MAPAS HÍBRIDOS
en la enseñanza de las matemáticas

Nehemías Moreno Martínez
Rita Guadalupe Angulo Villanueva
Edgar Alfonso Pérez García
Soraida Cristina Zúñiga Martínez

UASLP

MAPAS HÍBRIDOS

en la enseñanza de las matemáticas

MAPAS HÍBRIDOS

en la enseñanza de las matemáticas

Nehemías Moreno Martínez
Rita Guadalupe Angulo Villanueva
Edgar Alfonso Pérez García
Soraida Cristina Zúñiga Martínez

Dr. Alejandro Javier Zermeño Guerra
Rector UASLP

M. en D. Federico Arturo Garza Herrera
Secretario General UASLP

Lic. Patricia Flores Blavier
Directora de Fomento Editorial y Publicaciones

Nehemías Moreno Martínez, Facultad de Ciencias
Rita Guadalupe Angulo Villanueva, Facultad de Ciencias
Edgar Alfonso Pérez García, Facultad de Ciencias
Soraida Cristina Zúñiga Martínez, Departamento de Físico-Matemáticas
Autores

Edición a cargo de la Dirección de Fomento Editorial y Publicaciones

Primera edición impresa
ISBN: 978-607-535-365-4

Primera edición digital
ISBN: 978-607-535-366-1

Impreso en México
Esta obra, “Mapas Híbridos en la enseñanza de las matemáticas”, se realizó previo estricto proceso de revisión y dictamen de pares por el proceso de doble ciego a cargo de la Editorial Universitaria de la Universidad Autónoma de San Luis Potosí. La edición de este ejemplar ha buscado garantizar la calidad y el rigor científico y/o académico. La Universidad Autónoma de San Luis Potosí tiene autorización de derechos para esta edición. Las imágenes que se incluyen en esta obra cumplen con los derechos de autoría.

ÍNDICE

CAPÍTULO 4

DESCRIPCIÓN DE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS MEDIANTE MAPAS HÍBRIDOS

INTRODUCCIÓN

Este libro trata sobre el Mapa Conceptual Híbrido o Mapa Híbrido (MH), el cual es una técnica de representación poco o escasamente conocida en el contexto escolar. Cabe señalar que esta técnica comparte un aire de familia con el Mapa Conceptual (MC), la cual es una técnica muy conocida y empleada en los distintos niveles educativos. A lo largo del tiempo, las distintas aplicaciones del MC en diferentes contextos (industria, computación, medicina, entre otros) han dado lugar a la hibridación del MC con otras técnicas de representación, por ejemplo, el MH resulta de la hibridación del MC con la técnica del Diagrama de Flujo (DF), esta última ampliamente usada en ingeniería y computación.

A diferencia del MC, el MH es una técnica de gran utilidad para la enseñanza y aprendizaje de las ciencias mediante la resolución de problemas. Mientras que el MC permite representar la organización conceptual de un tema o concepto focal, el MH permite representar de manera gráfica las componentes conceptuales y procedimentales de la actividad matemática implicada en la resolución de problemas netamente matemáticos, en este sentido, también resulta útil en la descripción de la resolución de problemas en otros contextos tales como el de la física y la química escolar.

Esta obra presenta la técnica de representación del MH, su interpretación desde una teoría proveniente del campo de la Matemática Educativa y algunas de sus aplicaciones en la enseñanza y a prendizaje de las matemáticas escolares. Se describe al MH como una herramienta para los alumnos desde el nivel educativo básico, primaria, y hasta el nivel superior en el estudio de las matemáticas. Se trata de una ayuda para la comprensión de los contenidos matemáticos mediante la resolución de problemas, ya que el MH puede ser empleado como una guía para el alumno al mostrarle las diferentes etapas del proceso de resolución del problema, los diferentes objetos y las conexiones entre estos, los cuales se establecen al resolver un problema matemático.

También se describe al MH como un instrumento para el docente en la enseñanza de los contenidos matemáticos. Desde la perspectiva docente, se aborda al MH como un objeto sobre el cual reflexionar acerca de su práctica docente antes y después de su intervención en el aula, el cual le permitirá conocer los aprendizajes logrados, las dificultades de los estudiantes, los significados construidos, entre otros. También se aborda al MH como una herramienta de investigación para el docente o investigador en Matemática Educativa, para indagar las concepciones o significados de los estudiantes acerca de determinados conceptos. El empleo del MH en los contextos de la física y la química escolar queda fuera del alcance de esta obra.

En el capítulo 1 de este libro, se parte de la descripción de la técnica de representación del MH, los tipos de MH que pueden elaborarse y las características de las aplicaciones informáticas que pueden emplearse en su construcción, posteriormente, en el capítulo 2, se aborda una interpretación teórica del MH y, siguiendo dicha teoría, se describe una metodología que permite la construcción de los MH. En el capítulo 3 se describen algunas aplicaciones para la enseñanza de las matemáticas, en este sentido, este libro aporta a los docentes de matemáticas un instrumento que puede ser implementado en el aula como material didáctico o bien empleado como objeto de reflexión de su práctica docente, en la indagación de los significados que ponen en juego los estudiantes al resolver problemas matemáticos, en la identificación de las dificultades de aprendizaje e inclusive en la evaluación de los aprendizajes.

Por último, en el capítulo 4, los estudiantes interesados en emplear el MH como técnica de estudio o aquellos profesores que pretendan emplear el MH en su práctica docente podrán ser capaces de construir sus propios MH a partir de los ejemplos de MH que se presentan en este capítulo, los cuales describen la resolución de problemas que se abordan desde el nivel educativo básico, primaria, y hasta el nivel superior o universitario. El abordaje de los contenidos matemáticos mediante la descripción de la resolución de problemas empleando el MH no pretende ser exhaustivo, sino más bien, se trata solo de ejemplos donde se busca mostrar que el MH puede ser empleado como una ayuda en el estudio de cualquier contenido matemático independientemente del nivel educativo que se trate.

Capítulo 1

EL MAPA HÍBRIDO

1.1 Introducción

El Mapa Híbrido (MH) es una técnica de representación gráfica que permite describir esquemáticamente la práctica de resolución de problemas matemáticos. En la práctica de resolución de un problema matemático intervienen elementos conceptuales y procedimentales, por lo que la representación gráfica de dicha práctica es capturada de manera adecuada mediante el MH, la cual presenta de manera combinada una componente de Mapa Conceptual (MC), que permite representar los elementos conceptuales, y una componente de Diagrama de Flujo (DdF), que permite representar los aspectos procedimentales.

Para el lector que no se encuentra familiarizado con la técnica del MC, en la sección 1.2 se describe en un primer momento al MC y algunos ejemplos, luego en la sección 1.3 se discute acerca de la noción de representación que sustenta a la técnica del MH. En la sección 1.4 se explica la técnica del DdF, su simbología y, a modo de ejemplo, se describe el procedimiento que se emplea regularmente para resolver ecuaciones cuadráticas. Posteriormente, en la sección 1.5 se presenta la técnica del MH y se discuten las diferentes maneras en las que puede ser construido. Se discute en la sección 1.6 acerca de la construcción del MH mediante el empleo de aplicaciones informáticas y, finalmente, en la sección 1.7 se presentan algunas reflexiones respecto al uso de la técnica del MH en el aula y en la investigación.

1.2 El mapa conceptual

La técnica del Mapa Conceptual (MC) fue desarrollada en 1972 por Joseph D. Novak en la Universidad de Cornell (Estados Unidos), en el marco de un proyecto de investigación donde se estudiaba la influencia que tiene la enseñanza de conceptos básicos de ciencias en el nivel básico sobre el aprendizaje posterior de las ciencias (Novak y Cañas, 2006).

El MC es una herramienta gráfica que permite representar de manera organizada el conocimiento. En su aspecto, el MC puede presentar de manera jerárquica (aunque no necesariamente) los conceptos, los cuales se encuentran encerrados en recuadros u óvalos relacionados mediante líneas conectoras y palabras o frases enlace (Cañas y Novak, 2009).

Los ***conceptos*** en el MC son entendidos como ideas categóricas o unidades genéricas representadas por símbolos únicos (Moreira, 2010), en otras palabras, son considerados como regularidades que se perciben en eventos u objetos, o registros de eventos u objetos, designados por una etiqueta (Cañas y Novak, 2009). Por ejemplo, un sujeto pudo haber construido el ***concepto de silla*** a partir de la identificación de regularidades en distintos eventos, logrando la idea general de que la silla sirve como asiento para las personas, aunque en distintos lugares (restaurantes, cafeterías, hospitales, por mencionar algunos) estas pueden estar construidas de distintos materiales (plástico, madera, hierro, entre otros materiales), pueden tener o no respaldo y pueden tener una, dos, tres o cuatro patas.

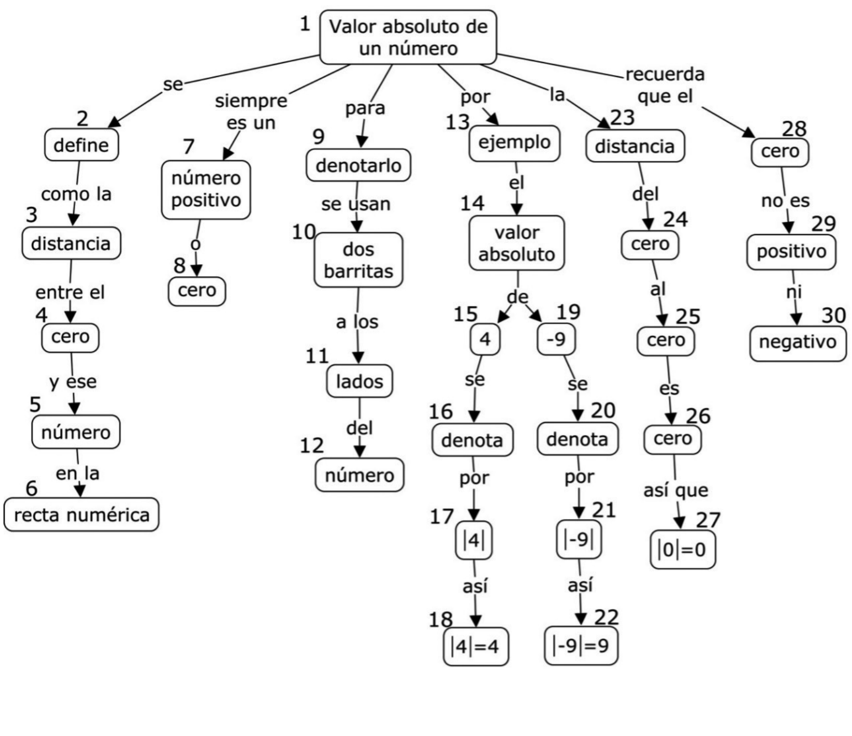
Cabe destacar que los conceptos son abstracciones y no tienen existencia real en el mundo físico o material, sin embargo, pueden ser construidos, percibidos, entendidos y manipulados. Una manera de percibirlos en matemáticas es a través de símbolos o etiquetas tales como las palabras, conjuntos de palabras o símbolos como "$+$", "∞", "$f(x)$", por mencionar algunos.

El MC puede ser empleado para apoyar la enseñanza de diversas asignaturas escolares, por ejemplo, de matemáticas, física, química, biología, historia, anatomía, por mencionar algunas. La Figura 1.1 muestra un ejemplo de MC que fue elaborado a partir del texto que presenta un libro de matemáticas de primer grado de secundaria (Bosch, Meda y Gómez, 2018) donde se aborda el concepto de valor absoluto. El MC fue elaborado a partir de la lectura del texto y la identificación de los conceptos más relevantes.

El MC muestra los conceptos en recuadros y numerados del (1) al (30) para fines de lectura y descripción. El MC inicia con el concepto focal o foco "Valor absoluto de un número" numerado mediante (1).

Por otra parte, el MC representa proposiciones, las cuales pueden ser verdaderas o falsas, y que se forman a partir de la conexión de los conceptos mediante las palabras o frases de enlace. En este sentido, la proposición más simple es aquella que se puede formar a partir de la conexión de dos conceptos, por ejemplo, en la figura 1.1 la conexión del concepto (1) con el concepto (7) mediante la frase de enlace "siempre es un", proposición (1)-(7) por brevedad, forman la proposición simple el "Valor absoluto de un número siempre es un número positivo".

Figura 1.1. MC del concepto de valor absoluto, elaborado mediante *CmapTools* a partir de Bosch, Meda y Gómez (2018, p. 46).



En el MC a las proposiciones también se les conoce como rutas de lectura, de esta manera, en el MC la lectura de las distintas rutas está guiada por la numeración y las flechas "→". Cabe señalar que en algunos mapas no se muestran flechas ni numeraciones, siempre y cuando la lectura del MC no de lugar a ambigüedades.

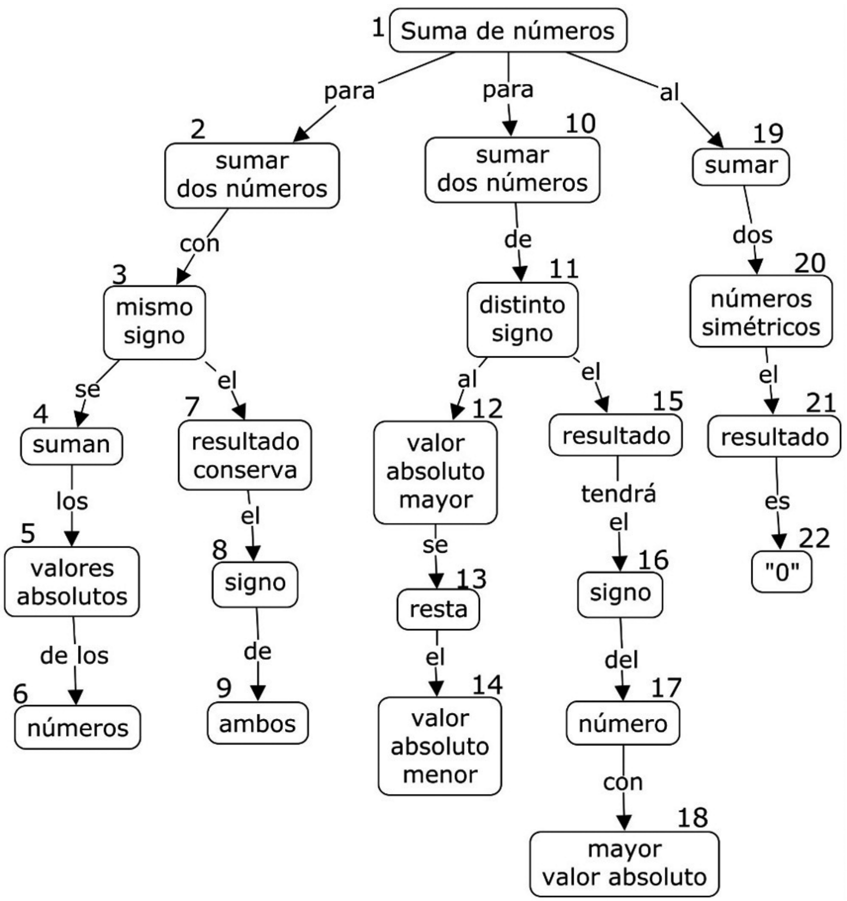
En el MC de la figura 1.1 es posible advertir varias rutas de lectura, por ejemplo, la ruta (1)-(2)-(3)-(4)-(5)-(6), o bien (1)-…-(6) por brevedad, representa la proposición el “Valor absoluto de un número se define como la distancia entre el cero y ese número en la recta numérica”; la ruta (1)-(7)-(8), representa el “Valor absoluto de un número siempre es un número positivo o cero”; la ruta (1)-(9)…-(12), representa el “Valor absoluto de un número para denotarlo se usan dos barritas a los lados del número”.

Es importante señalar que cuando el MC se emplea en el contexto de las matemáticas escolares, las proposiciones, que pueden indicar definiciones, los argumentos (validativos o justificativos) o las propiedades (atributos), pueden ser representados en el MC mediante una sola palabra, una ruta de lectura, símbolos o expresiones algebraicas, por ejemplo, el concepto representado mediante la ruta (1)-(13)-…(17) puede ser representado únicamente mediante (18), lo mismo ocurre para los conceptos (1)-(13)-…-(21) y (1)-(23)-…-(26), pueden ser representados únicamente mediante (22) y (27) respectivamente.

Pero, ¿cuál es el significado del concepto focal del MC de la figura 1.1?, para responder a esta pregunta es necesario considerar que el significado de (1) no es la palabra o frase que lo denota, más bien el significado se configura a partir de las diferentes rutas de lectura representadas en el MC. Por decirlo en otras palabras, en el MC de la figura 1.1 el concepto focal (1) puede ser pensado como un objeto que se encuentra en una perspectiva o faceta unitaria (objeto concreto) y, en el MC, el significado de (1) puede ser entendido desde una perspectiva sistémica en el que las diferentes rutas de lectura son las partes o elementos que constituyen dicho sistema.

Desde la perspectiva unitaria, el concepto (1) de la figura 1.1 puede ser empleado en otros mapas para configurar el significado de otros conceptos focales. Por ejemplo, en la figura 1.2 se ilustra un MC más general que tiene como concepto focal la “Suma de números”. El MC de la figura 1.2 representa a (1) de la figura 1.1 mediante (5), (12), (14) y (18), es decir, el significado del concepto focal (1) de la figura 1.2 se apoya en la perspectiva unitaria de (1) de la figura 1.1, por lo que para comprender en qué consiste la suma de números necesariamente se debe conocer también el significado de (1) que fue representado mediante el MC de la figura 1.1. Esta misma situación se presenta con el concepto (20) de la figura 1.2, ya que el MC adquirirá sentido siempre y cuando se conozca también el significado de (20).

Figura 1.2. MC de la suma de números, elaborado mediante *CmapTools* a partir de Bosch, Meda y Gómez (2018, p. 51).



Es importante señalar que, para un determinado tema o concepto focal, el MC no es único, por ejemplo, en el MC de la figura 1.2 aún es posible agregar otros conceptos, a saber, agregando ejemplos de la suma de dos números tanto del mismo signo como de distinto signo. Sin embargo, el hecho de agregar más conceptos al MC de la figura 1.2 para enriquecerlo va a depender del objetivo o de lo que quiera mostrar el sujeto que elabora el MC.

La importancia del MC en la enseñanza tiene que ver con que permite evidenciar los significados atribuidos a los conceptos y las relaciones entre los conceptos de un cuerpo de conocimiento, de cualquier disciplina, de una asignatura de enseñanza. En otras palabras, si un sujeto, experto o novato, en la construcción de un MC une dos conceptos mediante una línea, este debe ser capaz de explicar el significado de la relación que mira entre esos conceptos (Moreira, 1998).

Por último, cabe agregar que el MC tiene sustento en la Teoría de Aprendizaje Significativo TAS (Ausubel, 1976). Se trata de una teoría cognitiva que señala que las ideas expresadas simbólicamente se relacionan de manera no arbitraria sino substancial con lo que el alumno ya sabe (Moreira, 2012; Escudero, 1995), desde esta perspectiva se genera una nueva estructura cognitiva organizada en función de conceptos e ideas de determinado campo de conocimiento (Rodríguez, 2004).

Debido a que la TAS es una teoría cognitiva que atribuye el aprendizaje únicamente a los procesos mentales, no considera la naturaleza ni la epistemología del conocimiento a ser aprendido. Por ejemplo, considerese el caso de la física y las matemáticas, en el caso de la física se tiene acceso a dichos objetos a través del experimento, de hecho, el experimento es la única manera en cómo se valida el conocimiento, sin embargo, en el caso de las matemáticas se tiene acceso al conocimiento a través del signo, a través de la de la demostración, y no se apoya en la experimentación. En otras palabras, la manera en como se construye y se valida el conocimiento en física es distinto a como se realiza en matemáticas, por lo que en el caso del contexto escolar, no basta considerar los procesos cognitivos en el aprendizaje sino que también es necesario considerar aspectos inherentes a la naturaleza y epistemología del conocimiento que se desea aprender.

Con base en lo anterior, el MC se emplea para representar el conocimiento de los alumnos en el contexto de cualquier asignatura escolar. De esta manera, la TAS señala que la construcción de conocimiento matemático se lleva a cabo del mismo modo, o bajo los mismos procesos, como se construye el conocimiento en la enseñanza de otras asignaturas, por ejemplo de la historia, la geografía, otro idioma como el fránces o inglés, por mencionar algunos, soslayando así la naturaleza epistemológica del objeto a ser aprendido.

Dado que en el contexto escolar, no basta considerar los procesos cognitivos del aprendizaje sino también los aspectos epistémicos de construcción del conocimiento, por lo cual, es necesario considerar una visión más amplia que incluya los procesos de representación del conocimiento, misma que se desarrolla el siguiente apartado.

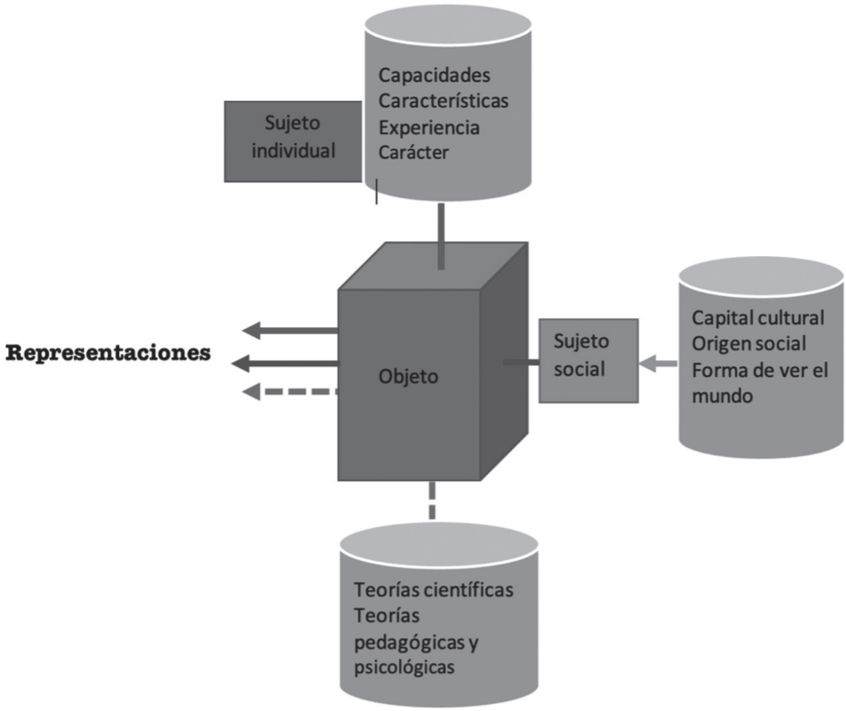
1.3 La representación en la enseñanza de las ciencias

La forma en que los alumnos representan el conocimiento matemático es producto tanto de sus conocimientos previos, como de sus circunstancias personales y aquellas que viven en la escuela. La representación es formular mentalmente una idea, tal formulación se va construyendo poco a poco y en su construcción influyen diversas realidades psicológicas, provenientes del ambiente que rodea a quien representa.

Pensar en la representación como proceso central en la enseñanza conlleva la reflexión tanto sobre los sujetos de la enseñanza y el aprendizaje (alumno y profesor) como sobre el objeto de conocimiento. Se identifican dos dimensiones de análisis, la primera de carácter subjetivo, la segunda de índole objetiva, el conocimiento. En la dimensión subjetiva, se considera a dos sujetos, uno que enseña y el otro que aprende; ambos con procesos personales de representación.

Para analizar la representación se asume una visión psicosocial, de la que deriva lo que Jodelet (1993) llama una visión ternaria, ver la figura 1.3.

Figura 1.3. Visión ternaria de las realidades psicológicas. Fuente: elaboración propia con base en Jodelet (1993).



La interpretación ternaria implica concebir a los hechos psicológicos (como la representación) en tres dimensiones, ver la figura 1.4.

Figura 1.4. Dimensiones de la relación sujeto objeto desde una visión ternaria. Fuente: elaboración propia.

sujeto individual – sujeto social – objeto externo

En esta articulación, la representación se produce a partir de la relación entre el sujeto individual (alumno o profesor), el sujeto social (el tipo de profesor y el tipo de alumno que la sociedad exige) y el objeto en sí (los conocimientos de las ciencias incluido el conocimiento didáctico), ver figura 1.3.

Como se aprecia en la figura 1.4 el sujeto posee características específicas biológicas y psíquicas que lo influyen para construir sus representaciones, el sujeto también pertenece a un grupo social específico, a una familia y un origen que lo condicionan al momento de pensar o expresar sus representaciones. Complejizan esta dinámica los objetos que, según un curriculum formativo, el alumno -y el maestro- deben asimilar, pensar y expresar. Estos objetos son propuestos desde el curriculum pero han sido descontextualizados de las ciencias y recontextualizados por la escuela para constituir las asignaturas, aún más, son reconfigurados por el profesor para proponer una secuencia didáctica.

Figura 1.5. Proceso de representación.
Fuente: (Lundgren, 1991 en Angulo, 2007).

Entonces, pensar la representación es una actividad compleja que debe partir de una visión más amplia como las que consideran solamente la relación entre sujeto y objeto. Esta forma de concebir a la representación implica una representación social.

Las Representaciones Sociales (RS) son una tendencia de pensamiento propia de un grupo como en este caso los docentes y alumnos en interacción. También, las RS son configuraciónes de sentido común.

En el caso de la enseñanza se esperaría que lo que se enseña sea lo más apegado posible al conocimiento científico, no obstante, tal conocimiento antes de llegar a la reflexión de los alumnos pasa por varios tamices. El primero, como se ejemplifica en la figura 1.5, es un recorte y fragmentación de tal conocimiento para adaptarse al formato curricular por materias o asignaturas, o sea, pasa por una selección y reorganización en unidades de aprendizaje. Y, el segundo tamiz conlleva la reconfiguración que el profesor hace de los conocimientos para incluirlos en secuencias didácticas. La consecuencia de estos tamices es que el conocimiento no se enseña tal y como lo plantea la ciencia sino que es reformulado (descontextualización, recontextualización y reconfiguración) para presentarse a los alumnos.

Durante el aprendizaje ocurre el proceso de representación, ver la figura 1.3, en la mente de los alumnos y ahí, nuevamente, el conocimiento es aprendido bajo una visión ternaria.

La representación, concebida desde una visión ternaria exige de un andamiaje (Bruner, 1978) que posibilite el desarrollo de la Zona de Desarrollo Próximo (Vigotsky, 1978) en los estudiantes. Tal andamiaje tiene que ver con el proceso de control por parte del profesor de los elementos de la tarea que permiten el desarrollo de la capacidad autorreguladora de los estudiantes (López y Hederich, 2010). En este libro se proponen estrategias que permiten desarrollar visual y discursivamente el proceso de representación que un alumno puede hacer. Tales estrategias se desarrollan a través de la resolución de los problemas que pueden ser representados mediante el MH que se presenta en este libro. También se sugieren secuencias didácticas que insertan el manejo del MH en el desarrollo de un andamiaje necesario y adecuado para los alumnos.

1.3.1 Elementos de la representación

Enseguida presentamos los elementos que integran una representación, tenemos como base el planteamiento de Denise Jodelet (1993, 2000). En cada uno de dichos elementos proponemos ejemplos para la materia de matemáticas, en todos los casos, los elementos de la representación en su conjunto son herramientas de tipo teórico que permiten al profesor analizar los procesos de representación en sus alumnos y, en consecuencia, habilitar prácticas matemáticas concretas que posibiliten la construcción de un concepto o tema.

Según Jodelet (1993) los elementos son imágenes mentales sobre objetos que concentran un conjunto de significados implícitos en los elementos de la representación.

Los elementos de la representación son: a) los objetos, b) sus imágenes mentales, c) sus significados, d) los sistemas de referencia en que se insertan, e) las interpretaciones posibles que dan un sentido. Tales interpretaciones contienen f) categorías para clasificar informaciones o novedades. En conjunto, las categorías constituyen, g) teorías y h) una forma de pensar la realidad, lo que permite, i) fijar una posición. Por último, j) conllevan una forma de conocimiento social (Jodelet, 1993 en Angulo, 2007).

a) Cada objeto científico tiene una especificidad en cuanto a su posibilidad de ser representado, por ejemplo, la biología, la física o la química pueden emplear objetos de la cotidianeidad del alumno para visualizarlos, la matemática depende -más que las otras ciencias- de una abstracción para su visualización y la abstracción solo es posible si la precede una práctica. Es muy importante que se busque partir de objetos o artefactos (Radford, 2013) del entorno para identificar los objetos. Tomemos por caso, un triángulo, habrá que identificar esta figura en los tapones de las ruedas de los coches, en un chocolate con tal forma o en un anuncio o en cualquier otro artefacto del entorno.

b) Las imágenes mentales sobre objetos científicos que un alumno puede construir para sí dependen tanto de sus experiencias y conocimientos previos como de la procedencia del objeto, es decir, de la ciencia o disciplina o subdisciplina de la cual se derivan. Desde el inicio del proceso de aprendizaje es importante que el profesor establezca el sistema de referencia científico (aritmética, geometría, álgebra, etcétera) pero también que identifique y elabore con los alumnos a qué sistemas previos de la vida diaria el alumno asocia la imagen que tiene. Es decir, se requiere que alumnos y maestros expliquen con palabras o con dibujos sus imágenes mentales. De tal forma que se puedan identificar imágenes erróneas y trabajar sobre ellas hasta tener imágenes más aproximadas al conocimiento. En el ejemplo del triángulo, un alumno podría imaginar un corazón al revés o una figura construida con sus dedos.

c) Las imágenes mentales refieren a conjuntos de significados que, en el caso de conocimientos científicos, les llevarán inmediatamente a relacionarlos con objetos de su entorno personal, familiar o social. Dichos significados deben ser explicitados para que posteriormente puedan ser articulados a un significado específicamente científico. En este punto en particular, es deseable que los alumnos verbalicen los significados posibles de un objeto y el profesor señale los significados referidos por el conocimiento específico que se quiere que aprendan. En el caso del triángulo habrá que decir que es una figura que se representa en solo dos dimensiones y que es una figura plana, por ejemplo.

d) Para que un alumno capte los sistemas de referencia a los que pertenece un objeto es necesario diferenciar entre el sistema de referencia científico (geometría, álgebra, cálculo, etcétera) y los sistemas de referencia a los que un alumno asocia el objeto. Por ejemplo, es común que cuando un maestro enseña los números reales se refiera a ellos como "los reales"; un alumno asociará esta idea a la de "realeza" o , si vive cerca de una mina a la idea de "camino real", etcétera. Es necesario que el profesor establezca la diferencia entre los sistemas de referencia (de la vida diaria y de la geometría).

e) Si se ha ubicado al triángulo, para continuar con nuestro ejemplo, en el sistema de referencia "Geometría", la interpretación posible le da un sentido, figura plana frente a otras que no lo son. En este punto del proceso, sería conveniente comentar otros sistemas de referencia, por ejemplo, figuras en la señalética de carreteras o algún otro ejemplo.

f) La ubicación del triángulo como figura plana permitirá entrar a las categorías para clasificar dichas figuras. La inclusión de la categorización y la clasificación es sustancial en matemáticas, en el ejemplo que venimos desplegando podría referirse a tipos de triángulos o a procesos de construcción de triángulo o incluso a procedimientos de cálculo de áreas.

g) El siguiente elemento en la representación, las teorías, podría dar paso a teorías formales procedentes de la disciplina o a teorías hipotéticas formuladas por los niños al respecto, en ambos casos, preparan la representación para una formalización de la misma; su complejidad variará según el nivel educativo en el que se trabaje.

h) La comprensión de teorías (formales o informales) por parte de los estudiantes y su utilización para interpretar lo que se les presenta constituye una forma de pensar la realidad. Cuestión que adquiere especial relevancia en el caso de la educación superior, ya que los triángulos, por ejemplo, refieren a distintas formas de pensar la realidad. Por ejemplo, en los geólogos y geógrafos, los triángulos tienen significados específicos para el manejo de mapas, a diferencia del significado que tendría en una teoría o procedimiento matemático.

i) La comprensión de los alumnos acerca de su pertenencia a una forma de pensar la realidad, entre otras, le permite fijar una posición, es decir, reconocer su pertenencia a un grupo o tendencia que interpreta la realidad desde cierta perspectiva. Sobre este punto en concreto, Radford (2013) considera que el objeto matemático se construye por medio de la objetivación, misma que ocurre en el encuentro con otros cuando se accede al objeto.

Por ejemplo, el alumno que aprende el Teorema de Pitágoras encuentra ahí, en el objeto matemático, a Pitágoras el griego que vivió en el siglo cuarto antes de Cristo o a los otros matemáticos que en la historía han abonado a la construcción del teorema o, incluso, a su enseñanza. Durante el encuentro con los otros, el alumno -de acuerdo con Radford- llega a hacer suyo el conocimiento y a plantear su propia idea sobre ello, es decir, toma posición sobre el objeto.

j) Finalmente, los alumnos se darán cuenta que forman parte de un grupo que trabaja y construye una forma de conocimiento social.

Enseguida se presenta la tabla 1.1 que muestra el ejemplo que hemos desarrollado.

Tabla 1.1. Elementos de la representación desde una visión ternaria.

Objetos	• Triángulo
Imágenes mentales	• En objetos de la vida cotidiana o en geometría
Significados	• Figura plana o figura cualquiera

Sistemas de referencia	•Geometría o Joyería
Interpretaciones	•Figura plana o cuerpo
Categorías	•Tipos de triángulos
Teorías	•Teorías formales o informales
Forma de pensar la realidad	•Desde la geometría o desde la geografía o...
Fijar posición	•Se apropia uno o no del objeto y lo utiliza
Forma de conocimiento social	•Se reconoce como parte de una forma de conocimiento

La visión ternaria de la representación puede observarse con más detalle en los diagramas de Flujo, aunque estos solo reflejan la parte procedimental y no la parte epistémica que sí puede apreciarse en los mapas conceptuales. Este libro presenta más adelante la herramienta de mapas híbridos que incorpora tanto la parte epistémica (de construcción del conocimiento), la parte procedimental (de tal construcción y la parte argumentativa que le confiere a los MH la posibilidad de la reflexión tanto sobre la acción como sobre la reflexión misma. En el siguiente apartado se desarrollan los diagramas de flujo.

1.4 El diagrama de flujo

El Diagrama de Flujo (DdF por brevedad) es una técnica de representación gráfica que tiene múltiples aplicaciones, por ejemplo, ha sido empleado en el diseño e implementación de sistemas de control de calidad para representar los procesos involucrados, las responsabilidades, la organización, los registros de la calidad, acciones preventivas y correctivas (Llera y Martinengo, 2004); en la escuela, se ha empleado como herramienta para mejorar las estrategias de lectura y el diagnóstico de la comprensión lectora (Geva, 1985), para favorecer la comprensión de contenidos matemáticos, ya que permite agilizar la resolución de problemas y mejorar los procesos de razonamiento lógico (Cuásquer-Viveros y Moreno-Cortés, 2021); en medicina, el diagrama de flujo ha sido empleado para describir de manera esquemática el manejo médico de pacientes con ciertas enfermedades

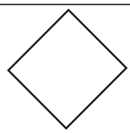
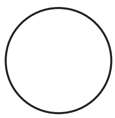
(Baño, 2007), para evaluar la fiabilidad del diagnóstico de enfermedades (Pedreira y González, 2017), en dispositivos médicos para el diseño de algoritmos para el control de procesos, detección de eventos y detección de anomalías cardiacas (Rose, Márquez, Hernández y Serna, 2017); por mencionar algunos ejemplos.

Se trata, pues, de una técnica que permite representar cualquier tipo de proceso o procedimiento. Si bien proceso y procedimiento son parecidos, sin embargo, hay aspectos que permiten diferenciarlos. Mientras que el proceso permite alcanzar un objetivo general a través de la realización de un conjunto actividades coordinadas y conectas, el procedimiento permite lograr el objetivo específico de una actividad en particular mediante una serie de pasos. En la clase de matemáticas, la resolución de un problema matemático implica la realización de un proceso, se trata de un conjunto de actividades interrelacionadas que permiten alcanzar la solución del problema, sin embargo, es importante señalar que lograr el objetivo de cada actividad al interior del proceso implica a su vez realizar un procedimiento. Algunos de estos procedimientos son netamente operativos, donde se llevan a cabo una serie operaciones o cálculos matemáticos, mientras que otros son discursivos, en los que se enuncian una serie de argumentos, pero hay otros que combinan los dos anteriores.

En la construcción de un DdF es posible emplear un conjunto de símbolos, cada uno con un significado específico. Actualmente, estos símbolos están normalizados y son casi universales, lo que permite que el DdF pueda ser leído y entendido por cualquier persona (Cantón, 2010), sin embargo, en principio, cada usuario podría manejar sus propios símbolos o emplear solo algunos de los símbolos normalizados para representar sus propios procesos o procedimientos en forma de DdF.

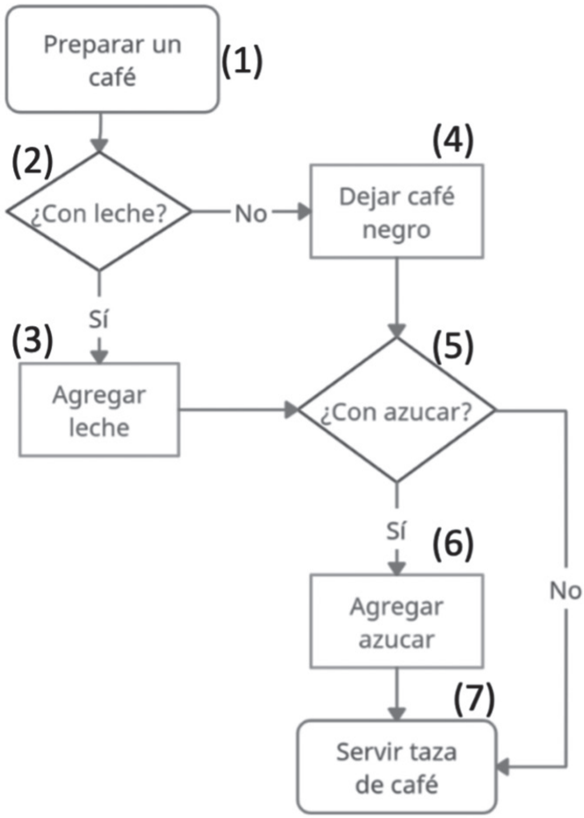
En la construcción de un DdF se pueden emplear diversos símbolos, cada uno de estos símbolos tiene una función distinta en el diagrama. De esta manera se tiene un símbolo para iniciar o finalizar el proceso, otro para realizar una tarea concreta (por ejemplo, la resolución de una operación matemática), también se tiene un símbolo para tomar decisiones, otro de entrada o salida de datos, ver la tabla 1.2.

Tabla 1.2. Algunos símbolos que se emplean para construir un DdF.

Símbolo	Nombre	Significado
	Terminal	Inicio o fin de un proceso
	Decisión	Bifurcación de toma de decisión “sí” o “no”
	Operación	Describe una actividad, cálculo u operación
	Conector	Representa la continuada del diagrama en una misma página
	Línea de flujo	Indica el sentido del flujo del proceso

Una manera adecuada de entender cómo se lleva a cabo la construcción de un DdF es a través de un ejemplo. En las situaciones de la vida cotidiana frecuentemente nos encontramos realizando procesos, en la figura 1.6 se presenta el DdF del proceso de preparación de una taza de café para una persona. Los elementos del DdF se encuentran numerados del (1) al (7), de esta manera la preparación de la taza de café inicia en (1), luego en (2) se pregunta si desea agregar leche al café, si la persona responde que sí, se realiza la tarea de agregar leche mediante (3), si responde que no, se deja el café negro mediante (4); una vez tomada esta decisión, en (5) se le pregunta nuevamente a la persona si el café lo desea con azúcar y, en caso afirmativo, mediante (6) se le agrega azúcar y finalmente en (7) se sirve la taza de café y se da por terminado el proceso, pero en caso contrario, la taza de café únicamente se sirve sin azúcar mediante (7). Es importante señalar aquí que, en la construcción del DdF, es necesario mantener la secuencia lógica y ordenada de acciones.

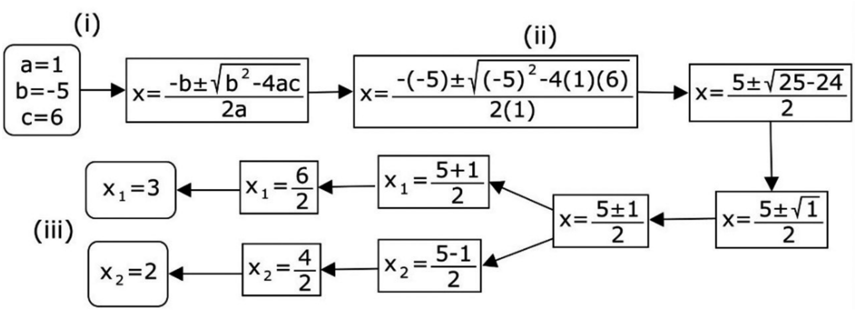
Figura 1.6. Diagrama de flujo para preparar un café.



El conjunto de pasos descritos anteriormente se le conoce como algoritmo, del cual se puede prescindir cuando se ha alcanzado cierta experiencia, por ejemplo, en el caso descrito anteriormente, cuando ya se conocen los gustos específicos de ingesta de café de la persona. Sin embargo, siempre debemos tomarlo en cuenta cuando se desea construir un DdF.

Como se ha mencionado anteriormente, en la construcción de un DdF también pueden emplearse símbolos no estandarizados en casos no ambiguos, es decir, en algunas situaciones conviene emplear una simbología simple y conocida por los sujetos implicados en el estudio del proceso. Por ejemplo, el DdF de la figura 1.7 representa el procedimiento de resolución de la ecuación cuadrática $x^2-5x+6=0$. El procedimiento de resolución inicia con la consideración de tres datos de entrada $a=1$, $b=-5$ y $c=6$, ver la figura 1.7(i), los cuales son los coeficientes constantes de la ecuación. Los datos se sustituyen en la fórmula general, figura 1.7(ii), y luego de realizar las operaciones se obtienen dos soluciones $x_1=3$ y $x_2=2$, figura 1.7(iii). En este diagrama únicamente se manejaron dos símbolos, el rectángulo ovalado para indicar el inicio y fin del proceso y el rectángulo para representar las diferentes operaciones del procedimiento de resolución.

Figura 1.7. Diagrama de flujo que representa el procedimiento de resolución de una ecuación cuadrática.



Tanto el MC como el DdF son técnicas de representación que han sido empleadas en diferentes contextos, en el transcurso del tiempo esto ha llevado a ciertas situaciones donde se ha requerido el uso combinado de dichas técnicas. En la siguiente sección se describe una técnica de representación nueva que resulta al combinar la técnica del MC con el DdF, la cual también se ha empleado en el contexto de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

1.5 El mapa híbrido

El Híbrido de Mapa Conceptual y Diagrama de Flujo, o por brevedad, Mapa Híbrido (MH por brevedad), es una técnica de representación que resulta al combinar el Mapa Conceptual con el Diagrama de Flujo. Debido a que la resolución de problemas matemáticos implica tanto una componente conceptual (conceptos, propiedades y argumentos) como procedimental, es necesario (operaciones, técnicas de cálculo u algoritmos) resulta insuficiente representar esquemáticamente la resolución del problema matemático solo mediante el empleo del MC o solo mediante el DdF, más bien lo que se requiere es emplear una combinación de ambas técnicas. En este sentido, desde una perspectiva instrumental, el MH se convierte en la técnica de representación más idónea para describir la actividad matemática implicada en la resolución de problemas matemáticos, pues posee características tanto de MC como de DdF.

Es importante distinguir en este punto entre técnica y teoría del MH. Al igual que la técnica del MC, que tiene su interpretación teórica o sustento en el marco de la Teoría de Aprendizaje Significativo (TAS) de Ausubel, el MH es una técnica que tiene sustento teórico desde una teoría proveniente del campo de la Matemática Educativa, a saber, el Enfoque Ontosemiótico, EOS (Godino, Batanero y Font, 2007).

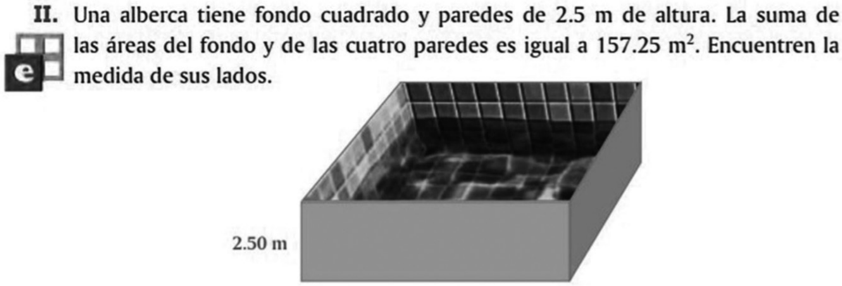
En este apartado únicamente se describirá la técnica y se dejará para el siguiente apartado la interpretación teórica del MH a la luz del EOS. Es importante señalar que el MH podría ser interpretado desde otras teorías de la Matemática Educativa tales como la Socioepistemología, la Matemática Realista, la Teoría de Situaciones Didácticas, entre otras, e inclusive desde la TAS, sin embargo, hasta el momento en la literatura solo podemos encontrar artículos de investigación que se apoyan en la interpretación ontosemiótica del MH.

A continuación, en las siguientes secciones se describen cuatro formas de representación de la técnica del MH, según si este construye de manera vertical, horizontal, de una o dos prácticas.

1.5.1 El mapa híbrido vertical

Para ilustrar de qué manera el MH representa de manera esquemática la resolución de un problema matemático, considérese la resolución del problema que se ilustra en la figura 1.8. Se trata de un problema que se presenta en el bloque 3 del libro de Ángeles, Guerrero y Loyola (2013), que se aborda en tercer grado de secundaria, el cual implica la resolución de una ecuación cuadrática.

Figura 1.8. Problema de la alberca que implica la resolución de una ecuación cuadrática. Fuente: (Ángeles, Guerrero y Loyola, 2013, p.119)

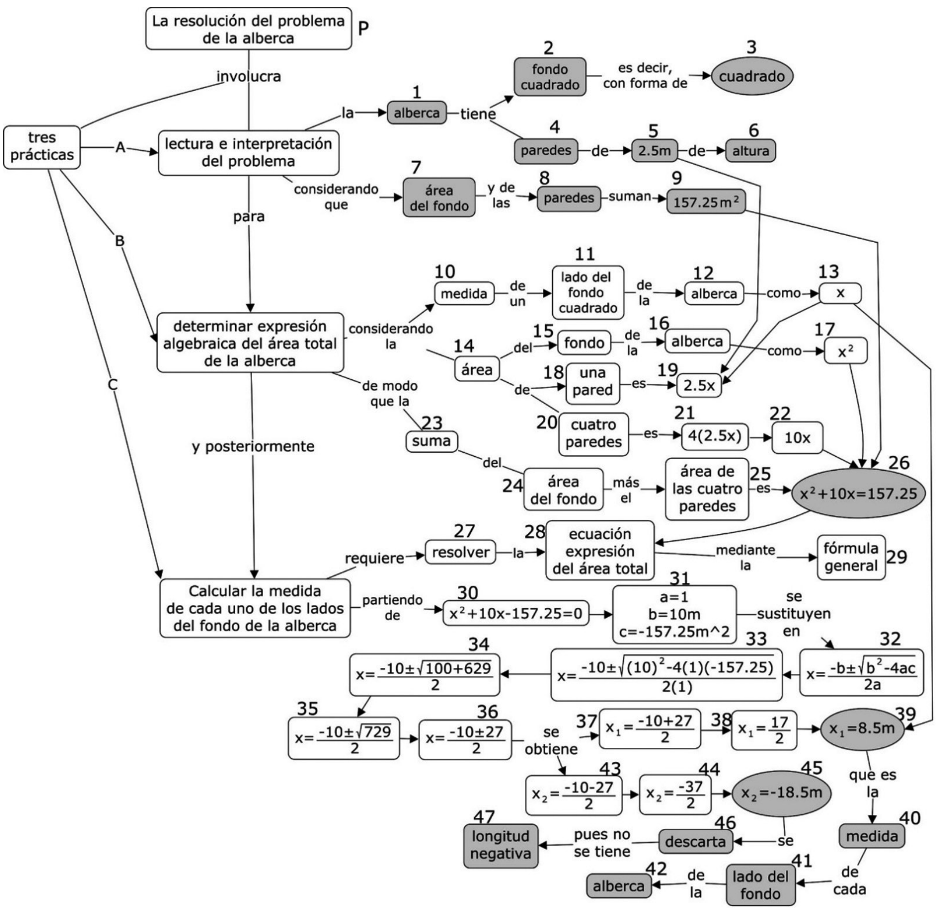

II. Una alberca tiene fondo cuadrado y paredes de 2.5 m de altura. La suma de las áreas del fondo y de las cuatro paredes es igual a 157.25 m^2. Encuentren la medida de sus lados.

En la figura 1.9 se presenta el MH vertical que describe el proceso de resolución de dicho problema. Si bien, hasta el momento no se ha discutido el proceso de construcción del MH, el cual se aborda en la sección 2.4, sin embargo, se considera pertinente en este momento tener un primer acercamiento a la técnica del MH, así como aprender a leerlo.

La figura 1.9 muestra un MH de tipo epistémico, ya que proviene de la resolución del problema que se describe textualmente en la figura 1.8 por parte de un experto (el MH se nombra MH cognitivo cuando se corresponde con la resolución de un estudiante inexperto). El mapa de la figura 1.9 se ha etiquetado para su lectura, así se tiene que la etiqueta “P” hace referencia al problema que se está resolviendo y la numeración del 1 al 47 se emplea para identificar a los objetos que intervienen en la resolución.

El MH muestra un proceso de tres prácticas, A, B y C, también llamadas etapas o fases, las cuales están organizadas (se refiere al orden en el que las prácticas se realizan) y conectadas entre sí, y cuya realización consecutiva permite la resolución del problema “P”. Las prácticas fueron colocadas de manera descendente, permitiendo presentar el proceso de resolución de manera vertical, iniciando con la primera práctica en la parte superior y finalizando con la última práctica en la parte inferior.

Figura 1.9. Mapa Híbrido vertical que describe la resolución del problema de la alberca. Fuente: elaboración propia mediante CmapTools.



En la primera etapa “A” se lee y se interpreta la información del texto que describe el problema “P”. De manera que los objetos 1 a 9 de la primera etapa son en realidad el resultado de dicha interpretación, aunque parezcan un señalamiento literal de lo que menciona el problema, más bien son el resultado del procesamiento del texto que describe el problema. Como resultado de la realización de la primera etapa emergen o se obtienen como producto algunos objetos, por ejemplo, en “A” emergen tres argumentos, el argumento “alberca tiene fondo cuadrado, es decir, con forma de cuadrado”, ruta de lectura 1-2-3; también emerge el argumento “alberca tiene paredes de 2.5m de altura”, ruta 1-4-5-6, y el argumento “área del fondo y de las paredes suman 157.25m^2”, ruta 7-8-9. La consideración de estos argumentos es importante, pues permiten definir las acciones a ser realizadas en las siguientes dos etapas.

En la segunda etapa “B” se determina la expresión algebraica del área total, área de la base y de las paredes, de la alberca. La determinación del área se inicia “considerando la medida de un lado del fondo cuadrado de la alberca como x”, ruta 10-11-12-13. Esto lleva a advertir que el área del fondo de la alberca es el objeto 17, que el área de una pared es el objeto 19, al considerar los objetos 13 y la ruta 4-5-6, y que el área de las cuatro paredes de la alberca es el objeto 22. Finalmente, tomando en cuenta 7-8-9 de la etapa “A” es posible obtener la ruta 23-24-25-26 donde el objeto 26 puede ser considerado como un objeto emergente de la etapa “B” ya que dicha expresión era desconocida apriori.

Por último, en la tercera etapa “C” se lleva a cabo el procedimiento de resolución de la ecuación cuadrática obtenida en la etapa “B” y la posterior interpretación de la solución. El procedimiento inicia en el objeto 30, a partir del cual se obtienen los datos de entrada “a”, “ b” y “c” en 31 los cuales se sustituyen en la fórmula general 32 para la resolución de ecuaciones cuadráticas, posteriormente, realizando los cálculos se obtienen las dos soluciones de la ecuación, objetos 39 y 45. Cada una de las soluciones es interpretada, por ejemplo, la interpretación de 45 se realiza a través del argumento 45-46-47, mientras que el objeto 39 es validado a través del argumento 39-40-41-42. Las interpretaciones de los resultados no emergen de la nada, más bien se apoyan de los señalamientos realizados en las etapas anteriores “A” y “B”, de manera que descartar el objeto 45 tienen que ver con el planteamiento 1-2-3 en la etapa “A” y su matematización a través de 10-11-12-13 y 14-18-19.

Se dice que las prácticas o etapas del proceso de resolución están conectados entre si, ya que los productos de cada etapa son empleados como elementos o datos de entrada para la realización de las siguientes etapas, es decir, las etapas se encuentran organizadas y conectadas de manera lógica. En este sentido, sería imposible ejecutar la etapa “C” si no se ha obtenido el producto 26 de la etapa “B”.

Por otro lado, también es posible observar que, de las tres etapas, la etapa “A” es en mayor medida discursiva, pues se refiere a conceptos y argumentos, la etapa “B” es parcialmente discursiva, ya que se define la variable “x” y se determinan las áreas del fondo y de las paredes en términos de esta, mientras que la etapa “C” es mayormente operativa, pues está centrada en la resolución de la ecuación cuadrática.

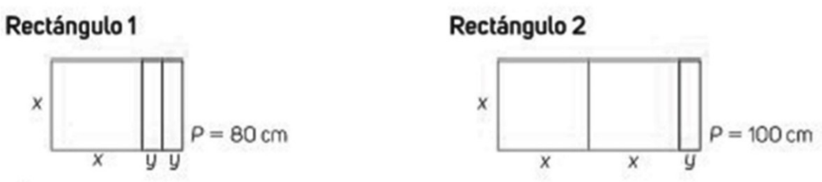
Cabe señalar en este punto que, contrario a los señalamientos de la enseñanza tradicional de que los problemas matemáticos pueden resolverse mediante la realización del proceso datos, fórmula, sustitución, operación y resultado, el MH muestra que la etapa “A” tiene que ver con una interpretación del texto que describe el problema y no de una mera extracción de datos que deben ser sustituidos en las fórmulas, de hecho, la interpretación es tan crucial que permite establecer el objeto 26 y dar significado a los objetos 39 y 45.

1.5.2 El mapa híbrido horizontal

Por otro lado, el MH también pueden ser construido de forma horizontal. La presentación de un mapa horizontal o vertical únicamente tiene que ver con la preferencia de espacio o de estética que tenga el sujeto que construyó el mapa, la lectura e interpretación del mapa no son afectadas. Para ilustrar cómo es un MH horizontal, considérese la resolución del problema que se presenta en la figura 1.10.

Figura 1.10. Problema de dos trozos de cartulina que implica la resolución de un sistema de ecuaciones lineales. Fuente: (Riva Palacio, 2019, p.193).

Se tienen dos trozos de cartulina rectangulares con las dimensiones que se muestran en las figuras. Si el perímetro de la primera es de 80 cm y el de la segunda es de 100 cm, ¿cuánto miden la longitud y la anchura de cada una?



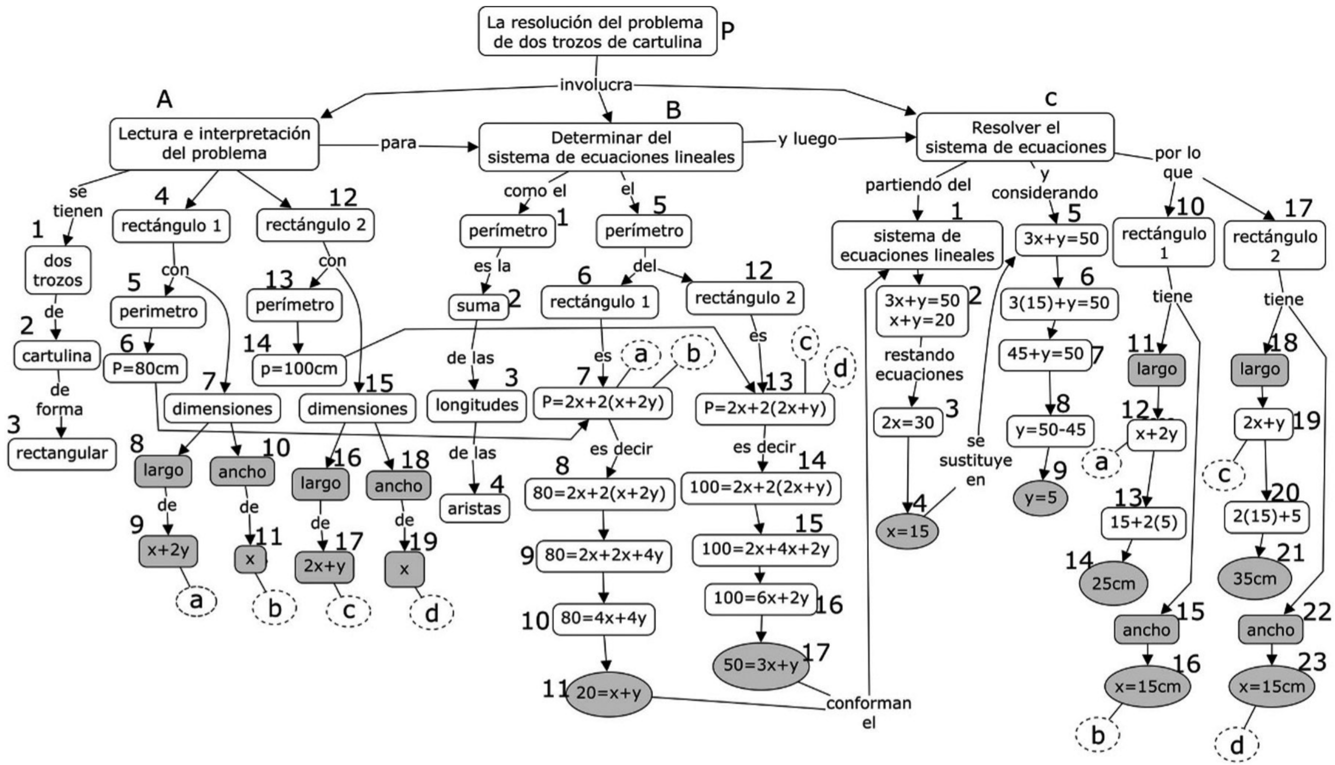
En la figura 1.11 se presenta el Mapa Híbrido horizontal que describe la resolución del problema. Al igual que el mapa de la figura 1.9, se han etiquetado los objetos que intervienen en la resolución, sin embargo, la numeración de los objetos se reinicia en cada etapa. Cabe señalar que, en lugar de algunas líneas conectoras, en este mapa se empleó el símbolo del conector del diagrama de flujo, letras “a”, “b”, “c” y “d” dentro de óvalos punteados, para representar la conexión entre algunos objetos del mapa. Lo anterior, con la finalidad de no saturar el mapa con demasiadas líneas conectoras.

En la primera etapa se lee y se interpreta el texto y las imágenes de los trozos de cartulina que describe el problema, de esta manera, se señala que “se tienen dos trozos de cartulina”, A1-A2-A3; los perímetros de cada uno “rectángulo 1 con perímetro P=80cm”, A4-A5-A6, y “rectángulo 2 con perímetro P=100cm”, A12-A13-A14; y sus dimensiones, A9 y A11 para el rectángulo 1, y A17 y A19 para el rectángulo 2.

En la etapa B se determinan las ecuaciones a partir de la definición de perímetro, B1-B2-B3-B4. La primera ecuación, B7, expresa el perímetro del primer rectángulo al considerar el largo A8-A9 y el ancho A10-A11, ver las conexiones “a” y “b”, la cual, mediante el procedimiento B8-B9-B10 permite obtener B11. La segunda ecuación se obtiene de igual manera, es decir, se expresa el perímetro del segundo rectángulo B13 considerando el largo A16-A17 y el ancho A18-A19, ver conectores “c” y “d”, y mediante el procedimiento B14-B15-B16 se obtiene B17.

En la tercera y última etapa se resuelve el sistema de ecuaciones C1-C2, restando a la ecuación B17 la ecuación B11 se obtiene C3 y luego el valor del ancho de ambos trozos de cartulina C4. Posteriormente, el valor del ancho C4 se sustituye en C5 y, al realizar las operaciones C6-C7-C8, se obtiene el valor de la segunda variable, C9. Finalmente, se obtiene el largo de cada trozo rectángulo, C14 y C21, al sustituir los valores encontrados en las expresiones C12 y C19 respectivamente, ver conectores “a” y “c”, mientras que el ancho de ambos trozos tiene el mismo valor, C16 y C23, ver los conectores “b” y “d”.

Figura 1.11. Mapa Híbrido horizontal de la resolución del problema de los trozos rectangulares de cartulina.
Fuente: elaboración propia mediante CmapTools.



1.5.3 El mapa híbrido de una práctica

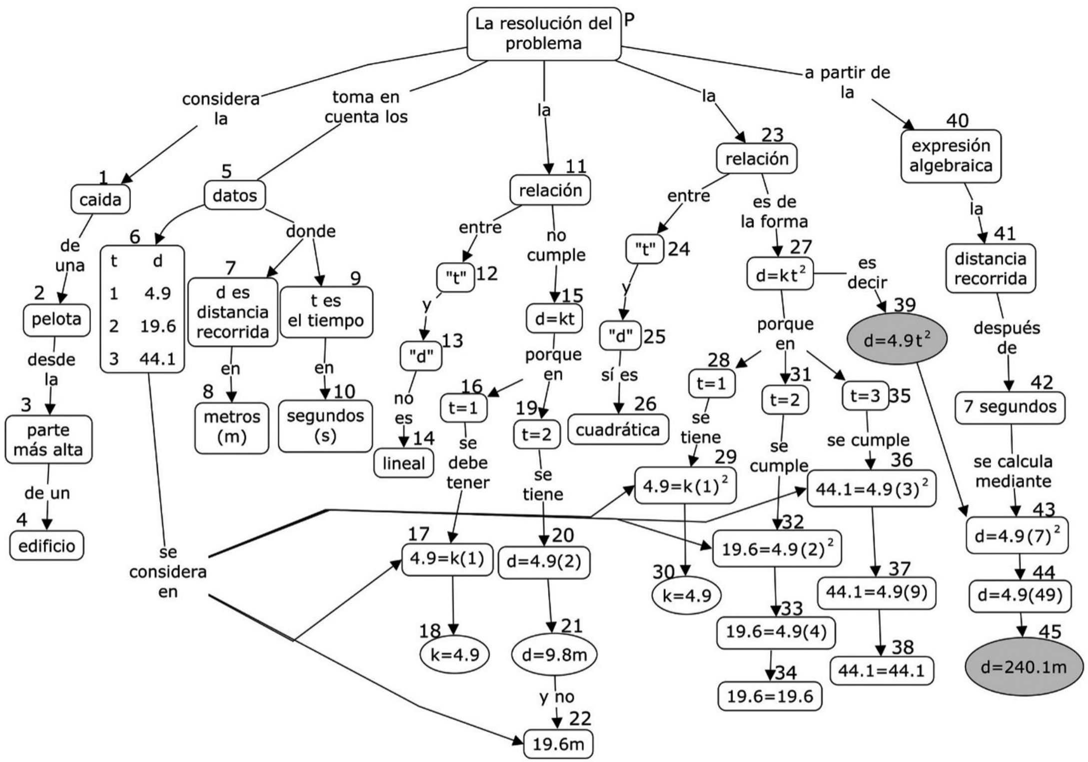
Otra forma de representar el MH es a través de una práctica. Esta forma de representación fue reportada en el trabajo de Moreno (2017) donde se analiza la práctica de resolución de algunos problemas de Cálculo diferencial que lleva a cabo un docente de ingeniería. Si bien, en el trabajo se aborda la resolución de problemas de nivel universitario, la aplicación del MH en el nivel educativo básico también resulta viable.

Para ilustrar esta forma de representación se abordará la resolución del problema que se aborda en tercer grado de secundaria: *Se deja caer una pelota desde la parte alta de un edificio, si en el primer segundo recorre 4.9 m, en el segundo 19.6 y en tercero 44.1, ¿qué expresión algebraica permite calcular la distancia (d), en función del tiempo (t)? y ¿cuál es la distancia recorrida después de 7 segundos?*

Se trata de una situación problemática asociada a un fenómeno de la física, cuya resolución implica una relación entre dos conjuntos de datos que guardan una relación cuadrática, donde es posible además establecer una expresión algebraica y calcular otros valores desconocidos. En la figura 1.12 se presenta el MH de una práctica que representa la resolución del problema físico "P". El mapa muestra que se considera una pelota que se deja caer desde la parte más alta de un edificio, 1-2-3-4, también se toman en cuenta los datos de distancia recorrida y tiempo, 5-6, expresadas en metros y segundos,5-7-8 y 5-9-10 respectivamente.

Se argumenta que la relación entre los datos de distancia recorrida y el tiempo no es lineal, ver la ruta 11-12-13-14, es decir, no puede expresarse en la forma 11-15 debido a que una vez que se encuentra la constante de proporcionalidad, ver 15-16-17-18, la distancia recorrida para t=2s no corresponde por lo reportado en la tabla, 19-20-21-22.

Figura 1.12. Mapa Híbrido de una práctica de la resolución de un problema en el contexto físico.
Fuente: elaboración propia mediante CmapTools.



Por otra parte, se argumenta que la relación entre los datos sí es cuadrática, ver la ruta 23-24-25-26, es decir, es de la forma señalada en 23-27. La relación cuadrática se valida a partir de tres argumentos, mediante el primero se señala cómo se obtiene el valor de la constante en la relación cuadrática, 28-29-30 y, mediante los otros dos argumentos, 31-32-33-34 y 35-36-37-38, se calcula la distancia recorrida para t=2s y t=3s encontrándose que los resultados se corresponden con los indicados en la tabla.

Una vez que se verificó que la relación entre los datos es cuadrática, se procede a determinar la distancia recorrida siete segundos después de iniciado el movimiento, ver la última ruta 40-41-…-45.

1.5.4 El mapa híbrido de dos prácticas

El MH también se puede representar mediante dos prácticas, una práctica que llamaremos discursiva, donde se hace referencia a los conceptos, argumentos y propiedades matemáticas y, la segunda práctica, nombrada operativa, donde se realizan los cálculos o las operaciones matemáticas.

Al igual que con las otras formas de representación del mapa descritas anteriormente, en un MH de dos prácticas también son importantes las conexiones entre las prácticas. El mapa de dos prácticas podría ser de gran ayuda para la enseñanza de las matemáticas en el nivel básico, primaria y secundaria, donde los estudiantes usualmente, frente a la resolución de determinado problema, solo dan importancia a la práctica operativa y tienden a poner atención únicamente en los datos numéricos, a la sustitución de estos en fórmulas y a la obtención de un resultado inmediato, sin embargo, mediante el uso del mapa de dos prácticas es posible resaltar la importancia y, al mismo tiempo, hacer explícita la relación entre lo conceptual, la práctica discursiva, y lo procedimental, la práctica operativa.

Para ilustrar el MH de dos prácticas considérese la resolución de un problema que se aborda en segundo grado de secundaria: *Un tanque de almacenamiento de agua instalado en una comunidad tiene forma de prisma rectangular y una capacidad de 8 000 litros,* *su base mide 2.5 m por 2 m. (a) ¿Qué altura tiene este tanque? y (b) ¿Qué cantidad de agua contendría si sólo llegara el agua a una altura de 75 cm?*, cuya resolución implica el cálculo del volumen de un prisma, así como el análisis de las relaciones de variación entre diferentes medidas del prisma. En la figura 1.13 se presenta el MH de dos prácticas que describe la resolución del problema.

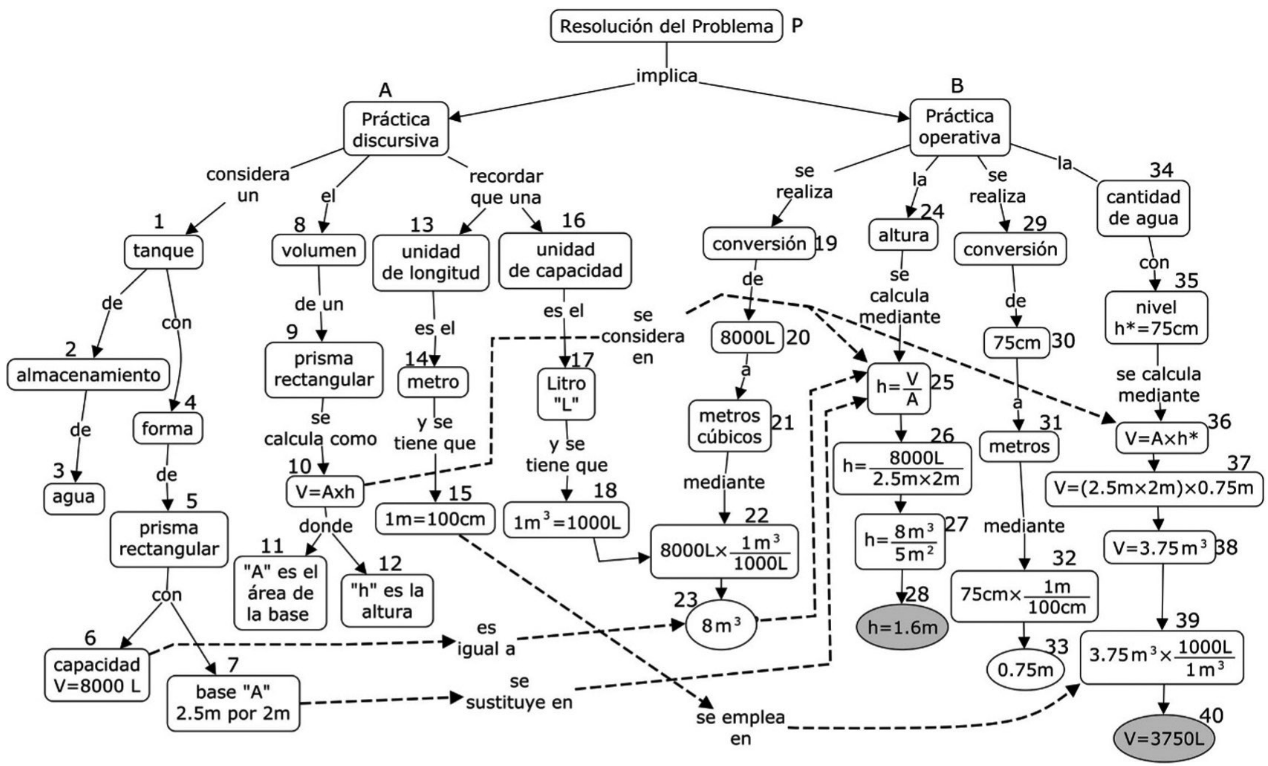
En el mapa, la primera práctica está indicada por "A" y la segunda por "B". La primera práctica únicamente considera aspectos conceptuales y ninguna operación matemática, y parte mediante el argumento "considera un tanque de almacenamiento de agua", 1-2-3, luego se señala que el tanque tiene forma de prisma rectangular con capacidad y base como lo indica el problema, ver las rutas 1-4-5-6 y 1-4-5-7.

Posteriormente, se indica la propiedad de que el volumen del prisma puede calcularse mediante la fórmula 10, donde el área de la base y la altura del prisma están expresadas mediante 11 y 12 respectivamente. También se argumenta acerca de la unidad de longitud y volumen, así como sus equivalencias con otras unidades mediante 13-14-15 y 16-17-18.

La segunda práctica se inicia al convertir la capacidad del prisma en litros a unidades de metros cúbicos, 19-20-21-22-23. Posteriormente, se calcula la altura del tanque a partir del dato del área de la base, 7-25, y del volumen en metros cúbicos, 6-23-25, mediante la ruta 25-26-27-28. Luego de esto, se determina la cantidad de agua cuando el nivel de agua es de 75cm, para esto, primero se convierten los 75cm a unidades de metros mediante 29-30-31-32-33 y por último se calcula la cantidad de agua al realizar la operación 34-35-36-37-38-39-40.

Hasta el momento únicamente se ha descrito el MH, sus formas de representación (vertical, horizontal, de una y dos prácticas) y cómo leerlos, sin embargo, al igual que como sucede con el Mapa Conceptual, es posible construir el MH con el desconocimiento de la teoría que lo sustenta, pues solo basta con mirar un par de ejemplos y de manera intuitiva empezar a hacer el bosquejo de algún Mapa Híbrido.

Figura 1.13. Mapa Híbrido de dos prácticas que representa la resolución del problema del tanque.
Fuente: elaboración propia mediante CmapTools.



En las figuras 1.9 y 1.11 se ha presentado al MH vertical y horizontal como una técnica que permite mostrar, de forma esquemática, la resolución de problemas matemáticos, sin embargo, aunque no se ha discutido el sustento teórico de dicha técnica, es posible advertir la presencia de distintos objetos tales como conceptos, procedimientos, argumentos, las etapas de resolución, así como también sus conexiones. En relación con esto último, el MH muestra las conexiones entre los objetos que intervienen en la resolución del problema, es decir, permite mirar cómo algunas etapas se apoyan en las etapas previas y, por otro lado, como en cada etapa se obtiene un producto, objeto resultante o emergente, el cual es empleado como dato de entrada para la ejecución de alguna de las siguientes etapas. Así mismo, en cada mapa también se logra observar la importancia de la lectura y la interpretación del texto que describe el problema, y esto es porque permite establecer las acciones y también interpretar los resultados obtenidos de las etapas subsecuentes.

La interpretación del MH desde la Matemática educativa se discutirá en el siguiente apartado, veremos que dicha interpretación constituye una herramienta fina, potente y de gran utilidad para el investigador en Matemática Educativa o para el docente interesado en mejorar su práctica docente o para analizar la comprensión de sus estudiantes a través de la resolución de problemas.

1.5.5 El mapa híbrido grupal y descriptivo

Existen otras dos formas de construir un MH las cuales, a diferencia de los cuatro tipos de MH descritos en las secciones previas, no son representaciones literales de la actividad matemática que se está describiendo, sino que son representaciones aproximadas o que delinean a grandes rasgos la actividad matemática. Estos dos tipos de MH son el (i) MH grupal y el (ii) MH descriptivo. Estas se describen a continuación.

En la clase de matemáticas, en algunas ocasiones el profesor organiza a sus estudiantes en equipos con el propósito de resolver problemas matemáticos a partir del trabajo colaborativo entre los alumnos. En la resolución del problema, los miembros de cada equipo reflexionan, discuten y argumentan defendiendo sus posturas o ideas, lo cual finalmente les conduce a proponer de manera grupal la resolución del problema abordado. En este contexto, el MH puede ser empleado para representar la resolución que fue propuesta por cada equipo, es decir, se trata de un MH grupal que refleja los acuerdos establecidos por el equipo. En este sentido, el MH grupal no presenta en ningún momento la contribución individual de cada miembro del equipo sino que más bien muestra el proceso de resolución del problema matemático que ha sido aprobado mediante el consenso de los miembros del equipo.

Por otra parte, el MH descriptivo puede ser empleado para representar la producción extensa de un sujeto al resolver un problema matemático. Es claro que en matemáticas hay ocasiones donde el proceso de resolución de un problema matemático es largo o extenso, de manera que la elaboración del MH correspondiente a dicha producción conduciría a una representación o esquema también igual de extenso o grande, por lo que en la elaboración del MH resulta conveniente simplificar dicho esquema ya sea al considerar únicamente los elementos más relevantes o cruciales del proceso de resolución, o bien, al realizar una descripción breve mediante el MH, y no literal de la producción, del proceso de resolución del problema matemático.

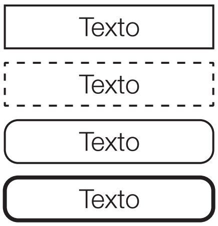
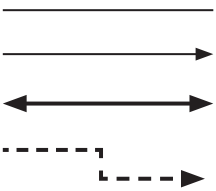
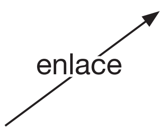
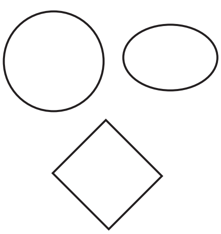
1.6 Elaboración del mapa híbrido

Crear la representación gráfica del MH, el cual reúne características visuales tanto de los MC como de los DdF, requiere contar con programas informáticos que proporcionen elementos representativos de ambas técnicas. Hasta la publicación de esta edición no existe una aplicación que brinde de manera conjunta los elementos requeridos por los MH para su representación.

En la actualidad es posible encontrar diversas aplicaciones que intentan brindar funcionalidades de representación, organización de elementos y visualización, algunas son de uso gratuito y otros de paga, o son de libre uso bajo ciertas limitaciones en su funcionalidad.

En realidad, es posible construir un MH hasta con alguna de las aplicaciones que brindan las *suites* de ofimática, sin embargo, se buscan aquellas que facilitan su creación. El mejor escenario, es contar con una aplicación dedicada a crear representaciones gráficas específicas para los MH, sin embargo, mientras esto no suceda, el usuario deberá buscar alternativas que se acerquen a las necesidades de representación, lo cual implica contar con los elementos que se muestran en la siguiente tabla 1.3.

Tabla 1.3. Elementos requeridos para la representación gráfica de los MH
.

Elemento	Descripción
 Nodo	Este elemento es conocido también como forma. Generalmente, son cuadrados o con las esquinas redondeadas. El tamaño puede ser ajustable al texto que contenga. En este se anotan los conceptos. Los bordes puedes continuos o punteados, con un grosor y color personalizable de texto y fondo. Estos elementos contienen varios puntos de vinculación con otros elementos a partir de conectores.
 Conectores	Estos elementos son líneas que unen nodos. En los extremos pueden colocarse terminación en flecha lo que definirá alguna direccionalidad. Estas pueden ser sólidas o punteadas, con un grosor o color personalizable. Los extremos de estos conectores se enlazan con los elementos nodo a través de los puntos de vinculación.
 Palabras enlace	Se crean entre la unión de dos elementos nodo a través de los conectores y se colocan sobre la continuidad del conector. Son textos cortos que generalmente denotan proposiciones. Estos enlaces son independientes de las características de estilo de los conectores (grosor, estilo, color, etc.)
 Símbolos	Son formas geométricas a las cuales se les ha destinado una función particular (verifica la tabla de símbolos de los DdF. Sección 1.3). Estos elementos gráficos contienen las mismas características que los nodos en cuanto a su color de borde, relleno, grosor y estilo de línea, así como los puntos de vinculación a través de conectores. Estos elementos pueden contener texto en su interior.

Los elementos gráficos que permiten la representación de los MH es una de las partes esenciales. Sin embargo, otras son las funcionalidades que facilitan la organización, manipulación, navegabilidad, facilidad y sencillez durante el trabajo a través de la aplicación. Algunas de estas funcionalidades son:

- Organización automática en la distribución de nodos o símbolos.
- Escritura de símbolos y expresiones algebraicas
- Asignación manual en la posición de los nodos o símbolos.
- Exportación a formatos gráficos comunes y permisibles en internet como JPG, PNG, GIF o BMP.
- Exportación a formato PDF.
- Redacción de comentarios o notas sobre el mapa, con asignación manual de posición.
- Reacomodo automático de conectores a partir de la reubicación de los nodos o de los símbolos.
- Configuración manual de los conectores a partir de la configuración automática de estos.

Contar con aplicaciones informáticas que estén concebidas para representar los MH a partir de las condiciones de los MC y DdF evitará forzar las funcionalidades de las aplicaciones concebidas para otros fines, mejorará y hará más eficiente la edición de estos enfocando los esfuerzos en la propia representación y no en los medios para su realización. Por el momento es posible utilizar *CmapTools* que, aún cuando ha sido creado para la representación gráfica del MC, potencialmente tiene las características de poder generar los MH. Otra opción es, *Cacoo* que es una herramienta colaborativa basada en Internet enfocada en representar distintos tipos de diagramas, entre ellos MD y DdF, por lo tanto, también los MH. Sin embargo, es importante señalar que estas aplicaciones presentan una debilidad importante en cuanto a la escritura de símbolos y expresiones algebraicas.

1.7 Consideraciones finales

En este capítulo se ha discutido el MH como técnica de representación, desprovista de cualquier interpretación teórica. Se trata de un esquema plano que permite representar la resolución de problemas matemáticos cuya elaboración, de manera análoga al MC, también resulta intuitiva, esto es, basta con mirar una o dos ocasiones cómo se elabora un MH para poder empezar a realizar los primeros esbozos.

Como es bien conocido, la resolución de un problema matemático implica poner en juego aspectos conceptuales y procedimentales, por lo que el empleo del MC para estos casos resulta insuficiente, ya que mediante esta técnica solo se puede dar cuenta de lo conceptual, pues deja fuera lo procedimental. Más bien, lo que se requiere es de una técnica que permita representar la componente conceptual y procedimental de manera simultánea y combinada, por lo que para representar la resolución de problemas la técnica del MH resulta ser la más adecuada.

Por otra parte, el MH da cuenta de un aspecto muy relevante de la actividad matemática, se trata de las conexiones entre los objetos que intervienen en la resolución del problema. A diferencia de otras técnicas de representación tales como el Mapa Mental o la V de Gowin, el MH permite representar las conexiones entre los objetos matemáticos que intervienen en la resolución del problema y así mismo permite al investigador o al profesor llevar a cabo un análisis más fino de la comprensión.

Es importante señalar que el MH, independientemente de la forma que este tenga (horizontal, vertical, de una o dos prácticas, grupal o descriptivo), puede ser elaborado por el o los sujetos implicados en la resolución del problema o bien por el investigador interesado en indagar las concepciones o dificultades que tienen el o los alumnos acerca de determinado contenido matemático.

En el siguiente apartado se describen algunos elementos del Enfoque Ontosemiótico, teoría proveniente del campo de la Matemática Educativa, la cual ha sido empleada como marco teórico interpretativo de la técnica del MH en el contexto de la matemática escolar.

1.8 Ejercicios

1. Construye un MC para cada uno de los siguientes conceptos y propiedades matemáticas:

   (a) Teorema de Pitágoras;
   (b) Triángulo;
   (c) Número real;
   (d) Mínimo común múltiplo

2. Construye un diagrama de flujo que permita determinar (a) el mayor de dos números y el (b) mayor de tres números.

3. Construye un MH vertical para describir la resolución del problema: En una tienda departamental se realiza el 15% de descuento en la compra de un videojuego que cuesta $1,200.00, ¿Cuánto se tiene que pagar por el videojuego?

4. Construye un MH horizontal para describir la resolución del problema: El automovil nuevo de Juan requiere de un cambio de aceite de motor cada 7,500km y de neumáticos cada 50,000km. ¿En cuántos kilómetros tendrá que cambiar tanto el aceite como los neumáticos?

Capítulo 2

EL MAPA HÍBRIDO Y SU INTERPRETACIÓN

2.1 Introducción

En el capítulo anterior se abordó la técnica del MH y algunas formas de representarlo. Partiendo de la distinción entre técnica y teoría, en este capítulo se considera al MH como una técnica de representación gráfica interpretable desde alguna teoría, en particular, se discutirá el caso de la interpretación del MH desde el Enfoque Ontosemiótico (EOS), la cual se enmarca como una teoría del campo de la Matemática Educativa.

La interpretación ontosemiótica del MH permite al investigador (matemático educativo o didáctica de las matemáticas) o al profesor de matemáticas indagar la actividad matemática de los estudiantes, es decir, le permite conocer los objetos en los que el alumno se apoya al resolver un problema matemático, lograr un acercamiento a las dificultades y a los significados o concepciones matemáticas de sus alumnos, también le permiten reflexionar sobre su práctica docente, diseñar intervenciones en el aula, por mencionar algunas aplicaciones.

En este capítulo, secciones 2.2 y 2.3, se describe la interpretación del MH a partir de algunos constructos del EOS, los cuales son empleados para describir la actividad matemática implicada en la resolución de problemas matemáticos escolares, se trata de los constructos de práctica, sistema de prácticas, objetos matemáticos, procesos y facetas. Cabe agregar que en las secciones 2.4 y 2.5 también se describe una metodología para la construcción del MH, la cual puede considerarse como una consecuencia de la interpretación del MH desde el EOS.

Es importante señalar en este punto que además de los constructos ontosemióticos señalados anteriormente, el EOS considera otros constructos teóricos para describir la práctica de enseñanza de las matemáticas, sin embargo, la interpretación del MH desde estos otros constructos quedan fuera del alcance de esta obra.

2.2 Algunos elementos teóricos del EOS

En el campo de la Matemática Educativa, el EOS es un marco teórico que aún se encuentra en desarrollo, sin embargo, los avances alcanzados hasta el momento son tales que ha sido posible estudiar los diversos factores que condicionan los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. El EOS plantea una ontología de los objetos matemáticos que toma en cuenta el triple aspecto de la actividad matemática, es decir, como actividad de resolución de problemas, como un constructo socialmente compartido, y como lenguaje simbólico y sistema conceptual lógicamente organizado, tomando en cuenta además la dimensión cognitiva individual (Godino, Batanero y Font, 2007).

En el contexto escolar es bien sabido que los conocimientos puramente matemáticos del profesor o conocimiento matemático disciplinar no son suficientes para lograr una enseñanza adecuada de los contenidos de una asignatura y tampoco son suficientes para ayudar a los alumnos en la construcción de sus conocimientos matemáticos y competencias. Con base en lo anterior, según el EOS, además del conocimiento matemático disciplinar, es necesario que el docente también cuente con otro conocimiento al que se ha denominado *conocimiento didáctico-matemático*, el cual se encuentra relacionado con la enseñanza de las matemáticas a través de las acciones que el docente lleva a cabo en su intervención el aula.

En el EOS se ha propuesto un modelo (Godino, Batanero, Font y Giacomone, 2016) de dicho conocimiento el cual considera las siguientes seis facetas: (i) *epistémica*, relacionado con el conocimiento de los distintos significados institucionales según el contexto de uso, así como también de las prácticas, objetos matemáticos y procesos que se ponen en juego para conformar cada uno de estos significados; (ii) *cognitiva*, referente al conocimiento de cómo los estudiantes aprenden, razonan y progresan en el aprendizaje; (iii) *afectiva*, sobre los aspectos emocionales, actitudinales y creencias acerca del estudio de la matemática escolar; (iv) *instruccional*, conocimiento sobre la organización de tareas, resolución de problemas de aprendizaje e interacciones que ocurren en el aula; (v) *mediacional*, acerca de los recursos de apoyo o materiales de los que dispone el profesor para la enseñanza; (vi) *ecológica*, tiene que ver con el conocimiento de las relaciones entre la matemática escolar y otras disciplinas.

Es importante señalar que, en la práctica docente, la facetas anteriores se relacionan entre sí, de esta manera, dado un problema matemático, el docente puede poner en juego los significados institucionales y resolver el problema utilizando ciertos procedimientos, apoyándose en justificaciones y explicaciones (faceta epistémica), o bien modificar la práctica de resolución adaptándola a los conocimientos de los alumnos (facetas instruccional y cognitiva), (Godino, Batanero, Font y Giacomone, 2016).

Por otro lado, cabe señalar que la técnica del MH puede ser empleada para representar esquemáticamente a los elementos de la faceta epistémica, es decir, para representar el sistema de prácticas, objetos matemáticos, procesos y facetas implicadas en la resolución de un problema matemático. Por otro lado, como se ha mencionado en el capítulo anterior, el MH también puede ser empleado para representar elementos de la faceta instruccional, esto es, para representar el diseño, las interacciones que se pueden establecer en el aula, la organización de etapas de un proceso de instrucción, las tareas y el uso de recursos materiales que se consideran en un proceso de instrucción, sin embargo, este aspecto queda fuera del alcance de esta obra.

A continuación, en las siguientes subsecciones, se describen únicamente los elementos de la faceta epistémica, los cuales serán empleados para interpretar el MH que representa la actividad matemática implicada en la resolución de un problema matemático.

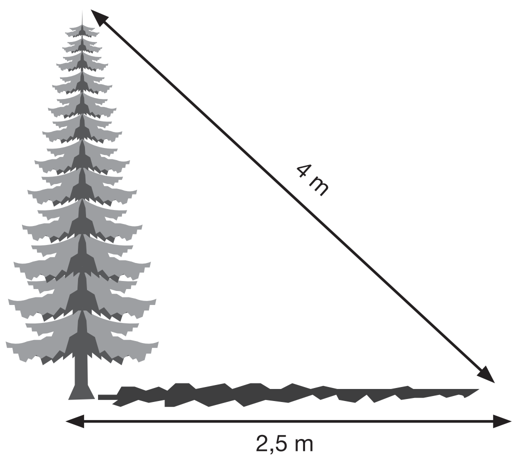
2.2.1 Práctica y sistema de prácticas

Desde la perspectiva del EOS, cuando un sujeto, estudiante inexperto o profesor experto, resuelve un problema matemático "P" este no resuelve el problema como tal, sino que lo descompone o desmenuza en subproblemas "$p_1, p_2,\ldots,p_n$" los cuales resuelve a su vez mediante la realización de *prácticas* correspondientes "$l_1, l_2,\ldots,l_n$" las cuales se coordinan y se conectan entre sí configurando un sistema de prácticas "λ" el cual permite al sujeto la resolución del problema mayor "P".

En el EOS, la *práctica* “λ_i” es entendida como todo lo que hace el sujeto para resolver el subproblema “p_i”, es decir, la práctica se materializa a través de lo que el sujeto escribe sobre el papel, lo que dice, lo que señala, lo que gesticula, la manera en que relaciona y actúa sobre los objetos matemáticos implicados en la resolución del problema. Cada una de las prácticas realizadas tienen un sentido o significado parcial para el sujeto que resuelve el problema, de este modo, la coordinación y conexión de dichas prácticas, llamado sistema de prácticas, lleva al sujeto a resolver el problema mayor o inicial abordado. En este sentido, el sistema de prácticas da cuenta del significado global que el sujeto asigna a la resolución del problema mayor.

Para ilustrar los constructos anteriores, considérese la resolución del problema “Al atardecer, un árbol proyecta una sombra de 2,5 metros de longitud. Si la distancia desde la parte más alta del árbol al extremo más alejado de la sombra es de 4 metros, ver la figura 2.1” que se plantea en la página web de Llopis, Costa, Gómez y Calvo (2010).

Figura 2.1. Representación pictórica del árbol y la sombra que proyecta. Fuente: (Llopis, Costa, Gómez y Calvo, 2010).



La resolución del problema del árbol por parte de Llopis, Costa, Gómez y Calvo (2010a) puede considerarse como la materialización de un sistema de dos prácticas claramente diferenciables, las cuales se han nombrado como “A” y “B”, ver la figura 2.2.

Figura 2.2. Resolución del problema de la altura del árbol.
Fuente: (Llopis, Costa, Gómez y Calvo, 2010a).

Ver solución

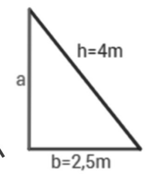
Práctica A

α

Imaginamos un triángulo rectángulo de modo que

- **su base, b, es la sombra del árbol,**
- **su altura, a, es la altura del árbol y**
- **su hipotenusa, h, es la distancia desde el árbol al extremo de la sombra.**

β



Práctica B

γ

Como el triángulo es rectángulo, aplicamos el teorema de Pitágoras para calcular su altura, a:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{h^2} &= \boldsymbol{a^2 + b^2} \rightarrow \\ \boldsymbol{4^2} &= \boldsymbol{a^2 + (2,5)^2} \rightarrow \\ \boldsymbol{16} &= \boldsymbol{a^2 + 6,25} \rightarrow \\ \boldsymbol{a^2} &= \boldsymbol{16 - 6,25} = \\ &= \boldsymbol{9,75} \end{aligned}$$

Finalmente, hacemos la raíz cuadrada:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} &= \boldsymbol{\sqrt{9,75}} \cong \\ &\cong \boldsymbol{3,12\ m} \end{aligned}$$

δ

Por tanto, la altura del árbol es, aproximadamente, 3,12 metros.

Mediante la primera práctica A el sujeto reconoce los conceptos no matemáticos tales como árbol, sombra del árbol, extremo de la sombra y, a partir de la disposición espacial de dichos objetos, logra visualizar un triángulo rectángulo para luego representar las longitudes de los lados del triángulo mediante los símbolos "b", "a" y "h". Posteriormente, mediante la segunda práctica B los autores, al configurar un triángulo rectángulo, considera el teorema de Pitágoras y lo particularizan mediante los símbolos "$b=2,5m$", "a" y "$h=4m$" para luego despejar a^2 y así calcular el valor de "a", por último, los autores significan el valor de "a" como la altura del árbol.

Si bien, en las líneas anteriores se indicó que la resolución del problema del árbol implicaba llevar a cabo dos prácticas, sin embargo, esto es un hecho meramente descriptivo, ya que también se podría argumentar que la resolución del problema también puede llevarse a cabo mediante cuatro prácticas, es decir, que dicho señalamiento va a depender de lo que el investigador quiere mostrar a sus interlocutores acerca de la actividad matemática del sujeto investigado.

En este sentido, la resolución del problema mediante cuatro prácticas puede ser descrito de la siguiente manera: mediante la primera práctica "α" se reconocen los conceptos, la disposición espacial de los objetos materiales y se simboliza; luego, con la práctica "β", se representa el triángulo visualizado; posteriormente mediante la práctica "γ", se realiza el procedimiento de despeje y se obtiene el valor solicitado; y finalmente, mediante la práctica "δ" se le atribuye un significado al valor calculado; ver la figura 2.2. La descripción de la actividad matemática mediante dos o más prácticas podría ser útil para el docente, según si este desea revisar o estudiar alguna práctica específica con sus estudiantes.

Las prácticas pueden clasificarse en discursivas u operativas, mayormente discursivas o mayormente operativas, según la acción predominante en ellas, así, en el caso de la figura 2.2 la práctica A es de tipo discursiva, pues está centrada en lo conceptual y lo argumentativo, mientras que la práctica B es operativa o mayormente operativa, debido a que la acción está centrada en un procedimiento matemático de cálculo del valor de "a" y solo al final es que se hace mención de un argumento para validar el resultado. Así mismo, es posible también asignar un nombre a las prácticas, sin embargo, el nombre debe ser tal que sea representativo de la acción realizada en la práctica.

Hasta el momento se ha hablado sobre las prácticas y el sistema de prácticas que estas configuran para la resolución del problema matemático, sin embargo, es importante señalar que en el sistema de prácticas el sujeto pone en juego un conjunto de objetos matemáticos. La tipología de objetos matemáticos se describe en la siguiente subsección.

2.2.2 Objetos matemáticos primarios y emergentes

Se ha mencionado anteriormente que en la resolución de un problema matemático "p" el sujeto lleva a cabo un sistema de prácticas. En el sistema de prácticas participa un conjunto de objetos matemáticos los cuales pueden clasificarse en alguna de las siguientes seis categorías:

i) *Situación-problema*. Se trata de un objeto de dos componentes, la situación o contexto y el problema que se plantea con base en dicha situación. Las situaciones se enuncian frecuentemente de manera textual acompañadas de algún esquema o representación pictórica y pueden ser intra-matemáticas, cuando se trata de una situación netamente matemática, por ejemplo, las situaciones geométricas o numéricas. La situaciones, también pueden ser extra-matemáticas, en el caso de que se haga referencia a una situación fuera de las matemáticas, por ejemplo, contextos cotidianos o inventados.

Por otra parte, la segunda componente, el problema, resulta de la problematización realizada sobre la situación planteada, a través del cual se solicita o se plantea el requerimiento de calcular el valor de alguna variable o constante desconocida, representar gráficamente alguna relación entre variables, obtener alguna ecuación que describa cierto fenómeno, por mencionar algunos problemas.

A partir del EOS se considera que una situación extra-matemática también puede ser un contexto de las ciencias como la física, la química o la biología donde puede estar implicada la actividad matemática, sin embargo, en este libro los contextos de las ciencias no se considerarán como situaciones extra-matemáticas, esto debido a que los objetos matemáticos difieren de los objetos de las ciencias en el sentido de su ontología y epistemología, por lo que sería ingenuo considerar una situación de las ciencias como una situación extra-matemática. En otras palabras, dado que las situaciones-problema desencadenan la actividad matemática y, en el caso de una situación problematizada de las ciencias, tómese el caso de una situación problematizada de la física, el sistema de prácticas que se lleva a cabo es propio de la física, pues la física tiene sus propias formas de acceder al conocimiento, así como también validarlo a través de la actividad experimental y la reproducibildiad en el laboratorio, las cuales son muy distintas a las prácticas que se llevan a cabo en la matemática.

ii) *Lenguaje*. Se refiere a las palabras, símbolos (α, β, x, y, entre otros), expresiones algebraicas ($2x+y=5$, $ax^2+bx+c=0$, por señalar algunas), registros numérico y gráfico, así como otras formas de representación que el sujeto emplea como medio de comunicación y de producción de conocimiento matemático.

iii) *Conceptos*. Se enuncian a través de definiciones, por ejemplo, el concepto de ángulo está definido como aquella parte del plano determinada por dos semirrectas nombradas lados y que parten de un mismo punto llamado vértice del ángulo, otros conceptos son los de punto, recta, circunferencia, por mencionar algunos.

Cabe señalar que los conceptos pueden ser matemáticos o no matemáticos, estos últimos dependen del contexto extra-matemático y tienen que ver generalmente con objetos materiales, por ejemplo, en la situación problematizada de la figura 2.1, aparecen los conceptos no matemáticos de árbol y sombra.

iv) *Argumentos*. Son enunciados que se emplean para sustentar, justificar y validar los procedimientos o las prácticas realizadas. Por ejemplo, para el problema "El padre de Ana tiene 5 años menos que su madre y la mitad de la edad de la madre es 23, ¿Qué edad tiene el padre de Ana?", que se ilustra en la figura 2.3, en la solución que proponen Llopis, Costa, Gómez y Calvo (2010b) se enuncian argumentos con diferente sentido.

Mediante el argumento "x=edad de la madre de Ana" se sustenta que el sistema de prácticas que se va a realizar en seguida se apoyará en el uso del símbolo "x"; mediante los argumentos "La mitad de la edad de la madre es 23" se justifica la escritura de la expresión algebraica "$\frac{x}{2}=23$", también ocurre lo mismo con el argumento "la edad de la madre es …46" que permite justificar la escritura de la expresión "$x=23 \cdot 2=46$"; y mediante el argumento "El padre de Ana tiene 5 años menos que su madre" es posible validar o apoyar la tesis de que "el padre tiene 46-5=41 años".

Figura 2.3. Resolución del problema de la altura del árbol.
Fuente: (Llopis, Costa, Gómez y Calvo, 2010b).

El padre de Ana tiene *5* años menos que su madre y la mitad de la edad de la madre es *23*. ¿Qué edad tiene el padre de Ana?

Solución

x = edad de la madre de Ana

La mitad de la edad de la madre es 23, por tanto,

$$\frac{x}{2} = 23$$

La edad de la madre es

$$x = 23 \cdot 2 = 46$$

El padre de Ana tiene 5 años menos que su madre, es decir, el padre tiene 46 - 5 = 41 años.

v) *Propiedades*. Son enunciados acerca de los conceptos matemáticos, por ejemplo, en relación con el concepto de triángulo rectángulo se puede hacer referencia a la propiedad nombrada como el teorema de Pitágoras, también, en relación con el concepto de triángulo, se puede enunciar una propiedad mediante la proposición de que la suma de los ángulos internos de un triángulo rectángulo es igual a 180º.

Conviene señalar en este punto que las propiedades matemáticas pueden ser representadas a través de proposiciones, pudiendo así relacionar varios conceptos, por ejemplo, la proposición "Dado un *triángulo rectángulo*, el *cuadrado de la longitud* de la *hipotenusa* es *igual* a la *suma de los cuadrados* de las longitudes de los *catetos*" relaciona los conceptos de triángulo rectángulo, cuadrado de la longitud, longitud, hipotenusa, igual, suma de los cuadrados y catetos. Pero también dicha propiedad puede ser representada de manera algebraica mediante "$c^2=a^2+b^2$", donde "c", "a" y "b" son las longitudes de la hipotenusa y de los catetos respectivamente.

vi) *Procedimientos*. Son las técnicas de cálculo, las operaciones matemáticas o los algoritmos empleados en la resolución del problema. Como se ha señalado en el capítulo 1, sección 1.3, los procedimientos pueden representarse mediante Diagramas de Flujo (DdF), pues estos permiten describir procedimientos y procesos donde a partir de ciertos datos de entrada se realizan operaciones matemáticas sobre esos datos para obtener posteriormente otros datos de salida. Sin embargo, en la resolución de problemas matemáticos los procedimientos realizados siempre van acompañados de una componente discursiva, la cual permite sustentar, justificar y validar las operaciones o cálculos realizados a lo largo del procedimiento.

Es importante destacar que en la enseñanza tradicional de la matemática frecuentemente se da importancia únicamente al procedimiento, lo cual trae como consecuencia que los estudiantes, frente a la tarea de resolver un problema, solo pongan atención en los datos que les proporciona el problema y luego busquen sustituirlos en alguna fórmula y así obtener inmediatamente el resultado deseado. Esto último es señalado en la literatura como *operativismo ciego*, el cual es descrito como una práctica procedimental de resolución de problemas donde el resolutor accede y emplea fórmulas memorizadas prescindiendo de la interacción entre el dominio conceptual y procedimental (Escudero y Moreira, 1999).

Los seis objetos matemáticos anteriores intervienen en cada una de las prácticas que configuran el sistema de prácticas, sin embargo, en una práctica específica no todos los objetos señalados participan. Por ejemplo, hay prácticas que pueden ser catalogadas en mayor medida como interpretativas, en estas no aparece o está ausente el objeto, procedimiento y, en las prácticas que son en mayor medida operativas, aparecen algunos o ninguno de los objetos, *conceptos*, *argumentos* y *propiedades*.

En el sistema de prácticas implicado en la resolución de un problema matemático, en cada una de las prácticas, siempre emergen nuevos objetos matemáticos, los cuales nuevamente pueden ubicarse en alguna de las seis categorías mencionadas. Algunos de estos objetos emergentes son empleados en las siguientes prácticas para su realización.

Cabe señalar que la emergencia de estos nuevos objetos da cuenta, por un lado, de la producción de conocimiento matemático, pues se trata de objetos que a priori no eran conocidos por el sujeto que resuelve el problema y que resultan de la realización de la práctica. Por otro lado, dado que algunos de los objetos matemáticos emergentes en cierta práctica son empleados en otras prácticas, se da cuenta también de la naturaleza relacional de la matemática.

Por otra parte, como se ha señalado con anterioridad, a lo largo de la resolución del problema matemático el sujeto se apoya en los objetos matemáticos primarios, los cuales son empleados en algunas de sus facetas o perspectivas. La manera en la que el sujeto pasa de una perspectiva a otra del objeto matemático se describe en la siguiente subsección.

2.2.3 Los procesos y facetas de los objetos matemáticos

En la resolución de un problema matemático el sujeto lleva a cabo procesos cognitivos. Los procesos actúan sobre los objetos matemáticos en la forma “entrada>proceso>producto”, es decir, la entrada es un objeto matemático que se encuentra en una primera faceta y, a través del proceso, dicho objeto es llevado o visto desde otra de sus facetas, entendido al objeto en esta segunda faceta como el producto del proceso. A continuación, se describen los procesos cognitivos y facetas de los objetos matemáticos.

i) *Idealización/Materialización*. Mediante el proceso de idealización un objeto matemático que se encuentra en una *faceta ostensiva* (observable públicamente) es llevado a una *faceta no ostensiva* (desmaterializada o pensada por el sujeto).

En la clase de matemáticas hay muchos ejemplos de la realización del proceso de idealización, por ejemplo, cuando un profesor dibuja sobre el pizarrón una línea e indica a sus alumnos que se trata de una recta, el docente motiva el proceso de idealización en sus alumnos, los cuales consideran o piensan en dicho trazo como una recta. El dibujo, aunque sea solo un segmento parcialmente recto y dibujado a mano alzada y sin regla, es la faceta ostensiva del concepto abstracto o pensado "recta". El proceso de idealización también se realiza en el caso de las expresiones algebraicas, por ejemplo, cuando un sujeto observa escrita la expresión $f(x)=3x^2-4x-2$, el sujeto desmaterializa la expresión y piensa en una función cuadrática.

Por otro lado, el proceso inverso de la idealización es el de materialización, el cual va de un objeto que se encuentra en su *faceta no ostensiva* o pensada a una *faceta ostensiva* u observable, por ejemplo, cuando un sujeto piensa en la expresión algebraica de una circunferencia con centro en el punto (1,-3) y radio $r=3$ y luego mediante el proceso de materialización escribe sobre el papel o el pizarrón la ecuación $(x-1)^2+(y+3)^2=9$.

Otro ejemplo del proceso de materialización puede observarse en la resolución de un problema matemático, mediante la producción escrita del sujeto, lo que dice en voz alta o lo que gesticula el sujeto al resolver el problema, sin embargo, es importante señalar que no todo objeto matemático pensado por el sujeto es materializado al realizar el sistema de prácticas. En relación con esto último, en el contexto de la investigación que se realiza en matemática educativa, frecuentemente el investigador, al indagar las concepciones de los estudiantes, además de plantear la resolución de algún problema matemático de interés, también realiza algunas preguntas a los alumnos para lograr tener una idea o un acercamiento a las concepciones que los sujetos tienen acerca de los objetos matemáticos que no fueron materializados durante el proceso de resolución del problema.

ii) *Particularización/Generalización*. El proceso de particularización permite al sujeto ir de un objeto general, objeto que se encuentra en una faceta intensiva, al objeto en su forma particular, objeto en faceta extensiva. Por ejemplo, el docente lleva a cabo el proceso de particularización cuando en la clase de matemáticas escribe en el pizarrón la expresión general $y=mx+b$, la cual es la expresión de la recta en faceta intensiva y, posteriormente, al continuar con su discurso, el docente escribe la expresión particular $y=2x-4$, que es la faceta extensiva de la expresión de la recta.

Otros ejemplos de la realización del proceso de particularización son la particularización de la fórmula que describe el procedimiento de la suma de fracciones $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d+b\cdot c}{b\cdot d}$, la cual frecuentemente es sugerida a los estudiantes para resolver problemas como el de la suma $\frac{2}{3}+\frac{1}{5}=\frac{2\cdot 5+3\cdot 1}{3\cdot 5}=\frac{10+3}{15}=\frac{13}{15}$; también se tiene la particularización de la propiedad matemática del Teorema de Pitágoras $a^2+b^2=c^2$ para calcular, por ejemplo, la longitud de la hipotenusa "c" de un triángulo rectángulo que tiene catetos $a=3$ y $b=4$ es decir, $c^2=3^2+4^2=9+16=25$, por lo que la hipotenusa tiene longitud $c=\sqrt{25}=5$.

Por otro lado, el proceso de generalización es el proceso inverso al de particularización y va de un objeto particular, faceta extensiva, al objeto en su forma general, faceta intensiva, por ejemplo, en la clase de matemáticas algunas veces se parte de ejemplos particulares de multiplicación $x^2\cdot x=x^3$, $x^2\cdot x^5=x^7$, objetos en faceta extensiva, para luego pasar al caso general $x^a\cdot x^b=x^{a+b}$, objeto en faceta intensiva.

Un ejemplo muy famoso de la realización del proceso de generalización es el de la obtención de la fórmula que permite calcular la suma de los números naturales consecutivos, por ejemplo, se parte calculando la suma de los primeros dos números 1+2=3; luego la suma de los primeros tres números 1+2+3=6; posteriormente la suma de los primeros cuatro números 1+2+3+4=10; y, mediante el proceso de generalización, es posible escribir la suma de "n" números naturales consecutivos mediante la expresión $S_n=1+2+3+\cdots+n$. Por último, ya en la faceta intensiva o contexto general de la suma, es posible deducir la famosa fórmula $S_n=\frac{n(n+1)}{2}$ para calcular la suma de "n" números naturales consecutivos, es decir, se trata de la resolución de un problema que requiere de la realización de un procedimiento que se apoya en objetos que se encuentran en la faceta intensiva.

La obtención de la fórmula requiere sumar S_n dos veces en orden inverso, es decir:

$$\begin{array}{c} 1+2+3+\cdots+(n-1)+n=S_n \\ n+(n-1)+\cdots+3+2+1=S_n \\ \hline (n+1)+(n+1)+\cdots+(n+1)=2S_n \end{array}$$

Como se sumaron "n" términos, el resultado de la suma puede escribirse como $n(n+1)=2S_n$, y al despejar se obtiene $S_n=\frac{n(n+1)}{2}$.

En general, en la realización del sistema de prácticas implicado en la resolución de algún problema matemático, los conceptos, las propiedades y los procedimientos matemáticos pueden presentarse particularizados o bien, según el problema, generalizados.

iii) *Representación/Significación*. Estos procesos relacionan las facetas expresión (significante) y contenido (significado) de los objetos matemáticos. Mediante el proceso de representación un objeto matemático, objeto contenido, es puesto en correspondencia con otro objeto, objeto expresión. Por ejemplo, en el contexto de la geometría analítica, la perpendicularidad de una recta con pendiente m_1 respecto a otra recta con pendiente m_2 puede ser expresado mediante $m_1 \cdot m_2=-1$, en este caso, la perpendicularidad es un objeto matemático de la categoría propiedad que tiene el rol de contenido o significado de la expresión algebraica $m_1 \cdot m_2=-1$ que es un objeto de la categoría lenguaje.

El proceso de significación, inverso del proceso de representación, permite al sujeto atribuir un contenido o significado a un objeto expresión. Por ejemplo, cuando se observa la expresión $y=x+2$ y se le tribuye el significado de una recta con inclinación de 45° respecto a la horizontal que corta el eje ordenado en 2.

Una manera de entender el significado en el EOS es a través del constructo *función semiótica*. Se le llama función semiótica en analogía con el concepto de función matemática "$y=f(x)$" donde “x” (dominio) es considerado como el significado e “y” (contradominio) como el significante, de esta manera, el constructo función semiótica puede emplearse en lugar de los procesos de representación/significación.

Cabe señalar que en la resolución de un problema matemático se establece una trama de funciones de semióticas, esto es, se establecen diversas relaciones de significación entre los diferentes objetos matemáticos, por ejemplo, un objeto de tipo lenguaje, un símbolo, puede relacionarse semióticamente con un objeto de tipo argumento.

iv) *Reificación/Descomposición*. El proceso de reificación permite ir de una perspectiva sistémica del objeto a una perspectiva unitaria, mientras que el proceso inverso, el proceso de descomposición, va del objeto unitario a la perspectiva sistémica. Por ejemplo, el concepto de número (objeto unitario) es construido a partir de un proceso de reificación a lo largo de distintos niveles educativos y se inicia en un primer momento con el estudio de los números naturales, posteriormente los números enteros, luego le sigue el estudio de los números racionales, posteriormente los irracionales y, en el último grado de educación básica, los números reales.

Como ejemplo del proceso de descomposición se tiene el concepto de función, el cual puede descomponerse para su enseñanza en funciones algebraicas y trascendentes, las primeras descompuestas a su vez en polinómicas, racionales y a trozos, mientras que las segundas en exponenciales, logarítmicas y trigonométricas.

v) *Personalización/Institucionalización*. El proceso de personalización permite obtener un objeto matemático desde una perspectiva personal, individual o cognitiva, mientras que el proceso de institucionalización lleva a obtener un objeto desde una perspectiva institucional o epistémica, la cual es acorde con la perspectiva o postura de una comunidad. Por ejemplo, cuando un profesor enseña el contenido de la elipse lo hace desde una perspectiva institucional, impartiendo un conocimiento válido matemáticamente y tomando en cuenta los aprendizajes esperados según el marco curricular, mientras que lo que el alumno logró comprender o el conocimiento que logró construir de dicho contenido se trata de la perspectiva personal.

En la siguiente sección se describe la interpretación ontosemiótica del Mapa Híbrido y por último se presentan los pasos a seguir en la construcción de dichos mapas.

2.3 La interpretación ontosemiótica del mapa híbrido

Desde la perspectiva del EOS el MH puede ser interpretado como una representación gráfica del sistema de prácticas implicado en la resolución de un problema matemático. Una manera de ilustrar la interpretación del MH desde el EOS puede realizarse a través del siguiente ejemplo. Considérese el siguiente problema contextualizado que implica la resolución de un sistema de ecuaciones 2x2: "*Ana tiene el triple de edad que su hijo de Jaime. Dentro de 15 años, la edad de ana será el doble que la de su hijo. ¿Cuántos años más que Jaime tiene su madre?*" (Llopis, Costa, Gómez y Calvo, 2010c), el cual se muestra resuelto en la figura 2.4.

De acuerdo con el EOS, la resolución del problema implica la realización de un sistema de tres prácticas diferenciadas, la primera, que nombraremos *matematización*, la segunda, de *resolución* y, la tercera, que llamaremos *interpretación*, ver la primera columna de la tabla 2.1. Es importante señalar que los nombres asignados a las prácticas son considerados como representativos de la actividad realizada.

En la primera columna de la tabla 2.1 se muestran las prácticas con las cuales se describirá el proceso de resolución del problema. Por otra parte, la segunda columna presentan los objetos matemáticos que es posible observar en cada una de las prácticas y, en la tercera columna, se describen ejemplos de estas categorías.

Figura 2.4. Resolución del problema contextualizado que implica la resolución de un sistema de ecuaciones (Llopis, Costa, Gómez y Calvo, 2010c).

Solución

a = edad de Ana

j = edad de Jaime

La edad de Ana es el triple que la de Jaime:

$a = 3j$

Dentro de 15 años, la edad de Ana será el doble que la de Jaime:

$(a + 15) = 2(j + 15)$

Tenemos el sistema

$$\begin{cases} a = 3j \\ a + 15 = 2(j + 15) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = 3j \\ a + 15 = 2j + 30 \end{cases}$$

Resolvemos por substitución

$$a = 3j$$

$$a + 15 = 2j + 30 \rightarrow 3j + 15 = 2j + 30 \rightarrow$$

$$\rightarrow j = 30 - 15 = 15 \rightarrow a = 3 \cdot 15 = 45$$

Ana tiene 45 años y su hijo Jaime 15, por tanto, Ana tiene 30 años más que su hijo.

Por ejemplo, en la primera práctica de Matematización se observa que están implicados los objetos Conceptos, Argumentos y Propiedades. En la categoría del objeto Conceptos es posible identificar “Ana”, “Jaime”, “edad”, “años”, “doble” y “triple”, de los cuales algunos conceptos son matemáticos y otros no matemáticos, pero que al conectarse mediante palabras enlace forman argumentos, por ejemplo, el argumento “Edad de Ana” está formado por el concepto “Edad” y el concepto “Ana”.

Del mismo modo en el que dos conceptos se relacionan entre sí para dar lugar a una proposición con cierto significado, también los argumentos se relacionan con otros objetos matemáticos dando lugar a nuevos significados, esto mediante el establecimiento de funciones semióticas. Por ejemplo, se observa una función semiótica de tipo argumentativa, en otras palabras, se observa la realización de un proceso de significación en el señalamiento "a=edad de Ana" categorizado en el objeto Argumentos, esto debido a que el símbolo "a" categorizado en el objeto "Lenguaje" adopta el rol de significante al relacionarse con el argumento "edad de Ana" pensado como el significado, por lo que en las siguientes prácticas cuando se emplee el símbolo "a" se estará entendiendo que se trata de la "edad de Ana". También se realiza el mismo proceso entre el símbolo "j" y el argumento "edad de Jaime".

En el objeto Propiedades, también de la primera práctica, encontramos evidencia de la realización del proceso de significación cuando los autores atribuyen el contenido o significado "La edad de Ana es el triple que la edad de Jaime" al significante objeto lenguaje "$a=3j$", es decir, también se observa una relación semiótica de tipo argumentativa entre Lenguaje y Propiedades, lo mismo sucede con la segunda propiedad "Dentro de 15 años, la edad de Ana será el doble que la de Jaime" a la cual se le vincula con la expresión $(a+15)=2(j+15)$ como significante. Por último, cabe señalar que esta práctica puede ser catalogada como una práctica interpretativa, debido a la ausencia del objeto matemático procedimiento.

De acuerdo con el EOS, cada vez que se lleva a cabo una práctica emergen nuevos objetos matemáticos, de este modo a partir de los conceptos, argumentos, propiedades y de la realización de los procesos de significación fue posible obtener como emergentes dos expresiones algebraicas "a=3j" y "$(a+15)=2(j+15)$".

Tabla 2.1. Prácticas y Objetos matemáticos en la resolución del problema que implica un sistema de ecuaciones 2x2.

Práctica	Objeto matemático	Descripción del Objeto matemático
Matematización	Conceptos	Ana, Jaime, edad, años, doble, triple
	Argumentos	a=edad de Ana j=edad de Jaime
	Propiedades	—La edad de Ana es el triple que la edad de Jaime $a=3j$ —Dentro de 15 años, la edad de ana será el doble que la de Jaime $(a+15)=2(j+15)$
Resolución	Conceptos	Sistema, resolvemos, sustitución
	Argumentos	—Tenemos el sistema —Resolvemos por sustitución
	Procedimiento	$\begin{cases} a=3j \\ a+15=2(j+15) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a=3j \\ a+15=2j+30 \end{cases}$ $a=3j$ $a+15=2j+30$ $3j+15=2j+30$ $j=30-15=15$ $a=3\cdot 15=45$
Interpretación	Conceptos	Ana, años, hijo, Jaime
	Argumentos	—Ana tiene 45 años —Y su hijo Jaime 15 —Por tanto, Ana tiene 30 años más que su hijo.

En la segunda práctica, de Resolución, intervienen los objetos Conceptos, Argumentos y Procedimiento. Los objetos emergentes de la primera práctica son consideramos como casos particulares del concepto general “*sistema de ecuaciones*”, lo cual permite argumentar en la segunda práctica que se requiere resolver dicho sistema mediante el método de sustitución, desencadenando de este modo la realización del objeto procedimiento mediante el método de sustitución. La realización del procedimiento permite a su vez la emergencia de otros objetos matemáticos nuevos, “j=15” y “a=45”, los valores solicitados en el problema.

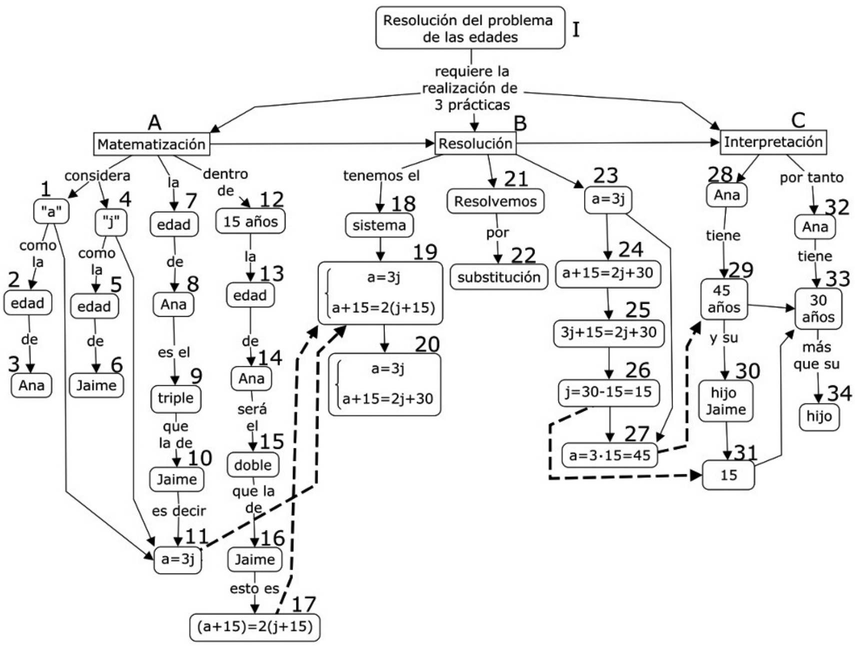
Por último, en la tercera práctica, de Interpretación, los autores, apoyados en los conceptos y en el proceso de significación de los argumentos realizados en la primera práctica (a=edad de Ana y j=edad de Jaime), atribuyen significados a los objetos emergentes de la segunda práctica previa. Esto les permite argumentar que “Ana tiene 45 años”, “Y su hijo Jaime 15” y plantear la tesis “Ana tiene 30 años más que su hijo”, lo cual resuelve el problema, ver la tabla 2.1.

La tabla 2.1 presenta el sistema de prácticas y los objetos matemáticos implicados en la resolución del problema que implica la resolución de un sistema de ecuaciones 2x2, sin embargo, es importante señalar que dicho sistema de prácticas también puede ser representado mediante la técnica del MH, ver el MH horizontal de la figura 2.5.

Como puede verse en la figura 2.5, la representación del sistema de prácticas mediante el MH tiene otras ventajas, por ejemplo, el MH al ser un esquema de la resolución del problema, permite identificar de un vistazo las prácticas y los objetos que intervienen en cada una de ellas, así como también las conexiones entre los objetos de las distintas prácticas, lo cual no es posible realizar mediante el empleo de la tabla o al considerar la producción de los sujetos que resolvieron el problema ilustrado en la figura 2.4.

La práctica de Materialización y sus objetos matemáticos correspondientes que se muestran la tabla 2.1 están etiquetados en el MH de la figura 2.5 mediante el símbolo “A” y las rutas de lecturas 1-2-3, 4-5-6, 7-8-9-10-11 y 12-13-…-16-17. La práctica de Resolución y sus objetos están etiquetados en el mapa mediante “B” y las rutas 18-19-20, 21-22 y 23-24-25-26-27, y también la práctica de Interpretación está etiquetada en el mapa mediante el símbolo “C” y las rutas de lectura 28-29-30-31 y 32-33-34.

Figura 2.5. Mapa Híbrido correspondiente a la resolución del problema de edades.



El mapa también permite advertir conexiones al interior de una misma práctica y entre las prácticas, mediante la primera, en la práctica “A” se tienen las conexiones 1-11 y 4-11, en B se tiene 23-27 y en C se tiene 29-33 y 31-33. Mediante la segunda, entre la práctica A y B se tienen las conexiones 11-19 y 17-19, y entre las prácticas B y C se tienen 26-31 y 27-29. Se trata, pues, de tres prácticas A, B y C que no están aisladas sino que están coordinadas, pues existe un orden para la realización de estas, y también conectadas, ya que los objetos emergentes son empleados en las prácticas subsecuentes, configurando así el sistema de prácticas que permite la resolución del problema. Cabe señalar que algunas de las conexiones señaladas anteriormente no son señaladas explícitamente por el sujeto que resuelve el problema, figura 2.4, ni en la tabla 2.1 de prácticas y objetos, sino que dichas conexiones son advertidas por el docente o investigador que construye el MH y resultan al analizar la actividad matemática implicada en la resolución del problema.

Una mirada rápida al MH también permite observar los objetos emergentes en cada una de las prácticas, así en la práctica A emergen 11 y 17, en la práctica B los objetos 26 y 27, y en la práctica C emerge el argumento 28-29-30-31.

Por último, en el MH también es posible advertir la realización de algunos procesos cognitivos, por ejemplo, el proceso de significación se lleva a cabo en la práctica A cuando al símbolo en 1 se le atribuye como significado la ruta 2-3 y al símbolo en 4 se le atribuye como significado la ruta 5-6, también se realiza el proceso de representación pues el argumento 12-13-14-15-16 es representado de manera algebraica mediante 17. Por otra parte, en la práctica B se lleva a cabo el proceso de algoritmización mediante 23-24-25-26-27, y en la práctica C se lleva a cabo el proceso de rectificación en el que a partir de los argumentos 28-29 y 30-31 se construye el argumento mayor 32-33-34.

El análisis desde el EOS de un MH que describe la resolución de un problema matemático permite, antes que nada, tener un acercamiento objetivo a la actividad matemática del sujeto que resolvió el problema, en este sentido, se trata, pues, de un análisis gráfico que se apoya en los elementos teóricos del EOS y no desde las creencias del investigador o del docente.

Según el EOS, el sistema de prácticas, los objetos matemáticos y los procesos pueden ser vistos desde la faceta personal/institucional, de esta manera un MH puede ser personal o institucional según si este corresponde a la producción de un estudiante o al de un experto respectivamente. La comparación de un MH personal con uno institucional, que describen la resolución de un mismo problema matemático, permite al investigador explorar las diferencias o semejanzas entre ambos, esto es, permite conocer cuáles son los significados personales que el estudiante pone en juego a partir de las prácticas, los conceptos y sus conexiones, en relación con aquellos puestos juego por el experto.

2.4 Procedimiento para la construcción de mapas híbridos

El MH puede ser construido a partir de un conjunto de pasos que se apoyan en los señalamientos del EOS acerca de la actividad matemática implicada en la resolución de un problema matemático por parte de un estudiante, un grupo de estudiantes, un profesor o el autor de un libro de texto. El procedimiento para construir el MH, correspondiente a la resolución de un problema matemático, consiste de dos etapas, la primera, la obtención y tratamiento de la producción matemática y, la segunda, la construcción del MH. Estas se describen a continuación.

Etapa 1. Obtención y tratamiento de la producción matemática

Desde la perspectiva del EOS, cuando un sujeto resuelve un problema matemático, este lleva a cabo un sistema de prácticas donde participan objetos matemáticos y procesos. Las prácticas son entendidas aquí como todo lo que hace el sujeto para resolver el problema, de manera que la producción oral y escrita da cuenta de la realización de dicho sistema de prácticas. Por lo tanto, en la elaboración del MH se requiere de una primera etapa en la cual se debe obtener la producción y realizar un tratamiento de esta, de tal manera que sea posible la construcción del MH de una manera más organizada. Los pasos de esta primera etapa son los siguientes:

i) Obtener la producción oral y escrita del sujeto que resuelve el problema. Para obtener la producción oral y escrita es necesario que el sujeto que resuelve el problema explique en voz alta la resolución del problema al mismo tiempo que escribe sus acciones sobre el papel. En otras palabras, no es suficiente tener solamente la producción escrita sobre el papel, pues considerar solo la producción escrita implicaría prescindir de otros objetos matemáticos que también intervienen en la actividad matemática, los cuales posiblemente fueron pensados pero no materializados verbalmente o bien fueron enunciados verbalmente pero no se tuvo registro alguno.

La producción oral y escrita puede obtenerse al grabar el audio del discurso oral y guardando el registro del discurso escrito o lo que el sujeto escribe sobre el papel, también se puede emplear una pluma electrónica, del inglés *Smartpen*, que permite generar un archivo de video del registro sincronizado de audio y escritura para su reproducción en la computadora. El registro de la producción oral y escrito de un sujeto al resolver un problema matemático también puede realizarse mediante el empleo de plataformas de comunicación, por ejemplo *Microsoft Teams* o *Zoom*, para la realización de videoconferencias, solo basta con enviarle el problema al sujeto, solicitarle que lo resuelva y lo explique en voz alta al mismo tiempo que se graba la videollamada.

Dado que en la resolución del problema algunos objetos matemáticos son pensados por el sujeto no son materializados, ni de forma escrita ni oral, algunas veces es necesario que el investigador plantee algunas preguntas al sujeto investigado para poder indagar acerca de estos objetos puestos en juego.

ii) Transcribir la producción oral. Se realiza la transcripción del discurso oral del sujeto que resuelve el problema; algunas veces es necesario modificar la transcripción original al eliminar palabras o argumentos repetitivos o innecesarios, al simplificar la transcripción cuando esta sea muy larga o al reemplazar algunas palabras por otras equivalentes. En todas las anteriores se debe mantener la idea original del proceso de resolución del problema.

iii) Relacionar la producción escrita con la transcripción de la producción oral. Se requiere vincular la transcripción con la producción escrita, indicando los momentos donde el discurso oral fue emitido por el sujeto para apoyar la producción escrita. Para esto se puede presentar la transcripción junto a la producción oral y empleando flechas para indicar donde fue enunciada la transcripción verbalmente, o bien, en la transcripción emplear números los cuales deben aparecer en la producción escrita a modo de índices.

iv) Diferenciar las prácticas que intervienen en la resolución del problema. Habiendo representado la producción escrita vinculada con la transcripción de la producción oral, lo que sigue es identificar las prácticas o etapas del proceso de resolución y luego nombrar cada una de acuerdo a la actividad principal que en esta se realiza.

En algunas prácticas se lee y se interpreta el problema planteado y muchas veces el que resuelve el problema parafrasea el texto que describe el problema, agregando uno que otro elemento nuevo, sin embargo, dicha repetición no hace más que mostrar el procesamiento de la información y los datos, es por eso que a este tipo de práctica se le conoce como práctica de interpretación. Otras prácticas son parcial o totalmente operativas, en las cuales se lleva a cabo un procedimiento matemático apoyado de algunos argumentos o bien se lleva a cabo totalmente un procedimiento matemático, respectivamente.

Una vez que se tiene la transcripción de la producción oral y escrita del sujeto al resolver el problema matemático, esta puede ser empleada para construir el MH. Esto es, la producción es la materia prima para la construcción del MH. A continuación se describen los pasos para la construcción del MH.

Etapa 2. Construcción del mapa híbrido

v) Elegir y emplear algún programa informático *(software)* para la construcción del MH. No existe un software especializado para la construcción del MH, sin embargo, es posible utilizar algún programa de acceso gratuito o de paga para la construcción del MH, en particular, en esta obra, para ilustrar la construcción del MH utilzaremos el programa gratuito *CmapTools*.

El software CmapTools está especializado en la construcción de mapas conceptuales, desde esta lógica, es posible encontrar ventajas y desventajas de este programa para la construcción del MH, y, aunque contenga un menú de fórmulas matemáticas, esto no muchas veces resulta suficiente en la construcción del MH donde se requiere una escritura más sofisticada de expresiones matemáticas. Sin embargo, es posible valerse de algunos trucos tales como agrupar dos objetos superpuestos, uno con texto y otro solo con expresión algebraica, pues CmapTools no permite la escritura combinada de texto con expresiones algebracias; eliminar palabras enlace para conectar objetos de dos prácticas diferentes, entre otros.

vi) Escribir la situación-problema. Una vez elegido el software, la construcción del MH inicia al escribir en la parte superior del mapa el texto que describe la situación-problema. La situación puede entenderse como el contexto y el problema generalmente se plantea a través de una o más preguntas acerca del contexto que se está problematizando. La situación-problema se equipara al tema o pregunta focal que se escribe al principio de un mapa conceptual.

vii) Escribir las prácticas en la parte inferior de la situación-problema. En el caso del MH de dos o más prácticas, las prácticas pueden quedar conectadas a través de palabras enlace o simplemente presentándolas como etapas de un proceso. Los nombres de las prácticas tienen que ser tales que expresen la actividad principal realizada en estas y quedan definidas cuando se realiza el paso (iv).

viii) En la transcripción, identificar los objetos matemáticos que intervienen en cada práctica y escribirlos en el MH debajo de cada una. Los conceptos se expresan mediante palabras, símbolos o representaciones pictóricas y pueden ser tanto de tipo matemático como no matemático, esto último se refiere a objetos mencionados en el contexto (edificios, automóviles, árboles, antenas, por mencionar algunos). Los argumentos se escriben como cadenas de conceptos conectados mediante palabras enlace y se identifican por que justifican las acciones realizadas en las prácticas o validan los resultados obtenidos. Las propiedades algunas veces pueden representarse en el mapa como cadenas de conceptos, sin embargo, la mayoría de las veces se expresan mediante alguna expresión algebraica o fórmula.

ix) Analizar el mapa generado y realizar conexiones. Las conexiones se realizan sin el empleo de palabras enlace entre los objetos matemáticos que aparecen en distintas prácticas. Estas conexiones dan cuenta de las relaciones implícitas entre los objetos de las distintas prácticas que el sujeto establece al resolver el problema. Las conexiones son representadas por el sujeto que construye el mapa, ya que la mayoría de las veces no son señaladas explícitamente por el que resolvió el problema.

x) Interpretar el MH mediante el EOS. Se emplean los constructos de prácticas, sistema de prácticas, objetos matemáticos, funciones semióticas, así como algunos procesos cognitivos y facetas para describir la actividad matemática representada mediante el mapa híbrido.

En el procedimiento descrito anteriormente, el último paso es opcional, pues el MH puede construirse aún con el desconocimiento del EOS mediante la realización de los pasos que van del (i) a (ix), mientras que la realización del paso (x) se deja para aquel profesor o investigador que, apoyado explícitamente en los constructos del EOS, desea indagar las concepciones que tienen los estudiantes acerca de determinado concepto o propiedad matemática, o bien para mejorar su práctica de enseñanza.

Es importante señalar que los pasos (i) a (ix) en el procedimiento anterior tienen sustento en los señalamientos del EOS respecto a la actividad matemática que realiza el sujeto al resolver cierto problema matemático, esto es, de acuerdo con el EOS, el sujeto al resolver el problema T lo desmenuza en subproblemas T_1, T_2,…, T_i, los cuales a su vez son resueltos mediante la realización y coordinación de las prácticas correspondientes p_1, p_2,…,p_i., pasos (iv), (vi) y (vii). La organización y conexión entre las prácticas configura lo que en el EOS se conoce como sistema de prácticas, el cual permite resolver el problema inicial "P", pasos (i), (ii), (iii) y, en dicho sistema de prácticas interviene un conjunto de objetos matemáticos interconectados, pasos (viii) y (ix) los cuales pueden ser clasificados en las categorías de lenguaje, conceptos, propiedades, procedimientos y argumentos. El paso (v), relacionado con el uso del software, solo indica la herramienta computacional con la cual se construirá el MH.

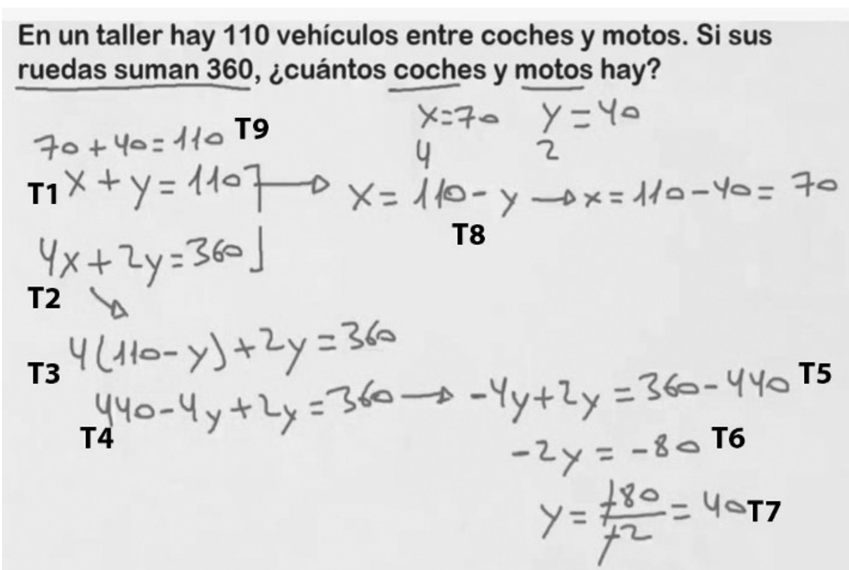
Para ilustrar cómo se construye un MH mediante los pasos anteriores, en la siguiente sección se abordará la construcción de un MH para el caso de la resolución de un problema que implica el contenido matemático de sistema de ecuaciones de nivel secundaria.

2.5 Construcción de un mapa híbrido

Para ilustrar la construcción de un MH mediante el procedimiento de la sección anterior, en este apartado se considera la producción obtenida a partir de un vídeo que presenta la resolución de un problema matemático de álgebra que implica el contenido de sistemas de ecuaciones lineales 2x2, a saber, *“En un taller hay 110 vehículos entre coches y motos. Si sus ruedas suman 360. ¿cuántos coches y motos hay?”* (AcademiaJAF, 2018). A continuación, se describen los pasos (i) a (ix) del procedimiento de construcción del MH, en este caso, un MH de tipo horizontal.

i) **Obtener la producción oral y escrita del sujeto que resuelve el problema.** Se obtuvo la producción oral y escrita a partir de un vídeo que explica la resolución de un problema matemático. En el vídeo, el autor escribe en una pantalla la resolución del problema, al mismo tiempo que realiza una explicación en voz alta de su resolución. La producción escrita se presenta en la figura 2.6.

Figura 2.6. Producción escrita del problema de los coches y motos (academiaJAF, 2018).



ii) **Transcribir la producción oral.** A partir del vídeo (AcademiaJAF, 2018) se realizó la transcripción de la producción oral. Cabe señalar que una vez realizada la transcripción, se eliminaron algunos argumentos repetitivos, así como señalamientos que no aportan a la resolución de problema. La transcripción editada se presenta en la siguiente tabla 2.2.

Tabla 2.2. Prácticas y transcripción de la producción oral.

Práctica	Transcripción del discurso oral e índices
A	Tenemos que **transformar** este **lenguaje numérico** y de **letras** en un **lenguaje algebraico**, con **expresiones algebraicas**, buscando **igualdades.** Podemos **llamar “x”** a la **incógnita coches** y **motos** a la incógnita **“y”.**
B	Pues **dice** que **hay 110 vehículos**, entre **coches y motos**, (T1) lo que significa que si **sumo** los **coches** que **son “x”** más las **motos** que **son “y”** tenemos **110 unidades.** Y dice que hay **360 ruedas.** Tomemos en cuenta que los **coches** tienen **4 ruedas** y las **motos 2,** (T2) por lo que **4 ruedas** por el **número de coches “x”** más **2 ruedas** por el **número de motos “y”** es igual a **360 ruedas.** Tenemos el **sistema de ecuaciones** que permitirá **resolver** este **problema.**
C	Vamos a **resolver** por el **método de sustitución, despejamos** lo que **vale “x”. “x” es igual a 110 menos “y”.** (T3) Y ya podemos **sustituir** el **valor de “x”** en esta ecuación de aquí, 4 por “x”, 4 por lo que vale “x” que es 110 menos “y”, pues tenemos que 4 por 110 menos “y” más 2y lo demás es exactamente igual, igual a 360. (T4) Por lo tanto, esto es igual a 4 por 110 es 440 menos 4 por “y” más 2y igual a 360. (T5) De donde **pasamos** el **término** que no lleva **incógnita** y tenemos -4y y +2y por aquí igual a 360 menos 440. (T6) -4y más 2y es -2y, 360 menos 440 es -80,

	(T7) Por lo que ***despejando "y"*** *da -80 dividido entre -2, esto y esto se pone* ***positivo****, -80 entre -2 es igual a 40, por lo que hay 40 motos "y" igual a 40. Una vez que* ***sabemos "y"*** *podemos* ***despejar*** *en esta* ***ecuación*** *y hallar el* ***número de coches****, hallar lo que* ***vale "x"****,* *(T8) por lo que* ***"x" es igual a 110 menos "y", 110 menos 40****, por lo que* ***es igual a 70****, por lo que 70 coches y 40 motos.*
D	*(T9) Para* ***comprobarlo*** *nos vamos* ***aquí*** *y* ***sustituimos****, la* ***"x"*** *y la* ***"y"*** *por lo que* ***vale cada uno de ellos*** *y* ***comprobamos*** *efectivamente que* ***70 más 40 es igual a 110.***

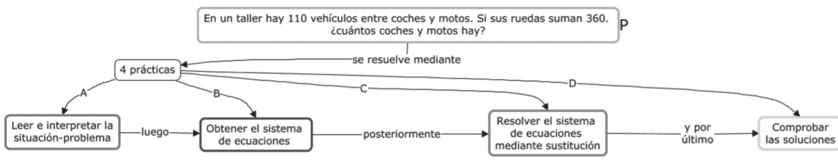
Si bien, la transcripción de la producción oral es extensa, sin embargo, en la construcción del MH se considerarán únicamente aquellos objetos más relevantes en la resolución, esto es, se trata de un MH de tipo descriptivo, ver sección 1.4.5.

iii) Relacionar la producción escrita con la transcripción de la producción oral. La relación entre los elementos de la producción escrita, figura 2.6, y los elementos de la producción oral se llevó a cabo mediante el empleo de etiquetas numeradas, T1, T2,…,T7 y T8, esto es, las etiquetas se muestran tanto en la segunda columna de la tabla 2.2 como en la figura 2.6, de esta manera al mirar la producción escrita en la figura 6 también es posible advertir en la transcripción del discurso oral qué fue lo que el autor señaló en voz alta a lo largo del proceso de resolución del problema.

iv) Diferenciar las prácticas que intervienen en la resolución del problema. A partir de la transcripción del discurso oral y la producción escrita es posible advertir cuatro prácticas, ver la primera columna de la tabla 2.2. Se trata de la práctica "A" donde se realiza la lectura e interpretación del problema, la práctica "B" donde se obtiene el sistema de ecuaciones, la práctica "C" que permite resolver el problema mediante el método de sustitución y la práctica D empleada para comprobar que las soluciones encontradas fueron correctas.

v-vi-vii) Software, situación, problema y prácticas. En la construcción del MH se empleó el software CmapTools y, mediante dicho software, se escribió la situación-problema y también los nombres representativos de las prácticas que fueron identificadas en el paso anterior. La figura 2.7 muestra cuál debe ser el avance del MH hasta el paso (vii).

Figura 2.7. Primer avance del MH hasta el paso (vii) del procedimiento de construcción. Fuente: elaboración propia



En el primer avance del MH, se etiquetaron con "P" la situación-problema y mediante "A", "B", "C" y "D" las prácticas, ver también la primera columna de la tabla 2.2.

viii) Identificar los objetos matemáticos de las prácticas y escribirlos en el MH. En la tabla 2.2, en la primera columna se muestran las prácticas y, en la segunda columna, la transcripción correspondiente del discurso oral en cada práctica. En la transcripción, los objetos matemáticos fueron escritos en negritas para identificarlos.

Los objetos matemáticos identificados en la tabla 2.2 y sus representaciones simbólicas correspondientes en la figura 2.6 se representan debajo de cada práctica indicada en el primer avance del MH, figura 2.7. Las etiquetas T1, T2,…, T8 y T9 son útiles en la construcción del mapa, pues nos permitirán escribir en el segundo avance del MH lo señalado tanto en el discurso oral como en el escrito. Con base en lo anterior, el segundo avance del MH hasta el paso (ix) se ilustra en la figura 2.8.

De acuerdo con la transcripción en la tabla 2.2, la práctica A tiene que ver con la lectura e interpretación del problema *"Tenemos que* ***transformar*** *este* ***lenguaje numérico*** *y de* ***letras*** *en un*

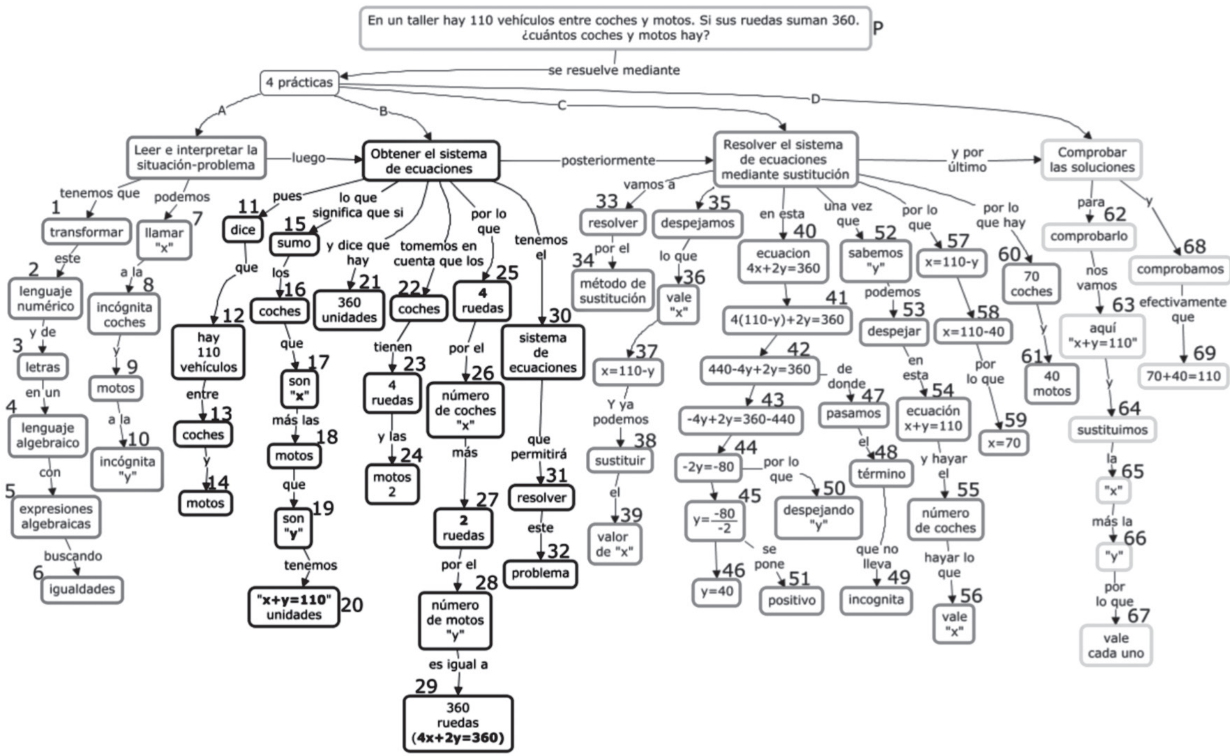
lenguaje algebraico*, con* ***expresiones algebraicas****, buscando* ***igualdades****. Podemos* ***llamar "x"*** *a la* ***incógnita coches*** *y* ***motos*** *a la* ***incógnita "y"*** *"* y está representado en el mapa mediante las rutas de lectura 1-2-3-4-5-6 y 7-8-9-10. Cabe señalar que no hay elementos simbólicos correspondientes para esta práctica en la producción escrita de la figura 2.6.

De acuerdo con la tabla 2.2 el primer párrafo de la transcripción del discurso oral de la práctica B, a saber, *"Pues* ***dice*** *que* ***hay 110 vehículos****, entre* ***coches*** *y* ***motos****, lo que significa que si* ***sumo*** *los* ***coches*** *que* ***son "x"*** *más las* ***motos*** *que* ***son "y"*** *tenemos* ***110 unidades****. Y dice que hay* ***360 ruedas****. Tomemos en cuenta que los* ***coches*** *tienen* ***4 ruedas*** *y las* ***motos 2****,"* está representado en el MH mediante las rutas de lectura 11-12-13-14; 15-16-17-18-19-20, donde el objeto 20 proviene de la producción escrita, T1 en la figura 2.6; el objeto 21 y la ruta 22-23-24.

Mientras que el segundo párrafo de la transcripción del discurso oral de la práctica B *"por lo que* ***4 ruedas*** *por el* ***número de coches "x"*** *más* ***2 ruedas*** *por el* ***número de motos "y"*** *es igual a* ***360 ruedas****. Tenemos el* ***sistema de ecuaciones*** *que permitirá* ***resolver*** *este* ***problema****"* está representado por las rutas 25-26-27-28-29, donde el objeto 29 proviene de la T2 en la producción escrita de la figura 2.6, y la ruta 30-31-32.

Se deja al lector la verificación de que la transcripción de las prácticas C y D y las expresiones algebraicas indicadas mediante T3, T4, …,T8 y T9, en la producción escrita de la figura 2.6, se encuentran representadas en las rutas de lecturas restantes del mapa de la figura 2.8., objetos numerados del 33 al 61 en la práctica C y del 62 al 69 en la práctica D.

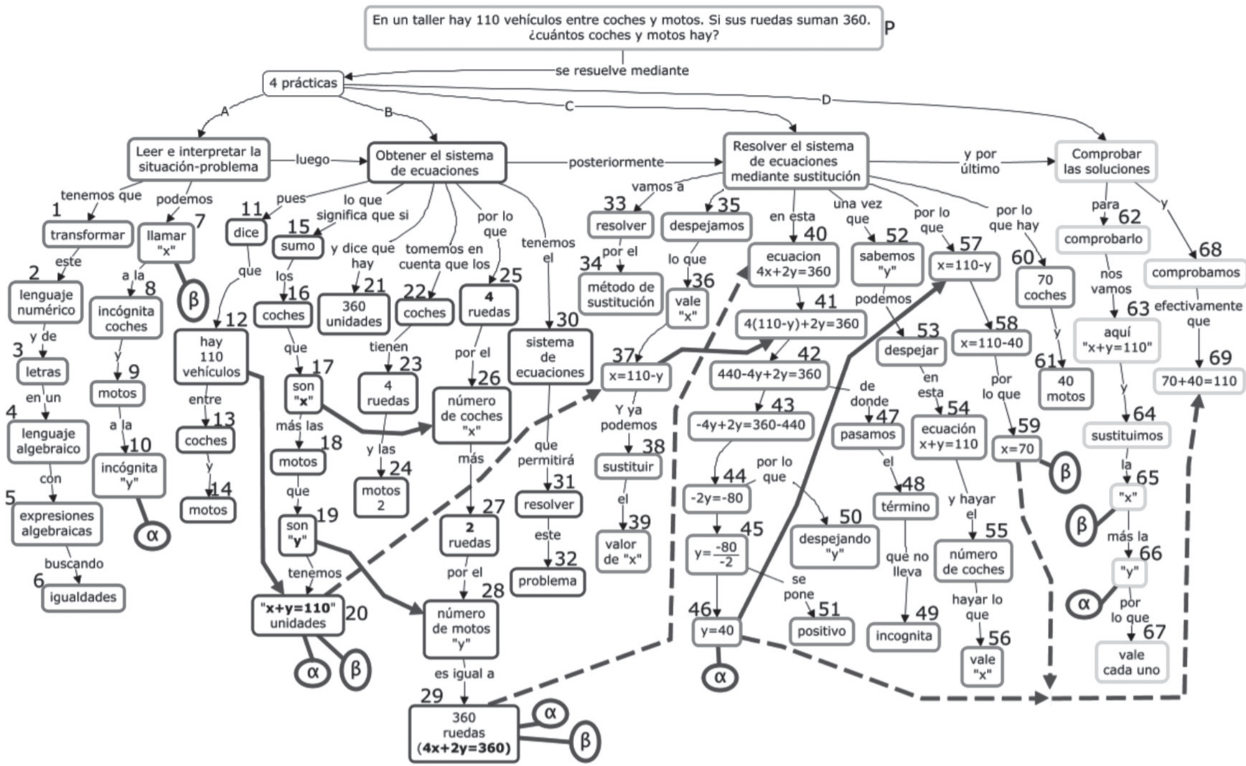
Figura 2.8 Segundo avance del MH que describe la resolución del problema de los coches y motos.
Fuente: elaboración propia.



ix) Analizar el mapa y realizar conexiones. Una vez que se han representado las prácticas y los objetos que intervienen en cada una de ellas, el último paso en la construcción del MH consiste en analizar la representación e identificar las conexiones entre los objetos. En la figura 2.9 las conexiones se representan mediante líneas que terminan en flecha, líneas continuas o segmentadas, pero sin palabras enlace, y también mediante conectores, uno de los símbolos empleados en los diagramas de flujo para dar continuidad al diagrama en una misma página, ver el objeto "conector" en la tabla 1.2. A continuación se presenta la versión final del MH.

Las conexiones entre los objetos del MH pueden ocurrir al interior de una misma práctica o entre objetos de diferente práctica. Como ejemplos del primer tipo de conexión se tienen las conexiones 12-20, 17-26 y 19-28 en la práctica B y las conexiones 37-41 y 46-57 en la práctica C y, como ejemplos del segundo tipo de conexión se tienen, la conexión entre el objeto 7 de la práctica A, A7, y el objeto 20 de la práctica B, B20, mediante el conector "β" y denotada como A7-B20; la conexión A10-B20 mediante el conector "α"; así como también las conexiones A7-B29, A7-C59, A7-D65 mediante el conector "β" y las conexiones A10-B29, A10-C46 y A10-D66 mediante el conector "α".

Figura 2.9. Versión final del MH que describe la resolución del problema de los coches y motos.
Fuente: elaboración propia.



2.6 Ejercicios

1. Elabora una tabla de Prácticas y Objetos matemáticos (tabla 2.1) para describir la resolución de cada uno de los siguientes problemas:

   (a) Juan gasta la cuarta parte del dinero que lleva en la compra de un pantalón y luego dos quintos del resto en una mochila. Si aún tiene \$127, ¿Cuánto dinero tenía antes de realizar las compras?

   (b) Trabajando juntos, dos albañiles tardan en construir una barda en 14 horas. ¿Cuánto tiempo tardarán en hacerlo por separado si uno es el doble de rápido que el otro?

2. Emplea el procedimiento para la construcción de mapas híbridos (sección 2.4) para construir los MH correspondientes a la resolución de los siguientes problemas:

   (a) En un congelador hay el doble de paletas de mango que de limón y el triple de coco que de mango y de limón juntos. En total hay 312 paletas. Determina cuántas paletas hay de cada sabor.

   (b) Patricia mide 12cm más que Sonia y la altura promedio de ambas amigas es 160cm. ¿Cuánto mide Sonia?

Capítulo 3

EL MAPA HÍBRIDO EN LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

3.1 Introducción

En este capítulo se describen algunas aplicaciones del MH en la práctica docente del profesor de matemáticas. En estas aplicaciones solo se requiere conocimiento de la técnica del MH, sin embargo, es importante señalar que sería de más provecho si en la implementación también se tuviese conocimiento del sustento teórico.

En este apartado, se describe al MH como una ayuda visual que le permite al docente reflexionar sobre aquellos aspectos que debe ser considerados antes de abordar la resolución de un problema matemático en el aula. También se presenta al MH como material didáctico, como un instrumento para promover el aprendizaje, y se describen algunas maneras en las que el MH podría implementarse en clase. Finalmente, se discuten algunas sugerencias que podrían ser consideradas por aquel profesor o investigador interesado en trabajar con sus alumnos al MH como material didáctico.

3.2 El mapa híbrido como objeto de reflexión de la práctica docente

En la enseñanza de las matemáticas, el MH también puede ser empleado como objeto de reflexión de la práctica docente, es decir, como una ayuda para el docente para pensar en torno a las prácticas de resolución de los problemas matemáticos que aborda con sus alumnos en el aula.

En la clase de matemáticas se resuelven problemas, por lo tanto, es necesario que el docente cuente con herramientas para reflexionar acerca de la actividad matemática que desarrolla en el aula, permitiéndole alejarse de una práctica improvisada de resolución de problemas. En este sentido, se propone al MH como una ayuda gráfica para el docente, que le permitirá planificar la actividad matemática antes, durante y al finalizar de su intervención en el aula.

La construcción de un MH, que representa de manera esquemática la resolución de un problema matemático, demanda al docente pensar, en un primer momento, y para sí mismo, sobre las prácticas, los objetos matemáticos y los procesos cognitivos que intervienen en la resolución del problema. En otras palabras, el MH lleva al docente a reflexionar acerca de su propio conocimiento matemático y sobre cómo hace uso de este para resolver el problema, se trata, pues, de un momento en el que el docente investiga el conocimiento relacionado con el problema, se asegura de que la resolución propuesta sea correcta e, indaga, si es el caso, sobre las distintas formas de resolución, para elegir aquella forma más útil para lograr los objetivos de aprendizaje.

Posteriormente, en un segundo momento y con la finalidad de lograr que el MH sea accesible para sus alumnos, se requiere que el docente piense en cómo organizar los objetos, cómo conectarlos y presentarlos en el MH de tal manera que pueda ser legible y entendido por sus estudiantes (Hernández, Dueñas, Báez y Moreno, 2020). Se trata pues de un momento en el que el docente se pone en el lugar del alumno y modifica el MH con la intención de presentarle una representación más clara y sencilla del proceso de resolución del problema.

El paso por estos dos momentos llevan al docente a repensar el proceso de enseñanza por el que conduce a sus alumnos, ya que le permiten tomar en cuenta los conocimientos matemáticos previos de sus alumnos, los cuales son requeridos para poder comprender cómo se resuelven los problemas; a pensar en los objetos matemáticos emergentes, que se refiere al conocimiento que se produce durante la resolución del problema; a reflexionar sobre los posibles obstáculos epistemológicos, en el sentido de Bachelard en 1987, es decir, en las “dificultades psicológicas que no permiten una correcta apropiación del conocimiento objetivo… entendidas como construcciones previas de explicación personal, alternativa y, por sobre todo, funcional” (Marzábal, Merino y Rocha, 2014, p. 73); así como en los significados que se deben poner en juego durante el proceso de resolución.

Cuando el docente aborda la resolución de un problema matemático en el aula, el docente se puede apoyar en la reflexión que llevó a cabo en la construcción del MH para monitorear el proceso de resolución que llevan a cabo los estudiantes. La comparación entre el MH elaborado por el docente y la producción de sus estudiantes le permiten lograr un acercamiento al proceso de construcción de conocimiento matemático. Esto indudablemente llevaría al docente a la toma de conciencia y a un proceso de cambio de su práctica docente. A continuación, en la siguiente sección, se aborda otra aplicación del MH.

3.3 El mapa híbrido como material didáctico

Un material didáctico puede ser entendido como todo aquel objeto, aparato o medio de comunicación que ayuda a entender y a conceptualizar en los distintos momentos del proceso de aprendizaje (Alsina, Burgués y Fortuny, 1988). Se trata de materiales como libros, carteles, fotos, audios, vídeos, simulaciones computacionales, modelos concretos, analogías, por mencionar algunos. Sin embargo, es importante señalar en este punto que, el empleo de dichos materiales no garantiza el logro de un aprendizaje.

En la literatura, se ha señalado que "no es el material *per se* el que transmite cierto conocimiento, sino que este se constituye en una ayuda para resolver ciertos problemas prácticos en un determinado contexto y suele usarse para provocar acciones, mentales, más allá de físicas" (Alegre, Domínguez, Landaluce y Pípolo, 2018), en este sentido, la utilidad del material didáctico en la clase de matemáticas tiene que ver con que estos posibilitan o favorecen el desarrollo de ciertos procesos cognitivos implicados en la actividad matemática.

Con base en lo anterior, puede decirse que el MH que describe el proceso de resolución de un problema matemático, también puede emplearse como un tipo de material didáctico, ya que acciones tales como la de organizar partes o fragmentos de un MH epistémico; completar un MH epistémico incompleto al que se han borrado o eliminado algunos objetos matemáticos, conexiones o prácticas; o construir el MH "desde cero", también permiten promover la realización de procesos cognitivos tales como el de materialización, argumentación, idealización, generalización, metacognición, entre otros procesos. En otras palabras, el MH como material didáctico tiene que ver con la manera en que el alumno entiende dicho recurso y realiza acciones sobre éste.

Otro aspecto del uso del MH como material didáctico está relacionado con el señalamiento de algunos investigadores de que los "materiales didácticos son la *praxis* de los conocimientos del maestro, debido que, a través de ellos se devela la capacidad del docente para adaptar los contenidos" (Manrique y Gallego, 2013, p. 107), en este sentido, la elaboración de material didáctico mediante el MH por parte del docente implica el ejercicio cognitivo que consiste en la representación esquemática del sistema de prácticas, o lo que es lo mismo, la representación organizada de los objetos matemáticos y de sus conexiones implicados en la resolución del problema, lo cual está estrechamente relacionado tanto con el conocimiento matemático como con el conocimiento didáctico del profesor.

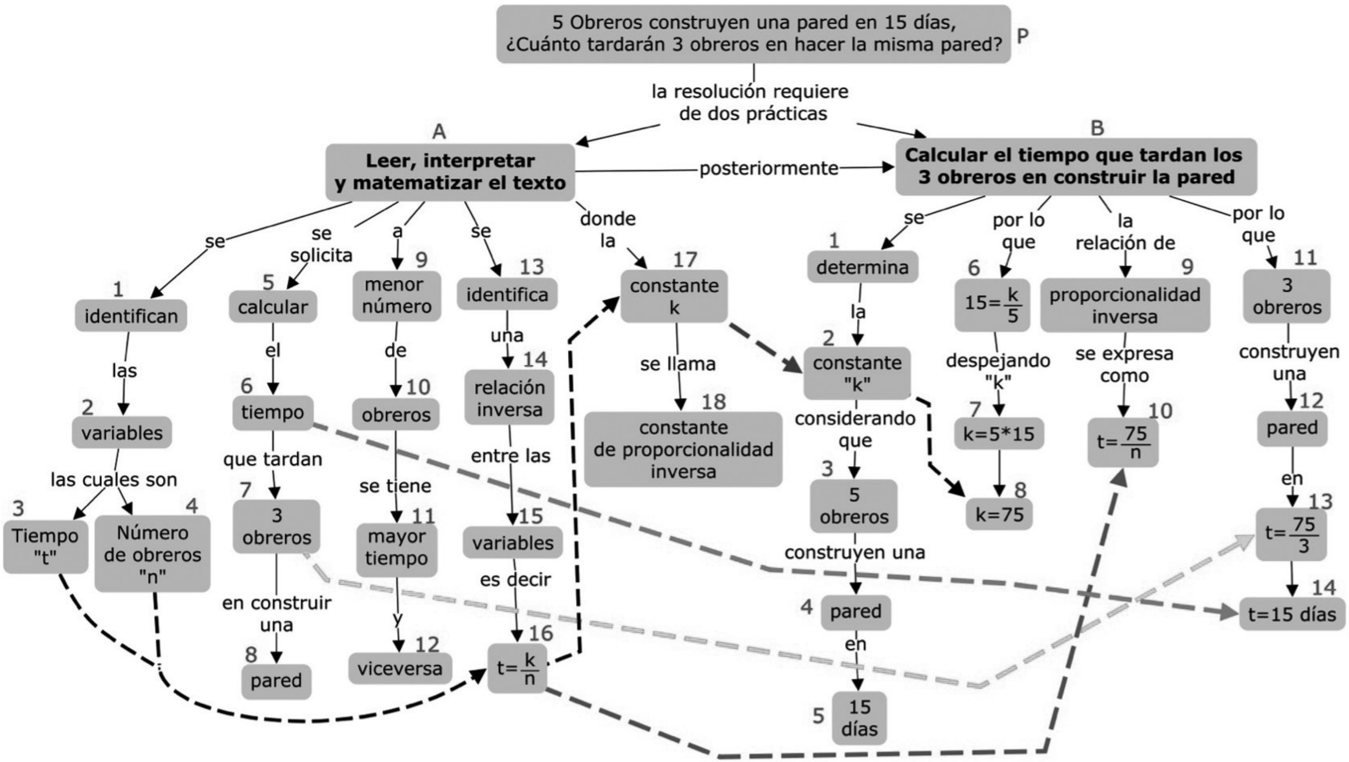
La enseñanza de las matemáticas apoyada en el MH como material didáctico no pretende, de hecho, que los alumnos "vean" la interpretación "correcta" del MH que se les proporciona para trabajar, más bien, el objetivo del MH es permitir y favorecer la emergencia de diversas interpretaciones acerca de este. Se trata, pues, de que ante cierto contenido matemático a ser aprendido, mediante el trabajo individual o colaborativo entre pares, se exploren diferentes casos de MH, se analicen similitudes y diferencias entre los casos abordados, se identifiquen características o patrones en el MH, se establezcan conjeturas acerca de cuál debería ser la organización correcta, por mencionar algunas habilidades matemáticas que pueden promoverse mediante el empleo del MH como material didáctico.

A continuación, en los siguientes apartados se describen tres formas en las que se puede emplear el MH en su interpretación como material didáctico, a saber, el (i) MH con prácticas y objetos eliminados, el (ii) MH como rompecabezas y la (iii) construcción del MH.

3.3.1 MH con prácticas y objetos eliminados

Para ilustrar este tipo de material didáctico, considérese el MH epistémico que se presenta en la figura 3.1, el cual describe la resolución de un problema de proporcionalidad inversa que se aborda usualmente en el nivel educativo básico, en secundaria, a saber, *"5 obreros construyen una pared en 15 días, ¿cuánto tardarán 3 obreros en hacer la misma pared?".*

Figura 3.1. MH epistémico **completo** que representa la resolución de un problema de proporcionalidad inversa de nivel secundaria.



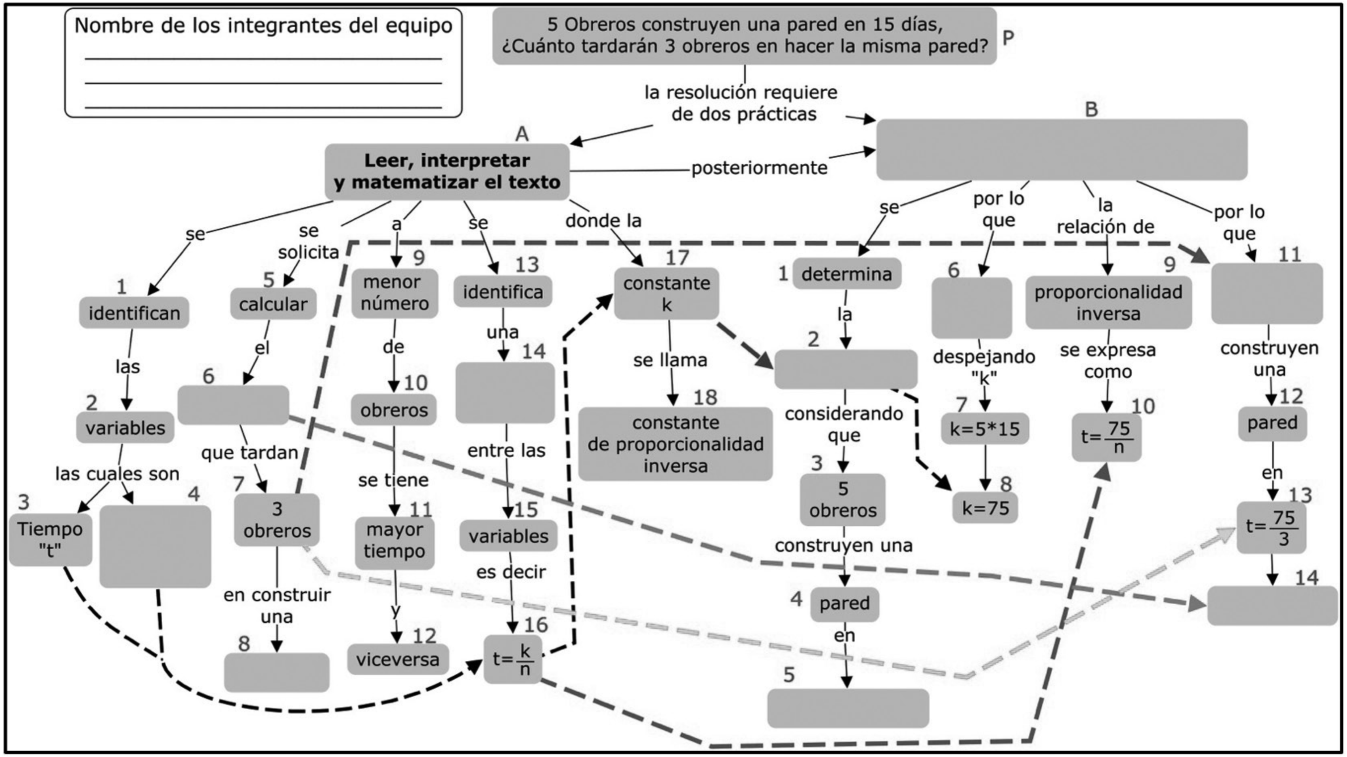
El MH muestra que, para resolver el problema, se requieren dos prácticas A y B, la primera práctica consta de 18 conceptos matemáticos y no matemáticos en la cual se realiza la lectura, la interpretación y la formulación matemática de la situación que describe el texto y, la segunda, consta de 14 conceptos, matemáticos y no matemáticos, y tiene que ver con el cálculo del tiempo que le toma a los 3 obreros en construir la pared.

Aunque todas las prácticas que presenta el MH son relevantes para la resolución del problema, con el objetivo de construir el material didáctico, el docente selecciona algunas prácticas que considera que los estudiantes pueden advertir del proceso de resolución. En el caso del MH de la figura 3.1, que consta de solo dos prácticas, se puede optar por eliminar la práctica B.

Así mismo, respecto a los objetos matemáticos y no matemáticos, de la práctica A se puede considerar: *eliminar A4*, para identificar las variables (aunque también se puede elegir la variable en A3 y conservar A4); *eliminar A6*, pues se requiere que el alumno identifique lo que se le está solicitando calcular; *eliminar A8*, el cual, junto con A7 vienen a darle sentido a la actividad matemática, sin embargo, eliminar A7 no sería adecuado ya que, al haber eliminado A6 no se le daría la pauta al alumno para reflexionar acerca del sentido del argumento A5-A6-A7-A8; *eliminar A14*, como la propiedad matemática clave que debe ser recordada para la resolución del problema. Se trata, pues, de eliminar 4 elementos de la primera práctica A, 3 conceptos y 1 propiedad matemática.

De igual manera, en la práctica B se puede considerar: *eliminar B2*, del argumento B1-B2-B3-B4-B5 que justifica el primer paso del procedimiento de resolución del problema; *eliminar B5*, que implica necesariamente que el alumno deba leer el texto para tener presente las condiciones que plantea el problema; *eliminar B6*, que requiere que el alumno sustituya lo que valen las variables; eliminar B10, para que el alumno a escriba la expresión algebraica de la proporcionalidad inversa que resuelve el problema; *eliminar B11 y B14*, para poder darle sentido a la tesis B11-B12-B13-B14 que permite resolver el problema. Se trata entonces de la eliminación de cinco elementos del MH.

Figura 3.2. MH epistémico **incompleto** que representa la resolución de un problema de proporcionalidad inversa de nivel secundaria.



No existe una regla para la eliminación de las prácticas, objetos y conexiones, más bien, la eliminación de estos elementos va a depender de lo que el docente considere pertinente o importante que el alumno deba considerar o tomar en cuenta cuando este reflexiona acerca de la resolución del problema. Con base en las eliminaciones realizadas, el MH resultante quedaría como se ilustra en la figura 3.2.

Es importante agregar que las conexiones entre los objetos que se representan en el MH también ayudan al estudiante a completar correctamente el mapa, por ejemplo, el objeto A14 en la figura 3.2, podría resultar difícil de advertir, sin embargo, cuando se consideran las conexiones A3 y A4 con A16, y también la conexión entre A16 con el argumento A17-A18 es posible indicar que lo debe escribirse en A14 es “proporción inversa” o ”relación de proporcionalidad inversa”. Los mismo ocurre con la conexión entre A7 y B11, la cual ayuda a advertir que lo que se debe escribir en B11 es “3 obreros”.

Finalmente, la hoja de trabajo a ser implementada en el aula consta del MH incompleto y un apartado para que los estudiantes registren sus nombres completos, ver la figura 3.2.

3.3.2 Construcción del MH por parte del alumno

Otro uso del MH como material didáctico tiene que ver con el empleo de la técnica del MH por parte del estudiante, con el propósito de construir mapas y representar la resolución de problemas matemáticos. A diferencia del trabajo con mapas epistémicos incompletos, tratado en la sección 3.3.1, respecto al cual el estudiante tiene que reflexionar acerca del proceso de resolución del problema que llevó a cabo un experto docente, en el caso que abordamos en esta sección, el MH construido por parte del alumno correspondería a un MH de tipo cognitivo o personal.

La construcción del MH por parte de los estudiantes es una tarea que, al igual como ocurre con la construcción del mapa conceptual, promueve la realización del proceso de metacognición, esto es debido a que el estudiante no solo debe pensar en la resolución del problema, sino que también debe reflexionar acerca de la representación esquemática de la resolución del problema, es decir, en la representación de las etapas del proceso de resolución, en la organización de los objetos matemáticos que intervienen y emergen en la resolución del problema y de las conexiones que se establecen entre estos.

Es importante destacar que, para que los estudiantes puedan construir sus propios mapas, se requiere que el docente dedique una o dos sesiones para abordar en plenaria en el aula algunos ejemplos de mapas que describen la resolución de problemas. De acuerdo con la experiencia de los autores, la comprensión del proceso de construcción del MH por parte de los estudiantes es casi inmediata, de hecho, la construcción del MH es muy intuitiva a tal grado que con solo discutir un par de ejemplos el alumno ya podría empezar a realizar los primeros esbozos del MH.

El MH a ser enseñado a los estudiantes va a depender del nivel educativo que estos se encuentren cursando, por ejemplo, si los estudiantes son nivel educativo básico se sugiere enseñarles la construcción del MH de dos prácticas, ver sección 1.4.4, pues este tipo de mapas permite trabajar con dos prácticas diferenciadas conectadas entre sí, una de tipo conceptual y la otra de tipo operativa. Sin embargo, con estudiantes de nivel medio superior y superior se sugiere emplear más verticales u horizontales de dos o más prácticas.

En la clase de matemáticas, sobre todo en el nivel básico de primaria y secundaria, los estudiantes no están acostumbrados a mostrar la evidencia de sus razonamientos matemáticos al materializar sobre el papel sus ideas cuando se enfrentan a la tarea de resolver un problema matemático, es decir, los alumnos, cuando se les plantea la tarea de resolver un problema, usualmente solo escriben algunos cálculos y la respuesta o la solución del problema planteado, mientras que los conceptos, argumentos y propiedades matemáticas empleados, las cuales dan cuenta de los significados puestos en juego en la resolución del problema, nunca son materializados y quedan como mero recuerdo en la mente del estudiante pero sin ningún registro de estos sobre el papel. Al respecto, la actividad de construcción del MH por parte del alumno “lo obliga” de alguna manera a materializar estos aspectos conceptuales implicados en la resolución del problema.

3.4 Consideraciones del MH como material didáctico

En la implementación del MH como material didáctico, MH incompletos o construcción del MH, es importante considerar algunos aspectos para tratar de obtener buenos resultados en el aprendizaje. Estos se describen a continuación:

i) Los mismos equipos de trabajo. Las parejas o equipos de trabajo de alumnos deben ser los mismos en cada sesión, es decir, que el alumnado no presente, inasistencias, para que los miembros que integran cada equipo sean los mismos en cada sesión. Lo anterior, debido a que la tarea de completar el MH requiere de la discusión, de intercambiar puntos de vista, de negociar significados y de la toma de decisiones acerca de cuál es la respuesta correcta que completa el MH epistémico. Se trata, pues, de generar un tipo de "historial de trabajo", que da cuenta de la forma de trabajo desarrollado por los estudiantes que conforman el equipo, por lo que integrar un alumno nuevo o la falta de algún miembro en el equipo podría impactar negativamente en la construcción de conocimiento.

ii) MH representativos. Los mapas a ser trabajados con los alumnos deben ser tal que describan la resolución de problemas representativos de cierto conjunto de problemas. Se trata de abordar en clase un conjunto de mapas representativos, por medio de los cuales sea posible abordar diferentes aspectos del contenido a ser enseñado, por ejemplo, al tratar en clase el contenido de área de polígonos regulares, un mapa representativo podría ser sobre el área de figuras simples, otro sobre figuras compuestas, otro sobre el cálculo de área de situaciones reales (p. ej. El área de algún terreno agrícola)

En el caso de actividades donde se plantee la tarea de completar mapas epistémicos, sección 3.3.1, es importante que dichos mapas resueltos en clase describan la resolución de problemas representativos, para que estos puedan ser tomados como ejemplos o guías por parte de los estudiantes para la resolución de otros problemas similares a ser trabajados de manera individual.

Por otra parte, en el caso de las actividades de construcción de mapas por parte de los estudiantes, los mapas que representen la resolución de problemas representativos deben ser aquellos que el docente haya abordado como ejemplos en plenaria. La exposición en plenaria de estos mapas por el docente permitirá mostrar a los alumnos las prácticas epistémicas que el profesor realiza al resolver el problema.

iii) MH sin ambigüedades. Los mapas elaborados por el docente no deben ser ambiguos, en el sentido de que las rutas de lectura en el mapa no puedan ser mal interpretadas por los alumnos; también deben ser simples, en el sentido de que el mapa contenga los objetos y las conexiones esenciales que permitan la comprensión de la resolución del problema; no deben ser extensos, por lo que debe ser posible colocar el mapa completo, con un tamaño de letra adecuado sin esforzar la vista en la lectura y en una sola hoja; y también deben ser claros, de tal manera que puedan guiar a los estudiantes en la comprensión y en la resolución de otros problemas similares.

iv) Destacar las conexiones entre los objetos. La actividad matemática en la resolución de un problema es relacional ya que, de inicio a fin de la resolución, el sujeto va conectando en su mente diferentes objetos matemáticos, ver sección 2.2.2. Sin embargo, frecuentemente ocurre que dichas conexiones son realizadas de manera no ostensiva, es decir, solo quedan a nivel de razonamiento, pero nunca son materializadas ni comunicadas por el resolutor. Por lo anterior, una vez que se ha construido el MH, cuando se tienen las prácticas y los objetos matemáticos en cada práctica, es necesario llevar a cabo un análisis del MH y luego realizar las conexiones entre los objetos matemáticos intervinientes y emergentes del sistema de prácticas.

v) Interés de los estudiantes en aprender mediante el MH. Es importante motivar a los estudiantes en el empleo del MH como una herramienta o ayuda para el aprendizaje de las matemáticas. La primera vez que se presenta un mapa a un alumno podría desanimarlo, esto debido a que a primera vista podría parecer más difícil entender el MH que el problema matemático que describe, sin embargo, lo que ocurre es todo lo opuesto. El MH guía al alumno paso a paso a lo largo del proceso de resolución del problema, por lo que, si se enseña a los estudiantes cómo leer el mapa de manera adecuada y, sobre todo, se les muestra cómo el MH es permite describir la resolución de un problema matemático de manera esquemática, es muy probable que los estudiantes terminen convenciéndose de lo fácil que es entender y construir un MH.

Los aspectos anteriores son el resultado de las observaciones que se han llevado a cabo en algunas implementaciones que se han realizado del MH como material didáctico en algunas escuelas.

3.5 Ejercicios

1. Para cada una de las siguientes situaciones problematizadas, resuelve y construye el MH epistémico completo y, a partir de este último, construye el MH incompleto.

   (a) Un rectángulo tiene perímetro 8 metros y su altura es el triple que su base. ¿Cuál es la altura del rectángulo?

   (b) Una cisterna con capacitad de 400 m3 se llena de agua en un lapso de 10 horas al abrir seis llaves de paso, ¿En cuántas horas se llenarán 2 cisternas de 500 m3 cada una al abrir cuatro llaves de paso?

   (c) Se apoya una escalera recta de 300 cm de longitud sobre una pared. El pie de la escalera está alejado 60 cm de la pared, ¿Cuál es la altura que alcanza sobre la pared?

Capítulo 4

DESCRIPCIÓN DE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS MEDIANTE MAPAS HÍBRIDOS

4.1 Introducción

Con el propósito de mostrar al lector la versatilidad de la técnica de representación gráfica del MH, a continuación, en este capítulo, se presentan diferentes mapas que describen la resolución de problemas matemáticos que regularmente se abordan desde el nivel educativo primaria y hasta el nivel universitario. Con lo anterior, se busca dar una idea al lector, a través de algunos ejemplos de MH, de cómo podrían construirse los mapas según el nivel educativo y así mismo, que puedan considerar estos MH como un apoyo para la construcción de sus propios MH según el nivel educativo, contexto y necesidades docentes.

4.2 Problemas de nivel básico, primaria

En esta sección se discuten y se abordan mediante el MH una actividad de nivel primaria, de cuarto grado, del libro Desafíos Matemáticos. La elección del grado y de la actividad fue aleatoria, por lo que mediante el MH es posible abordar cualquier otra actividad matemática, desde primer grado y hasta sexto grado.

En el libro de Desafíos Matemáticos de cuarto grado (Rosales, Barrientos, Issa, López y Tovilla, 2022), en la página 26, se plantea a los estudiantes la realización de la actividad 10 “La tienda de doña Lucha”, ver la figura 4.1, la cual consiste en leer los datos que se muestran en la tabla, analizarlos y, posteriormente, se solicita resolver los problemas 1 y 2.

La tabla muestra dos productos alimenticios distintos, “tortas” y “bebidas”, cuatro variedades de cada producto y sus respectivos precios. El primer problema a ser resuelto es el problema *“1. Juan compró una torta de pollo y un jugo, y Raúl compró dos tortas de chorizo y un vaso de agua de limón. ¿Quién de los dos pagó más?”.*

El MH que describe la resolución del problema 1 se muestra en la figura 4.2. Debido a que se trata de un problema de nivel básico, la resolución del problema se describe mediante la realización de dos prácticas A y B, la práctica A de tipo interpretativa y la práctica B de tipo operativa, las cuales se encuentran conectadas entre sí.

Figura 4.1. Actividad 10 “La tienda de doña lucha” grado, consigna 1, problema 1 (Rosales, Barrientos, Issa, López y Tovilla, 2022, p. 26).

Consigna 1

En equipos, analicen la siguiente información y luego contesten lo que se pide. No se vale usar calculadora.

En la tienda de doña Lucha se venden estos alimentos:

Tortas		Bebidas	
Pollo	$14.75	Licuado	$13.50
Chorizo	$15.75	Jugo	$9.45
Huevo	$10.50	Vaso de agua de sabor	$5.60
Especial	$21.80	Yogur	$15.95

1. Juan compró una torta de pollo y un jugo, y Raúl compró dos tortas de chorizo y un vaso de agua de limón. ¿Quién de los dos pagó más?

Mediante la práctica “A”, se entiende que el contexto del problema se refiere a la tienda de doña lucha, la cual vende alimentos, ver ruta “A1-A2-A3”. Los alimentos que vende son tortas “A5”, que pueden ser de “A6”, “A8”, “A10” y “A12” y bebidas “A14”, que pueden ser “A15”, “A17”, “A19” y “A21”.

Por otra parte, en la práctica B se describe lo que compró Juan “B1”, “B2-B3-B4”, y lo que pagó “B5-B6-B7”; también lo que compró Raúl “B8”, “B9-B10-B11”, y lo que pagó “B12-B13-B14”. Las conexiones entre las prácticas A y B permiten resolver el problema, así se tiene que las conexiones “A7-B3” y “A18-B4” permiten obtener el total del consumo de Juan, esto es “B7”. De igual manera, las conexiones “A9-B10” y “A19-B11” también permiten obtener el consumo de Raúl, a saber “B14”. La comparación entre “B7” y “B14” en “B15”, permite concluir que la persona que pagó más fue Raúl, “B16-B17”.

Por otro lado, el problema 2 de la consigna *“Doña Lucha vende a los maestros comida para llevar; cada pedido lo mete en una bolsa y a cada una le pone una etiqueta con el nombre del maestro y la cuenta. Anoten los alimentos que podría haber en las bolsas de Jessica y de Rogelio”*, podría resultar un poco más difícil para los estudiantes debido a que a partir de lo que pagaron o de las cuentas de la maestra Jessica, $29.25, y el maestro Rogelio, $31.25, se busca que el estudiante advierta cuáles fueron los alimentos que compraron los maestros.

Figura 4.2 MH que describe la resolución de problema 1, consigna 1 (Rosales, Barrientos, Issa, López y Tovilla, 2022, p. 26). Fuente: Elaboración propia mediante *CmapTools*.

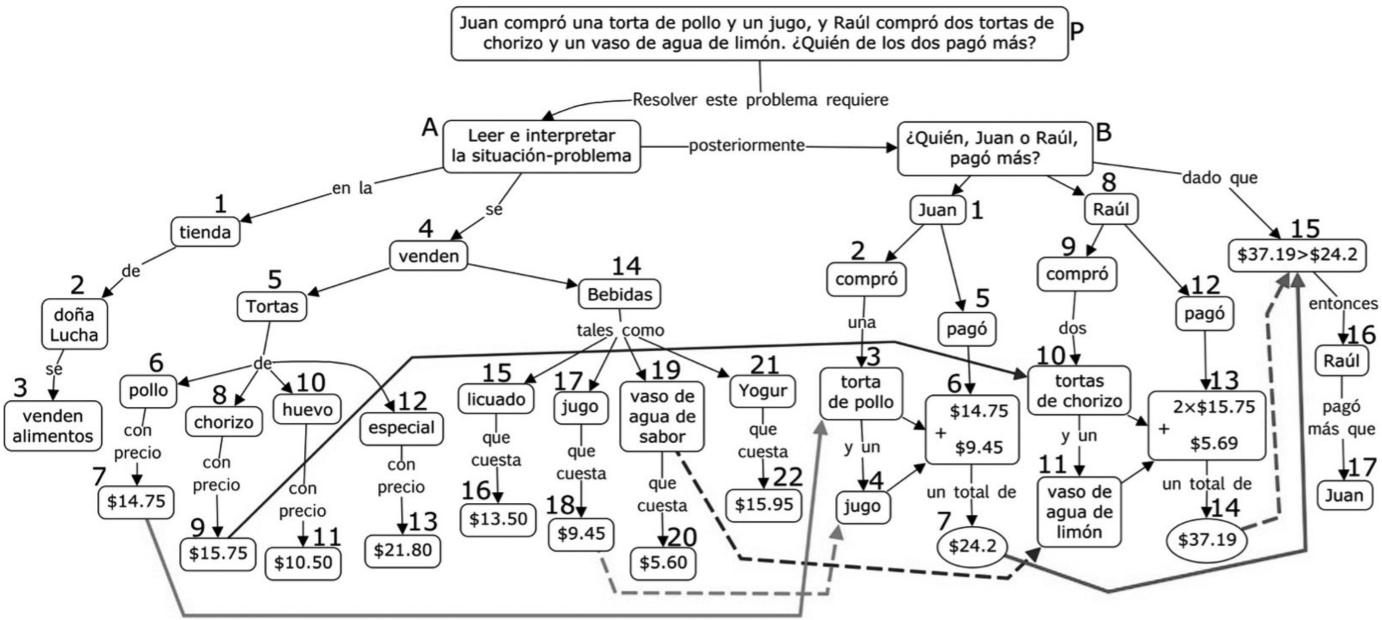


Figura 4.3. Actividad 10 “La tienda de doña lucha” grado, consigna 1, problema 2 (Rosales, Barrientos, Issa, López y Tovilla, 2022, p. 26).

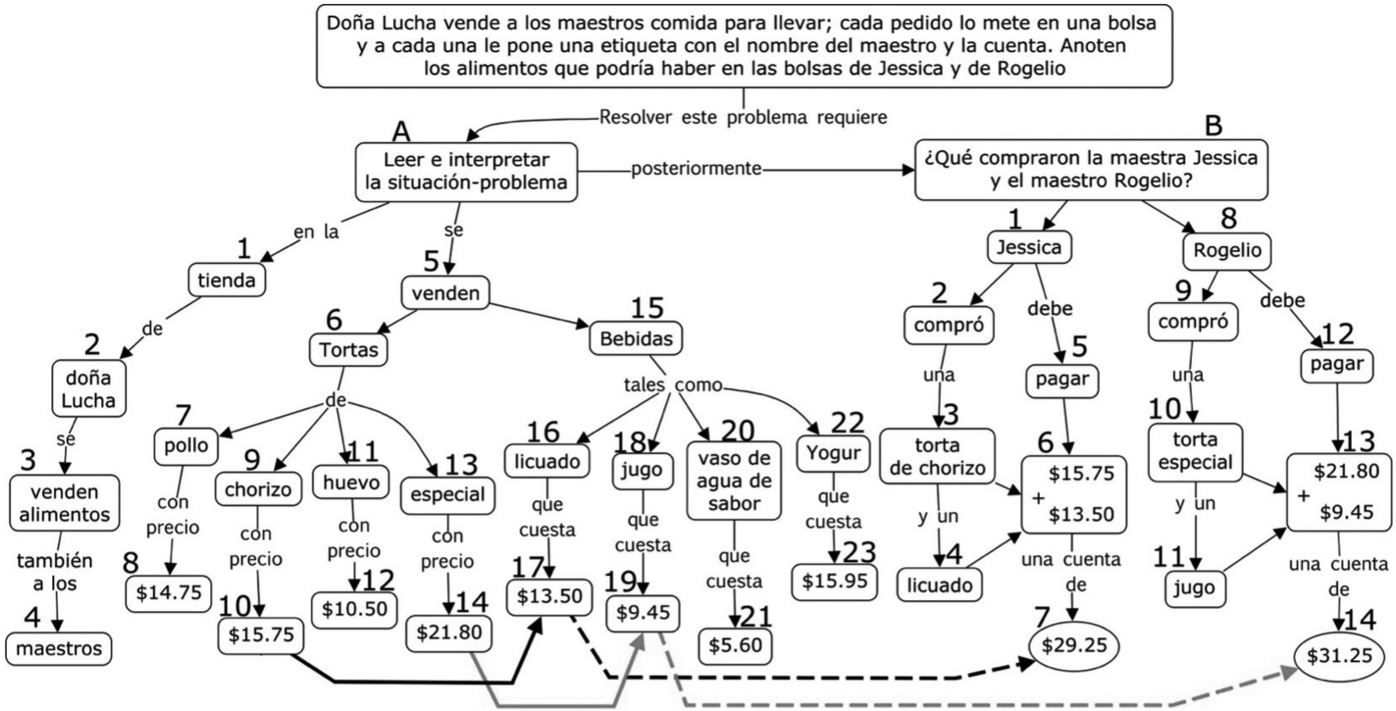
2. Doña Lucha vende a los maestros comida para llevar; cada pedido lo mete en una bolsa y a cada una le pone una etiqueta con el nombre del maestro y su cuenta. Anoten los alimentos que podría haber en las bolsas de Jessica y de Rogelio.

El MH que describe la resolución del problema 2 también es de dos prácticas, A y B, la primera interpretativa y la segunda operativa, las cuales también se encuentran conectadas entre sí. El MH del segundo problema es un tanto distinto al MH de la figura 4.2. Por ejemplo, en la primera práctica se argumenta que en la tienda de doña Lucha también se vende alimentos a los maestros, ruta “A1-A2-A3-A4”, y este es el contexto del segundo problema.

También, la resolución del segundo problema implica sumar el costo de algún producto “A6” con el costo de algún producto “A15”, prácticamente se trata de realizar sumas hasta encontrar aquella que es igual a la cuenta de la maestra Jessica o al del maestro Rogelio. Las conexiones “A10-A17-B7” muestran que la cuenta que debe pagar la maestra Jessica es “B7”, debido a que compró una torta de chorizo y un licuado, “B1-B2-B3-B4”, mientras que las conexiones “A14-A19-B14” indican que la cuenta del maestro Rogelio es de “B14”, porque compró una torta especial y un jugo, “B8-B9-B10-B11”.

En el nivel primaria, para hacer más atractivo o más divertido el trabajo con el MH, quizá sea necesario reemplazar algunos elementos del MH mediante imágenes, fotos o representaciones pictóricas de los conceptos (por ejemplo, de los productos que vende doña Lucha), propiedades o argumentos implicados en la resolución del problema que se representa.

Figura 4.4. MH que describe la resolución del problema 2, consigna 1 (Rosales, Barrientos, Issa, López y Tovilla, 2022, p. 26). Fuente: Elaboración propia mediante *CmapTools.*



4.3 Problemas de nivel básico, secundaria

En esta sección se describe la resolución de dos problemas matemáticos de nivel secundaria, uno relacionado con el tema de proporcionalidad inversa y el otro que tiene que ver con el cálculo del área de un círculo, los cuales plantean los autores de un libro de texto (Bosch y Meda, 2019) de segundo secundaria.

4.3.1 Proporcionalidad inversa

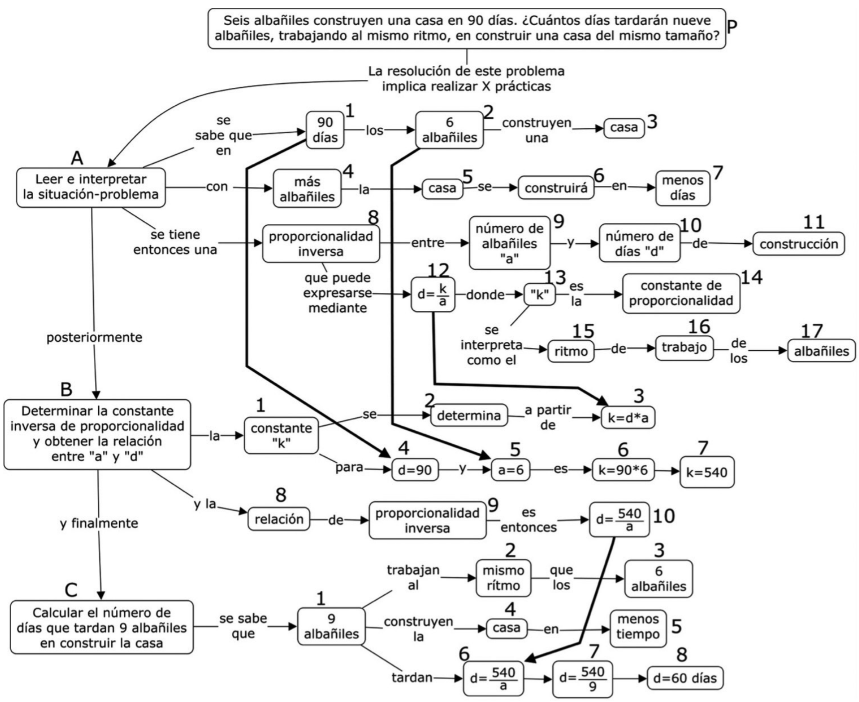
En el libro de Bosch y Meda (2019) se aborda el tema de proporcionalidad inversa a través de la resolución del problema *"Seis albañiles construyen una casa en 90 días. ¿Cuántos días tardarán nueve albañiles, trabajando al mismo ritmo, en construir una casa del mismo tamaño?"* (Bosch y Meda, 2019, p. 141). Se trata de un problema en el que el estudiante tiene que percatarse de la existencia de dos variables, número de albañiles "a" y número de días "d", y que la relación entre estas es tal que si una de estas variables crece, la otra decrece de manera simultánea, en este caso, si el número de albañiles crece el número de días para construir la casa disminuye. El MH que describe la resolución del problema de los albañiles se presenta en la siguiente figura 4.5.

El MH de la figura 4.5 representa un sistema de tres prácticas A, B y C. En la primera práctica A se lee y se interpreta la información que describe de manera textual la situación-problema, de esta manera se argumenta A1-A2-A3. También se analiza la manera en que se relacionan las variables identificadas A4-A5-A6-A7 y se identifica el tipo de relación proporcional entre las variables, de manera que se argumenta A8-A9-A10-A11 y se establece la expresión algebraica A12-A13-A14, y así mismo se atribuye significado a la constante inversa de proporcionalidad al señalar A15-A16-A17.

En la segunda práctica B se determina el valor de la constante de proporcionalidad "k", a partir de B1-B2-B3, para el caso particular del problema que se está abordando, es decir, se determina el valor de dicha constante para el caso de los 6 albañiles que construyen la casa en 90 días, por lo que se realiza el procedimiento indicado en B1-B4-B5-B6-B7. Finalmente, se argumenta acerca de la expresión algebraica que relaciona el número de albañiles con el número de días que les toma a estos construir la misma casa al mismo ritmo de trabajo, es decir, se argumenta B8-B9-B10.

Finalmente, en la tercera práctica C, se considera la expresión B10 obtenida en la práctica B para calcular el tiempo que le tomaría a 9 albañiles construir la misma casa y al mismo ritmo de trabajo, C1-C2-C3 y C1-C4-C5. Mediante el procedimiento C1-C6-C7 apoyado en B10 se obtiene que el número de días es 60 días, objeto C8.

Figura 4.5. MH que describe la resolución del problema de los albañiles de proporcionalidad inversa. Fuente: elaboración propia mediante *CmapTools*.



4.3.2 Cálculo del área del círculo

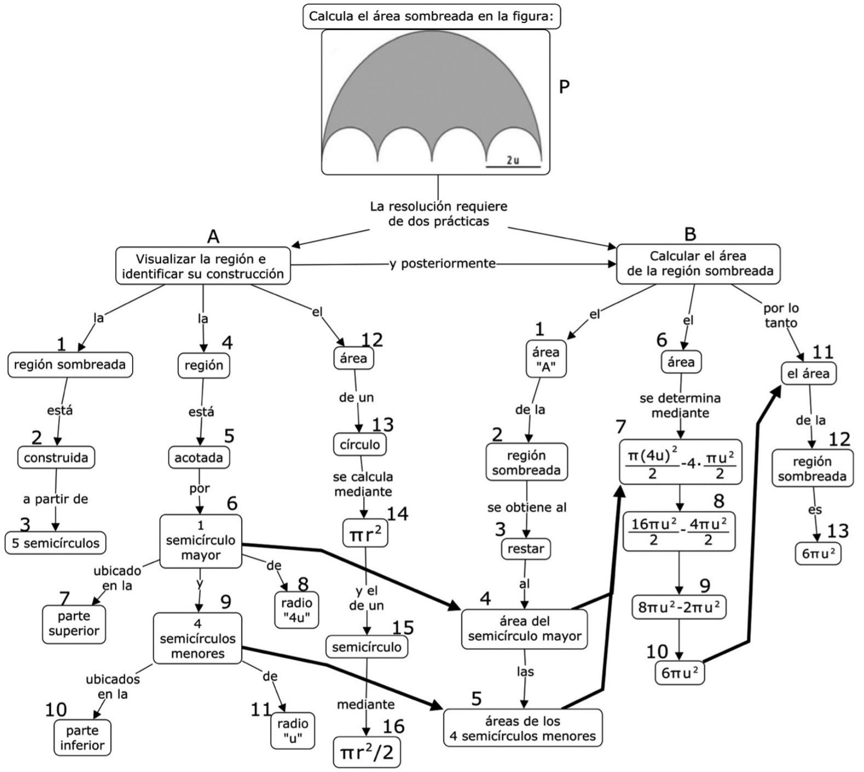
Otro tema que se aborda en el nivel educativo básico en secundaria es el ***área***, el cual primeramente se aborda mediante el caso del área de polígonos de forma regular, luego se continúa con el caso del área de figuras compuestas y posteriormente se estudia el área de figuras de forma curva que involucran regularmente el cálculo del área del círculo. En el libro de Bosch y Meda (2019) se plantea resolver el siguiente problema, al que nos referiremos aquí como el problema del paraguas por la similitud que guarda la forma de la región con la de un paraguas o sombrilla, el problema es "*Calcula el área sombreada en la figura*" (Bosch y Meda, 2019, p. 194). La figura 4.6 muestra el área sombreada a la que se hace referencia en el problema del paraguas.

Figura 4.6. Región sombreada a la que se hace referencia en el problema del paraguas. Fuente: (Bosch y Meda, 2019, p. 194).

El MH que describe la resolución del problema se presenta en la figura 4.7. El MH describe el problema "P" y una figura que ilustra la región a la que se pretende calcular el área y también muestra un sistema de dos prácticas A y B.

Mediante la práctica A se visualiza la región buscando encontrar los elementos que permiten construirla. En este caso, se argumenta que se observan 5 semicírculos, ver ruta A1-A2-A3. Luego, se observa cómo están dispuestos estos semicírculos y se argumenta A4-A5-A6-A7 y A8, pero también se señala A9-A10 y A11. Por último, para proceder a calcular el área de la región, se requiere apoyarse en el conocimiento previo del área del círculo y del semicírculo, por lo que se enuncia la propiedad A12-A13-A14-A15-A16.

Figura 4.7. MH que describe la resolución del problema del paraguas. Fuente: Elaboración propia mediante *CmapTools*.



Por último, mediante la práctica B, de tipo operativa, se describe el procedimiento de resolución mediante B1-B2-B3-B4-B5 y se procede al cálculo mediante B6-B7-B8-B9-B10 y, finalmente, se atribuye significado al objeto emergente B10 como el área de la región sombre a través del argumento B11-B12-B13.

4.4 Problemas de nivel medio superior

En esta sección se discute a la luz del MH, la resolución de dos problemas de matemáticas que se estudian en la asignatura de Cálculo diferencial, la cual se imparte regularmente en el último año del nivel medio superior, en tercer grado de bachillerato. El primer problema trata sobre calcular el límite de una función cociente y, el segundo, tiene que ver con calcular la derivada de una función racional, este último resuelto mediante el empleo de la definición de límite.

4.4.1 Límite de una función

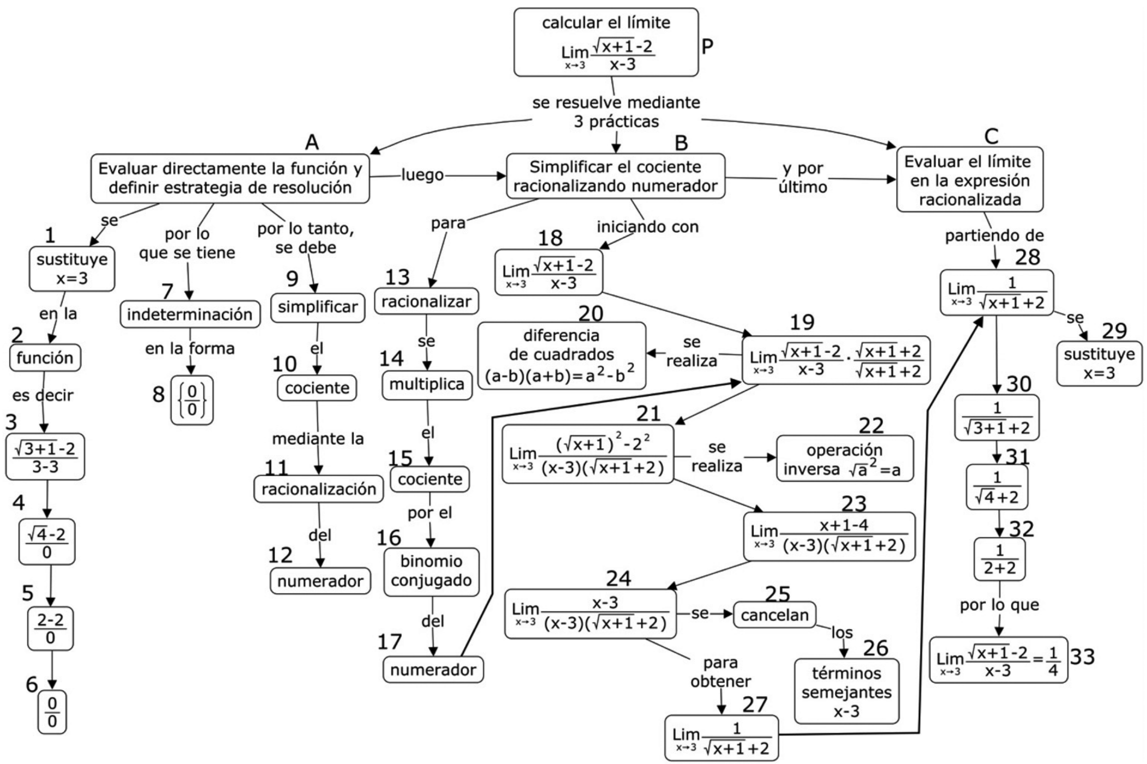
La descripción de la resolución del problema $\lim_{x \to 3} \frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$ mediante el MH se muestra en la figura 4.8. Según el mapa, la resolución del problema implica la realización de tres prácticas, las prácticas A, B y C. La primera práctica A consiste en "Evaluar directamente la función y definir una estrategia de resolución", por lo que mediante la ruta A1-A2-A3-A4-A5-A6 se evalúa la función cociente en "x-3" y se obtiene que dicha sustitución conduce a una indeterminación, A7-A8. Debido a esto último, se argumenta que es necesario simplificar la función cociente mediante la racionalización del numerador, ver ruta A9-A10-A11-A12.

Mediante la segunda práctica, práctica B, se simplifica el cociente racionalizando el numerador al multiplicar el cociente por el binomio conjugado del numerador, ruta B13-B14-B15-B16-B17. Por lo que partiendo de la expresión B18, se realiza el procedimiento B18-B19-B21-B23-B24 para obtener finalmente la nueva expresión B27. Esta última expresión, B27, es otra forma de expresar B18, sin embargo, esta última sí está definida en "$x=3$".

Un aspecto importante de la práctica B tiene que ver con que esta se apoya en conocimientos previos, los cuales son necesarios para poder llevar a cabo el procedimiento de racionalización. De esta manera se hace mención a la diferencia de cuadrados, B20; a la operación inversa a la radicación, B22; y se señala la cancelación de términos semejantes, B25-B26.

Por último, mediante la tercera práctica, se realiza el cálculo del límite de la nueva expresión obtenida en la segunda práctica. Partiendo de C28, se sustituye el valor de "$x=3$" y se realizan los cálculos C30-C31-C32 para obtener finalmente el resultado deseado en C33. El mapa de la figura 4.8 puede ser empleado como una guía para resolver otros problemas similares tales como $\lim_{x \to 81} \frac{\sqrt{x}-9}{x-81}$, $\lim_{x \to 5} \frac{\sqrt{x+4}-3}{x-5}$, por mencionar algunos, los cuales podrían ser de gran ayuda para el aprendizaje del límite por parte de los estudiantes.

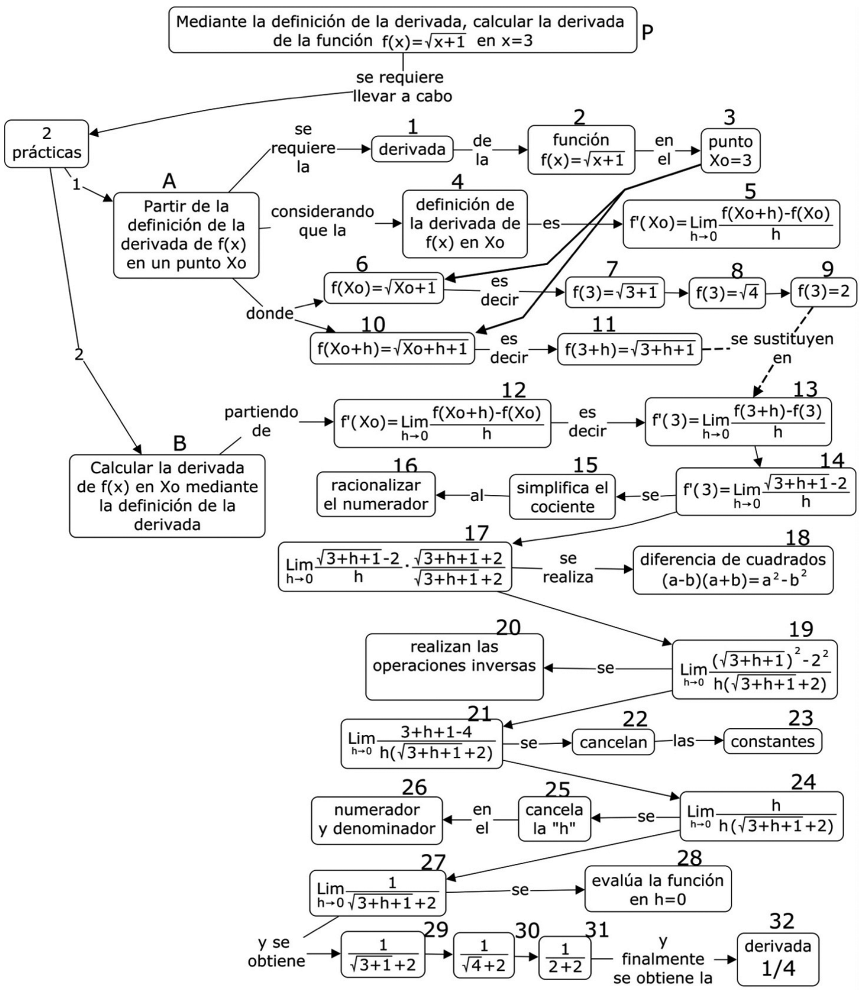
Figura 4.8. MH que describe el proceso de cálculo del límite de una función cociente. Fuente: elaboración propia mediante *CmapTools*.



4.4.2 La derivada de una función racional

La figura 4.9 presenta el MH que describe el problema "P" de calcular la derivada de la función racional $f(x)=\sqrt{(x+1)}$ en "$x=3$".

Figura 4.9. MH que describe el cálculo de la derivada de una función racional. Fuente: elaboración propia mediante *CmapTools*.



Según el MH, el cálculo de la derivada en cierto valor de “x” se lleva a cabo mediante dos prácticas, A y B. Mediante la práctica A se interpreta el problema, A1-A2-A3, a partir de la definición de derivada, A4-A5. Esto es, se obtienen los elementos A6-A7-A8-A9 y A10-A11 que permiten particularizar la definición A5 al caso abordado.

En la segunda práctica, práctica B, a partir de la definición de la derivada mediante el límite, B12-B13, se argumenta que se requiere racionalizar la expresión B13, esto es mediante B14-B15-B16. Por lo que se lleva a cabo el procedimiento B14-B17-B19-B21-B24 hasta obtener la expresión B27 la cual se evalúa en “$h=0$”, según se argumenta en B27-B28, mediante el procedimiento B29-B30-B31 hasta obtener finalmente el valor deseado de la derivada en B32.

Por último, al igual que el mapa de la figura 4.8, la práctica procedimiental B del mapa de la figura 4.9 también se apoya en algunos conocimientos previos: diferencia de cuadrados, B18; potenciación como operación inversa de la radicación, B20; cancelación de términos semejantes, B25-B26; y evaluación de una función, B28.

4.5 Problemas matemáticos de nivel universitario

El MH también tiene aplicación en la enseñanza de las matemáticas en el nivel educativo universitario. Para ilustrar esto, en esta sección se abordan dos problemas, el primero es un problema de optimización que usualmente se estudia en la asignatura de Cálculo diferencial y, el segundo, es un problema que trata sobre el cálculo del área bajo la curva que representa la gráfica de una función de una variable real.

4.5.1 Un problema de razón de cambio

El problema que a continuación se discute tiene que ver con el tema de máximos y mínimos que se encuentra en el programa de la asignatura de Cálculo diferencial, el cual se imparte en el primer año de las carreras de ciencias e ingeniería. El problema es: “*Se está* *llenando de agua una cisterna de forma cónica, que se encuentra apoyada sobre su vértice, a razón de 8 litros por segundo. Sabiendo que la altura de la cisterna es de 9 metros y el radio de la tapadera es de 6 metros, ¿con qué rapidez se eleva el nivel del agua cuando ha alcanzado una profundidad de 5 metros?*"

El MH que describe la resolución de este problema se presenta en la figura 4.10. En la parte superior del MH vertical se presenta el problema "P", del lado izquierdo de arriba hacia abajo se describe el sistema de tres prácticas, A, B y C, implicado en la resolución del problema.

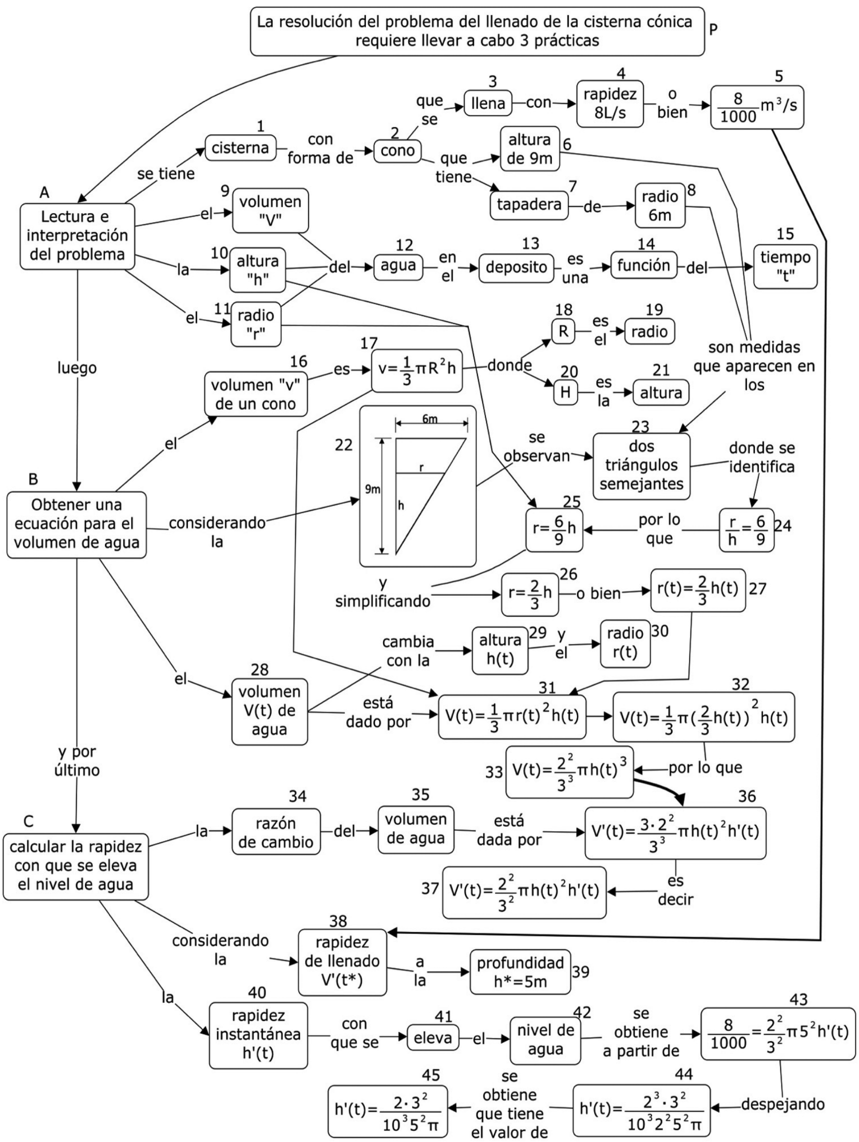
Mediante la primera práctica A "Lectura e interpretación del problema" se argumenta sobre la forma cónica de la cisterna, A1-A2, la rapidez con que esta se llena, A3-A4-A5 y algunas de sus dimensiones, A2-A6 y A2-A7-A8. También se identifican las variables que se ponen en juego en la resolución del problema, A9-A12-A13, A10-A12-A13 y A11-A12-A13 las cuales son función del tiempo, A14-A15.

Por otra parte, la segunda práctica B, "Obtener una ecuación para el volumen de agua", se apoya en un conocimiento previo, la propiedad B16-B17-B18-B19 y B16-B17-B20-B21. Dado que el agua adopta la forma del cono, es posible realizar la construcción geométrica que se muestra en B22 (sección transversal de la cisterna con el agua), la cual permite visualizar la propiedad geométrica de triángulos semejantes, B23, y que lleva a establecer la expresión B24.

A partir de la expresión B24 y mediante el procedimiento de despeje B24-B25-B26 se obtiene la relación entre dos variables B27, se trata de la altura "h" del nivel de agua en la cisterna y del radio "r" del espejo de agua en la cisterna. Sin embargo, es importante señalar que, durante el llenado de la cisterna, las variables "h" y "r" dependen implícitamente del tiempo, por lo que es posible escribir B27, y así mismo ocurre con el volumen "$V(t)$", el cual también cambia con el tiempo, por lo que se argumenta B28-B29-B30.

Finalmente, considerando B17, se obtiene el volumen de agua en la cisterna en función de una sola variable independiente, "$h(t)$",", mediante la sustitución de B27 en B17, esto es, B28-B31-B32-B33.

Figura 4.10. MH que describe la resolución de un problema de optimización. Fuente: elaboración propia mediante *CmapTools*.



En la última práctica C se requiere “calcular la rapidez con que se eleva el nivel de agua”, esto es, se solicita determinar “$h'(t)$” cuando la profundidad es de “$h=5m$”. Para esto, primeramente, se calcula la derivada de la función “$V(h)$” respecto al tiempo en B33 aplicando la regla de la cadena, y esto es porque la altura o profundidad del agua en la cisterna a su vez es una función implícita del tiempo, por lo que es necesario derivar la función compuesta “$V(h(t))$” respecto a “t”. Por lo anterior, se realiza el procedimiento de cálculo de la derivada a través de C34-C35-C36-C37.

Una vez que se ha determinado la derivada de “$V(h(t))$” respecto al tiempo “t”, ver objeto B37, se considera el dato que aporta el texto que describe la situación-problema acerca de la razón a la que se llena la cisterna, esto es, “Se está llenando de agua una cisterna de forma cónica, …, a razón de 8 litros por segundo” es decir “$8L/s$” y, dado que $1m^3=1000L$, este dato puede escribirse también en unidades de metros cúbicos “m^3” como $\frac{8}{1000}\,m^3/s$. Con base en esta información, en la práctica “C” se parte del argumento de considerar que la razón de llenado de la cisterna a la profundidad de “$5m$” es “$V'(t*)=\frac{8}{1000}\,m^3/s$” donde “$t*$” es el tiempo cuando el nivel de agua es de “$5m$”, lo que lleva a argumentar C40-C41-C42-C43 el cual, bajo un procedimiento para despejar “$h'(t)$” a partir de C43 se obtiene finalmente el dato que se buscaba C45, que es la rapidez con la que se eleva el nivel agua cuando se tiene una profundidad de “$5m$”.

4.5.2 Un problema de área bajo la curva

El problema que se aborda en este apartado es el siguiente: “*Mediante el cálculo del límite de sumas de Riemann, determinar la medida del área de la región R limitada por el eje “x”, las rectas $x=1$ y $x=2$ y por la curva con ecuación es $f(x)=x^2-x$*”. El MH vertical que describe la resolución del problema se presenta en la figura 4.11, se trata de la descripción de un sistema de cuatro prácticas A, B, C y D.

La primera práctica “A” nombrada “Visualizar región R y determinar el extremo derecho de cada subintervalo en el que se divide el intervalo “$1\leq x\leq 2$” consiste en visualizar la región “R” a la que se desea calcular el área, la cual está acotada por la función $f(x)=x^2-x$, las rectas verticales “$x=1$” y “$x=2$” y el eje horizontal “x” y también en determinar la coordenada ”x_i” del extremo derecho de cada subintervalo en el que se divide el intervalo “$1 \leq x \leq 2$” o dominio de integración. Para esto, se parte al visualizar la región “R” en el objeto A1 y luego en argumentar A2-A3-A4. Dicho intervalo es dividido en “n” subintervalos de longitud “Δx”, por lo que se argumenta A5-A6. Luego se realiza un procedimiento para determinar la coordenada del extremo derecho de cada subintervalo, primero se calcula la longitud de cada subintervalo A7-A8-A9-A10 y luego la coordenada ” x_i” partiendo de “$x=1$” mediante A11-A12-A13-A14-A15.

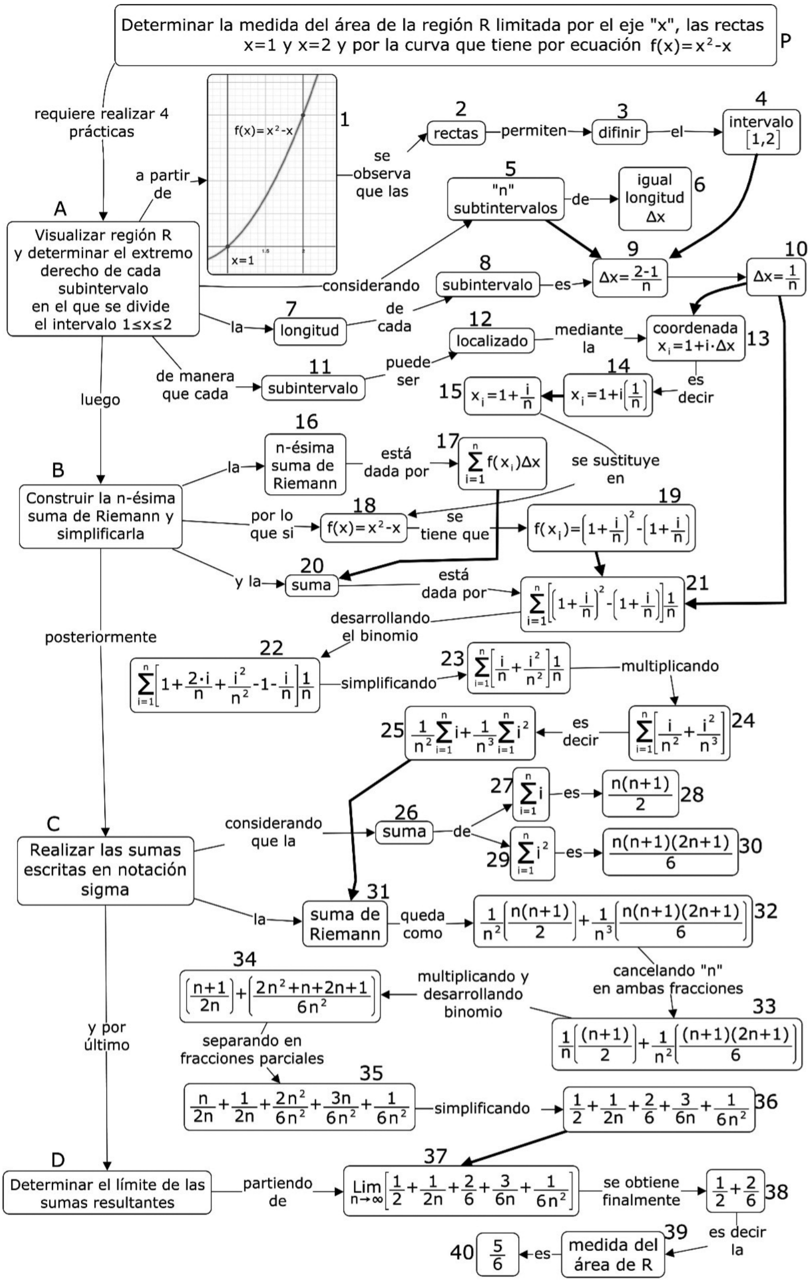
El objeto emergente o nuevo de la primera práctica, A15, es empleado en la práctica “B” que trata sobre “Construir la n-ésima suma de Riemann y simplificarla” para encontrar una expresión algebraica en términos de una suma de Riemann que representa el área bajo la curva, se trata, pues, de particularizar la propiedad matemática B16-B17. Por lo que en “$f(x)$”, B18, se sustituye A15 para obtener “$f(x_i)$”, B19. Por lo que la suma de Riemann B17 que permite calcular el área bajo curva, mediante un procedimiento de simplificación B20-B21-B22-B23-B24, puede escribirse como B25.

En la práctica “C” se propone “Realizar las sumas escritas en notación sigma” que están presentes en el objeto emergente de la práctica B, B25. Se trata, pues, de sustituir los resultados C26-C27-C28 y C26-C29-C30 de las sumatorias en B25 para obtener C31-C32. A partir del objeto emergente C32 se realiza un procedimiento de simplificación C32-C33-C34-C35 en el que realizan cancelaciones de términos “n”, multiplicaciones y separación en fracciones parciales hasta obtener finalmente el objeto emergente C36.

Por último, en la práctica D, se calcula el límite cuando “n” tiende a infinito de la expresión emergente C36, para lo cual se realiza el procedimiento indicado en D37-D38. Por lo que el área de la región “R” es finalmente mediante D39-D40.

Dado que la resolución de este tipo de problemas que involucra el cálculo del área bajo una curva mediante sumas de Riemann es muy algorítmica, apoyarse en el MH resultaría muy benéfico para los estudiantes en el sentido de que el mapa muestra a detalle, paso a paso, el procedimiento de resolución.

Figura 4.11. MH que describe el cálculo del área bajo una curva mediante la suma de Riemann. Fuente: Elaboración propia mediante *CmapTools*.



Por último, ya fuera del tema de la descripción de la resolución de problemas matemáticos mediane el MH, es importante percatarnos que en las figuras 4.10 y 4.11 se presentan mapas que incorporan objetos que muestran imágenes, B22 y A1 respectivamente en las figuras citadas, las cuales son útiles visualizar para la resolución de los problemas. Se trata de imágenes que pueden ser incrustadas en el mapa de manera directa mediante el empleo del software con el que se elaboró el mapa, *CmapTools* en el caso de las figuras 4.10 y 4.11, o bien mediante el empleo de algún software de edición de imágenes, por ejemplo, *Canva, Adobe Photoshop, Paint,* entre otros, para lo cual es necesario dejar en blanco en el mapa el objeto donde va la imagen y luego exportar el mapa como imagen para su posterior edición.

4.6 Comentarios finales

En esta obra, se ha tratado de brindar un panorama general acerca de la técnica de representación del MH y su interpretación teórica a partir de algunos elementos del Enfoque Ontosemiótico proveniente del campo de la Matemática Educativa. Si bien, el MH es una representación poco o escasamente conocida en el ámbito docente, diferentes investigaciones e implementaciones en aula han mostrado el impacto favorable que esta representación tiene en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas escolares así como también en la investigación en Matemática Educativa.

Es importante destacar que el MH puede ser empleado desde el nivel educativo básico, preescolar, hasta el nivel universitario, y esto es debido a que la construcción del MH es muy intuitiva. De manera similar a lo que ocurre con la construcción de mapas conceptuales, las observaciones en diversos talleres sobre el MH que han implementado los autores indican que basta con mirar una o dos ocasiones el proceso de construcción del MH para poder empezar a realizar los primeros esbozos o construcciones. En este sentido, según el nivel educativo, el MH puede ser construido solo por el profesor, en el caso de nivel preescolar y primaria, o por el profesor y los estudiantes, de nivel secundaria en adelante.

Por otra parte, cabe señalar que el MH tiene múltiples aplicaciones en la clase de matemáticas. Algunas de las aplicaciones del MH que se han identificado hasta el momento tienen que ver con su uso como: (i) instrumento de investigación, para indagar los significados que los estudiantes ponen en juego al resolver problemas matemáticos donde se pone en juego cierto contenido matemático; (ii) como material o recurso didáctico, para trabajar la resolución de problemas en el aula de manera grupal y colaborativa; (iii) objeto de reflexión de la práctica docente, antes y después de la intervención del profesor en el aula; (iv) herramienta para planificar la clase de matemáticas; (v) técnica de estudio, como una ayuda para el alumno en el aprendizaje de los contenidos. Si bien, en este libro se abordaron de una forma muy somera las aplicaciones (i), (ii) e (iii), sin embargo, se tienen experiencias documentadas (no publicadas) muy satisfactorias sobre el empleo del MH como (iv) e (v).

En este libro se ha abordado el uso del MH en el contexto de la enseñanza de las matemáticas, sin embargo, el MH puede ser empleado de la misma manera en el contexto de la física (Moreno, Aguilar, Angulo y Ramírez, 2019; Moreno, Hernández y Briceño, 2021) y la química escolar (Moreno y Hernández, 2020; Moreno, Ramírez y Torres, 2021). En ambos contextos, la intepretación del MH no es posible realizarla a partir de los elementos teóricos del Enfoque Ontosemiótico, que es una teoría exclusiva para la matemática escolar, sino más bien, la interpretación del MH se realiza desde adaptaciones de dichos constructos del EOS al caso de la física y la química escolar. Las adaptaciones de los constructos del EOS a dichos contextos y la interpretación del MH desde estas adaptaciones quedan fuera del alcance de este libro y se dejan como una continuación de esta obra.

4.7 Ejercicios

Resuelve los siguientes problemas justificando cada paso del proceso de resolución, luego construye el MH correspondiente.

1. Ejercicios de nivel primaria

   (a) Teresa tiene 7⁄3 m de listón y utiliza 4⁄3 m, ¿cuántos metros de listón le quedan?

   (b) En la central de abastos, un comerciante compra el bulto de 50 kg de azúcar en $1400.00 pesos. En su tienda, el comerciante hace bolsas de 1kg y las vende a $38.00 cada una, ¿Cuál es la ganancia del comerciante?

   (c) En un estacionamiento público de 250 automóviles, aproximadamente el 42% son de color blanco, ¿Cuántos coches no son blancos en el estacionamiento?

2. Ejercicios de nivel secundaria

   (a) Martha cobró $600.00 por repartir propaganda durante cinco días, ¿Cuántos días tiene que trabajar para cobrar $3,000.00?

   (b) Seis albañiles tardaron ocho meses en construir una casa, ¿Cuántos albañiles debes contratar para construir la misma casa en tres meses?

3. Ejercicios de nivel medio superior

   (a) Calcular $\lim\limits_{x \to 3} \frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$

   (b) Determinar la derivada de la función $f(x)= \sqrt{\frac{x^2-3x}{2x+1}}$

4. Ejercicios de nivel universitario

   (a) Se desea construir un cilindro de volumen constante, pero se desea gastar lo menos posible en material. Determina una condición para que el cilindro tenga la mínima superficie.

   (b) Calcular el área limitada por las curvas determinadas por "$y^2=4x$" e "$y=x^2$"

Referencias bibliográficas

AcademiaJAF (6 de abril de 2018). *Problema resuelto con sistema de ecuaciones lineales -Ejemplo 4-Matemáticas Secundaria* [archivo de Video]. Youtube. https://www.youtube.com/watch?v=DH256rhWf5E

Alegre, M. H., Domínguez, E., Landaluce, N. y Pípolo, S. (2018). Materiales didácticos en la enseñanza de las matemáticas. En Sgreccia, N. (Ed.), *Procesos de acompañamiento en la formación inicial y continua de profesores en matemática* (pp. 153-173). FahrenHouse.

Ángeles, Á. J., Guerrero, L. R. y Loyola, C. E. (2013). Matemáticas 3, Habilidades y competencias, Secundaria, México DF, México: Ángeles Editores, S. A. de C. V.

Angulo-Villanueva, R. (2007). La estructura conceptual científico didáctica. México: Plaza y Valdés, UNAM, Universidad Autónoma de Guerrero.

Ausubel, D. P. (1976). Psicología educativa. México: Editorial Trillas.

Baño, F. J. (2007). Tratamiento médico para enfermedad inflamatoria intestinal. *Revista Colombiana de Gastroenterología*, 22(4), 313-330.

Bosch, G. C., Meda, G. A. y Gómez, W. C. G. (2018). *Matemáticas 1. Infinita Secundaria*. Ciudad de México, México: Ediciones Castillo, S. A. de C. V.

Bosch, G. C. y Meda, G. A. (2019). *Matemáticas 2. Infinita Secundaria*. Ciudad de México, México: Ediciones Castillo S. A. de C. V.

Bruner, J. (1978). The role of dialogue in language acquisition' In A. Sinclair, R., J. Jarvelle, and W. J. M. Levelt (eds.) *The Child's Concept of Language*. New York: Springer-Verlag

Cantón, I. M. (2010). Introducción a los Procesos de Calidad. REICE. *Revista Iberoamericana sobre Calidad, Eficacia y Cambio en*

Educacion, 8(5), 3-18. Recuperado de https://www.redalyc.org/pdf/551/55119084001.pdf

Cañas, A. J. y Novak, J. D. (2009). ¿Qué es un Mapa Conceptual?. Florida, EU.: Institute for Humans & Machine cognition. Recuperado de http://cmap.ihmc.us/docs/mapaconceptual.php

Cuásquer-Viveros, M. y Moreno-Cortés, A. L. (2021). Estudio sobre los diagramas de flujo en la resolución de problemas matemáticos. *Revista UNIMAR*, 39(1),. 45-55. Recuperado de https://doi.org/10.31948/Rev.unimar/unimar39-1-art3

Escudero, C. (1995). Resolución de problemas en física: herramienta para reorganizar significados. *Caderno Catarinense de Ensino de Física*, 12(2), 95-106.

Escudero, C. y Moreira, M. A. (1999). La V epistemológica aplicada a algunos enfoques en resolución de problemas. *Enseñanza de las Ciencias*, 17(1), 61-68.

Geva, E. (1985). Facilitating reading comprehension through flowcharts. *Journal for the Study of Education and Development*, 8(31-32), 45-66. Recuperado de https://doi.org/10.1080/02103702.1985.10822084

Godino, J. D. Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 39(1-2), 127-135.

Godino, J D., Batanero, C., Font, V y Giacomone, B. (2016). Articulando conocimientos y competencias del profesor de matemáticas: el modelo CCDM. En C. Fernández, J. L. González, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 288-297). Málaga: SEIEM.

Hernández, S. J., Dueñas, C. A., Báez, M. A. S. y Moreno, M. N. (2020). La formación reflexiva del profesorado como marco de referencia en la matemática educativa. *Investigación e Innovación* *en Matemática Educativa*, 5, 1-21. https://revistaiime.org/index.php/IIME/article/view/iime.59

IHMC (2014-2015). CmapTools-Building a Concept Map, What are the steps in building a concept map. Florida, EU.: *Documentation Cmaps*. Recuperado de http://a.uaslp.mx/s3RZo84B

Jodelet, D. (1993), “La representación social: fenómenos, concepto y teoría”, en S. Moscovici (comp.), *Psicología social II. Pensamiento y vida social. Psicología social y problemas sociales*. Barcelona, Paidós, pp. 469-494.

Jodelet, D. (2000), “Representaciones sociales: contribución a un saber sociocultural sin fronteras”, en D. Jodelet y A. Guerrero (comps.), *Develando la cultura. Estudios en representaciones sociales*, México, Universidad Nacional Autónoma de México, pp. 7- 30

López, V. O. y Hederich, M. C. (2010). Efecto de Ansamiaje para facilitar el aprendizaje autorregulado en ambiente hipermedia. *Revista Colombiana de Educación*, 58, 14-39.

Lundgren, U. (1991), *Teoría del currículum y escolarización*. Madrid, España: Morata.

Llera, J., y Martinengo, N. (2004). Diagramas de flujo para el diseño de un sistema de control de calidad proceso de elaboración de vino blanco. *Revista de la Facultad de Ciencias Agrarias UNCuyo*, 36(1), 101-110.

Llopis, F. J. L., Costa, V., Gómez, P. y Calvo, P. (2010a). Teorema de Pitagoras. Valencia, España.: Matesfacil, ejercicios resueltos de matemáticas. Recuperado de https://bit.ly/3O4xCtX

Llopis, F. J. L., Costa, V., Gómez, P. y Calvo, P. (2010b). Problemas Resueltos de ecuaciones de primer grado. Valencia, España.: Matesfacil, ejercicios resueltos de matemáticas. Recuperado de https://bit.ly/3vfa8cN

Llopis, F. J. L., Costa, V., Gómez, P. y Calvo, P. (2010c). Problemas Resueltos de Sistemas de Ecuaciones. Valencia, España.: Matesfacil, ejercicios resueltos de matemáticas. Recuperado de https://bit.ly/3xo6PCU

Manrique, O. A. M., y Gallego, H. A. M. (2013). El material didáctico para la construcción de aprendizajes significativos. *Revista Colombiana De Ciencias Sociales*, 4(1), 101–108. Recuperado de https://revistas.ucatolicaluisamigo.edu.co/index.php/RCCS/article/view/952

Marzábal, A., Merino, C. y Rocha, A. (2014). El obstáculo epistemológico como objeto de reflexión para la activación del cambio didáctico en docentes de ciencias en ejercicio. *Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias*, 9(1), 70-83.

Moreira, M. A. (1998). Mapas conceptuales y aprendizaje significativo (Ileana María Greca, trad.). *Revista Cadernos do Aplicação*, 11(2), 143-156. (Obra original publicada en 1988).

Moreno, M. N. (2017). Una representación gráfica de la práctica de resolución de problemas en Cálculo diferencial. *Revista Investigación en la Escuela*, 92, 60-75. Recuperado de: http://www.investigacionenlaescuela.es/articulos/R92/R92-5

Moreno, M. N., Angulo, V. R. G., Reducindo, R. I. y Aguilar, P. R. M. (2018). Enseñanza de la física mediante fislets que incorporan mapas conceptuales híbridos. *Apertura*, 10(2), 20-35. http://dx.doi.org/10.18381/Ap.v10n2.1335

Moreno, M. N., Aguilar, T. M. F., Angulo, V. R. G. y Ramírez, M. J. C. (2019). Análisis de la resolución de problemas de hidrostática en el bachillerato. *Revista Electrónica de Enseñanza de las Ciencias*, 18(1), 274-296. Recuperado de http://reec.uvigo.es/volumenes/volumen18/REEC_18_1_13_ex1261.pdf

Moreno, M., N., y Hernández, Z. L. E. (2020). Análisis gráfico de la resolución de un problema químico de reactivo limitante. *Revista*

Paradigma, 41(2), 112-138. https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.0.p112-138.id952

Moreno, M. N., Ramírez, E. B. R. y Torres, M. R. D. G. (2021). Los mapas híbridos en la química escolar. *Revista Educación Química*, 32(3), 117-129. Recuperado de https://doi.org/10.22201/fq.18708404e.2021.3.77443

Moreno, M. N., Hernández, Z. L. E. y Briceño, S. E. C. (2021). Análisis de la resolución de un problema de cinemática mediante el mapa conceptual híbrido. *Enseñanza de las Ciencias*, 39(3), 157-176. Recuperado de https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.3106

Moreira, M. A. (2010). ¿Por qué conceptos?¿Por qué aprendizaje significativo?¿Por qué actividades colaborativas?¿Por qué mapas conceptuales?. *Revista Qurriculum*, 23, 9-23.

Moreira, M. A. (2012). ¿Al final, qué es el aprendizaje significativo?. *Revista Qurriculum*, 25, 29-56.

Novak, J. D. y Cañas, A. J. (2006). Del origen de los mapas conceptuales al desarrollo de CmapTools. Recuperado el 21 de marzo de 2020, de http://www.eduteka.org/Entrevista22.php

Pedreira, M. J. L. y González. d. D., J. (2017). Evidencias diagnósticas en el trastorno por déficit de atención con hiperactividad en la infancia y la adolescencia. *Revista Pediatría Atención Primaria*, 19(76), 147-152.

Radford, L. (2013). Three key Concepts of the theory of objectification: Knowledge, knowing, and learning. *Journal of Research in Mathematics Education*, 2(1), 7-44.

Riva Palacio, Y S. M. A. (2019). *Matemáticas 2, pensamiento matemático*. Ciudad de México, México: Editorial Santillana, S. A. de C. V.

Rodríguez, P. M. L. (2004). La teoría del aprendizaje significativo. En A. J. Cañas, J. D. Novak & F. M. González, Eds., *First Internatio-*

nal Conference on Concept Mapping, CMC 2004 (pp. 535-544). Dirección de Publicaciones de la Universidad Pública de Navarra. Recuperado de https://cmc.ihmc.us/cmc-proceedings/

Rosales, Á. M., Barrientos, F. J., Issa, G. E., López, C. M. T. y Tovilla, M. M. D. C. (2022). *Desafíos matemáticos. Libro para el alumno. Cuarto grado*. Dirección General de Materiales Educativos de la Secretaría de Educación Pública. https://libros.conaliteg.gob.mx/2022/P4DMA.htm?#page/1

Rose, G. C. E., Márquez, A. L. M., Hernández, C. J. C. y Serna, E. M. T. (2017). Sistema de monitoreo remoto y detección de anomalías cardiacas en pacientes ambulatorios. *Research in Computing Science*, 137, 39-49.

Vigotsky, L. (1978/2009). El desarrollo de los procesos psicológicos superiores. pp. 130-140. Barcelona: Biblioteca deb Bolsillo.

Ximeno, F. (2017). Representación gráfica de números complejos [Free Software Foundation]. Recuperado de: https://www.geogebra.org/m/zB3tPt5d

Sobre los autores

Dr. Nehemías Moreno Martínez
Licenciado en Física por la Universidad Autónoma del Estado de Morelos, con Maestría y Doctorado en Matemática Educativa por el Departamento de Matemática Educativa del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional (Cinvestav IPN). Profesor investigador de tiempo completo en la Facultad de Ciencias y docente en la Facultad de Psicología de la Universidad Autónoma de San Luis Potosí, nivel VI, miembro del Sistema Nacional de Investigadoras e Investigadores (SNII) nivel 1 y del Sistema Estatal de Investigadores del Estado de San Luis Potosí, del Cuerpo Académico Currículum, Enseñanza de las Ciencias y Tecnologías para la Educación, y de la Red CIMATES y de la AAPT-MX. Profesor invitado en el Magister en Didáctic de las Ciencias Naturales y de las Matemáticas de la Facultad de Ciencias Básicas de la Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación, en Santiago, Chile.

Dra. Rita Guadalupe Angulo Villanueva
Profesora de primaria, Licenciatura, Maestría y Doctorado en Pedagogía. Especialización en docencia para la Educación Superior. Miembro del SNII nivel 1 y del Cuerpo Académico Currículum, Enseñanza de las Ciencias y Tecnologías para la Educación. Docente del Seminario de Currículum Latinoamericano con el IISUE UNAM. Profesora invitada al Doctorado en Educación para el Seminario Currículum e Innovación curricular de la Universidad Nariño, RUDE Colombia.

Dr. Edgar Alfonso Pérez García
Doctor en Innovación en Tecnología Educativa por la Universidad Autónoma de Querétaro. Maestro en Ingeniería por la Facultad de Ingeniería de la Universidad Autónoma de San Luis Potosí (UASLP) e Ingeniero Electrónico por la Facultad de Ciencias. Miembro del SNII nivel C y del Sistema Estatal de Investigadores del Estado de San Luis Potosí. Director de Educación a Distancia en la Secretaría Académica de la UASLP. Profesor asignatura en la Facultad de Ciencias de la UASLP y de la Universidad Marista de Querétaro. Representante institucional ante el Espacio Común de Educación Superior (Ecoesad). Líder del Grupo de Investigación en Tecnología Educativa e Innovación de la UASLP e integrante del Cuerpo Académico Currículum, Enseñanza de las Ciencias y Tecnologías para la Educación de la Facultad de Ciencias en la UASLP.

Dra. Soraida Cristina Zúñiga Martínez
Licenciada en Física por la Universidad Veracruzana, maestra y doctora en Ciencias en Física Educativa por el Instituto Politécnico Nacional. Profesora de la Universidad Autónoma de San Luis Potosí desde 2008 en el área de Física y en la Facultad de Ingeniería. Secretaria Académica en el Departamento de Físico Matemáticas de la UASLP, apasionada de la enseñanza de la Física desde su juventud; asistente, ponente y tallerista en diferentes eventos académicos a nivel nacional e internacional.

Mapas híbridos en la enseñanza de las matemáticas
Editado por la Dirección de Fomento Editorial y Publicaciones de la UASLP y financiado por Conahcyt, mediante el proyecto "Objetos de aprendizaje en la enseñanza de la matemática en secundaria, una perspectiva desde la Matemática Educativa" con número de referencia A1-S-44551.

Se terminó de imprimir en noviembre de 2023 en los Talleres Gráficos Universitarios, Av. Topacio esquina con boulevard Españita, Fracc. Valle Dorado en la ciudad San Luis Potosí.

El tiro consta de 500 ejemplares impresos en offset.

UASLP
Universidad Autónoma
de San Luis Potosí

FACULTAD DE
CIENCIAS

El mapa conceptual híbrido, o simplemente mapa híbrido (MH), puede considerarse como una técnica de representación gráfica heurística, es decir, es una técnica que puede utilizarse como ayuda para resolver un problema matemático o para entender un procedimiento de resolución, pero también ya en el contexto de la investigación en matemática educativa para conocer las prácticas, los objetos que intervienen y emergen, las conexiones entre los objetos, los procesos cognitivos y los significados puestos en juego cuando un sujeto, estudiante o experto, resuelve un problema que se aborda en la clase de matemáticas.

A lo largo del libro se describe la técnica de representación del MH, así mismo, se profundiza sobre su interpretación teórica desde algunos elementos del enfoque ontosemiótico (EOS) de la cognición e instrucción matemáticos, proveniente del campo de la matemática educativa. La interpretación teórica del MH desde el EOS fue el resultado de varios años de búsqueda de un método para ayudar a los estudiantes, desde el nivel básico hasta el universitario, a comprender la estructura del conocimiento matemático y la manera en que éste se produce en el ámbito escolar mediante la resolución de problemas.

El lector, al adentrarse y al reflexionar acerca de esta obra, encontrará en el MH una herramienta gráfica de gran valor que puede ser empleada con diferentes propósitos: como técnica de estudio, material didáctico, objeto de reflexión de la práctica docente o herramienta para la investigación en matemática educativa.

DIRECCIÓN DE
**FOMENTO EDITORIAL
Y PUBLICACIONES
UASLP**

*Tecnología
y ciencias aplicadas*

ISBN-13: 978-607-535-366-1
9 786075 353661