con el método de la transformación de estas figuras.

De esta forma, los resultados de la realización de las tareas del segundo grupo dan las bases para considerar que, en primer lugar, la base orientadora de la acción para la realización de las transformaciones de la simetría central y axial no se ha formado en los alumnos; en segundo lugar, las características de estas transformaciones no se han asimilado de manera completa y suficiente; mientras que, las características conocidas por ellos, no sólo no garantizaron la realización correcta de las tareas, sino tampoco, ayudaron a comprender y explicar esta realización.

Como se señaló anteriormente, la realización de las tareas del primer y segundo grupos significó simultáneamente la verificación de los conocimientos de los conceptos geométricos iniciales, sus características, las habilidades para utilizar los instrumentos para las construcciones geométricas (la escuadra, la regla y el compás). Los resultados de la realización de las tareas mostraron que, los alumnos poseen este material necesario para la asimilación de los nuevos conocimientos y las nuevas habilidades mencionadas de manera completa. La excepción fue el concepto de la distancia entre las figuras, así como el concepto de la orientación de las figuras, por eso, este material se incluyó en el experimento de la enseñanza en calidad del material previo y constituyó el objeto de asimilación especial.

De esta forma, los resultados de la realización de las tareas de verificación mostraron que, a pesar de que los alumnos seleccionados para el experimento de la enseñanza estudiaron la simetría central y axial, los conocimientos y las habilidades correspondientes no se asimilaron de manera satisfactoria, por eso fue necesario incluirlos en el experimento formativo.

Experimento de la enseñanza

1. La formación de los conocimientos y las habilidades previas

El análisis previo del contenido del material preparado para su asimilación, así como los resultados de la determinación del nivel de partida de la actividad cognoscitiva de los alumnos, permitieron aclarar los conocimientos y las habilidades que era necesario formar antes de organizar la asimilación de la habilidad generalizada, para la realización de las transformaciones geométricas elementales.

El sistema de conocimientos y habilidades previas incluyó:

1. El concepto de la figura de orientación, del vector, del ángulo dirigido, el concepto de su igualdad y la habilidad de construirlos.
2. El concepto de la distancia entre las figuras.
3. El concepto de coeficiente geométrico (semejanza).
4. La acción del reconocimiento.

Sin conocer este sistema de conceptos y acciones previas, no sería posible garantizar la asimilación de la parte básica del programa experimental: la habilidad para realizar las transformaciones. Así, el concepto del vector, de la igualdad de vectores y la habilidad para su construcción son necesarios para la realización de la traslación paralela; el concepto de ángulo dirigido es necesario para la realización de las transformaciones de la rotación alrededor del punto y del eje; la habilidad de analizar el coeficiente geométrico (semejanza) es necesaria para la construcción de figuras homotéticas (semejantes), etc. En calidad de medio básico para la asimilación de estos conocimientos se utilizó la acción del reconocimiento, la cual no dominaban los alumnos. Por esta razón ella se convirtió en el objeto de la asimilación especial.

Durante la formación del material previo preparado, los alumnos asimilaron no sólo los conceptos matemáticos desconocidos para ellos (vector, ángulo dirigido, etc.), sino también conocieron el método nuevo: el trabajo con cada concepto por etapas. En este caso, el trabajo suponía la formación de la parte específica de la base orientadora de la acción, del reconocimiento para cada concepto (la formación de las características necesarias y suficientes del concepto) y, de la parte lógica de la base orientadora (general para todos los conceptos), es decir, el procedimiento del establecimiento de la pertenencia (o no pertenencia) del objeto dado al concepto correspondiente. Al mismo tiempo, a los alumnos se les enseñaron diferentes métodos del control sobre la realización de las tareas: control en pareja y el método de decodificación de los cifrados (sobre la base de las substancias químicas)[18]. Este trabajo realizado previamente excluía la necesidad del trabajo especial con estas acciones durante el estudio del material básico, es decir, la habilidad para realizar las transformaciones geométricas.

Los alumnos trabajaron con todos los conocimientos y habilidades previas, de acuerdo a la metódica de la formación de acciones y conceptos mentales. Como se señaló anteriormente, el medio para la formación de los conceptos preliminares era la acción del reconocimiento. Inicialmente, esta acción se construía en la forma material o materializada. Las características del concepto que se formaba se anotaban en la tarjeta en columnas. Había tarjetas en las cuales se anotaron las instrucciones para el reconocimiento de estas características. Por ejemplo, la instrucción para el reconocimiento de las características del concepto "vector" (que tiene dos características con la relación conyuntiva), en la etapa material era la siguiente:

TARJETA Nº 1

1. Lea la tarea.
2. Tome la tarjeta con las características del vector.

I. 3. Lea la primera característica en voz alta.
4. Encuentre lo que se dice en las condiciones sobre esta característica.
5. Señale el resultado en el esquema con los signos +, -,?[19].
6. Verifique esta característica con la ayuda del cifrado.

II. 7. Lea la segunda característica en voz alta.

18 Ver Z.A. Reshetova y I.P. Kaloshina. La enseñanza programada de los hábitos técnicos. Informe III. Organización del control por operaciones, durante la formación de las habilidades técnicas y los conocimientos profesionales sin la utilización de las máquinas de enseñanza. "Nuevas investigaciones en las ciencias pedagógicas". Edición IV, Moscú., "Educación", 1965.

19 Para cada una de las tareas se preparó previamente un esquema, en el que se indicaron sólo los números de las características del concepto que se formaba. Todos los esquemas con los números correspondientes de las tareas se encontraban en una hoja con cifrado.

8. Encuentre lo que se dice en las condiciones sobre esta característica.
9. Señale el resultado en el esquema con los signos +, -,?.
10. Verifique esta característica con la ayuda del cifrado.

III. 11. Compare los resultados obtenidos en el esquema con la regla lógica (Tarjeta 2).
12. Señale la respuesta en el esquema con los signos +, -,?.
13. Verifique la respuesta con ayuda del cifrado.

En la tarjeta número 2 se presentó el esquema generalizado de la regla lógica del reconocimiento.

TARJETA 2

1. Si todos las características son "+", la respuesta es "+"

$$+\left\{\begin{array}{l} 1 + \\ 2 + \\ . \\ . \\ . \\ n + \end{array}\right.$$

2. Si por lo menos una característica es "-", la respuesta es "-"

$$-\left\{\begin{array}{l} 1 + \\ 2 - \\ . \\ . \\ . \\ n + \end{array}\right. \qquad\qquad +\left\{\begin{array}{l} 1 + \\ 2\ ? \\ . \\ . \\ . \\ n - \end{array}\right.$$

3. Si por lo menos una característica es"?" y no existen las características"-", la respuesta es "?".

$$+\left\{\begin{array}{l} 1 + \\ 2\ ? \\ . \\ . \\ . \\ n + \end{array}\right.$$

Cada alumno tenía tarjetas con los rasgos de los conceptos en formación, con las indicaciones y la regla lógica, así como con las tareas impresas.

Además de las tarjetas y tareas, a los alumnos se les proporcionaban los modelos (modelo del vector como segmento con flecha; carátula con la red de grados en la que los alumnos trabajaban con las características del ángulo dirigido, etc.) y los dibujos.

Con uno o dos ejemplos a los alumnos se les explicaba y mostraba cómo utilizar las tarjetas con las características, la regla lógica para el trabajo con ellas y las instrucciones. A los alumnos también se les explicó, qué tipo de operaciones y en qué orden ellos tenían que realizar. Además, se les explicó el principio del trabajo con el cifrado. Después los alumnos iniciaban la ejecución independiente de las tareas con ayuda de las tarjetas.

En las condiciones del experimento individual, las primeras 2 ó 3 tareas se realizaban con el control inmediato y la corrección del experimentador respecto a cada operación del sujeto. En las condiciones de la enseñanza grupal, estas tareas se realizaban junto con el maestro: un alumno en el pizarrón y el resto en sus cuadernos. Los alumnos realizaban las tareas siguientes de manera independiente.

Después de realizar de 5 a 8 tareas, normalmente los alumnos, memorizaban el sistema de las características necesarias y suficientes del concepto que se formaba (el número de características no era mayor que tres, la relación entre las características en todos los conceptos previos fue conyuntiva), la regla lógica y las instrucciones para el reconocimiento de las características y asimilaban el método de trabajo con el cifrado.

Durante el trabajo en la etapa material (materializada), los alumnos leían en voz alta (en las condiciones del experimento grupal leían en voz baja) cada punto de las instrucciones y lo realizaban inmediatamente después de la lectura. Este método de trabajo preparaba el paso de la acción a la forma siguiente: a la forma de “lenguaje en voz alta”.

Durante la etapa del “lenguaje en voz alta” las tarjetas con las características y con la regla lógica se quitaban.

Las instrucciones para la realización de las tareas se cambiaban: en lugar del punto “lee en voz alta la primera (segunda) característica”, aparecía el punto “escribe (comenta) la primera (segunda) característica”. (En las condiciones del experimento individual, en esta etapa del trabajo, con los conceptos se utilizó la pronunciación en voz alta, mientras que, en las condiciones de la enseñanza grupal, esta forma de la acción fue sustituida por otra forma del lenguaje externo, es decir, la escritura). Además, se llevó a cabo la reducción de la acción del reconocimiento: se eliminaron las instrucciones acerca de marcar los resultados de la presencia (ausencia o falta de información) de las características en el esquema con la ayuda de los signos +, -,?. Los alumnos, al pronunciar en voz alta (al escribir) las características necesarias, marcaban de manera inmediata tanto, sus resultados en el cifrado para cada característica, como la respuesta definitiva.

Si durante la realización de las tareas 1 y 2 alguno de los alumnos olvidaba cualesquiera de los puntos de la instrucción o una de las características, entonces, a él se le permitía tomar la tarjeta con las características y verla.

De esta manera, en la etapa del lenguaje en voz alta, el proceso de la realización de la tarea también se daba por operaciones (por pasos).

La realización exitosa de las tareas, en la etapa del lenguaje en voz alta, permitía pasar a la etapa siguiente: el lenguaje externo “en silencio”. En esta etapa del trabajo, la realización correcta de cada operación y de la respuesta final, se controlaban también con la ayuda del cifrado.

Los alumnos realizaban las tareas (problemas 3 y 4) sin pronunciar en voz alta y sin escribir. En las instrucciones acerca de la realización de las tareas había la indicación siguiente: “Mencione en silencio la primera (segunda) característica”. Posteriormente, esta exigencia se quitó y la acción completa se realizaba en el plano interno. El control por operaciones sobre la realización de la acción se eliminó totalmente. Ahora, en correspondencia con la nueva instrucción, los alumnos no debían marcar en el cifrado los resultados de la verificación de cada característica del concepto que se estaba formulando. La realización de las tareas (de 4 a 6) ocurría de la manera siguiente: los alumnos leían en silencio la tarea y de inmediato marcaban la respuesta final en el cifrado. Si en esta etapa los alumnos trabajaban sin errores, entonces, nosotros considerábamos que el concepto dado estaba asimilado.

De esta manera, durante el proceso de la formación de los conceptos previos, los alumnos asimilaban, tanto la parte específica, como la parte lógica de la base orientadora de la acción de reconocimiento. La parte lógica se asimilaba durante el trabajo por etapas con el concepto "vector", paralelamente con el trabajo por etapas, con la parte específica: las características necesarias y suficientes de este concepto. Durante la formación de los siguientes conceptos previos (igualdad de los vectores, ángulos dirigidos, distancia entre figuras, etc.) el trabajo por etapas se dio sólo, con la parte específica de la base orientadora de la acción del reconocimiento, debido a que la parte lógica era la misma y se realizaba de inmediato en forma mental.

Acerca de la formación de la acción del reconocimiento (en particular de su parte lógica), nos hablan también aquellas tareas que eran elaboradas por los escolares. Así, a ellos se les proponía inventar una tarea "para el vector", cuando se da la primera característica de este concepto y acerca de la segunda no se sabe nada. Las tareas de los alumnos se distinguieron por la diversidad, el contenido interesante y, posteriormente, se incluyeron en el programa de enseñanza.

Durante la organización de la asimilación de cada uno de los conceptos y acciones previas, antes del inicio de la enseñanza, el experimentador señalaba los grupos de tareas que tenían como objetivo el trabajo con estos conocimientos en la etapa correspondiente de su formación.

La indicación para la realización de las tareas en la etapa determinada se daba al alumno por escrito. Esta indicación estaba incluida en las instrucciones para la realización de estas tareas, en la que además de las indicaciones tales como "encuentre lo que se dice en las condiciones del problema acerca de esta característica", o "verifique esta característica con la ayuda del cifrado", se daba la indicación especial relacionada a esta etapa del trabajo. Por ejemplo, la indicación "lea en voz alta la primera característica del concepto" se daba en la etapa material (materializada), mientras que la indicación "mencione (escriba) en voz alta la primera característica", se daba en la etapa del lenguaje en voz alta, etc. La cantidad de tareas que tenían que realizar los alumnos en cada etapa del trabajo, se planeaba anteriormente por parte del experimentador. Con este objetivo el experimentador utilizaba los datos acerca de la cantidad de tareas obtenidos en las investigaciones realizadas anteriormente, sobre la base de la teoría de la formación de las acciones mentales. Además, durante la realización del segundo experimento individual y de dos experimentos grupales siguientes, a cada uno de los sujetos se le proporcionó un cuestionario. En este cuestionario el alumno debía de anotar para cada concepto y acción nueva que se formaban, si era suficiente o (insuficiente, abundante y hasta qué grado) la cantidad de tareas en cada etapa del trabajo (las etapas estaban numeradas).

El análisis de los cuestionarios mostró que la cantidad de tareas en cada etapa depende de muchos factores: de la complejidad de los conceptos y de las acciones que se formaban, en particular, de la cantidad de las características necesarias y suficientes; de su estructura lógica; del nivel de la formación de la parte lógica de la acción del reconocimiento y de las capacidades individuales de los alumnos, etc. Por ejemplo, durante la formación del concepto "vector", que era uno de los conceptos iniciales durante el trabajo, (los alumnos se familiarizaron con un nuevo método de trabajo para ellos) en la etapa material (materializada) se necesitaban en promedio de 12 a 13 tareas. Durante la formación del concepto de ángulo dirigido, cuando los alumnos ya habían trabajado con la parte lógica de la acción del reconocimiento se necesitaban de 7 a 9 tareas.

Después del trabajo con los cuestionarios, para la formación de cada concepto y cada acción por etapas, se elegía la cantidad promedio de tareas. Durante la realización de los experimentos individuales, la cantidad de tareas necesarias para la formación de todo el sistema de conocimientos previos, era de 150. El análisis del transcurso de la enseñanza y de los cuestionarios mostró que era necesario incrementar el número de tareas y, cada uno de los alumnos, realizó alrededor de157 tareas en dos siguientes experimentos grupales.

Los alumnos solucionaron exitosamente todas las tareas propuestas utilizadas para la asimilación del sistema de conocimientos y habilidades previas. De 7780 tareas propuestas a los 50 alumnos, 7583 tareas, es decir, el 97.5 %, se realizaron correctamente; y sólo durante la solución de 197 problemas, lo que representa el 2.5 %, se cometieron errores. La cantidad básica de errores se relaciona con la etapa inicial de la enseñanza, cuando los alumnos asimilaban un nuevo método de trabajo para ellos.

Para la verificación de la formación del sistema de conocimientos y habilidades previas a los alumnos, se les proporcionó el trabajo de control: cada alumno tenía que realizar 8 tareas. Los resultados fueron los siguientes: de 400 problemas propuestos 395 (98.5%) se solucionaron de manera totalmente correcta, es decir, los escolares no sólo solucionaron las tareas correctamente, sino también, fundamentaron sus acciones detalladamente. En cinco casos (1.5 %) las soluciones no tenían errores pero su argumentación no fue completa. No hubo ni un solo caso, en el que nuestros niños dieran una solución incorrecta.

De esta manera, los resultados manifiestan que todos los conocimientos y habilidades previas (planeadas anteriormente) se han formado y esto nos daba a nosotros la posibilidad de pasar a la parte básica del experimento de enseñanza: la formación de la habilidad generalizada sobre la realización de las transformaciones geométricas elementales.

2. La formación de la habilidad generalizada sobre la realización de las transformaciones geométricas elementales

La formación de la habilidad generalizada sobre la realización de las transformaciones incluía en sí lo siguiente:

1. Separación y asimilación de los componentes de la habilidad.
2. Elaboración independiente de la base orientadora para la realización de cada uno de los tipos de las transformaciones por parte de los alumnos.

La identificación de los componentes de la habilidad se daba durante la realización de diferentes tipos de tareas prácticas por parte de los alumnos. Ellos trabajaron con ornamentos que incluían el mismo dibujo de acuerdo a su forma y que ocupaba diferentes posiciones. A los alumnos se les proponía identificar, en los ornamentos, los dibujos en los ornamentos y, después, anotar cómo formar todo el ornamento con su ayuda. A cada uno de los sujetos se les proporcionaba un modelo siguiente: en un papel grueso en ambos lados se pegaba el dibujo y se cortaba por su contorno. Trabajando con el modelo del dibujo y con los ornamentos, los escolares mismos establecían que éstos pueden obtenerse a través de medios diferentes. Los alumnos notaban que unos ornamentos se pueden crear sin cambiar la forma, ni las medidas del dibujo (modelo) y, además, el modelo se debe de mover de tal forma, que en un caso es como si se "deslizara" por una recta, mientras que en otro caso rota alrededor de un punto o una recta. Otros ornamentos se forman como resultado de la "distensión" o "contracción" del dibujo (modelo), es decir, como resultado de la conservación de la forma, pero del incremento (decremento) de las medidas. En este caso los alumnos escribían: "El dibujo como tal se conserva igual, pero hay que ampliarlo", y algunos explicaban: "como durante la toma de fotografías".

Realizando las tareas prácticas los alumnos se convencían que, en primer lugar, una figura (en el caso dado dibujo-modelo) puede ser comparada con otra (ornamento); en segundo lugar, esta otra figura puede ser obtenida a partir de la primera de acuerdo a la regla determinada.

A los alumnos se les explicaba que la comparación de una figura con otra, la que se obtiene a partir de esta figura de acuerdo a la regla determinada, se llama transformación de la primera figura en la segunda.

Junto con las tareas mencionadas anteriormente, a los alumnos se les proporcionaban las tareas en las cuales el objeto de la acción eran las figuras geométricas (planas y espaciales). Por ejemplo, a cada uno de los sujetos se les presentaban dos láminas, en las que estaban dibujados pares de figuras iguales (en una lámina estaban los triángulos y en la otra estaban los tetrágonos). La atención de los alumnos se dirigía hacia el hecho de que, dos figuras pueden encontrarse en diferentes posiciones recíprocas en el plano. Los sujetos tenían que verificar la igualdad de las figuras dadas en cada lámina y, anotar el medio, con cuya ayuda, ellos lo hacían. A cada alumno se le proporcionaban los modelos de figuras iguales a las figuras dibujadas en la lámina: triángulo y tetrágono hechos de cartón. La cara y el reverso de cada modelo estaban pintados de diferentes colores: verde y amarillo.

Los alumnos colocaban el modelo en una de las figuras iguales y las movían en la lámina hasta que coincidía con la otra figura. En las láminas se presentaba aquella posición de pares de figuras iguales, para que fuera necesario rotar el modelo alrededor de un punto o una recta en diferentes ángulos o, trasladarlo en una distancia determinada y en una dirección determinada.

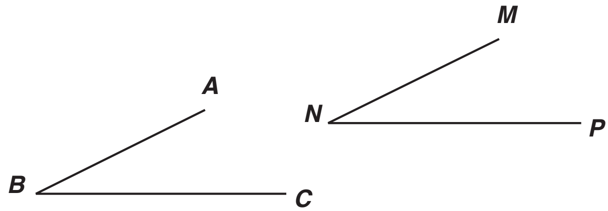
Así, en sus protocolos de la ejecución, cuando para la verificación de la igualdad del par de triángulos los alumnos tenían que realizar la rotación alrededor del punto, ellos escribían: "Yo roté el triángulo de cartón alrededor del vértice a la derecha (o en el sentido de las manecillas del reloj), hasta que éste coincidió con el otro triángulo dibujado".

En el caso, cuando era necesario realizar la simetría axial, una alumna escribió: "Coloqué el triángulo de papel por su lado verde en el primer triángulo dibujado. Después, volteé el modelo sobre su lado amarillo y lo coloqué en el dibujo del segundo triángulo. El modelo y el dibujo coincidieron, ellos son iguales".

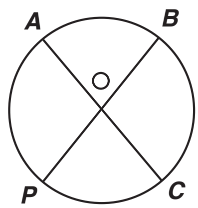
Además de las tareas para el trabajo con las láminas y los modelos de triángulos (tetrágonos), a los alumnos se les proponía la tarea del siguiente tipo: "En el dibujo (Dibujo 2) se dan dos ángulos iguales ABC y MHP. ¿Se pueden o no sobreponer estos ángulos de tal forma que coincidan los lados BA y HP?" o la tarea: "Se dan dos ángulos opuestos por el vértice AOB y COP (Dibujo 3). ¿Se pueden o no sobreponer estos ángulos sin salir del plano del dibujo de tal forma que los ángulos OA y OC coincidan? ¿Qué se debe hacer con uno de los ángulos para esta coincidencia?".

Tanto en la primera, como en la segunda tarea con los ángulos se presentaban los modelos del ángulo ABC (para la primera tarea) y del ángulo AOB (para la segunda tarea).

De esta manera, verificando la igualdad de dos figuras geométricas (ángulos, triángulos y tetrágonos), los alumnos comparaban una figura con la otra, lo cual se realizaba a través de diferentes medios, es decir, los alumnos realizaban diferentes transformaciones de una figura en otra.



Dibujo 2



Dibujo 3

Como resultado de la realización de las tareas señaladas anteriormente, así como de una serie de otras tareas, los alumnos, en primer lugar, se convencían de que la transformación de una figura en otra se puede obtener a través de diferentes medios; en segundo lugar, ellos encontraban que como resultado de algunas transformaciones la figura dada se transforma en una figura igual, es decir, se conserva la forma y las medidas; como resultado de otro tipo de transformaciones, la figura se transforma en una figura semejante, es decir, se conservaba la forma, pero se cambian las medidas.

Además, los alumnos establecían la dependencia entre: a) el medio de la transformación, b) la conservación (el cambio) de la forma y las medidas de la figura y c) la conservación (el cambio) de la relación de las distancias entre los puntos de la figura dada y, los puntos correspondientes de la figura que se obtiene, como resultado de la transformación.

Con este objetivo los alumnos regresaban a las tareas que incluían el trabajo con láminas, ornamentos, figuras geométricas, modelos y dibujos. Ahora, los sujetos para cada tarea concreta tenían que realizar las operaciones siguientes: 1) identificar dos puntos arbitrarios en el modelo; 2) con ayuda de la regla medir la distancia l1 entre estos puntos; 3) en la figura obtenida como resultado de la realización de la transformación, señalar los puntos correspondientes; 4) con ayuda de la regla medir la distancia l2 entre estos puntos y 5) encontrar la relación entre las distancias l1: l2.

Después de la realización de estas operaciones los sujetos notaban, por ejemplo, que durante la rotación alrededor del punto (la regla) en cualquier ángulo o, durante el traslado al vector, la figura dada se transformaba en una figura igual de acuerdo a la forma y las medidas; además, la relación de las distancias entre los puntos de la figura dada y los puntos correspondientes a la figura obtenida es igual a uno, es decir, estas distancias se conservan. En el caso de homotecia, la figura que se transforma se compara con otra figura que tenía la misma forma pero, diferentes medidas. Además, se da el mismo cambio de las distancias entre los puntos correspondientes de la figura dada y obtenida.

Analizando las tareas señaladas anteriormente, durante la entrevista con el experimentador, los alumnos llegaban a la conclusión acerca de la necesidad de la presencia de la figura, a partir de la cual, se pueden obtener otras figuras a través de diferentes medios. A esta figura nosotros la llamamos objeto inicial de la transformación, la figura que se transforma o el prototipo (imagen inicial). Las tareas realizadas convencieron a los alumnos en el hecho de que, el prototipo, puede ser cualquier figura. A aquella figura que se obtiene en el resultado de cualquier tipo de transformación la llamamos el resultado de la transformación o la imagen.

Para la identificación del objeto, respecto al cual se realiza la transformación, a los sujetos se les proporcionaban las tareas del siguiente tipo: “Nosotros tenemos la mitad del dibujo de la pieza (se presentaba el dibujo). ¿Cómo obtener el dibujo completo?”. Además de los dibujos de diferentes piezas, a los sujetos se les presentaban también los modelos de rehilete, de la flor de margarita, etc. Realizando las tareas de este tipo, así como regresándose a las tareas consideradas anteriormente, que presuponen el trabajo con ornamentos y láminas, los alumnos se convencían de la necesidad de la presencia del objeto, respecto al cual se realiza la transformación. Además el objeto puede ser no cualquier figura geométrica sino, solamente, punto, recta o plano.

Durante la realización de las primeras tareas prácticas y el trabajo con los modelos los sujetos descubrían que, para la obtención de una figura nueva a partir de la dada, es necesario realizar determinadas acciones: rotar en el ángulo alrededor del punto (la recta) o trasladar en la distancia determinada y en la dirección determinada. La realización de cada acción presupone la realización de las operaciones que se incluyen en ella. Los mismos sujetos, respondiendo a las preguntas del experimentador, identificaban las operaciones que constituían el contenido de cada una de esas acciones y las anotaban en la tarjeta.

Además, durante la realización de las tareas mencionadas anteriormente, los mismos sujetos establecían que, por ejemplo, para la verificación de la igualdad del par de triángulos (tetrágonos) cuya posición recíproca se presentaba en la lámina, es suficiente que coincidan sobreponiendo sus vértices correspondientes. A estos puntos los llamamos puntos determinantes. Para la identificación de los puntos determinantes de las figuras se proporcionaban también las tareas del siguiente tipo: "En el pizarrón estaba dibujado el cuadrado. Después lo borraron. ¿La posición de qué puntos hay que saber para poder restablecer de acuerdo a ellos todo el cuadrado?".

Para la representación concreta del movimiento del plano y del hecho de que, el plano se refleja en sí mismo, los escolares trabajaron con el modelo del plano con dos capas: el plano se representaba en el tipo de dos capas sobrepuestas de papel transparente.

La representación del plano con dos capas abre grandes posibilidades para el estudio de las transformaciones geométricas. En primer lugar, este modelo permite identificar las leyes del movimiento de los puntos del plano: el traslado en el vector y la rotación alrededor del punto (recta) en el ángulo dado. Además, el modelo da la posibilidad para aplicar las leyes identificadas para diferentes puntos del plano. En segundo lugar, durante el trabajo con el modelo se materializan tanto las condiciones que garantizan la obtención de diferentes tipos de movimientos, como las relaciones entre estos tipos: simetría central (axial) es la rotación alrededor del punto (eje) en el ángulo de 180º , etc. En tercer lugar, durante el movimiento de una capa respecto a la otra, se fija también aquella posición del punto (figura) que ocupaba antes del movimiento, así como su nueva posición. En cuarto lugar, durante el transcurso de diferentes movimientos del plano pueden ser "encontradas" tales invariantes de transformaciones, como la igualdad de las figuras dadas y de las figuras obtenidas en el resultado de las transformaciones (segmentos, ángulos, etc.)

Se sabe que, durante la resolución de una tarea concreta, cuando es necesario realizar las transformaciones geométricas la ley determinada del movimiento del plano se aplica, no a todos sus puntos, sino solamente, a sus puntos determinantes (límites del segmento, vértices del triángulo, etc.). El modelo del plano en dos capas permite materializar la actividad de los alumnos sobre la identificación de los puntos determinantes de la figura, así como sobre la reconstrucción de la figura dada a partir de estos puntos.

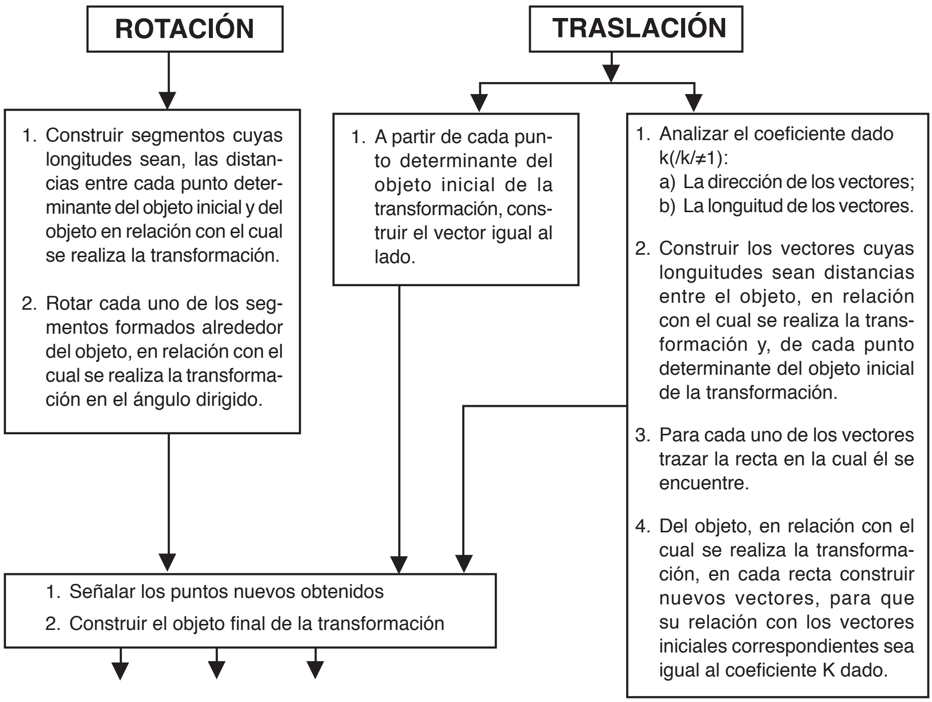
De esta forma, solucionando diferentes tareas prácticas junto con el maestro y trabajando con los modelos geométricos y con los dibujos los escolares identificaban, gradualmente, los componentes básicos necesarios para la resolución de las transformaciones. Los componentes se anotaban en la siguiente tabla:

TABLA 3

1	2	3	4	5	6	
Objeto inicial de la transformación	Objeto en relación con el cual se cumple la transformación	Cantidad de puntos determinantes del objeto	Acción seleccionada	Objeto final de la transformación	Comparación de los objetos iniciales y finales.	
					Semejanzas	Diferencias

El trabajo con todos los componentes de la habilidad sobre la realización de las transformaciones, se daba simultáneamente. Durante la etapa material, a los alumnos se les mostraban diferentes ejemplos acerca de cómo era necesario llenar la tabla y realizar las acciones que constituyen la habilidad para realizar las transformaciones.

Cada alumno tenía la tabla 3 y, las tarjetas –en las cuales estaban escritas las instrucciones para la realización de la tarea y las instrucciones para la obtención del objeto final de la transformación– elaboradas como muestra el siguiente esquema (Dibujo 4).



Dibujo 4

En la etapa material, los objetos de la acción de los alumnos, eran los modelos de las figuras geométricas hechos de madera o de cartón.

Mostraremos en un ejemplo cómo transcurrió la realización de las tareas en esta etapa del trabajo. Tarea No. 17: “Se da el triángulo ABC y el punto O fuera de él. ¿Qué posición ocupará el triángulo dado después de su rotación alrededor del punto 0 en un ángulo de 40º?". A los sujetos se les decía que esta tarea, así como una serie de otras tareas análogas, la ejecutarían utilizando los modelos. Para la realización de la tarea señalada a los alumnos se les daba el modelo del triángulo de madera, cuyos vértices estaban perforados. Como modelo de punto servía un pequeño cilindro hecho de hule espuma (altura 1.5 cm.). El ángulo de rotación se determinaba con ayuda del transportador, el cual estaba colocado en el modelo del punto de tal manera que, este "punto" se encontraba en el trazo de graduación de lectura del transportador. El escolar lee en silencio las condiciones de la tarea y lee en voz alta el primer punto de las instrucciones para la realización de las tareas: "Indique el objeto inicial de la transformación". Después él dice: "El objeto inicial de la transformación aquí será el triángulo ABC". El experimentador le propone leer en voz alta el nombre de la primera columna y llenarla. El alumno lee y anota en la primera columna: "Triángulo ABC".

Posteriormente, el alumno lee en voz alta los siguientes puntos de las instrucciones y los nombres de las columnas correspondientes de la tabla y las llena consecutivamente. Así, en la columna "objeto, en relación con el cual se realiza la transformación" él escribe: "el punto 0"; en la columna cantidad de puntos determinantes del objeto inicial de la transformación, anota: "Tres puntos son los vértices A, B, C"; en la columna "acción elegida" escribe: "rotación alrededor del punto".

Después, para la obtención del objeto final de la transformación, el sujeto debe de realizar la acción elegida. Para esto él toma la tarjeta con el esquema con las instrucciones y encuentra aquella parte, en la que están enumeradas las operaciones necesarias para la realización de la rotación. Posteriormente, el alumno lee en voz alta cada operación de esta acción y, trabajando con los modelos, la ejecuta. Así, el sujeto con ayuda de las agujas encuentra la distancia entre cada vértice del triángulo ABC y el punto 0. Él rota cada una de las agujas alrededor del punto 0 en el ángulo dado (40ºC) y, consecutivamente, une los extremos de las agujas con alambre obteniendo, de esta manera, el objeto final de la transformación.

Después de la realización de las tareas 2 y 3 en los modelos, el alumno pasaba a la forma materializada de la acción. La figura que se transformaba y el objeto, en relación con el cual se realiza la transformación, se representaban en forma de dibujo. Así como en la etapa material, el alumno leía en voz alta cada punto de las instrucciones para la realización de las tareas y, posteriormente, leía el nombre de cada columna de la tabla y la llenaba. Durante la realización de la acción elegida, el alumno leía en voz alta las operaciones que constituían dicha acción y, las ejecutaba en una hoja de papel con ayuda de los instrumentos de dibujo (regla, escuadra, transportador). En las etapas material y materializada, se asimilaban básicamente las instrucciones para la realización de las tareas, así como el esquema con las instrucciones para la ejecución de la acción elegida.

En la etapa del lenguaje oral externo, el contenido de la acción para la formación de las habilidades para realizar las transformaciones era el mismo, pero, su forma cambiaba. Durante la realización de las acciones en esta etapa nosotros utilizábamos dos formas del lenguaje externo: en voz alta y escrito. Al recibir la tarea, el alumno llenaba la tabla, en la que estaban ausentes los nombres de las columnas: él mismo escribía su nombre (forma escrita del lenguaje externo). Durante la ejecución de la acción elegida, para la obtención del objeto final de las transformaciones, el sujeto pronunciaba en voz alta cada punto de esta acción (forma externa del lenguaje oral en voz alta). En esta etapa se quitaban las tarjetas con las instrucciones para la realización de las tareas y con el esquema con las instrucciones. Si los alumnos, durante la ejecución de las tareas, (para algunos de los alumnos era una o dos tareas) encontraban dificultades (olvidaban el nombre de alguna columna, de la tabla o la operación de la acción elegida) entonces, se les permitía ver la tarjeta correspondiente. La realización de las siguientes tareas 3 y 4 se daba ya completamente sin tarjetas.

En la etapa “del lenguaje externo en silencio” el alumno, al leer la tarea, llenaba la tabla “muda”: él nombraba “en silencio” cada una de sus columnas y, anotaba de acuerdo a las condiciones de la tarea, qué figura será el objeto inicial de la transformación y, el objeto en relación con el cual se realiza la transformación, etc. El alumno pronunciaba en silencio cada operación de la acción elegida y la realizaba.

Resolviendo las tareas siguientes el alumno ya no las escribía en la tabla sino, de inmediato, construía el objeto final realizando la acción elegida (etapa mental).

Durante la realización de las tareas en cada una de estas etapas, el sujeto comparaba los objetos inicial y final de la transformación y distinguía sus semejanzas y diferencias. Esto facilitaba significativamente la identificación y el estudio de las características de las transformaciones y, ayudaba a ver sus generalidades. Además, la atención se dirigía hacia el cambio en la orientación de las figuras en el resultado de la realización de la simetría axial; hacia la característica del objeto en relación con el cual se realiza la transformación: todos sus puntos cambian en sí mismos; hacia la presencia de otros puntos y rectas inmóviles para cada transformación; hacia el carácter involutivo de la simetría axial y central y, hacia el hecho de que, tales transformaciones como rotación alrededor del punto (recta), traslación paralela y homotecia, no poseen esta característica, etc.

Durante todas las etapas de la formación de la habilidad, para realizar las transformaciones geométricas se daba el control sobre la ejecución, tanto de operaciones aisladas, como de la acción en general. La habilidad para realizar las transformaciones geométricas es compleja y consiste de varios componentes. El control sobre la realización de cada una de las operaciones de la acción en general tenía un carácter mixto: nosotros hemos utilizado, tanto el método de la decodificación de los códigos químicos, como el control en pares. Así, se utilizaba el control en pares para el control sobre la realización correcta de aquellos componentes de la habilidad (la parte de ejecución y de orientación de estas acciones), como la identificación del objeto inicial de la transformación; de sus puntos determinantes; del objeto, en relación con el cual se realiza la transformación y de la parte orientadora de la acción elegida para la obtención del objeto final.

Uno de los sujetos era el que ejecutaba y el otro el que controlaba, después, ellos cambiaban sus papeles (durante todo el experimento los escolares trabajaban en parejas). Tanto el alumno que ejecutaba, como el alumno que controlaba obtenían la misma tarea; además, el alumno que ejecutaba obtenía la tarea como tal, mientras que, el alumno que controlaba obtenía también la variante de la realización correcta de esta tarea descrita con todos los detalles. Además, al alumno que controlaba se le explicaban todas sus funciones de antemano. Por ejemplo, en la etapa material y en la etapa del lenguaje oral externo, el control en pares se realizaba de manera siguiente: un alumno (el que ejecutaba comentaba en voz baja todos los pasos de la acción y la realizaba mientras que, el otro alumno (el que controlaba), verificaba cómo se ejecuta cada operación y, en el caso de su ejecución incorrecta, exigía corrección.

Se utilizaba también el otro tipo de control recíproco: los escolares realizaban la tarea y, simultáneamente verificaban el resultado obtenido, discutiéndolo entre ellos en voz baja.

Para el control de la parte ejecutiva de la acción elegida para la transformación, se utilizaban los códigos químicos. En las tareas que requerían la realización de una de las acciones elegidas, se proporcionaba el dibujo que incluía, la representación del objeto inicial de la transformación y, el objeto, en relación con el cual, se realizaba la transformación. Los resultados de la realización de cada una de las operaciones de la acción para la obtención del objeto final (prototipo) y, este mismo objeto, estaban codificados. Los alumnos realizaban la construcción con una pluma cargada con un compuesto especial. En el resultado de la construcción realizada correctamente, las líneas trazadas adquirían color naranja, mientras que, en el resultado de la construcción incorrecta adquirían color rojo.

El control organizado de esta manera daba la posibilidad, tanto al experimentador como al mismo sujeto, de verificar lo correcto de la realización de las tareas no sólo de acuerdo al resultado final, sino también, de acuerdo a cada operación incluida en la estructura de la acción dada. Esto garantizaba también la posibilidad de la detección y la corrección inmediata de los errores cometidos.

Después del trabajo con todos los componentes de la habilidad para la realización de las transformaciones, se consideraban tipos concretos de transformaciones representados en la **tabla 4**.

TABLA 4

Objeto, en relación con el cual se realiza la transformación.	Acción de las transformaciones.			
	ROTACIÓN		TRASLACIÓN	
	Ángulo de rotación libre.	Ángulo de rotación de 180º.	El vector dado.	El vector se determina como resultado del análisis del coeficiente dado k ($/k/ \neq 1$).
Punto	Rotación alrededor del punto.	Simetría central.	Traslación paralela.	Homotesia
Recta	Rotación alrededor de la recta.	Simetría axial.		

Esta tabla es elaborada por los mismos sujetos conjuntamente con el experimentador. Los alumnos, de manera independiente, al responder a las preguntas identificaban las características de cada uno de los tipos de transformaciones; el experimentador sólo les decía el nombre matemático correspondiente de la transformación.[20]

Las características de cada uno de los tipos de transformaciones se anotaban en una tarjeta especial, después de lo cual, se realizaba el trabajo por etapas. Además, la asimilación de las características de cada una de las transformaciones, así como la realización de estas transformaciones, se daban rápidamente y casi sin errores. Los alumnos mismos fueron precisamente los "descubridores" de las características de las transformaciones, así como de los medios para su realización. Además, ellos habían conocido el método de trabajo y, adquirido el dominio de la acción del reconocimiento, como medio para la asimilación de los conceptos.

20 La rotación alrededor del eje y la simetría en relación al plano no se incluyeron en el programa experimental debido al hecho de que, los alumnos no tenían conocimiento acerca de los elementos de la estereometría. En la etapa material se daba solamente la representación inicial de estas transformaciones.

Para la formación de cada uno de los tipos de transformaciones se requería un promedio de 1.5 a 2 sesiones. Durante este tiempo, el alumno realizaba de 15 a 22 tareas; además, aquí se incluían las tareas no sólo para la asimilación de las características de uno u otro tipo de transformación, sino también, las tareas para la realización de esta transformación y, para la demostración de una serie de posiciones, con la utilización de la transformación que se está formando.

El número de tareas propuestas a cada uno de los sujetos para la identificación y, el trabajo con todos los componentes de la habilidad para realizar las transformaciones, así como para la formación de los tipos de transformaciones necesarios, eran diferentes para los experimentos individuales y grupales. Durante la realización de los experimentos individuales, cada alumno ejecutó 212 tareas. El trabajo complementario con el programa que se realizó después del análisis del transcurso de la enseñanza, así como con los cuestionarios contestados por los escolares, permitió reducir la cantidad de tareas. Durante la realización de los dos siguientes experimentos grupales, cada uno de los alumnos realizó 135 tareas. La realización de las tareas propuestas por parte de los alumnos, se daba prácticamente sin errores. De un total de 7520 tareas, 7237 tareas, es decir, el 96.1% se realizó de manera absolutamente correcta. La cantidad de respuestas erróneas constituyó el 3.9 %, además, los mismos alumnos corrigieron casi todos los errores.

El análisis de los errores mostró que éstos se deben, ya sea, a una falta del trabajo suficiente con algunos conocimientos y habilidades, que habían sido estudiados anteriormente por parte de los alumnos en la escuela, o a una lectura sin atención de las condiciones de las tareas y, consecuentemente los errores, tuvieron un carácter casual.

Junto con la valoración cuantitativa de los resultados obtenidos durante la formación, tanto del sistema de conocimientos y habilidades previas, como de la habilidad generalizada para la realización de las transformaciones geométricas, se realizó su valoración cualitativa. Además, nosotros hemos partido de aquellas características independientes, las cuales en la teoría de P. Ya. Galperin se identifican para las acciones y los conocimientos: la forma de la acción, el grado de la generalización, el carácter desplegado o reducido, el grado de la asimilación;

así como aquellas características que se derivan de ellas, tales como la presencia del carácter razonable, consciente y estable de la realización.

Como nosotros hemos planeado, en la habilidad para la realización de las transformaciones geométricas, únicamente la parte orientadora alcanzaba la forma mental mientras que, la parte ejecutiva, se quedaba en la forma materializada.

Además, como se ha señalado anteriormente, cada uno de los componentes de la habilidad pasaba al plan ideal, ya sea, por completo (las partes orientadora y ejecutiva), o ya sea, parcialmente en su parte orientadora. Así, la acción para la "identificación del objeto inicial (prototipo)", "la elección del objeto, en relación con el cual se realiza la transformación", "la elección de la acción de la transformación" se realizaba completamente en forma mental. En las acciones "identificación de los puntos determinantes" y "realización de la acción elegida", la parte orientadora alcanzaba el nivel mental. La parte ejecutiva de estos componentes se realizaba externamente en la forma materializada.

Como se sabe, la formación de acciones aisladas y de los conceptos puede alcanzar el nivel dado no de inmediato, sino, gradualmente, junto con la formación de otros conocimientos y habilidades (a veces esto se da en su composición). Así, el concepto de los vectores con la misma dirección (o la dirección contraria), se incluye como un componente del concepto de "vectores iguales" y de la acción de la construcción de vectores iguales. Por eso, durante la enseñanza, la asimilación del concepto de los vectores con la misma dirección (dirección contraria) alcanzaba solamente la forma materializada. En este nivel, la asimilación estaba incluida en la estructura de la acción sobre la asimilación del concepto de los vectores iguales y, en la construcción del vector igual al dado. Durante el proceso de la formación, estos conceptos junto con otros alcanzaron el nivel mental.

Es conocido que la forma material de la acción es su forma básica, y de hecho, de cómo está organizada la formación de la acción en este nivel, depende la calidad de la formación de la acción en general. Además, la forma básica de la acción puede ser no sólo material (el objeto de la acción se representa como en el tipo de objetos reales), sino también, materializada (como objeto de la acción sirven los esquemas, modelos y dibujos). A veces es necesario presentar la acción primero en forma material y, después, en forma materializada. Así, durante la formación de los conceptos previos del "vector" y del "ángulo dirigido", así como de las acciones para la obtención del objeto final de la transformación, los alumnos trabajaban primero con objetos reales y, sólo después, pasaban a los dibujos. Por ejemplo, durante la formación del concepto del ángulo dirigido, los alumnos inicialmente trabajaban con las carátulas que tenían la red graduada; los ángulos positivos y negativos se construían con ayuda de las flechas. Ellos realizaban tareas del siguiente tipo: "En la carátula construir con ayuda de las flechas los ángulos siguientes: + 30º, -70º, +145º, -195º". Después del trabajo con las carátulas, los alumnos pasaban a la realización de tareas en dibujos. Las tareas eran del siguiente tipo: "Se da el ángulo AOB (se presentaba el dibujo de un ángulo agudo). Señale los ángulos siguientes con un arco con flecha: ángulo positivo AOB, ángulo negativo AOB, ángulo positivo BOA y ángulo negativo BOA". Había también las tareas: "Construir y determinar 1) ángulo CED igual a - 45º; 2) ángulo CED igual a + 45º, etc."

El trabajo con la carátula hacía que la formación del concepto del "ángulo dirigido", se diera con mayor rapidez. Durante la realización del experimento individual, inicialmente el trabajo se realizaba sin la utilización de la carátula; los alumnos tenían que realizar las tareas en los dibujos de inmediato, es decir, la forma de la acción era materializada. Esto dificultaba y prolongaba la formación del concepto: los alumnos constantemente se confundían durante la determinación de los ángulos positivos y negativos. Para el trabajo en la etapa materializada se requería un promedio de 11 tareas para cada alumno. Posteriormente, con el objetivo de eliminar esta dificultad, se introdujeron las carátulas. Después de la realización de 3 a 4 tareas con las carátulas, los alumnos realizaron las tareas que incluían el trabajo con dibujos casi sin errores (de 4 a 5 tareas).

De la misma forma, durante la formación de las acciones sobre la obtención del objeto final de la transformación, los alumnos trabajaban primero con los objetos reales: figuras geométricas de madera o cartón, con agujas y transportador. Después, la acción pasaba a la forma materializada, cuando todas las construcciones se realizaban en el papel con ayuda del lápiz y los instrumentos de dibujo (la figura transformada y el objeto, en relación con el cual se hace la transformación, se representaban en el dibujo).

Otra característica independiente de la acción es la **generalización**. Durante la elaboración del programa experimental, nosotros hemos planeado la generalización tanto de la parte objetal dentro de los límites del concepto dado, como de la parte lógica dentro de los límites de todos los conceptos con la estructura lógica dada de las características. Para que la parte objetal de los conceptos previos que se estaban formando, así como la habilidad para la realización de las transformaciones durante la elaboración de las tareas fueran generalizados, era necesario considerar todos los casos típicos que puede encontrar el alumno trabajando con estos conceptos o realizando las transformaciones. Por ejemplo, en las tareas que requerían la realización de la transformación de la rotación alrededor del punto, los valores de los ángulos de rotación, se tomaban desde $-^{00}$ hasta $+^{00}$ y se mostraba que los ángulos, cuya diferencia consistía en el ángulo completo (360º), determinan la misma rotación. Además, el objeto, en relación con el cual se realizaba una u otra transformación, ocupaba diferentes posiciones en relación con el objeto inicial. Así, durante la transformación del triángulo con ayuda de la simetría axial, el eje se encontraba fuera del triángulo, coincidía con uno de sus lados o era altura o mediana, etc. Para la generalización de la parte lógica, las tareas se elegían de tal forma que reflejaban todos los casos previstos en la regla lógica del reconocimiento, es decir, las tareas con la presencia de todas las características, con la ausencia de alguna de esas características y con las condiciones indeterminadas.

La amplitud de "la traslación" de la acción sirve como indicador del nivel de su generalización. Así, la parte lógica de la base orientadora de la acción del reconocimiento se formó en el tipo generalizado ya durante el trabajo con el primer concepto previo del "vector". Durante la enseñanza posterior, para la formación de los conceptos del ángulo dirigido, de la distancia entre objetos, etc., los cuales tenían la misma estructura lógica que el concepto "vector", se utilizaba exitosamente la parte lógica de la acción sin instrucción complementaria.

Acerca de la generalización de las habilidades para realizar las transformaciones nos habla el hecho de que, los alumnos identificaban las características y realizaban aquel tipo de transformación, como acercamiento (alejamiento) del objeto hacia la recta, de manera independiente. A los alumnos se les nombraba el objeto, en relación con el cual se realizará la transformación (recta) y, también se les indicaba que, la relación de las distancias entre cualesquiera de los dos segmentos pertenecientes a una recta, es igual al número fijo(K /K/ ϖ 1). Hay que señalar que, los alumnos descubrían la generalidad de esta transformación con la homotecia de manera independiente; (ellos decían: “Esto es lo mismo que en la homotecia, sólo que en lugar del punto nosotros tomamos la recta”). Posteriormente, considerando esta transformación ante diferentes significados de K, los alumnos encontraban que, ante K= -1, el acercamiento hacia la recta representa la simetría en relación con la recta.

Para que la acción fuera **desplegada**, era necesario que el alumno realizara todas las operaciones que se incluyeron inicialmente en la estructura de la acción. Así, durante la formación de la habilidad para realizar las transformaciones, el experimentador seguía la realización consecutiva y estricta de todas las operaciones que constituyen el contenido de esta acción: la identificación del objeto inicial, del objeto en relación con el cual se realiza la transformación, etc. En la medida de la formación de esta acción, durante el paso de una etapa en otra, la estructura de las operaciones reales que se realizan se disminuye y la acción se hace reducida: al recibir la tarea, los alumnos señalan todos los puntos que determinan el objeto inicial de la transformación y, de inmediato, realizan la acción necesaria para la obtención del objeto final.

Otra característica independiente de la acción, es la **medida de la asimilación** la cual incluye aquellos indicadores como la rapidez de la realización de la acción y el grado de automatización. Así, el tiempo de realización de las tareas cambiaba durante el paso de una etapa a otra. En la etapa materializada, los alumnos, durante el trabajo con los componentes de la habilidad para la realización de las transformaciones, necesitaban como promedio de 8 a 12 minutos para la realización de una tarea. En la etapa mental, cuando la parte orientadora de la acción se realizaba en la mente, la construcción requería de1 a 3 minutos.

La enseñanza de acuerdo a nuestro programa tenía que garantizar la asimilación con la orientación sólo en las condiciones esenciales en todos los casos, es decir, dicha asimilación tenía que ser **razonable**. Nosotros juzgamos acerca del carácter razonable de la acción, observando cómo los escolares logran resolver exitosamente aquellas tareas en las cuales, la respuesta correcta puede ser obtenida solamente cuando el alumno se orienta en las características esenciales. Con el objetivo de verificar el carácter razonable de la acción que se realiza, a los alumnos se les proporcionaban las tareas con estructura incompleta de las condiciones. Estas tareas pueden ser resueltas solo con la orientación en las características esenciales y, en la regla lógica del reconocimiento. Las respuestas correctas de los escolares: "no se sabe, si este objeto será el vector o no" o "no se sabe, se puede o no llamar a esta transformación simetría central", también son indicadores suficientes del carácter razonable de sus acciones.

Durante la solución de las tareas los alumnos no sólo actuaban correctamente, sino también, argumentaban correctamente sus acciones, es decir, la asimilación no solo era razonable, sino también, **consciente**. Así, durante la realización de las tareas en la etapa del lenguaje en voz alta, los alumnos no sólo señalaban con el código los resultados de la realización de cada operación y la respuesta final, sino también, fundamentaban detalladamente su respuesta: por escrito en las condiciones del experimento grupal y, oralmente, en la enseñanza individual.

La verificación del **carácter estable** de los conceptos y, las acciones formadas, se realizó con los alumnos que participaron en el segundo experimento grupal después de un periodo de 6 meses (incluyendo las vacaciones de verano). A cada uno de los 24 escolares se le proporcionó 8 tareas que, incluían la tarea para el conocimiento de las características de algunos conceptos previos de las transformaciones, así como la realización de las construcciones con ayuda de las transformaciones determinadas. Los alumnos tenían que solucionar el problema y, además, argumentar la respuesta. La complejidad de las tareas era la misma que durante la enseñanza.

Los resultados obtenidos fueron los siguientes: de 192 tareas, 182 tareas (94.8 %) se realizaron correctamente; los alumnos no lograron solucionar 10 tareas (5.2 %), además, nosotros consideramos incumplidas aquellas tareas, las cuales, a pesar de tener la respuesta correcta, no tenían argumentación detallada.

La verificación del **carácter estable** de la asimilación del sistema de conceptos y acciones previas, se realizaba durante el transcurso de la formación de la habilidad para realizar las transformaciones. Así, el conocimiento de los conceptos del vector y de la igualdad de vectores y, la habilidad para construir el vector igual al dado, los cuales se habían formado en el inicio mismo de la enseñanza, se utilizaban después durante la realización de la traslación paralela, es decir, después de 2 a 2.5 meses de la enseñanza. Como muestran los resultados de la realización de las tareas, los errores debidos al desconocimiento de estos conceptos casi no se observaron.

De esta forma, los conocimientos y habilidades formadas durante la enseñanza experimental, satisfacen todas las exigencias para las acciones y conocimientos mentales.

Para poder verificar hasta qué grado el programa experimental elaborado y, la metódica de organización de su asimilación, garantizan la formación de la habilidad generalizada para realizar las transformaciones geométricas elementales, se propuso una serie de tareas de control. Esta serie incluyó tareas de cuatro tipos: 1) para la verificación de las características de las transformaciones y de la habilidad para aplicar la acción de reconocimiento apoyándose en esas características; 2) para la realización de las transformaciones no sólo de un tipo determinado, sino de dos tipos, uno tras otro; 3) para la demostración de la posibilidad de obtener una figura a partir de otra con ayuda del tipo de transformación correspondiente y 4) para elegir el tipo de la transformación. Las tareas de control eran más difíciles de acuerdo a su contenido, en comparación con las tareas propuestas durante la enseñanza. Así, durante el transcurso de la enseñanza experimental, los alumnos realizaron tareas que requerían la utilización solo de una de las transformaciones conocidas para ellos. Realizando las tareas de control (tercer tipo) los alumnos tenían que realizar dos transformaciones, una tras otra.

A cada uno de los escolares se le propuso 8 tareas. Durante la realización de las tareas, los alumnos tenían que argumentar detalladamente su respuesta. Los alumnos solucionaron exitosamente 327 tareas de un total de 400 tareas, es decir, el 93% de las tareas se realizó de manera totalmente correcta. En 28 casos (lo que representa el 7 %) los alumnos dieron una solución sin errores, pero no pudieron argumentar sus respuestas completamente. No hubo ni un solo caso en el que los alumnos no lograran solucionar las tareas.

De esta forma, en lugar de enseñar los tipos aislados de transformaciones geométricas que se encuentran en diferentes partes del curso escolar de geometría, es posible presentar un método generalizado, el cual permite realizar todas las transformaciones incluidas en el programa escolar de manera razonable y consciente.

El programa elaborado por nosotros, garantiza la formación de la habilidad generalizada sobre la realización de las transformaciones geométricas y la dirección de este proceso, lo cual se manifiesta en los resultados de la serie del experimento, tanto formativa, como del control.

Los resultados de la investigación realizada hablan acerca de las ventajas de nuestra metódica, en comparación con la metódica escolar actual, lo cual se expresó en la obtención de resultados más altos de asimilación y, en la reducción a la mitad del tiempo del estudio de este material, respecto al tiempo requerido de acuerdo al programa escolar existente.

Capítulo 6
La formación del método general para la solución de problemas con construcciones geométricas

I.A. Volodarskaya y T.K. Nikitiuk

Los problemas sobre construcciones geométricas juegan un papel muy importante para la formación del pensamiento matemático en los escolares. Desde los tiempos antiguos, las construcciones geométricas garantizaban el desarrollo no solamente de la geometría misma, sino también, de otras áreas de las matemáticas. Incluso actualmente, los problemas sobre construcciones a través de la regla y el compás se consideran muy interesantes desde el punto de vista matemático y, ya durante más de 100 años, constituyen el material tradicional del curso escolar de geometría.

De acuerdo a su estructura y métodos para su resolución, estos problemas objetivamente deben de desarrollar en los estudiantes la capacidad para representar claramente una u otra figura geométrica y, además, la habilidad para operar mentalmente con los elementos de esta figura. Los problemas sobre construcciones pueden garantizar en los escolares la comprensión del origen de diferentes figuras geométricas, de las posibilidades para sus transformaciones; todo esto constituye una premisa muy importante para la formación del pensamiento espacial en los alumnos, de sus habilidades investigativas y creativas y de la intuición geométrica. El plan para la solución de cualquier problema sobre construcción, constituye la cadena de las construcciones básicas que conducen al objetivo; este plan puede considerarse como el algoritmo y, consecuentemente, puede utilizarse también en grados escolares superiores como el material del contenido del curso de informática y de las técnicas de cálculo. Durante el proceso de resolución de problemas sobre construcción, el maestro puede formar efectivamente en los escolares, los elementos de la cultura algebraica exigiendo sistemáticamente la secuencia exacta de las construcciones básicas. Los problemas sobre construcciones desarrollan los hábitos de búsqueda para soluciones de problemas prácticos, acostumbran a las investigaciones independientes, lo cual es muy importante para la formación de habilidades y hábitos de trabajo intelectual. A través de problemas sobre construcción e, incluso, a través de otros más elementales la información teórica acerca de las figuras geométricas básicas, adquiere un carácter más profundo y más consciente debido a que, durante el proceso de solución de problemas de este tipo, el alumno crea el modelo concreto de las características y relaciones que se estudian y, trabaja con este modelo. Los problemas sobre construcciones, probablemente pueden ser relacionados con ideas del curso escolar de geometría, tales como, transformaciones, vectores y método de coordenadas.

Los problemas sobre construcciones se estudian en la escuela durante tres años: en los grados 7º, 8º y 9º. De acuerdo a las exigencias, a la preparación matemática de alumnos de grado 7º y 9º (11) y, como resultado del estudio del curso "Geometría", los escolares deben dominar las habilidades mínimas siguientes:

– Representar figuras geométricas señaladas en las condiciones de teoremas y problemas, identificar las figuras conocidas en dibujos y modelos.
– Operar con razonamientos demostrativos durante el proceso de problemas típicos.
– Calcular las magnitudes geométricas (longitudes, ángulos, áreas) aplicando las características y fórmulas aprendidas.
– Realizar las construcciones básicas con ayuda de la regla y el compás, resolver problemas elementales combinados que se reducen a la realización de construcciones básicas.
– Aplicar el aparato de álgebra y trigonometría durante la resolución de problemas geométricos.
– Utilizar vectores y coordenadas para la resolución de problemas estandarizados (cálculo de longitudes y ángulos, sumas de vectores y multiplicación del vector por el número).

Para el estudio de los temas "Problemas básicos sobre construcciones geométricas" y "Resolución de problemas sobre construcciones con ayuda de regla y compás", el plan escolar proporciona la siguiente cantidad de horas:

Año escolar	Tema	Partes del curso	Horas
7º	Igualdad de triángulos.	**Cap.II**	**17**
	Problemas sobre. Construcción.	**Párrafo 4**	**3**
	Resolución de problemas sobre el tema "Triángulos" (dentro de este tema hay problemas sobre construcciones).		**3**
	Correlaciones entre lados y ángulos de triángulos.	**Cap. IV**	**16**
	Construcciones de triángulos según tres elementos, problemas sobre construcciones.	**Párrafo. 4**	**3**
8º	Cuadriláteros.	**Cap. V**	**15**
	Paralelogramo y trapecio (dentro de este tema hay problemas sobre construcción).	**Párrafo. 2**	**6**
	Rectángulo, rombo, cuadrado (dentro de este tema hay problemas sobre construcción).	**Párrafo. 3**	**4**
	Triángulos semejantes.	**Cap. VII**	**22**
	Aplicación de semejanza para demostraciones de teoremas y para la solución de problemas (dentro de este tema hay problemas sobre construcción).	**Párrafo. 3**	**3+4**
	Circunferencia.	**Cap. VIII**	**16**
	La línea tangente (dentro de este tema hay problemas sobre construcción).	**Párrafo. 1**	**3**
	Cuatro puntos esenciales del triángulo (dentro de este tema hay problemas sobre construcción).	**Párrafo. 3**	**3**
9º	Longitud de circunferencia y área del circulo	**Cap. XII**	**10**
	Construcción de polígonos rectos	**Párrafo 1**	**1**

Nota: Los señalamientos de capítulos y párrafos corresponden al Manual de geometría (1).

En los horarios se ve, qué lugar ocupan diferentes tipos de problemas sobre construcciones en la estructura de diferentes temas y partes. Además, iniciando con el séptimo grado, los problemas sobre construcción no se consideran de manera independiente sino que se presentan dentro de la estructura de temas que se estudian. Así, el maestro obtiene la posibilidad para distribuir los horarios de manera independiente dentro de cada tema, de acuerdo con el objetivo establecido y el nivel de preparación de alumnos de su grupo.

El análisis de los manuales para geometría (1, 9) mostró que, los autores utilizan básicamente la vía inductiva para la representación del material relacionado con construcciones geométricas. Inicialmente, los escolares estudian los tipos concretos de construcciones: construcción de un segmento igual al segmento dado sobre la semi-recta desde su punto inicial; construcción de un ángulo igual al ángulo dado; construcción de la bisectriz del ángulo; construcción de las líneas perpendiculares; construcción de la mitad del segmento; construcción del triángulo según sus tres elementos. Sólo después de todo esto, a los escolares se les presenta la idea general de la construcción geométrica en el tema: “Problemas de complejidad incrementada”, en el que, se les propone el esquema según el cual, normalmente, se resuelven los problemas sobre construcción con ayuda de regla y compás.

Este esquema consiste de cuatro partes:

- **I. Análisis.**
- **II. Construcción.**
- **III. Demostración.**
- **IV. Investigación.**

Presentaremos el contenido de estas partes.

I. Análisis constituye la etapa preparativa y, al mismo tiempo, la más importante para la resolución del problema. El objetivo del análisis es el establecimiento, de aquellas dependencias entre los elementos de la figura dada y, las condiciones del problemas las cuales permitieron construir esta figura. Normalmente, el análisis del problema consiste en el hecho de que nosotros suponemos que el problema ya esté resuelto y buscamos diferentes consecuencias (o premisas) a partir de dicha suposición y, después, en dependencia del tipo de estas consecuencias, intentamos encontrar la vía para la búsqueda de la resolución de este problema. En otras palabras la “receta” de la ejecución del análisis, consiste en la realización secuencial de tres etapas de razonamientos:

1) Supongamos que el problema esté resuelto.
2) Veremos qué tipo de conclusiones podríamos hacer basándose en esto.
3) Ahora, comparando las conclusiones obtenidas, intentaremos encontrar la vía para la resolución real del problema.

II. Construcción de acuerdo al plan establecido.

III. Demostración del hecho de que la figura construida satisface a las condiciones del problema.

IV. Investigación del problema, es decir, aclarar si este problema tiene o no la solución ante cualquier tipo de condiciones y, si la tiene, entonces cuántas soluciones tendría.

El esquema dado tiene el carácter reducido. Este ha sido utilizado a partir de los tiempos de Grecia Antigua (siglos IV-III a.C.).

V.S. Kramor (7) propone, como el esquema completo para la resolución de problemas sobre construcciones, utilizar el esquema siguiente:

1) Consideración de la situación práctica.
2) Formulación del problema.
3) Análisis del problema.
4) Elaboración del plan general para la solución del problema (señalar la secuencia de problemas elementales necesarios).
5) Construcción de la figura con ayuda de instrumentos dados.
6) Verificación de la construcción de la figura. Demostrar que esta figura es la que se buscaba.

7) Investigación a través de la generalización del problema. En la investigación se incluye la búsqueda de condiciones, ante las cuales, el problema tiene la solución y la cantidad de estas condiciones en cada caso identificado. La escritura de condiciones ante las cuales el problema tiene solución, se realiza a través del idioma algebraico (a través de establecimiento de relaciones entre elementos dados).

8) Resolución del problema para cada caso identificado durante la investigación.

9) Búsqueda de otros medios para la solución del problema; identificación de medios racionales.

10) Elaboración de otros problemas que se solucionan a través del método dado. Consideración de problemas generalizados y similares.

Durante la elaboración del plan para la resolución del problema (punto 4) se utilizan diferentes medios de búsqueda de puntos y líneas desconocidas, en particular: el método de reducción del problema dado a un problema más elemental o conocido; el método de transformaciones geométricas, etc. Para la búsqueda de segmentos y ángulos se utiliza el método algebraico. La aproximación general a la elaboración del plan de acciones (más racional) es la siguiente: inicialmente recordamos todo lo que se sabe acerca de los elementos conocidos y desconocidos de la figura, cuáles de éstos se pueden construir; después, si su construcción no conduce al objetivo, construimos los elementos complementarios (que se pueden construir con ayuda de lo dado) y, finalmente, otra vez analizamos las construcciones posibles de elementos que estamos buscando. El proceso de razonamiento se prolonga hasta que se obtenga el plan para la construcción de la figura.

El esquema dado, en su esencia, constituye el esquema tradicional con más detalles y puede ser útil durante la enseñanza de la resolución de problemas de este tipo.

En la práctica actual de la enseñanza, existen diferentes opiniones respecto a la necesidad de cada una de las cuatro etapas (análisis, construcción, demostración, investigación); así como respecto a la forma de la realización de estas etapas durante la resolución de todos los problemas para construcciones. Así, de acuerdo al programa de las matemáticas para la escuela popular, en el séptimo grado, cuando los escolares por primera vez inician a conocer las habilidades para resolver problemas para construcción, se recomienda realizar análisis y demostraciones oralmente, mientras que los elementos de la investigación pueden estar presentes sólo cuando esto se señale en las condiciones del problema (11). Desde otro punto de vista, en el manual de geometría (1) se señala que durante la resolución de problemas elementales sobre construcciones (precisamente estos problemas se estudian en el séptimo grado), algunas etapas, por ejemplo, el análisis o la investigación se omiten: a los alumnos se les proporciona el medio preparado de la construcción y la demostración ya preparada de su carácter correcto y verdadero. No todas las etapas se pueden observar durante la solución de problemas también en el grado octavo.

L.A. Chernych (15) también considera, que las etapas mencionadas de problemas sobre construcciones se deben de presentar a los escolares de manera gradual. Durante la solución de problemas elementales, ella recomienda anotar sólo la construcción y demostración. En casos más complejos de construcciones, el dibujo táctico y el plan de construcción deben de anticipar la construcción y conducirse del análisis; es mejor realizar el análisis oral. Oralmente, bajo la dirección del maestro, se puede realizar la investigación si esto es necesario.

Nosotros consideramos que, la exclusión de aquellas etapas como análisis e investigación del proceso de solución de problemas sobre construcciones, conduce a la memorización mecánica del medio de solución del problema, proporcionado ya en su tipo preparado, lo cual decrementa notablemente la calidad de la asimilación.

Cabe señalar que, en la literatura didáctica hay trabajos en los que los autores intentaban acercarse a la enseñanza efectiva de la solución de problemas sobre construcciones. Así se dirige la atención a la necesidad de mostrarles a los escolares la diferencia entre problemas sobre construcciones y otros tipos de problemas. El problema sobre construcción tiene la estructura específica: en éste se dan las figuras geométricas y condiciones que las relacionan entre sí. Las exigencias de este problema se pueden dividir en dos partes: a) construir una figura nueva relacionada con las figuras dadas, a través de algunas condiciones y b) construir con ayuda del conjunto específico de instrumentos (10). Además, en algunos problemas los instrumentos se señalan (por ejemplo: construcción de líneas paralelas con ayuda de regla y compás) mientras que en otros problemas, en los que los instrumentos no se señalan se presupone la utilización de regla y compás. Para la percepción más consciente del contenido del problema, se recomienda enseñarles a los alumnos, a anotar brevemente lo que se da y lo que se debe de construir en los problemas. La parte de escritura llamada "Dado" puede ser representada en tipos diferentes. Así, si se da el tipo y la posición de figuras una respecto a otra, entonces, en "Dado", se pueden anotar sólo las determinaciones de estas figuras y las relaciones entre ellas con ayuda de signos espaciales, mientras que, las figuras mismas, se representan más tarde cuando se realicen las construcciones. Por ejemplo, para el problema: "Se dan dos líneas paralelas y un punto sobre una de ellas. Construir la circunferencia que sea tangente para estas rectas y atraviese el punto dado". La escritura breve puede tener el tipo siguiente:

Dado: rectas a, b, punto A

A sobre a

$a \parallel b$

Construir: circunferencia O para que:

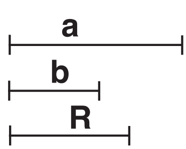
1) a sea tangente a O

2) b sea tangente a O

3) A se encuentre sobre O.

En problemas, donde se da el tipo y el tamaño de las figuras sin considerar sus posiciones recíprocas, en la parte llamada "Dado", se deben representar y determinar las figuras. Por ejemplo, la escritura breve del problema: "Construir el triángulo a partir de dos lados y del radio de la circunferencia circunscrita", puede ser representada de la siguiente manera:

Dado:



Construir: Δ ABC para que:

1) BC = a

2) AC = b

3) A, B, C sobre circunferencia (0, R).

Algunos autores (3, 16), considerando los métodos para resolución de problemas sobre construcciones como hábitos prácticos, identifican cuatro etapas de su formación: de preparación, de conocimientos, de formación y de perfección de habilidades.

Así, L.S. Chistiakova considera que, inicialmente el maestro debe de identificar el sistema de condiciones sobre el cual tiene que apoyarse el alumno, para la asimilación exitosa de las acciones prácticas. Por ejemplo, para aprender a construir el ángulo igual al ángulo dado con ayuda de regla y compás, los alumnos necesitan tener los conocimientos de los hechos siguientes: de las figuras geométricas dadas (semi-recta, semi-plano y ángulo); del objetivo de esta acción (en el caso dado, acerca del ángulo igual al ángulo dado, que tenemos que construir); de cada una de las operaciones constructivas y de la secuencia de su ejecución. Los alumnos también deben de ser preparados para explicar la posibilidad de cada paso de la construcción y para demostrar que su construcción era la correcta (axiomas de construcción de segmentos y ángulos, determinación de triángulos iguales y de características de igualdad de triángulos). Tampoco se puede trabajar sin los hábitos para ejecutar las operaciones constructivas elementales: construcción de circunferencia con un radio indefinido o definido con el centro en algún punto, construcción de la semi-recta que tenga el punto inicial dado y que pase por el punto dado.

La etapa preparativa es necesaria para que los alumnos actualicen los conocimientos previos mencionados.

Durante la etapa cognoscitiva, los alumnos tienen que identificar lo que se les da, lo que se debe de hacer y con qué instrumentos, cuáles operaciones serán necesarias para esta ejecución. Se recomienda mostrarles a los alumnos el plan con ayuda de dibujos y del texto. Por ejemplo, inicialmente, con ayuda de codoscopio, en la pantalla se proyecta el ángulo dado BAC, el arco de circunferencia con el centro A y semi-recta con el inicio en el punto O (Figura 1). En los cuadros siguientes se les muestra a los escolares cómo aparece el punto B1 sobre la semi-recta (Figura 2) y como aparece el punto C1 sobre la circunferencia con el centro O y con el radio OB1 (OB1 = AB) (Figura 3). En el cuadro (este no se presenta) se proporcionan dos triángulos: uno (ABC) con el ángulo CAB y el otro (OB1C1) con el ángulo C1OB1 igual a triángulo dado.

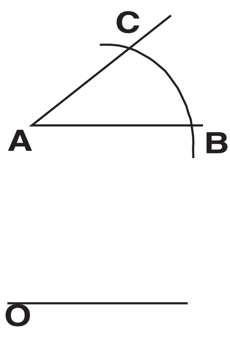


Figura 1

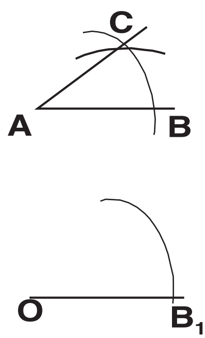


Figura 2

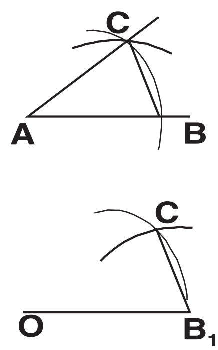


Figura 3

Posteriormente, el autor dice que, durante la etapa cognoscitiva se tiene que realizar la preparación para la ejecución de la acción práctica con ayuda de instrumentos. Por eso, los escolares desde el inicio mismo, no sólo observan las acciones del maestro, sino también, realizan todo lo que les dice el maestro.

Durante la etapa de formación, los escolares tienen que aprender a ejecutar correctamente la acción práctica en las condiciones dadas y, sin ayuda ajena, es decir, según el modelo. La dirección de la actividad de escolares se realiza con ayuda del plan mencionado anteriormente (ver Figuras 1 - 3). Además, inicialmente la ejecución se acompaña por el plan completo en el tipo de cuadros y de texto-instrucción. Después, la tarea se acompaña sólo por el texto-instrucción. Las últimas tareas los alumnos las ejecutan de manera completamente independiente. Durante la última etapa (perfección de la habilidad práctica), se profundiza el carácter consciente de la habilidad y su ejecución automatizada.

L.I. Bozhenkova (3), quien estudiaba la resolución de problemas sobre construcción a través del método de semejanza, formula el objetivo didáctico de la etapa preparativa, como la formación de las habilidades en escolares: identificar los dados que determinan la forma de figura; el conjunto de pares de figuras semejantes entre ellas; construir la figura según datos que determinan su forma; pasar de la figura construida a la figura dada. Después del estudio de cada característica, el autor propone el conjunto de tareas dirigiendo la atención al hecho de que, durante el paso de una característica a la característica siguiente, las preguntas se hacen más complejas: las posiciones de triángulos en dibujos se cambia alejándose de la representación estandarizada; se cambia en el conjunto la elección del elemento que determina la figura. El objetivo de la etapa cognoscitiva es, presentarles a los alumnos la estructura del proceso de la construcción, a través del método de semejanza, el significado de cada operación que conforma esta estructura. El autor propone iniciar la explicación con el problema, durante cuyo análisis, el maestro proporciona tareas-preguntas y las respuestas se fijan brevemente en el pizarrón. Después, se elabora el plan de la construcción y se ejecuta la construcción misma. Después de éste, el maestro dirige la atención de los escolares al hecho de que, ellos, durante la ejecución de la tarea, prácticamente estaban realizando la prescripción algorítmica la cual se les proporciona a ellos en el tipo de bloque-esquema:

1. En las condiciones del problema, identificar los datos que determinan la forma de la figura.
2. Identificar los datos que determinan el tamaño de la figura (elemento lineal).
3. Construir la figura con la forma señalada, semejante a la figura dada.
4. Construir (identificar) el segmento que determina el tamaño de la figura.
5. Construir la figura con la forma y tamaño señalados, utilizando la figura semejante.
6. La figura obtenida es la que estábamos buscando.

El trabajo posterior se dirige a la organización de la asimilación del algoritmo dado y del medio para la resolución de problemas de construcción, a través del método de semejanza.

El intento de identificar el método general para la solución de problemas sobre construcciones, se realiza por parte de O.B. Yepisheva y V.I. Krupich (6) con el ejemplo de ejecución de la construcción, a través del método de lugares geométricos (método de cruce de figuras). Los hábitos de la construcción a través del método de lugares geométricos se basan en el concepto del lugar geométrico de los puntos. Para la resolución de problemas a través del método de lugares geométricos, es necesario saber los lugares geométricos básicos de puntos.

El material de planimetría permite presentarles a los alumnos los lugares geométricos de puntos, alejados a distancias dadas del punto y de la recta; alejados a distancias iguales de dos puntos, de los lados del ángulo, de dos líneas cruzadas y de dos líneas paralelas, etc.

La esencia del método de lugares geométricos durante la resolución de problemas sobre construcción consiste en lo siguiente:

Supongamos que, resolviendo el problema, nosotros tenemos que construir el punto X que cumpliera con dos condiciones. El lugar geométrico de puntos que satisfacería a la primera condición, es la figura F1 mientras que, el lugar geométrico de puntos que satisfacen a la segunda condición, es la figura F2. El punto X que estamos buscando es la propiedad de F1 y F2, es decir, constituye el punto de su cruce.

Los problemas sobre lugares geométricos de puntos se pueden dividir en dos tipos. Con el primer tipo se relacionan los problemas en los que se da alguna figura y, se debe de encontrar el punto sobre ésta que satisfaga a las condiciones determinadas:

1) Es la propiedad de la figura geométrica señalada en las condiciones del problema.
2) Es la propiedad de la figura, en la cual todos los puntos poseen las características determinadas.

Con el segundo tipo se relacionan los problemas en los que se tiene que encontrar el punto que satisfaga, simultáneamente, a dos condiciones:

1) Es la propiedad de la figura F1, en la cual todos los puntos poseen las características determinadas.

2) Es la propiedad de la figura F2, en la cual todos los puntos poseen las características determinadas.

Posteriormente, los autores consideran los problemas relacionados con cada uno de estos tipos y, después de esto, se construye el método generalizado para la resolución de problemas de ambos tipos señalados.

Así, el medio generalizado para la solución de problemas del primer tipo, a través del método de lugares geométricos de puntos, consiste en:

1) Representar la figura cuya propiedad sea el punto X que estamos buscando.
2) Formular, basándose en el texto del problema, la condición que a la cual satisfaga el punto X que estamos buscando.
3) Nombrar el lugar geométrico de puntos que satisfaga a esta condición.
4) Construir el lugar geométrico de puntos denominados.
5) Encontrar el punto (puntos) de cruce de la figura dada con el lugar geométrico de lugares.

La utilización del concepto de lugar geométrico de los puntos, los cuales poseen las características determinadas, tiene que ayudarles a los alumnos durante la búsqueda del medio para la solución de problemas sobre construcciones. Así, durante el análisis de dos problemas (que en un principio parecen ser diferentes): "entre puntos encontrados sobre la misma distancia de los lados del ángulo dado, encontrar el punto que se encuentre sobre las mismas distancias de dos puntos dados" y "construir la circunferencia que pase por dos puntos dados y que sea tangente para los lados del ángulo dado", los escolares tienen que comprender, que estos problemas, en esencia, no se diferencian uno del otro. Las diferencias entre ellos consisten en que los textos de estos problemas proporcionan diferentes señalizaciones de aquellos lugares geométricos de puntos, con cuya ayuda se puede resolver el problema dado. En el primer problema, las condiciones que determinan el punto que estamos buscando, se presentan claramente en el texto, mientras que en el segundo problema, es necesario obtener estos datos reconsiderando el texto del problema.

De esta manera el análisis mostró, que se están realizando los intentos para encontrar la vía más racional de la enseñanza de la resolución de problemas sobre construcciones, en general, y, con ayuda de los métodos concretos, en particular, del método de lugares geométricos de puntos. Los autores aspiran a identificar los momentos generales durante las construcciones. Sin embargo, a la pregunta básica "¿por qué es necesario realizar las construcciones precisamente de esta forma?", no dan ninguna respuesta.

En los manuales existentes cada problema sobre construcción, se da de manera aislada fuera de la relación con otros problemas, a pesar de que los autores proporcionan la secuencia necesaria de estos problemas. La calidad de ejecución de problemas sobre construcción no se mejora debido a que, durante la resolución de cada problema siguiente, en la mayoría de los casos, los alumnos no se apoyan en problemas resueltos anteriormente. Para cada construcción se proporciona el medio particular para su realización. Además, en las acciones de escolares, lo más importante constituye la parte ejecutiva: los escolares mecánicamente reproducen las construcciones sin tener la base orientativa completa y adecuada. Frecuentemente los alumnos no comprenden que, durante la resolución casi de todos los problemas básicos sobre construcción con ayuda de regla y compás, (los cuales se determinan en el programa escolar), se utiliza la actividad con el mismo contenido pero, con la secuencia diferente de las operaciones. Compararemos, por ejemplo, la secuencia de operaciones, ejecutadas por parte de los alumnos durante la resolución de tres problemas siguientes (**figura 4**).

Problema I: Dividir el segmento por la mitad.

Problema II: Construir la perpendicular para la recta, la cual pase por el punto dado sobre la recta.

Problema III: Construir la perpendicular para la recta, la cual pase por el punto dado fuera de la recta.

En la tabla (f**igura 4**) se ve que la primera operación en los problemas II y III es necesaria para la identificación del segmento determinado sobre la recta a; en el segundo problema a través de la construcción de segmentos iguales OA y OC del punto dado O; en el tercer problema a través de la construcción de la circunferencia con el centro en el punto dado B, la cual cruzará la recta a en los puntos A y C. Después, los problemas II y III prácticamente se redujeron al problema I. Por eso, para estos problemas la segunda operación coincide con la primera operación del problema I, cuando se construyen dos circunferencias con los centros en los puntos A y C, con el radio AC y pasan por los puntos de cruce de estas circunferencias B y D. La tercera operación de los problemas II y III es similar a la segunda operación del problema I, cuando dibujan la recta BD que se cruza con la recta dada (segmento dado) en el punto O. La tercera operación del problema I y la cuarta operación de los problemas II y III son idénticas y necesarias para la demostración del método elegido de la construcción.

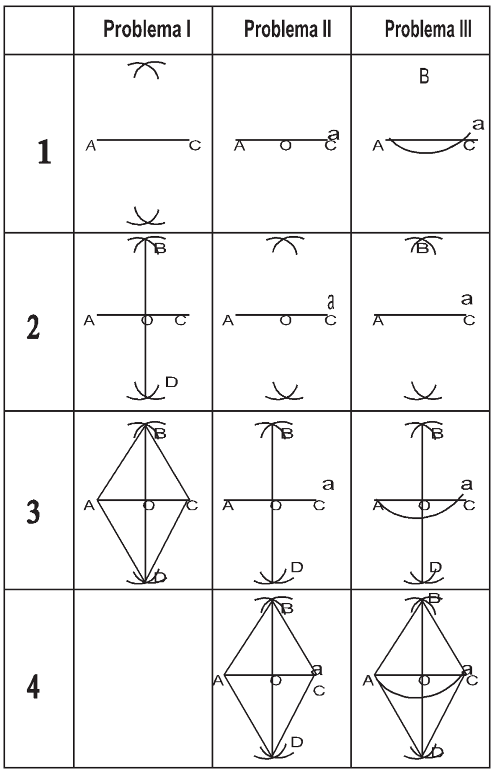


Figura 4

En la práctica actual de la enseñanza, cada uno de los problemas mencionados se percibe por parte de los alumnos como un problema independiente.

Pondremos un ejemplo más: al aprender a construir la bisectriz del ángulo dado y, al pasar al problema sobre construcción de la perpendicular que atraviesa el punto dado sobre la recta, los alumnos consideran el segundo problema como algo totalmente nuevo sin notar que, éste se reduce al primer problema ya que la perpendicular en éste se puede considerar como la bisectriz del ángulo llano con el vértice en el punto dado de la recta.

A pesar de que muchos metodistas y maestros señalan que la etapa más importante y más difícil de la resolución es el análisis, a los alumnos no se les proporciona el sistema completo de orientaciones, cuya realización podría ayudarles a encontrar la "llave" para la resolución del problema concreto, lo cual, precisamente, constituye el objetivo de esta etapa. Se recomienda iniciar el análisis con el dibujo que haga el alumno de acuerdo a la condición del problema y, después, busque en el dibujo la vía para la resolución del mismo. Sin embargo, el alumno no comprende por qué él debe hacer este dibujo, en qué debe de orientarse mientras construye una u otra figura y, los puntos que se señalan en el manual, etc. En otras palabras, el análisis, como el encuentro de los elementos de la figura que se busca según los elementos dados, no existe. Como ya se subrayó anteriormente, en la mayoría de los manuales, los autores no recomiendan realizar ningún análisis durante la solución de problemas sobre construcción con ayuda de regla y compás (a estos problemas frecuentemente se les llaman problemas elementales). Aquí, por ejemplo, podemos ver cómo se presenta el medio para la resolución de uno de los primeros problemas sobre construcción: "construir el segmento igual a segmento dado sobre la semi-recta dada" (1).

"Representaremos las figuras dadas en las condiciones del problema: semi-recta OC y segmento AB (Figura 5,a). Después, con ayuda del compás construiremos la circunferencia con el radio AB con el centro O (Figura 5,b). Esta circunferencia se cruza con la semi-recta OC en el punto básico D. El segmento OD es el segmento que se buscaba" (1).

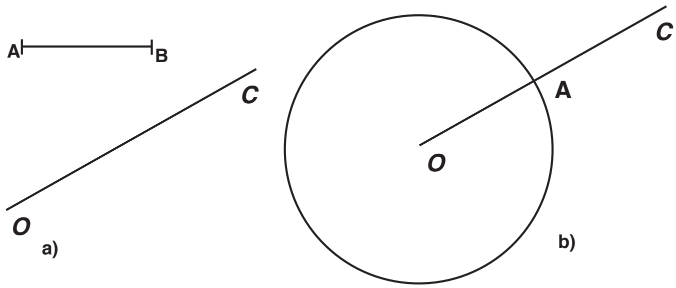


Figura 5

De esta manera, al alumno se le muestra que hay que construir el resultado final de la acción y una serie de operaciones secuenciales, con cuya ayuda, se logra este resultado, es decir, sólo la parte ejecutiva de la acción. El alumno únicamente tiene que memorizar esta secuencia. Después, el alumno reproduce el medio propuesto, pero no puede responder a las preguntas: ¿cuántos puntos hay que construir para reproducir el segmento dado?; ¿por qué para la construcción del segmento igual al segmento dado, es suficiente construir dos puntos y éstos son sus puntos-límites? y ¿por qué para encontrar la posición de uno de los puntos, construimos la circunferencia, cuyo radio es igual al segmento dado?, etc. Todo esto demuestra que la reproducción de operaciones ejecutivas no se acompaña por la ejecución consciente de estas acciones.

Sin negar la necesidad y el significado del análisis, de la investigación y de la demostración como las etapas de la solución de problemas sobre construcciones, nosotros hemos intentado identificar la base de orientación general que le ayude al alumno, de manera consciente y razonable, a realizar éste análisis y, la investigación del problema geométrico, que le oriente a la búsqueda independiente del medio racional para la resolución del problema y, que pudiera eliminar la memorización y la reproducción del medio ya dado y preparado en el manual.

El análisis mostró que todos los problemas sobre construcciones con ayuda de regla y compás, finalmente, se reducen a la construcción de una cantidad limitada de figuras: punto, segmento y circunferencia. Por una parte, para la construcción del segmento y de la circunferencia es suficiente identificar los puntos que los determinan; por otra parte, la construcción de la figura que posee características determinadas (éstas son las características de cualquier problema sobre construcción), también se reduce a la construcción de sus puntos determinantes (puntos característicos de la figura). Además, el medio de construcción de un punto, como de la figura geométrica, es idéntico para todos los problemas: es necesario encontrar el cruce de dos líneas (recta y recta, recta y circunferencia, dos circunferencias). El alumno tiene que comprender, qué puntos y cuántos tenemos que determinar para la figura que se busca, para después, al dibujar estos puntos, poder reconstruir por completo esta figura.

Nosotros consideramos que el momento importante durante la búsqueda del medio de solución del problema sobre construcción, es la realización indispensable del análisis del problema sin depender del grado de su complejidad. Además, la forma de la realización del análisis puede ser diferente: razonamiento teórico en forma del lenguaje oral o escrito o razonamiento acompañado por el dibujo. El significado básico del análisis, es identificar y "descubrir" aquellos conocimientos y habilidades que no siempre se proporcionan en su tipo claro en las condiciones del problema, pero que son necesarios, para la elaboración consciente del plan de la construcción.

De acuerdo con nuestra opinión, el análisis tiene que realizarse junto con la investigación que incluye respuestas a las siguientes preguntas:

1) ¿Siempre es posible la construcción ante las condiciones dadas o no?

2) ¿La resolución dada es única o varias resoluciones son posibles?

3) ¿Qué problemas sobre construcción de los estudiados anteriormente puede utilizarse como construcciones intermediales?

4) ¿A qué problema de los estudiados anteriormente puede reducirse este problema dado?

La inclusión de los puntos 3 y 4 además de los puntos 1 y 2, los cuales, tradicionalmente constituyen el contenido de esta etapa de resolución de problemas sobre construcciones garantizará: la comprensión de equivalencia de una serie de problemas, el carácter secuencial de los conocimientos adquiridos, incremento de la calidad de la asimilación y, lo que es más importante, la resolución razonable de problemas. Así, por ejemplo, es necesario dirigir la atención de los alumnos hacia la equivalencia de tales problemas como “dividir el ángulo dado por mitad” y “construir la bisectriz del ángulo dado”; “dibujar la perpendicular que cruce con la recta en el punto dado de la recta” y “construir la bisectriz del ángulo llano con el vértice en el punto dado”; “dividir el segmento por la mitad” y “construir la perpendicular que se cruce con el segmento dado en la mitad del segmento”, etc.

En la enseñanza actual, sí se recomienda realizar la investigación, entonces solamente después de la construcción ya realizada y, además, esto no se recomienda respecto a todos los problemas. Nosotros consideramos que la investigación, así como el análisis, deben de ser los componentes iniciales e indispensables de la actividad sobre la resolución de problemas sobre construcciones.

Considerando todo lo anterior, se identificó el contenido del método general para la resolución de los problemas sobre construcciones con ayuda de regla y compás, que incluye los siguientes componentes:

1. Identificar las figuras geométricas dadas en las condiciones del problema y las relaciones entre ellas.
2. Identificar la figura geométrica que tenemos que construir (figura que buscamos).
3. Identificar en las condiciones del problema las características que tiene que poseer la figura.
4. Definir la figura que estamos buscando (denominar las características necesarias y suficientes del concepto correspondiente).
5. Identificar los puntos necesarios y suficientes para la construcción de la figura que se busca (puntos determinantes).
6. Nombrar los conocimientos, mencionados en las condiciones del problema, con cuya ayuda se pueden garantizar las características de la figura que se busca.

7. Establecer el carácter suficiente o no suficiente de las condiciones dadas para la construcción de la figura que se busca.
8. Establecer, detrás de qué tipo de conocimientos pueden ser "ocultados" aquellos que son necesarios para la construcción de la figura que se busca.
9. Elegir conocimientos que serán utilizados para la construcción de la figura que se busca y explicar la elección correcta y verdadera.
10. Establecer la posibilidad de la construcción de la figura que se busca según los datos de las condiciones del problema:
    a) Siempre (o no) será posible la construcción ante condiciones dadas.
    b) El medio elegido de la construcción es el único o son posibles varias resoluciones.
    c) Qué problemas sobre construcciones de los aprendidos anteriormente pueden ser utilizados como construcciones intermediales.
    d) A qué problema sobre construcción de los aprendidos anteriormente puede ser reducido el problema dado.
11. Elegir el medio para la construcción de cada uno de los puntos determinantes de la figura que se busca: cruce de dos rectas, de recta y circunferencia o de dos circunferencias.
12. Construir cada uno de los puntos determinantes de la figura que se busca y, según éstos, construir la figura completa.

13. Demostrar que la figura construida satisface a las condiciones del problema.
El medio propuesto incluye las acciones generales básicas. Evidentemente, durante la solución de problemas concretos, algunos de estos componentes pueden ser omitidos. Así, por ejemplo, la solución de los primeros problemas sobre construcciones, no requiere de la investigación con el objetivo de encontrar la reducción posible a los problemas aprendidos anteriormente. No siempre es necesario el análisis de las condiciones del problema, con el objetivo de encontrar conocimientos y habilidades "ocultos", porque, la información proporcionada en su tipo claro, es suficiente para la elaboración del plan para la solución del problema y para la realización de dicho plan.

Mostraremos la realización del método general con ejemplos de problemas concretos. Para comparación presentaremos el material correspondiente de uno de los manuales escolares de geometría (1). Como ejemplo consideraremos el primero de los problemas sobre construcción, el cual se estudia por parte de alumnos de la escuela media (secundaria): “Construir sobre la semi-recta el segmento igual al segmento dado”. El contenido del medio de la ejecución de esta construcción, propuesto en el manual se representó anteriormente. Describiremos cómo el maestro puede organizar el trabajo de los escolares sobre la resolución del problema, utilizando el método general propuesto:

1. **Identificar las figuras geométricas dadas en las condiciones del problema y las relaciones entre ellas.**

   Maestro: ¿Qué se nos da en las condiciones del problema?

   Alumno: Dos figuras geométricas: semi-recta y segmento.

   Maestro: ¿En el problema se señala (o no) la longitud del segmento o la posición de la semi-recta y del segmento?

   Alumno: No, no se señalan.

   Maestro: ¿Ustedes piensan que nosotros podemos retomar el segmento de cualquiera longitud y colocar el segmento y la semi-recta en el plano de cualquiera manera?

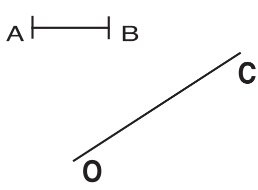
   Alumno: Sí, podemos.

   Maestro: Anotaremos lo que se nos da en el problema. (El maestro en el pizarrón y los alumnos en sus cuadernos dibujan y escriben).

Dado:

segmento AB

semi-recta OC



2. Identificar la figura geométrica que se tiene que construir (la figura que se busca).

Maestro: ¿Qué tipo de figura tenemos que construir?

Alumno: Segmento.

(El maestro señala que la figura que tenemos que construir se llama la figura que se busca).

3. Identificar las condiciones del problema, qué características debe tener la figura.

Maestro: ¿Qué características debe de tener el segmento que tenemos que construir?

Alumno: Este segmento debe de poseer dos características: 1) ser igual al segmento dado AB y 2) el segmento debe de iniciarse en el punto inicial O de la semi-recta OC.

Maestro: Es correcto. Ahora podemos anotar qué tenemos que construir. (El maestro en el pizarrón y los alumnos en sus cuadernos escriben).

Construir: segmento OD **para que**
1) OD=AB,
2) puntos O **y** A **coincidieron,**
3) punto D **se encontraba sobre la semi-recta** OC.

4. Proporcionar la definición de la figura que se busca (denominar las características necesarias y suficientes del concepto correspondiente).

Maestro: ¿Qué características esenciales debe de tener la figura geométrica para poder llamarla segmento?

Alumno: Esta figura debe de poseer dos características esenciales: 1) ser parte de la recta y 2) esta parte de la recta tiene que ser limitada en dos lados, es decir, tener dos puntos-límites.

Maestro: Correcto.

5. **Identificar los puntos necesarios y suficientes para la construcción de la figura que se busca (puntos determinantes).**

   Maestro: ¿Cuántos y cuáles puntos tenemos que construir para poder construir de acuerdo a éstos, el segmento requerido?

   Alumno: Para la construcción del segmento dado es suficiente construir dos puntos, sus límites y, después, unirlos con la recta.

   Maestro: ¿Por qué es suficiente sólo con estos puntos?

   Alumno: Segmento es la parte de la línea recta. Para la construcción de la recta, hay que construir dos puntos y dibujar la línea recta a través de estos puntos debido a que a través de dos puntos, pasa sólo una línea recta. Entonces, para el segmento es suficiente construir dos puntos pero estos puntos, no deben ser cualesquiera sino, sus puntos-límites: inicial y final del segmento.

6. **Nombrar los conocimientos, con cuya ayuda se puede garantizar las características de la figura que se busca, requeridos en las condiciones del problema.**

7. **Establecer el carácter suficiente o no suficiente de las condiciones dadas para la construcción de la figura que se busca (en el problema dado se recomienda unir estos dos componentes).**

   Maestro: ¿En el problema dado, nosotros tenemos o no todos los datos necesarios para la construcción del segmento igual al segmento dado?

   Alumno: Se nos da la parte de la recta, porque se nos da la semi-recta OC, que constituye la parte de la recta y tiene un punto-límite O. Así, se puede construir uno de los puntos del segmento que se busca, porque, de acuerdo a la condición, el segmento debe de iniciarse en el punto inicial de la semi-recta. Ahora nos queda encontrar el medio para la construcción del segundo punto-límite del segmento que se busca.

8. **Establecer detrás de qué conocimientos pueden "ocultarse" aquellos que son necesarios para la construcción del segmento que se busca.**

   Maestro: ¿Qué condición del problema "ayuda" para encontrar el medio para la construcción del segundo punto-límite?

Alumno: La condición que dice que el segmento que se busca debe de ser igual al segmento dado.

9. Elegir los conocimientos que serán utilizados para la construcción de la figura que se busca y explicar dicha elección.

Maestro: ¿Qué significa que un segmento es igual al otro?

Alumno: Esto significa que estos segmentos tienen longitudes iguales, que éstos coinciden en caso de sobreponerlos.

Maestro: ¿Cómo podemos verificar que dos segmentos tienen longitudes iguales?, ¿con ayuda de qué instrumento podemos demostrar esto?

Alumno: Con ayuda del compás.

Maestro: ¿Por qué no podemos utilizar la regla?

Alumno: Como usted ya nos explicó, la regla se utiliza para la resolución de diferentes problemas. Por ejemplo, con ayuda de la regla se pueden dibujar líneas rectas y quebradas, construir triángulos, cuadriláteros y otras figuras geométricas que consisten de segmentos. Por otra parte, si la regla tiene medidas de longitud, con su ayuda se pueden medir los segmentos. En los problemas sobre construcción, nosotros utilizamos la regla sin divisiones de escala, es decir, con ayuda de esta regla se pueden sólo dibujar líneas rectas pero, no medir nada. Por eso para la construcción de segmentos iguales se utiliza el compás.

Maestro: ¿Por qué precisamente el compás?

Alumno: Porque con ayuda del compás nosotros podemos construir la circunferencia o una de sus partes, un arco.

Maestro: ¿Qué característica de la circunferencia ayuda para encontrar la posición del segundo punto límite del segmento que se busca?

Alumno: Sólo en esta figura, todos los puntos se encuentran en la misma distancia del centro. Por eso, si nosotros dibujamos la circunferencia con el centro en el punto O y con el radio AB sobre la semi-recta OC, entonces obtenemos el segundo punto-límite.

Maestro: ¿Cómo consideran ustedes qué figura es mejor utilizar en el problema dado, durante la construcción de segmentos iguales: circunferencia o el arco?

Alumno: Debido a que la semi-recta en este problema no tiene ninguna posición obligatoria, ésta puede tener posiciones diferentes: orientarse hacia arriba, abajo, a la izquierda o a la derecha. Es por eso que, en este problema, para identificar los segmentos iguales sin depender de la posición de la semi-recta, es necesario dibujar la circunferencia para considerar diferentes posiciones posibles de la semi-recta. Si tuviéramos la posición estrictamente determinada de la semi-recta, sería suficiente dibujar la parte de esta circunferencia, el arco, que se cruzaría con la semi-recta dada. Desde luego, en aquél caso nosotros también podríamos dibujar la circunferencia pero, construimos el arco con el objetivo de no hacer abundante el dibujo.

10. Establecer la posibilidad para la construcción de la figura que se busca según las condiciones del problema.

Maestro: ¿Siempre (o no) se puede dibujar un segmento igual al segmento dado, partiendo de las condiciones del problema dado?

Alumno: La construcción siempre es posible.

11. Elegir el medio de la construcción de cada uno de los puntos determinantes de la figura que se busca.

Maestro: Así, ¿qué medio para la construcción de los puntos (el cruce de la recta y recta, de la recta y semi-recta o de dos semi-rectas) de los conocidos por ustedes, se elige para la construcción del segundo punto límite del segmento que se busca?

Alumno: El segundo punto límite se encuentra a través del cruce de la semi-recta OC (recta) con la circunferencia.

Maestro: Es correcto. Ejecuten y describan la tarea.
12. Construir cada uno de los puntos determinantes de la figura que se busca y, de acuerdo a ellos, la figura en general.

Alumno: 1) Medimos la longitud del segmento dado AB con el compás. El compás determina los puntos-límites del segmento que se busca. 2) Colocamos el compás sobre el punto O, debido a que en las condiciones del problema se dice que, el segmento que se busca debe de construirse desde el inicio de la semi-recta dada OC. 3) Construimos la circunferencia con el centro en el punto O y con el radio igual a la longitud del segmento dado AB. 4) El punto del cruce de la circunferencia con la semi-recta se determina como D. El segmento OD es el que estábamos buscando.

13. Demostrar que la figura construida satisface a las condiciones del problema

Maestro: ¿Por qué precisamente el segmento OD es la figura geométrica la cual tuvimos que construir?

Alumno: Figura OD será el segmento que estábamos buscando porque a) es la parte de la semi-recta con dos puntos límites O y D y b) la longitud del segmento OD es igual a la longitud del segmento dado AB.

Maestro: Es correcto. Se concluyó la resolución del problema.
Pondremos otro ejemplo de la solución del problema sobre construcción con el método general.

PROBLEMA: Construir la bisectriz del ángulo dado

En el manual de geometría la solución del problema dado se representa en el tipo siguiente (1, pag. 44-45).

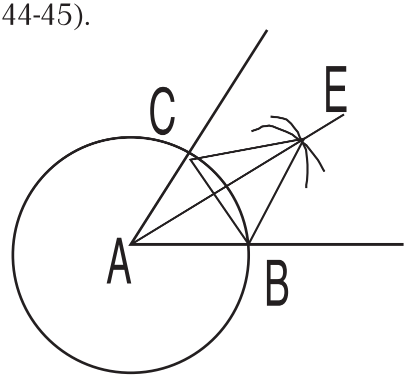


Figura 6

“Dibujaremos la circunferencia con el radio indeterminado, con el centro en el vértice A del ángulo dado. Ésta se cruza con los lados del ángulo en los puntos B y C (Figura 6). Después, dibujaremos dos circunferencias con el mismo radio BC, con el centro en los puntos B y C (en el dibujo se representan sólo partes de estas circunferencias). Éstas se cruzan en dos puntos. Aquel punto que se encuentra dentro del ángulo BAC se determinará con la letra E. Demostraremos que la semi-recta AE es la bisectriz del ángulo dado.

Consideraremos triángulos ACE y ABE. Estos son iguales según sus tres lados. En realidad, AE es el lado común; AC=AB como radios de la misma circunferencia; CE=BE según la construcción. De la igualdad de triángulos ACE y ABE se deduce que el ángulo CAE es igual al ángulo BAE, es decir, la semi-recta AE es la bisectriz del ángulo dado”.

Sin dirigir la atención al análisis de la vía propuesta de la enseñanza del problema considerado, mostraremos cuál será la secuencia de su resolución, durante la utilización del método general (señalaremos únicamente los números de los componentes del método y su realización).

1. Se da el ángulo BAC

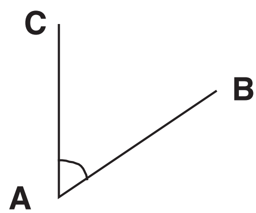


Figura 7

2. Hay que construir la bisectriz.

3. La bisectriz del ángulo dado BAC.

4. La bisectriz es:
a) semi-recta dibujada desde el vértice del ángulo, y
b) que lo divide en dos ángulos iguales.

5. La bisectriz como la figura geométrica tiene dos puntos determinantes: un punto es el vértice del ángulo, otro es cualquier punto dentro del ángulo sobre la semi-recta que salga de su vértice.

6. De la definición de la bisectriz se deduce que, para la construcción de la bisectriz es necesario construir dos ángulos iguales que tengan el vértice común y el lado común.

1) Dos ángulos se llaman iguales si ellos coinciden en caso de sobreponerlos.
2) En los triángulos iguales contra sus lados iguales se encuentran los ángulos iguales.
3) Características de la igualdad de triángulos:
   a) Si dos lados y el ángulo entre ellos de un triángulo son iguales a los lados y, al ángulo correspondiente del otro triángulo, entonces estos triángulos son iguales.
   b) Si el lado y dos ángulos suplementarios a este lado de un triángulo son iguales al lado y, a los ángulos correspondientes del otro triángulo, entonces, estos triángulos son iguales.
   c) Si tres lados de un triángulo son iguales a tres lados correspondientes del otro triángulo, entonces, estos triángulos son iguales.

7. No es suficiente, debido a que la información necesaria para la ejecución de la construcción no se presenta en su tipo claro.

8; 9. Para la construcción utilizaremos los conocimientos 6.2 y 6.3 c) porque, durante la comparación de las condiciones de los problemas con las características de la figura que se tiene que construir, los conocimientos identificados ayudan ha encontrar la vía para la resolución, a través de la construcción de triángulos iguales según tres lados con un lado común y con un vértice común.

Elegimos la tercera característica de la igualdad de triángulos, porque su realización presupone la construcción de los segmentos iguales correspondientes. El medio de la construcción de los segmentos iguales se aprendió anteriormente.

10. La construcción es posible de acuerdo a los datos de las condiciones del problema. Durante la resolución del problema dado pueden ser utilizados los conocimientos sobre la construcción de los segmentos iguales.

11. Para la construcción de los puntos determinantes como de figuras geométricas, se utilizan los medios del cruce de la recta con la circunferencia y de dos circunferencias.

12. Para la construcción de dos ángulos iguales con el vértice común, y el lado común, es necesario construir dos triángulos iguales con el lado común y con el vértice común, en cuya estructura participen estos dos ángulos. Debido a que los tamaños de los lados de estos triángulos no se dan, se pueden elegir de manera involuntaria. Realizaremos la construcción de la manera siguiente:

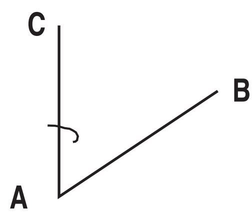


Figura 8

1) Construiremos dos segmentos iguales AM y AE en los lados AC y AB del ángulo dado BAC partiéndose del vértice A. Para ello dibujamos la circunferencia con el radio indeterminado, con el centro en el punto A (Figura 8).

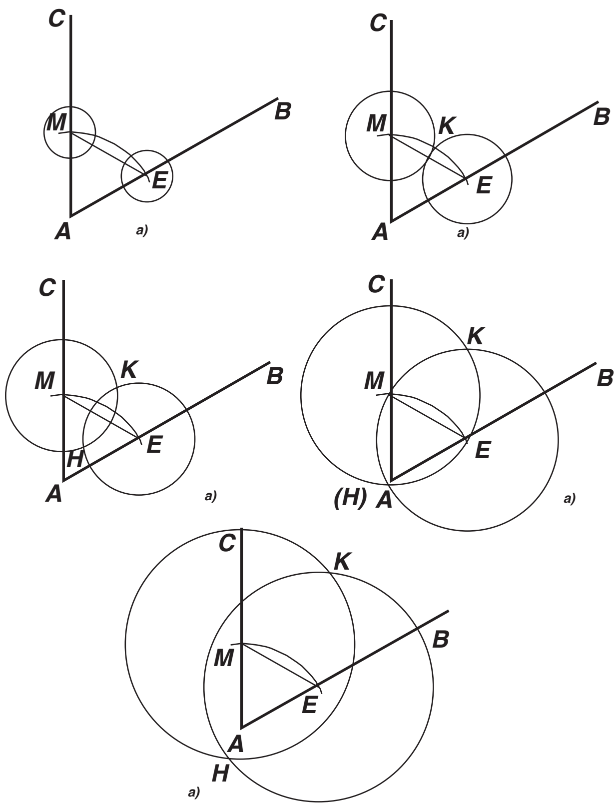


Figura 9

De esta manera, obtuvimos pares de lados iguales correspondientes de los triángulos que estamos construyendo, y así, determinamos la posición de dos vértices de cada triángulo: A y M, A y E.

2) Para la obtención de un par más de lados iguales correspondientes y para la determinación de la posición del tercer vértice de triángulos, nosotros tenemos que dibujar dos segmentos iguales de los puntos M y E.

Para ello, dibujamos dos circunferencias con centros en puntos M y E, con los radios indeterminados. El establecimiento de la posición del tercer vértice de los triángulos que se construyen, depende de las posiciones mutuas de las circunferencias dibujadas que se determinan a través del radio elegido.

Si los radios son menores que la mitad del segmento ME, entonces, las circunferencias no se cruzarán una con la otra y la construcción será imposible, (Figura 9, a).

Si el radio es igual a la mitad del segmento ME, entonces, dos circunferencias serán tangentes una para la otra (Figura 9, b). El punto de su cruce será el tercer vértice de los triángulos que se construyen.

Si el radio es mayor que la mitad del segmento ME, pero menor que AM=AE, entonces las circunferencias se cruzarán en dos puntos K y H, que se encuentran dentro del ángulo CAB (Figura 9, c). Cualesquiera de éstos dos puntos pueden ser elegidos como el vértice de los triángulos que se construyen. La solución del problema es posible.

Si el radio de las circunferencias es igual a AM=AE, entonces, las circunferencias se cruzarán en dos puntos K y H además, el punto K se encuentra dentro del ángulo CAB, mientras que el punto H coincide con el vértice A del ángulo CAB (Figura 9, d). El tercer vértice del triángulo será el punto K. La solución del problema es posible.

Y, finalmente, si el radio de las circunferencias es mayor que AM=AE, entonces, las circunferencias se cruzarán en dos puntos K y H, además, el punto K se encuentra dentro del ángulo CAB mientras que, el punto H fuera de este ángulo (Figura 9, e). Retomamos el punto K como el tercer vértice de los triángulos que se construyen, ya que, de acuerdo a la definición, la bisectriz del ángulo tiene que encontrarse fuera del ángulo dado. La solución del problema es posible.

De esta forma, para la construcción del segundo par de los lados iguales correspondientes de triángulos y, para la definición de la posición de su tercer vértice, es posible la utilización de diferentes variantes. Elegimos la última variante (Figura 9, e).

3) En correspondencia con la variante elegida construimos MK=EK (Figura 10).

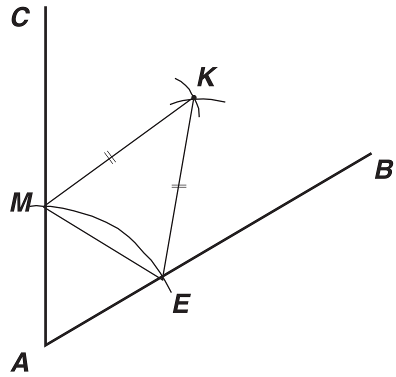


Figura 10

4) Dibujamos la semi-recta AK del vértice A través del punto K (Figura 11).

De esta forma, hemos construido dos triángulos iguales MAK y KAE con el vértice común A y con el lado común AK. Consecuentemente, el ángulo MAK es igual al ángulo KAE como ángulos que se encuentran contra los lados iguales. Entonces, AK es la bisectriz del ángulo CAB.

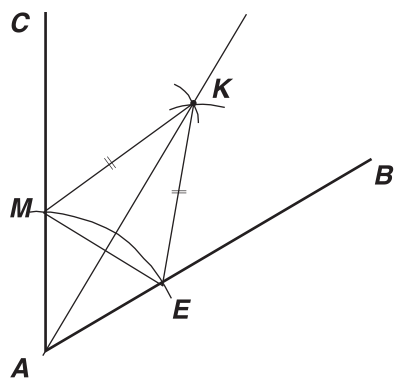


Figura 11

13. La figura construida AK será la figura que estábamos buscando, es decir, la bisectriz del ángulo dado CAB debido a que: a) esto es la semi-recta AK que sale del vértice del ángulo CAB y b) esta semi-recta divide el ángulo CAB en dos ángulos iguales.

La asimilación de la habilidad para construir la bisectriz del ángulo dado descubre, ante los alumnos, la posibilidad para solución independiente de los siguientes problemas sobre construcción: construir el ángulo recto; dibujar la perpendicular para la recta a través del punto dado. En realidad, desde un punto de vista, el medio de la construcción de la bisectriz del ángulo no depende del tamaño de este ángulo, éste es útil para cualquier tipo de ángulos, entre ellos, para el ángulo llano. Desde otro punto de vista, la perpendicular para la recta se llama semi-recta, dibujada del punto de la recta y que forma ángulos rectos, es decir, forma ángulos que se igualan a la mitad del ángulo llano.

En relación con esto, durante la construcción de la bisectriz del ángulo dado sería útil proponerles a los escolares, el trabajo con ángulos de diferentes tamaños. Esto podría garantizar la generalización del método aprendido, el establecimiento de relaciones entre diferentes problemas sobre construcciones que, según sus formulaciones, no coinciden con el problema de partida, pero que tengan la misma vía de su resolución.

De esta forma como muestran los ejemplos proporcionados anteriormente, la utilización del método general para la solución del problema sobre construcción, permite enseñarles a los escolares realizar el análisis de las condiciones del problema, identificar los conocimientos necesarios para la construcción de la figura que se busca, elegir el medio racional para la construcción de cada uno de los puntos determinantes de la figura en general, demostrar que la vía elegida de la resolución es la correcta.

Con ejemplos de varios problemas el maestro puede explicarles, a los alumnos, el contenido del método general, el significado de cada uno de los componentes y el procedimiento de la utilización del método. Después, se puede organizar la asimilación del contenido de este método en correspondencia con los principios de la teoría de la actividad de la enseñanza (4, 14).

La asimilación del método general de la resolución de problemas sobre construcción, garantiza, por parte de los alumnos, la búsqueda independiente, razonable y consciente del medio para la construcción de figuras geométricas.

LITERATURA

Atanacian L.S., Butuzov V.F., Kadomtsev S.B., Pozniak E.G., Yudina N.I. Geometría. Manual para los grados 7-8 de la escuela media. Moscú., Educación, 1990.

Boltiansky V.G. Análisis - la búsqueda de la solución del problema. Matemáticas en la escuela. 1974. No. 1.

Bozhenkova L.I. Aproximación algorítmica a los problemas sobre la construcción a través del método de semejanza. Matemáticas en la escuela, 1991. No. 2.

Galperin P. Ya. Los métodos para la enseñanza y el desarrollo intelectual del niño. Moscú, Editorial de la Universidad Estatal de Moscú, 1985.

– Construcciones geométricas: Trabajos didácticos, Moscú, 1987.

Yepisheva O.B., Krupich V.I. Enseñarles a los escolares a aprender las matemáticas. Moscú, 1990.

Kramor V.S. Sobre el perfeccionamiento de los métodos para la enseñanza de las matemáticas, Moscú. Educación, 1989.

Mejtiyev M.G. Problemas sobre la construcción con regla y compás. Parte I. Majachkala. Daguchpedguiz, 1990.

Pogorelov A.V. Geometría: Manual para los grados 7-11 de la escuela media. Moscú, Educación, 1990.

– Las construcciones y las transformaciones en el curso de geometría en la escuela media. Manual didáctico para las facultades de matemáticas y física de las universidades pedagógicas. Syktyvkar, Komi GPI, 1992.

– El programa de la escuela media. Matemáticas. Moscú. Educación, 1991.

RYZHIK V.I. El sistema de problemas del curso escolar de geometría. Trabajo de tesis para defender el grado de doctor en ciencias pedagógicas. Sankt-Petersburgo, 1993.

STAROVOYTOVA T.S., SHLIAJTER G.E. Los conocimientos preparados para su utilización. Matemáticas en la escuela. 1990. No. 3.

TALYZINA N.F. La dirección del proceso de la asimilación de conocimientos. Moscú. Editorial de la Universidad Estatal de Moscú, 1984.

CHERNYJ L.A. Utilización del pizarrón escolar durante las secciones de geometría. Matemáticas en la escuela. Moscú, 1989. No. 2.

CHISTIAKOVA L.S. Los medios de la formación de las habilidades prácticas y de los hábitos durante el estudio de la geometría. Matemáticas en la escuela. Moscú. 1987. No. 4.

Por acuerdo del señor Rector
de la Universidad Autónoma de San Luis Potosí,
Ing. Jaime Valle Méndez,
el libro La Formación de las Habilidades del
Pensamiento Matemático,
se terminó de imprimir el 15 de mayo
de 2001 en los Talleres Gráficos de la
Editorial Universitaria Potosina.
La edición estuvo al cuidado de
José de Jesús Rivera Espinosa,
se imprimieron 1000 ejemplares.

Editorial
Universitaria
Potosina

Diseño: Comunicación Gráfica•UASLP