



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE SAN LUIS POTOSÍ

FACULTAD DE ECONOMÍA

ANÁLISIS DINÁMICO DE LA BRECHA DE GÉNEROS  
EN EL MERCADO LABORAL: CONSIDERANDO  
PREFERENCIAS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MAESTRO EN ECONOMÍA MATEMÁTICA

PRESENTA:

ULISES ARMANDO ROMERO TORRES

DIRECTOR DE TESIS:

DR. IVÁN TÉLLEZ TÉLLEZ

SINODAL:

DR. JORGE ZAZUETA GUTIÉRREZ

SINODAL:

DR. LEOBARDO PEDRO PLATA PÉREZ



No. 043

San Luis Potosí, S.L.P., Julio  
2024





Análisis dinámico de la brecha de géneros en el mercado laboral: Considerando preferencias ©  
2024 by Ulises Armando Romero Torres is licensed under [Creative Commons Attribution-  
NonCommercial-ShareAlike 4.0 International](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/)

## *Dedicatoria.*

A mis padres por su enorme costo de oportunidad, amor y paciencia.  
A mis hermanos Lili, Juan y Teresita piezas clave en todo mi desarrollo personal y profesional.  
A mis sobrinos Mary, Lore y Vic, ya que siempre nos tenemos los unos a los otros.  
A mis sobrinos pequeños Tony, Marco y a mi ahijado precioso Thiago.  
A mi cuñado Polo y mi Compa Alda por su gran apoyo.  
Anita, Fernanda, Mau, que hacen que está familia sea aún mejor.  
A mi compañero de estudio y amigo Antelmito, Yumi en su momento mi compañera y amiga y  
aquellas personas que hicieron una experiencia única el haber vivido en San Luis.  
Y los que se han ido pero siempre recordaremos...en nuestros corazones.

## **Agradecimientos**

Al Dr. Iván Téllez Téllez por su paciencia, tiempo y ser un excelente guía y profesor en este trabajo.

A los profesores Dr. Jorge Zazueta Gutiérrez y al Dr. Leobardo Pedro Plata Pérez por sus comentarios y disposición.

A la Mtra. Gabriela de la Rosa Bárcena por el apoyo en los tramites y siempre estar al pendiente de nosotros.

## Resumen

Examinamos la dinámica de las contrataciones en el mercado de trabajo y su impacto en la brecha de género. Utilizando un modelo matemático basado en ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales, el modelo incorpora los parámetros de preferencias de género, las tasas de salida del mercado laboral y el tamaño del mercado para tres géneros. La tesis demuestra la existencia y unicidad de un punto de equilibrio no trivial mediante el teorema del punto fijo de Brouwer y el teorema de Perron-Frobenius. Los hallazgos indican que, bajo condiciones específicas, es posible lograr la igualdad de género en las contrataciones laborales a largo plazo, cuando las tasas de salida son equivalentes y la matriz de preferencias es doblemente estocástica.

**Palabras Clave:** *Brecha de género, mercado laboral, sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias, preferencias de género, punto de equilibrio, igualdad de género, dinámicas de contratación.*



# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>XI</b>
<b>1. Modelo general</b>	<b>1</b>
1.1. Descripción del modelo . . . . .	1
1.2. Sin dinamismo de mercado . . . . .	3
1.3. Dinamismo de mercado homogéneo . . . . .	7
<b>2. Puntos críticos del sistema</b>	<b>13</b>
<b>3. Análisis del comportamiento dinámico del sistema</b>	<b>19</b>
3.1. Existencia de un plano invariante . . . . .	19
3.2. Soluciones asintóticamente estables . . . . .	22
3.3. Sistemas estructuralmente estables . . . . .	26
<b>4. Condiciones de igualdad en el mercado laboral</b>	<b>29</b>
<b>Conclusiones</b>	<b>31</b>
<b>Referencias</b>	<b>33</b>



## Introducción

El presente trabajo surge de la necesidad de estudiar y entender las complejas condiciones estructurales que causan la desigualdad de género en las ocupaciones laborales. El tratamiento de este problema no es reciente, pues hay estudios que se remontan a [38], [7], [33], [19],[16], donde se analizan las causas de la desigualdad laboral. Estas van desde educación, cultura, entorno social, género, acceso a la tecnología, fisiología, etc.

En una revisión parcial de la literatura sobre el tema se destacan los siguientes tres enfoques:

**Fuentes relacionadas con la sociología.** Las diferencias en las tasas de contratación y promoción entre mujeres y hombres persisten. Estas disparidades no solo reflejan barreras estructurales y culturales, sino que también revelan las preferencias y prejuicios, tanto conscientes como inconscientes, que influyen en las decisiones de contratación. En un informe publicado por la Asociación Americana de Mujeres Universitarias (AAUW) en 2010 [23]; examinan las razones por las cuales hay pocas mujeres en las áreas de ciencia, tecnología, ingeniería y matemáticas (STEM, por sus siglas en inglés). El informe destaca cómo los estereotipos de género afectan las percepciones y el rendimiento de las mujeres en campos de STEM. Las creencias culturales y las expectativas sociales pueden influir en la autoconfianza de las mujeres y su interés en estas áreas.

En un modelo de contaminación desarrollado por Goldin [21] se busca explicar la persistencia de la segregación ocupacional por género y brecha salarial entre hombres y mujeres. La autora argumenta que si ciertas ocupaciones se perciben socialmente como *femeninas* o *masculinas*, entonces cuando una ocupación comienza a ser dominada por mujeres, puede sufrir *contaminación* de género, lo que reduce su prestigio y en muchos casos, los salarios asociados a ese trabajo, análogamente para los hombres. De esta manera, los empleadores pueden tener prejuicios por contratar mujeres u hombres para ciertos roles, especialmente aquellos considerados de alto *prestigio*.

**Fuentes estadísticas.** De acuerdo con el Global Gender Gap Report del 2023 [40], se

proyecta que la brecha global de género se cerrará en 131 años <sup>1</sup>; por lo que se espera que la brecha de género se cierre en el año 2154<sup>2</sup>. En el caso de México, el mayor grado de disparidad es en *participación y oportunidad económica*, donde la disparidad salarial en trabajos similares es el rubro con la mayor discriminación seguido de la tasa de participación en la fuerza laboral.

Los datos del Banco Mundial reportan que el porcentaje de participación de las mujeres en la fuerza de trabajo es del 37.48 por ciento en el año 2012 y para el 2023 de 39.45 por ciento. Mientras que la participación de los hombres en la fuerza de trabajo es de 62.52 por ciento y 60.54 por ciento respectivamente. Aunque el porcentaje de participación femenina esté en aumento tuvieron que pasar 11 años para que el porcentaje de participación laboral aumentará alrededor del 2 por ciento.

Según la Encuesta Nacional de Ocupación y Empleo (ENOE) del primer trimestre, la población mexicana de 15 años y más años, se distribuye en un 70.88 por ciento de mujeres y un 29.11 por ciento de hombres. Sin embargo, la tasa de participación en la fuerza laboral muestra una disparidad significativa: solo el 40.75 son mujeres, frente al 59.25 por ciento de hombres, una diferencia de 18.5 puntos porcentuales. De la población no económicamente activa (PNEA), el 71.84 por ciento son mujeres y el 28.15 por ciento son hombres. Entre las mujeres en la PNEA, el 8.31 por ciento están disponibles para trabajar pero no buscan empleo, y mientras que el 63.53 por ciento no están disponibles debido a obligaciones familiares u otras limitaciones.

**Fuentes con modelos matemáticos.** Se han abordado varios enfoques matemáticos y estadísticos. En el artículo [24] investigan la brecha de género mediante algoritmos de inferencia de género basados en los nombres de autores, usando bases de datos de artículos científicos de PubMed y arXiv, abarcando más de 36 millones de autores y más de 6,000 revistas en disciplinas STEMM. Los resultados indican que la brecha de género en la ciencia, especialmente en campos como cirugía, ciencias de la computación, física y matemáticas, probablemente persistirá por muchas décadas a menos que se implementen intervenciones de educación, mentoría, disipar la creencia común que existen diferencias de género innatas en STEMM, asegurar que las mujeres tengan acceso igualitario a redes profesional entre otras cuestiones.

Bajo este mismo enfoque estadístico, el artículo [2] utilizan el método CHAID<sup>3</sup>, para crear un árbol de decisión basado en la prueba Chi-cuadrado y encontrar las variables mas significativas que afectan la participación laboral de las mujeres, seguido de una regresión

---

<sup>1</sup>De una muestra de 102 países.

<sup>2</sup>En promedio de los últimos 17 años, la brecha se ha reducido 0.24 puntos porcentuales por año.

<sup>3</sup>Detección automática de interacción Chi-cuadrada

logística para estimar la tasa de riesgo laboral. Los factores que se relacionan con una mayor probabilidad de trabajar son las que tienen apoyo familiar, dependencia<sup>4</sup> y un mayor nivel de educación. Por su parte, las mujeres que tienen dependientes tienen mayor riesgo de no participar en la fuerza laboral.

Análisis de factores no observables que impactan en la desigualdad laboral, es el modelo propuesto por Clifton [10] donde emplea ecuaciones diferenciales ordinarias para describir el cambio en la proporción de género en cada nivel de jerarquía a lo largo del tiempo. Estas ecuaciones tienen en cuenta tanto la *homofilia* como el *sesgo de género*. Demuestran que estos dos factores tienden a disminuir la participación femenina en puestos de liderazgo empresarial, gubernamental, médicos y académicos, lo que en la literatura se conoce como efecto "leaky pipeline", donde el sesgo de género tiende a afectar las decisiones de promoción (consciente o inconscientemente), y la homofilia influye en la disposición de las personas a postularse para ascensos. El modelo predice que sin la intervención de políticas específicas la paridad de género puede no ser alcanzada, debido a la persistencia de la homofilia y el sesgo de género.

Accineli y Zazueta [1] proponen un modelo matemático que describe la dinámica de los efectos del sesgo, el tamaño del mercado y el dinamismo de mercado, para analizar la brecha de género en el mercado laboral. Mediante un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias describen la evolución de la contratación de hombres y mujeres en el mercado. Los resultados del modelo muestran como la combinación de sesgos y dinamismo del mercado afectan la evolución a largo plazo de la distribución de género en el mercado laboral. Asimismo, como cambios en los parámetros pueden llevar a una mayor inclusión de mujeres en el mercado de trabajo. Bajo esta misma línea, Sifuentes, Telléz y Zazueta [35] obtienen las soluciones explícitas al modelo [1], para un mercado sin dinamismo, permitiendo profundizar en el análisis de la dinámica de la ocupación de los puestos de trabajo.

Como percibimos, gran parte de la literatura existente se ha centrado principalmente en la comparación entre hombres y mujeres. Sin embargo, a medida que las sociedades se vuelven más inclusivas y conscientes es de vital importancia considerar que no solo existen dos géneros. En un reciente informe elaborado por la empresa Deloitte [13] se presentó el resultado de 600 encuestas realizadas a la comunidad LGBTQ+ que trabajan en diversas áreas en 12 países alrededor del mundo, entre ellos México; cerca del 80 por ciento coincide en que hay intentos por favorecer la inclusión de las personas de esta comunidad por parte de los empleadores, sin embargo, 42 por ciento reportó comportamientos no inclusivos en el trabajo, señalando principalmente que no ven a ningún líder Senior LGBTQ+ que se

---

<sup>4</sup>Tiene o no responsabilidad de alguien

declare abiertamente en el trabajo. Por ende, hay diversas empresas tomando acción sobre la inclusión de otros géneros como tal en su fuerza de trabajo, y no sólo identificarlos como hombres o mujeres.

El presente trabajo, está relacionado con la extensión del modelo matemático propuesto en [1] para la incorporación de un tercer género. En el cual se aborda el estudio de la dinámica de las contrataciones en puestos de trabajo asumiendo preferencias en las contrataciones<sup>5</sup> y lo que se ha denominado *dinámica de mercado*. Los supuestos del modelo son: 1) dado que se estudian las proporciones de ocupación laboral para cada uno de los géneros  $x_i$ , tenemos un número limitado de puestos de trabajo tal que cuando se llegue a la plena ocupación  $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ , 2) los tres géneros tienen características de preparación igual para emplearse, 3) existen preferencias complementarias en las contrataciones que representamos con parámetros constantes  $a_i, b_i, c_i \in (0, 1)$  y 4) existen parámetros  $r_i \in (0, 1)$  que representan las tasas de salida para cada género. Con los supuestos anteriores la extensión del modelo es un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales, cuya dinámica es estudiada en un conjunto acotado del espacio de tres dimensiones.

Concretamente los resultados obtenidos que no están en la literatura son los siguientes:

Aunque en el modelo [1] encontraron tres puntos críticos mediante un análisis numérico: el punto trivial, uno en el interior de la región y otro en el exterior, no se demostró la existencia y unicidad del punto de equilibrio en el interior de la región. Por lo tanto, el Teorema central de esta tesis fue demostrar:

**Teorema (2.2).**  $F(x)$  tiene un único punto crítico en  $\text{int}(S)$ .

A partir de la demostración del Teorema (2.2), logramos reducir el análisis estacionario al cálculo del valor propio  $\lambda_*$  y su vector propio asociado  $v$  para cualesquiera parámetros de preferencias mediante el siguiente corolario:

**Corolario (2.1).** Si  $\lambda_*$  es la raíz de Frobenius de  $R^{-1}A$  con vector asociado  $v$  y  $x_0 = (x_1, x_2, x_3)$  es el único punto crítico de (1.1) entonces  $x_0 = \alpha v$  con  $\alpha = \frac{\lambda_* - 1}{\lambda_*(v_1 + v_2 + v_3)}$ .

Además, por la siguiente proposición, conseguimos caracterizar el punto crítico de manera analítica dadas las preferencias y la tasa de salida  $r$ :

**Proposición (2.1).** Dada la matriz  $A$  y  $r_1 = r_2 = r_3 = r$ , entonces el punto crítico  $x^*$  del sistema (1.1) es

$$x^* = \frac{1 - r}{(\text{Det}(A) - \text{Tr}(A) + 2)}v$$

---

<sup>5</sup>Lo que la literatura se conoce como sesgo de género

donde  $v$  satisface  $R^{-1}Av = \lambda_*v$  y es de la forma

$$v = (b_1c_2 - c_1b_2 + c_1, c_1a_2 - a_1c_2 + c_2, a_1b_2 - b_1a_2 + c_3 - \text{Tr}(A) + 1).$$

De la ecuación (1.16), observamos que la suma de proporciones de puestos de trabajo tiende a un subconjunto

$$\tilde{S} = \{(x_1, x_2, x_3) \in S : x_1 + x_2 + x_3 = 1 - r\}$$

el cual es invariante ante el flujo del sistema (1.1). En consecuencia, el estudio de la dinámica de  $\tilde{S}$  nos llevó a formular el siguiente teorema:

**Teorema (3.1).** Dado  $\{(x_1, x_2, x_3) \in S : x_1 + x_2 + x_3 = 1 - r\}$  y dada  $A$  matriz de preferencias (1.3) y  $r$  tasa de salida constante para los tres grupos entonces el sistema converge al punto  $(\frac{1-r}{3}, \frac{1-r}{3}, \frac{1-r}{3})$ .

Con base en el Teorema (2.2) sabemos que existe un único punto crítico  $x^*$ . Posteriormente, el siguiente Teorema demuestra que todas las curvas solución tienden a  $x^*$ , por tanto, es punto atractor del modelo (1.1):

**Teorema (3.3).** Si  $r_1 = r_2 = r_3 = r$  entonces la solución constante  $x(t) = x^*$ , del sistema (1.1), es asintóticamente estable.

Finalmente, es importante señalar que para lograr una proporción igualitaria en los puestos de trabajo, las preferencias deben ser complementarias en el sentido grupal (4.2), es decir, que la matriz de preferencias debe ser *bi-estocástica*.

El análisis del crecimiento de poblaciones usando ecuaciones diferenciales ordinarias no es nuevo, sin embargo, se sigue usando puesto que existen muchos modelos que permiten la predicción del crecimiento de ciertas poblaciones y por tanto, los avalan. Ejemplos muy importantes son los usados para predecir el número de contagios en una pandemia [3].

El trabajo está organizado de la siguiente manera: En el capítulo 1 se describe el sistema general; posteriormente se desarrollan 2 casos particulares de este sistema. En la sección 1.2 se elimina el dinamismo de mercado y hay un solo parámetro para la matriz de preferencias. Se desarrolla una ecuación de Bernoulli que describe el total de puestos ocupados con respecto al tiempo. Al resolverla e introducirla de nuevo en el sistema original obtenemos un sistema de ecuaciones no autónomas, que se resuelven explícitamente utilizando métodos clásicos de EDO. En la sección 1.3, se introduce el dinamismo del mercado con una tasa constante de salidas para los tres géneros y misma matriz de preferencias; asimismo, que el caso

anterior se obtienen las soluciones explícitas y se calculan los puntos críticos. Una vez analizado estos casos particulares, en los capítulos 2 y 3 se analiza la dinámica del sistema. En el capítulo 2 se propone una función auxiliar para determinar los puntos críticos del sistema original; por medio del Teorema del punto fijo de Brouwer se demuestra que existe un punto de equilibrio no trivial del modelo general y haciendo uso del Teorema de Perron-Frobenius se demuestra que el punto crítico es único. Si se asume que la tasa de mercado es homogénea se puede calcular dicho punto de manera explícita. En el capítulo 3 se demuestra la existencia de un plano invariante bajo el flujo del sistema cuando la tasa de salidas es constante y dado que existe un único punto crítico no trivial se prueba que este punto es asintóticamente estable. En el último capítulo, se presentan las condiciones que se tienen que dar para alcanzar la igualdad de contrataciones laborales de los tres géneros en el largo plazo encontrando que cuando las tasas de salida son iguales las soluciones tienden a un punto de equilibrio igualitario si y solo si la matriz de preferencias es doblemente estocástica.

# Capítulo 1

## Modelo general

### 1.1. Descripción del modelo

El modelo (1.1) es una extensión del modelo propuesto en [1], donde considera el sesgo de género, salidas del mercado y el tamaño de mercado para hombres y mujeres como factores principales de la brecha de género. En el modelo (1.1) se incorpora una ecuación más que representa el género no binario, para tener un sistema de tres ecuaciones diferenciales ordinarias no-lineales con nueve parámetros que describen las preferencias entre géneros y tres que describen las tasas de salidas del mercado para cada uno.

#### Supuestos:

- Las variables que usaremos para describir la dinámica de las contrataciones en un nicho de mercado<sup>1</sup> para un determinado tiempo son:  $x_1$  que representa la proporción de mujeres contratadas en  $t$ ,  $x_2$  la proporción de hombres contratados en  $t$  y  $x_3$  género no binario contratados en  $t$ . Así  $x_i(t)$  es la proporción de personas de género  $i$  contratadas en el tiempo ( $t$ ). Por está razón  $x_i \geq 0$  y  $x_1 + x_2 + x_3 \leq 1$ .
- Estos trabajadores tienen características de preparación similar (para el puesto de postulación) y por tanto, en cualquier momento una persona puede estar preparada para ser contratada. Además, de que están distribuidos uniformemente.
- Las preferencias de géneros se representan con los parámetros  $a_i, b_i, c_i \in [0, 1]$  en el que  $a_i$  describe la preferencia de las mujeres por alguno de los tres géneros, análogamente  $b_i$  la preferencia de los hombres por alguno de los tres géneros y  $c_i$  la preferencia

---

<sup>1</sup>Por simplicidad en lugar de asumir una cantidad finita de puestos de trabajo manejamos proporciones.

del género no binario por algún género. Estas preferencias son complementarias para cada género, de modo que  $a_1 + a_2 + a_3 = 1$ , así sucesivamente para los demás géneros.

- Las tasas de salida  $r_i \in (0, 1)$  ya sea por despidos, renunciaciones o muertes.

Como mencionamos el modelo pretende capturar la dinámica en el mercado laboral mediante preferencias que se tienen en el proceso de contratación, como también las salidas del mercado; por lo que el modelo resultante bajo estos supuestos, se representaría de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= (1 - x_1 - x_2 - x_3)(a_1x_1 + b_1x_2 + c_1x_3) - r_1x_1 \\ \frac{dx_2}{dt} &= (1 - x_1 - x_2 - x_3)(a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3) - r_2x_2 \\ \frac{dx_3}{dt} &= (1 - x_1 - x_2 - x_3)(a_3x_1 + b_3x_2 + c_3x_3) - r_3x_3\end{aligned}\tag{1.1}$$

Asimismo, se incorpora un término logístico  $(1 - x_1 - x_2 - x_3)$  el cual pone un freno al crecimiento de las contrataciones [3], es decir, cuando la suma de las proporciones  $x_1 + x_2 + x_3 = 1$  todos los puestos de trabajo ya han sido ocupados, entonces las derivadas del sistema (1.1) serán negativas, lo que implica que sólo habrá salidas del sistema.

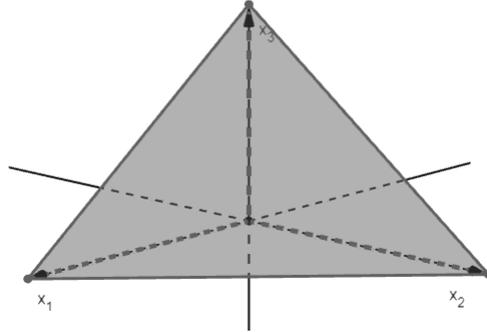


Figura 1.1: Región  $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 \leq 1, x_i \geq 0\}$

Matricialmente tenemos el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales no lineales:

$$X' = (1 - x_1 - x_2 - x_3)AX - RX\tag{1.2}$$

$$\text{donde } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} r_1 & 0 & 0 \\ 0 & r_2 & 0 \\ 0 & 0 & r_3 \end{pmatrix}$$

En este trabajo abordaremos los siguientes casos para obtener las soluciones explícitas del sistema.

## 1.2. Sin dinamismo de mercado

En microeconomía, cuando los agentes económicos (consumidores y productores) interactúan en el mercado, el hecho de que ambas partes desean obtener la mayor utilidad posible los conduce a buscar la mejor decisión posible. Por un lado, los consumidores con base en sus preferencias y su restricción presupuestaria y por otro lado, los productores lo hacen tomando en cuenta su tecnología y costos. Como consecuencia de la oferta y la demanda, se tiene que el mercado llega a un estado de equilibrio en el que se establece un precio y una cantidad de producción de los bienes en la que los agentes que interactúan están de acuerdo en comprar y vender. Varios autores se refieren a la citada interacción entre los agentes como *dinamismo de mercado*. Esta interacción se traslada fácilmente al ámbito que nosotros estamos modelando donde una de las partes es las personas que entran al mercado laboral y la otra parte la conforman los que salen. En particular, sino hay entradas o salidas entonces no existe dinamismo de mercado. En el caso de las salidas, no habrá dinamismo de mercado si  $r_1 = r_2 = r_3 = 0$ . Este supuesto aproxima la dinámica de empresas en las que la gente permanece en sus puestos de trabajo por un periodo de tiempo largo.

Una consecuencia directa de suponer que  $r_1 = r_2 = r_3 = 0$  es que todas las soluciones del sistema que inician en el interior de la región  $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 \leq 1, x_i \geq 0\}$  tenderán a saturar los puestos de trabajo, es decir al plano  $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ .

En esta sección vamos a demostrar una primera aproximación a la solución del sistema (1.2). Vamos a suponer que no hay despidos, ni renunciaciones o algún otro tipo de salida del mercado, entonces  $r_1 = r_2 = r_3 = 0$ . Además, suponemos que cada una de las partes de la población involucradas se prefieren a sí mismos y además a los otros los apoyan indistintamente. Esto último se refleja en el modelo suponiendo que  $a_{ii} = 1 - \epsilon$ ,  $a_{ij} = \epsilon/2$  para  $i \neq j$  y  $\epsilon \in (0, 2/3)$ . De esta manera:

$$A = \begin{pmatrix} 1 - \epsilon & \frac{\epsilon}{2} & \frac{\epsilon}{2} \\ \frac{\epsilon}{2} & 1 - \epsilon & \frac{\epsilon}{2} \\ \frac{\epsilon}{2} & \frac{\epsilon}{2} & 1 - \epsilon \end{pmatrix} \quad (1.3)$$

por lo que el parámetro de preferencias viene dado por  $\epsilon$ . Con base en las condiciones actuales socioculturales de la sociedad, suponemos que cada grupo tiene preferencias mayores por gente de su mismo grupo, que por la de los otros dos grupos. Por lo tanto,  $\epsilon$  debe de ser menor a  $(2/3)$  para que las preferencias por gente de tu mismo género sea mayor a la de los demás.

Por lo que el sistema a resolver para este caso es:

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= (1 - x_1 - x_2 - x_3)\left((1 - \epsilon)x_1 + \frac{\epsilon}{2}x_2 + \frac{\epsilon}{2}x_3\right) \\ \frac{dx_2}{dt} &= (1 - x_1 - x_2 - x_3)\left(\frac{\epsilon}{2}x_1 + (1 - \epsilon)x_2 + \frac{\epsilon}{2}x_3\right) \\ \frac{dx_3}{dt} &= (1 - x_1 - x_2 - x_3)\left(\frac{\epsilon}{2}x_1 + \frac{\epsilon}{2}x_2 + (1 - \epsilon)x_3\right)\end{aligned}\tag{1.4}$$

Obteniendo la **función de empleo total**, como la suma de cada una de las ecuaciones en (1.3), tenemos que:

$$x'_1 + x'_2 + x'_3 = (1 - x_1 - x_2 - x_3)(x_1 + x_2 + x_3)\tag{1.5}$$

haciendo  $u = x_1 + x_2 + x_3$  obtenemos:

$$u' - u + u^2 = 0$$

una ecuación diferencial de tipo Bernoulli de grado dos. Dividiendo entre  $u^{-2}$  y sustituyendo por  $w = u^{-1}$  es equivalente a

$$w' + w - 1 = 0$$

lo cual ya es una ecuación diferencial lineal. Resolviendo tenemos que la solución es:

$$u(t) = \frac{e^t}{e^t + c}$$

y dadas las condiciones iniciales  $u(0) = u_0 = x_1(0) + x_2(0) + x_3(0)$ , obtenemos la expresión final de empleo total:

$$u(t) = \frac{e^t}{e^t + \left(\frac{1-u_0}{u_0}\right)}\tag{1.6}$$

Observamos en la ecuación (1.6) cuando  $t \rightarrow \infty$  la expresión tiende a uno.

Entonces,

$$w(t) = 1 - u(t) = \frac{1}{1 + \left(\frac{u_0}{1-u_0}\right)e^t} \quad (1.7)$$

Las ecuaciones de (1.4) reescribiendolas de forma matricial y sustituyendo  $(1 - x_1 - x_2 - x_3)$  por (1.7), obtenemos el siguiente sistema no autónomo:

$$X' = \left(\frac{1}{1 + \left(\frac{u_0}{1-u_0}\right)e^t}\right)AX \quad (1.8)$$

La solución de (1.8), con  $X(0) = X_0$  está dada por

$$X(t) = \exp\left(\int_0^t \left(\frac{1}{1 + \left(\frac{u_0}{1-u_0}\right)e^s}\right)ds\right)AX_0, \quad X_0 = X(0) = \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{pmatrix} \quad (1.9)$$

**Lema 1.1.** 1.- Si  $\epsilon \in (0, \frac{2}{3})$  entonces la matriz  $A = \begin{pmatrix} 1 - \epsilon & \frac{\epsilon}{2} & \frac{\epsilon}{2} \\ \frac{\epsilon}{2} & 1 - \epsilon & \frac{\epsilon}{2} \\ \frac{\epsilon}{2} & \frac{\epsilon}{2} & 1 - \epsilon \end{pmatrix}$  es diagonalizable.

2.-

$$\int_0^t \left(\frac{1}{1 + \left(\frac{u_0}{1-u_0}\right)e^s}\right)ds = \int_0^t w(s)ds = \ln\left(\frac{e^t}{1 - u_0 + u_0e^t}\right)$$

*Demostración.* El polinomio característico de A es

$$p(\lambda) = \lambda^3 + (3\epsilon - 3)\lambda^2 + \left(\frac{9}{4}\epsilon^2 - 6\epsilon + 3\right)\lambda - \frac{9}{4}\epsilon^2 + 3\epsilon - 1$$

de este modo los valores propios de A son  $\lambda_1 = 1$  y  $\lambda_2 = 1 - \frac{3}{2}\epsilon$  y los vectores propios asociados a estos valores propios

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

tenemos dos vectores propios asociados al valor propio  $\lambda_2$ , por lo tanto la matriz A es diagonalizable. Si P es la matriz cuyas columnas son los vectores  $v_1, v_2$  y  $v_3$  entonces  $A = PDP^{-1}$ , donde D es matrix diagonal cuyas entras son los valores propios  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$ .

Y haciendo  $u = (\frac{1-u_0}{u_0})e^{-s}$  se tiene

$$\int_0^t w(s)ds = - \int_{\frac{1}{u_0}-1}^{(\frac{1}{u_0}-1)e^{-t}} \frac{1}{1+u} du = \ln\left(\frac{e^t}{1-u_0+u_0e^t}\right)$$

□

La función

$$\gamma(t) = \ln\left(\frac{e^t}{1-u_0+u_0e^t}\right) \quad (1.10)$$

está definida para todo  $t \in \mathbb{R}$ .

**Teorema 1.1.** Si  $\epsilon \in (0, 2/3)$  entonces las soluciones de (1.4), con  $x(0) = (x_1(0), x_2(0), x_3(0))$ , están dadas por las funciones

$$\begin{aligned} x(t) &= \left[\frac{1}{3}\sigma(t) + \frac{2}{3}\rho(t)\right]x_1(0) + \left[\frac{1}{3}\sigma(t) - \frac{1}{3}\rho(t)\right]x_2(0) + \left[\frac{1}{3}\sigma(t) - \frac{1}{3}\rho(t)\right]x_3(0) \\ y(t) &= \left[\frac{1}{3}\sigma(t) - \frac{1}{3}\rho(t)\right]x_1(0) + \left[\frac{1}{3}\sigma(t) + \frac{2}{3}\rho(t)\right]x_2(0) + \left[\frac{1}{3}\sigma(t) - \frac{1}{3}\rho(t)\right]x_3(0) \\ z(t) &= \left[\frac{1}{3}\sigma(t) - \frac{1}{3}\rho(t)\right]x_1(0) + \left[\frac{1}{3}\sigma(t) - \frac{1}{3}\rho(t)\right]x_2(0) + \left[\frac{1}{3}\sigma(t) + \frac{2}{3}\rho(t)\right]x_3(0) \end{aligned} \quad (1.11)$$

donde  $\sigma(t) = \frac{e^t}{1-u_0+u_0e^t}$  y  $\rho(t) = \left(\frac{e^t}{1-u_0+u_0e^t}\right)^{(1-\frac{3}{2}\epsilon)}$ .

*Demostración.* Por Lema (1.1) se tiene

$$X(t) = \exp(\gamma(t)A)X_0 = P\exp(\gamma(t)D)P^{-1}X_0$$

haciendo  $Y = P^{-1}X$  tenemos

$$Y(t) = \exp(\gamma(t)D)Y_0$$

usando (1.10) obtenemos las soluciones

$$\begin{aligned} \exp(\gamma(t)D) &= \begin{pmatrix} \ln\left(\frac{e^t}{1-u_0+u_0e^t}\right) & 0 & 0 \\ 0 & \ln\left(\frac{e^t}{1-u_0+u_0e^t}\right)(1-\frac{3}{2}\epsilon) & 0 \\ 0 & 0 & \ln\left(\frac{e^t}{1-u_0+u_0e^t}\right)(1-\frac{3}{2}\epsilon) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sigma(t) & 0 & 0 \\ 0 & \rho(t) & 0 \\ 0 & 0 & \rho(t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

entonces, tenemos un sistema desacoplado en términos de  $Y$

$$\begin{aligned} y_1(t) &= \sigma(t) \\ y_2(t) &= \rho(t) \\ y_3(t) &= \rho(t) \end{aligned} \quad (1.12)$$

Finalmente, regresando al sistema original:

$$X(t) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma(t) & 0 & 0 \\ 0 & \rho(t) & 0 \\ 0 & 0 & \rho(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{pmatrix} \quad (1.13)$$

desarrollando las operaciones con matrices obtenemos (1.11). □

### 1.3. Dinamismo de mercado homogéneo

En esta sección seguimos con el análisis de las soluciones del sistema e introducimos una tasa de salidas constantes para los tres géneros dando lugar al dinamismo de mercado homogéneo. El mercado homogéneo es una aproximación idealizada al mercado real. Pero es importante porque aísla la dinámica del mercado de interés de manera que se puede explorar sin los efectos impuestos por diferencias en el mercado de salida.

Este supuesto se ve reflejado en el modelo asumiendo que  $r_1 = r_2 = r_3 = r$  y con la matriz de preferencias (1.3), tenemos el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= (1 - x_1 - x_2 - x_3) \left( (1 - \epsilon)x_1 + \frac{\epsilon}{2}x_2 + \frac{\epsilon}{2}x_3 \right) - rx_1 \\ \frac{dx_2}{dt} &= (1 - x_1 - x_2 - x_3) \left( \frac{\epsilon}{2}x_1 + (1 - \epsilon)x_2 + \frac{\epsilon}{2}x_3 \right) - rx_2 \\ \frac{dx_3}{dt} &= (1 - x_1 - x_2 - x_3) \left( \frac{\epsilon}{2}x_1 + \frac{\epsilon}{2}x_2 + (1 - \epsilon)x_3 \right) - rx_3 \end{aligned} \quad (1.14)$$

Del mismo modo que el caso anterior, obteniendo la **función de empleo total**, tenemos que:

$$x'_1 + x'_2 + x'_3 = (1 - x_1 - x_2 - x_3)(x_1 + x_2 + x_3) - r(x_1 + x_2 + x_3) \quad (1.15)$$

haciendo  $u = x_1 + x_2 + x_3$  obtenemos:

$$u' + u^2 - u + ru = 0$$

una ecuación diferencial de tipo Bernoulli de grado dos. Dividiendo entre  $u^{-2}$  y sustituyendo por  $w = u^{-1}$  es equivalente a

$$w' + (1 - r)w - 1 = 0$$

entonces, tenemos que la solución es:

$$u(t) = \frac{(1 - r)e^{(1-r)t}}{e^{(1-r)t} + C(1 - r)}$$

y dadas las condiciones iniciales  $u(0) = u_0 = x_1(0) + x_2(0) + x_3(0)$ , obtenemos la expresión final de empleo total:

$$u(t) = \frac{(1 - r)e^{(1-r)t}}{e^{(1-r)t} + \frac{1-r-u_0}{u_0}} \quad (1.16)$$

Observamos en la ecuación (1.16) cuando  $t \rightarrow \infty$  la expresión tiende a  $1 - r$ .

Lo que implica que,

$$w(t) = 1 - u(t) = \frac{re^{(1-r)t} + a}{e^{(1-r)t} + a} \quad (1.17)$$

donde  $a = \frac{1-r-u_0}{u_0}$ . Entonces, sustituyendo en (1.14), obtenemos el siguiente sistema no autónomo:

$$X' = w(t)AX_0 - RX_0 \quad (1.18)$$

y dadas las condiciones iniciales  $X(0) = X_0$ , tenemos que la solución está dada por:

$$X(t) = \exp\left(\int_0^t (w(s)A - R)ds\right)X_0, \quad X_0 = \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{pmatrix} \quad (1.19)$$

**Teorema 1.2.** Si  $\epsilon \in (0, \frac{2}{3})$  y  $r \in (0, 1)$  entonces las soluciones explícitas de (1.14), con  $x(0) = (x_1(0), x_2(0), x_3(0))$  están dadas por:

$$\begin{aligned} x(t) &= \left[\frac{1}{3}\tau(t) + \frac{2}{3}\phi(t)\right]x_1(0) + \left[\frac{1}{3}\tau(t) - \frac{1}{3}\phi(t)\right]x_2(0) + \left[\frac{1}{3}\tau(t) - \frac{1}{3}\phi(t)\right]x_3(0) \\ y(t) &= \left[\frac{1}{3}\tau(t) - \frac{1}{3}\phi(t)\right]x_1(0) + \left[\frac{1}{3}\tau(t) + \frac{2}{3}\phi(t)\right]x_2(0) + \left[\frac{1}{3}\tau(t) - \frac{1}{3}\phi(t)\right]x_3(0) \\ z(t) &= \left[\frac{1}{3}\tau(t) - \frac{1}{3}\phi(t)\right]x_1(0) + \left[\frac{1}{3}\tau(t) - \frac{1}{3}\phi(t)\right]x_2(0) + \left[\frac{1}{3}\tau(t) + \frac{2}{3}\phi(t)\right]x_3(0) \end{aligned} \quad (1.20)$$

donde  $\tau(t) = \frac{1+a}{1+ae^{-t(1-r)}}$  y  $\phi(t) = e^{-rt} \left[ \frac{(a+e^{(1-r)t})^r (1+a)^{(1-r)}}{1+ae^{-(1-r)t}} \right]^{\frac{1-\frac{3}{2}\epsilon}{1-r}}$ .

*Demostración.* Las soluciones del sistema (1.14) está dado por (1.19). Entonces, por Lema (1.1) y haciendo  $Y = P^{-1}X$ , tenemos el siguiente sistema

$$\begin{aligned} Y' &= w(t)DY - P^{-1}RPY \\ &= (w(t)D - R)Y \end{aligned}$$

tal que

$$\begin{aligned} y_1' &= (w(t) - r)y_1 \\ y_2' &= (w(t)(1 - \frac{3}{2}\epsilon) - r)y_2 \\ y_3' &= (w(t)(1 - \frac{3}{2}\epsilon) - r)y_3 \end{aligned}$$

lo que implica que cada una de las soluciones a las ecuaciones anteriores, vienen dadas por

$$\begin{aligned} y_1 &= \exp\left(\int_0^t (w(s) - r)ds\right) \\ y_2 &= \exp\left(\int_0^t (w(s)(1 - \frac{3}{2}\epsilon) - r)ds\right) \\ y_3 &= \exp\left(\int_0^t (w(s)(1 - \frac{3}{2}\epsilon) - r)ds\right) \end{aligned}$$

resolviendo, obtenemos las siguientes soluciones explícitas en términos de  $y_i, i \in \{1, 2, 3\}$ :

$$\begin{aligned} y_1(t) &= \frac{1+a}{1+ae^{-t(1-r)}} = \tau(t) \\ y_2(t) &= e^{-rt} \left[ \frac{(a+e^{(1-r)t})^r (1+a)^{(1-r)}}{1+ae^{-(1-r)t}} \right]^{\frac{1-\frac{3}{2}\epsilon}{1-r}} = \phi(t) \\ y_3(t) &= e^{-rt} \left[ \frac{(a+e^{(1-r)t})^r (1+a)^{(1-r)}}{1+ae^{-(1-r)t}} \right]^{\frac{1-\frac{3}{2}\epsilon}{1-r}} = \phi(t) \end{aligned} \quad (1.21)$$

por lo tanto,

$$X(t) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau(t) & 0 & 0 \\ 0 & \phi(t) & 0 \\ 0 & 0 & \phi(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{pmatrix} \quad (1.22)$$

y desarrollando las operaciones obtenemos (1.20). □

Una vez obtenidas las soluciones explícitas de este caso, analizaremos la estabilidad del sistema (1.14). Para esto obtendremos los puntos críticos o de equilibrio, que representan un estado fijo del sistema y determinar la naturaleza de los mismos. Para ello tenemos que resolver el siguiente sistema:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = (1 - x_1 - x_2 - x_3)AX_0 - RX_0 \quad (1.23)$$

Haciendo  $X_0 = PY_0$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

donde  $P$  es la matriz de cambio de base utilizada anteriormente, luego

$$x_1 = y_1 - y_2 - y_3$$

$$x_2 = y_1 + y_2$$

$$x_3 = y_1 + y_3$$

entonces,  $x_1 + x_2 + x_3 = 3y_1$ , sustituyendo en (1.23) y  $A = PDP^{-1}$  implica que  $0 = (1 - 3y_1)DY_0 - RY_0$ , por consiguiente

$$0 = y_1((1 - 3y_1) - r)$$

$$0 = y_2(((1 - 3y_1)(1 - \frac{3}{2}\epsilon)) - r)$$

$$0 = y_3(((1 - 3y_1)(1 - \frac{3}{2}\epsilon)) - r)$$

De la primera ecuación  $y_1 = 0$  o  $y_1 = \frac{1-r}{3}$ . Si  $y_1 = 0$  entonces  $y_2 = 0$  o  $1 - \frac{3}{2}\epsilon = r$ , por tanto,  $y_2 = 0$ . Asimismo, para  $y_3$ . Ahora si  $y_1 = \frac{1-r}{3}$  se sigue que  $y_2 = 0$  o  $\frac{3}{2}\epsilon r = 0$ , así que  $y_2 = 0$ . Del mismo modo, para  $y_3$ . De modo que los puntos  $(0, 0, 0)$  y  $(\frac{1-r}{3}, 0, 0)$  representan los puntos críticos del sistema.

Para determinar la naturaleza de los puntos críticos anteriores utilizaremos el Teorema de Linealización, donde la matriz Jacobiana, después de hacer el cambio de variable es:

$$J = \begin{pmatrix} 1 - 6y_1 & 0 & 0 \\ \frac{9}{2}y_2\epsilon - 3y_2 & 1 - 3y_1 - \frac{3}{2}\epsilon + \frac{9}{2}y_1\epsilon - r & 0 \\ \frac{9}{2}y_3\epsilon - 3y_3 & 0 & 1 - 3y_1 - \frac{3}{2}\epsilon + \frac{9}{2}y_1\epsilon - r \end{pmatrix}$$

evaluando el punto  $(0, 0, 0)$  obtenemos tanto valores propios positivos como negativos, por lo tanto es un *punto silla*. Por otro lado, evaluando el punto  $(\frac{1-r}{3}, 0, 0)$  obtenemos valores propios negativos, por consiguiente es un *punto atractor*. Regresando este punto a las coordenadas originales tenemos  $(\frac{1-r}{3}, \frac{1-r}{3}, \frac{1-r}{3})$  es el atractor del sistema.

En los siguientes capítulos estudiaremos el comportamiento de las soluciones del sistema (1.1) para cualquiera preferencias y tasas de salida  $r_i$ .



## Capítulo 2

# Puntos críticos del sistema

En capítulos anteriores calculamos las soluciones explícitas para algunos casos particulares del sistema, sin embargo, queremos ver la dinámica general para ello es importante conocer los *puntos críticos*. Un punto crítico es una solución constante del sistema de ecuaciones diferenciales. Esto quiere decir que dicha solución no cambia con el tiempo, por lo que nos permitiría conocer en qué puntos las proporciones de los géneros se estabilizarían.

Uno de estos puntos críticos es el origen, ya que se puede ver directamente de las ecuaciones del modelo. En este capítulo haremos uso del teorema del punto fijo de Brouwer y el teorema de Perron-Frobenius para demostrar que existe un único punto crítico no trivial de nuestro sistema de ecuaciones.

**Definición 2.1.** *Un punto crítico del sistema  $x' = F(x)$  es un punto  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ , tal que  $F(x_0) = 0$ .*

**Definición 2.2.** *Un punto fijo de la función  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  es un punto  $x_0$  tal que  $F(x_0) = x_0$ .*

Se sigue de las definiciones que  $x_0$  satisface  $F(x_0) = 0$  si y solo si  $x_0$  es un punto fijo de la función

$$G(x) = F(x) + x, \quad x \in \mathbb{R}^3. \tag{2.1}$$

Para demostrar la existencia de un punto crítico no trivial usaremos el

**Teorema del punto fijo de Brouwer [27].** Si  $f : K \rightarrow K$  es una función continua en un conjunto  $K \subseteq \mathbb{R}^n$  compacto y convexo entonces existe un punto  $x \in K$  tal que  $f(x) = x$ .

Para  $R = \max\{r_1, r_2, r_3\}$  y  $k = \frac{1-R}{2}$ , sea

$$S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1, x_2, x_3 \geq 0, k \leq x_1 + x_2 + x_3 \leq 1\}. \quad (2.2)$$

Para demostrar la unicidad del punto crítico haremos uso del Teorema de Perron-Frobenius. Este resultado hace uso de las siguientes definiciones

**Definición 2.3.** Sea  $A \in M_n$ , se dice que  $A$  es una matriz descomponible o reducible si existe una matriz de permutación  $P$  tal que

$$B = P^T A P = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ 0 & B_{22} \end{pmatrix}$$

siendo  $B_{11}, B_{22}$  matrices cuadradas de orden inferior a  $A$ . En caso contrario, se dice que la matriz  $A$  es indescomponible o irreducible.

**Ejemplo 2.1.** Si  $A$  es una matriz cuyas entradas son positivas entonces  $A$  es una matriz indescomponible.

**Teorema 2.1** (Teorema de Perron-Frobenius [28]). Sea  $A \in M_n$  una matriz no negativa indescomponible y  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  los valores propios de  $A$ . Si  $\lambda_* = \max_{1 \leq i \leq n} \{|\lambda_i|\}$  entonces

1.  $\lambda_*$  es un valor propio de  $A$ .
2.  $\lambda_* > 0$ .
3.  $\lambda_*$  es simple.
4. Existe un vector propio  $v$  asociado a  $\lambda_*$  tal que todas sus entradas son no negativas.
5. No existe otro vector propio de  $A$  que este asociado a algún  $\lambda_i$  con entradas no negativas excepto los múltiplos positivos de  $v$ .

$$6. \min_j \sum_{i=1}^n a_{ij} \leq \lambda_* \leq \max_j \sum_{i=1}^n a_{ij}$$

**Definición 2.4.** El valor propio del Teorema 2.1 se denomina raíz de Frobenius.

**Ejemplo 2.2.** matriz  $3 \times 3$

**Ejemplo 2.3.** Si  $A \in M_n$  tal que  $a_{ij} > 0$  y  $\sum_{i=1}^n a_{ij} = 1$  entonces la raíz de Frobenius de  $A$  es  $\lambda_* = 1$ .

Con base en los resultados anteriores podemos demostrar la existencia de un único punto crítico de la función  $F$ . Primero demostraremos que  $G(S) \subseteq S$ .

**Lema 2.1.** Si  $G$  es la función (2.1) entonces  $G(y) \in S$ , para todo  $y \in S$ .

*Demostración.* Observamos que  $G_1(y) \geq 0$ ,  $G_2(y) \geq 0$ , y  $G_3(y) \geq 0$ . Luego, sumando cada una de las entradas de  $G(y)$  obtenemos

$$\begin{aligned} G_1(y) + G_2(y) + G_3(y) &= (1 - y_1 - y_2 - y_3)(y_1 + y_2 + y_3) \\ &\quad + y_1(1 - r_1) + y_2(1 - r_2) + y_3(1 - r_3) \\ &\leq (1 - y_1 - y_2 - y_3)(y_1 + y_2 + y_3) + (y_1 + y_2 + y_3) \\ &= (y_1 + y_2 + y_3)[2 - y_1 - y_2 - y_3] \leq 1 \end{aligned}$$

ya que  $v(2 - v)$  alcanza su máximo en  $v = 1$ , para  $v \in [0, 1]$ .  $G_1(y) + G_2(y) + G_3(y) \leq 1$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} G_1(y) + G_2(y) + G_3(y) &\geq (1 - y_1 - y_2 - y_3)(y_1 + y_2 + y_3) + (1 - R)(y_1 + y_2 + y_3) \\ &= (y_1 + y_2 + y_3)(2 - y_1 - y_2 - y_3 - R) \end{aligned}$$

esta última expresión es una función de la variable  $c = y_1 + y_2 + y_3$ . Además  $c(2 - c - R)$ , restringida al intervalo  $[k, 1]$  alcanza su mínimo en los valores extremos  $c = 1$  o  $c = k$ . Si  $c = 1$  entonces

$$c(2 - c - R) = 1 - R > \frac{1 - R}{2} = k.$$

Si  $c = k$  entonces

$$c(2 - c - R) = \frac{(1 - R)(3 - R)}{4} > \frac{1 - R}{2} = k.$$

Luego  $G_1(y) + G_2(y) + G_3(y) > k$  y se tiene la conclusión deseada.  $\square$

**Teorema 2.2.**  $F(x)$  tiene un único punto crítico en  $\text{int}(S)$

*Demostración.* Por el Lema (2.1)  $G$  es continua en  $S$ , que es un conjunto convexo y compacto. Luego, por el Teorema del punto fijo de Brouwer, existe un  $x_0 \in S$  tal que  $G(x_0) = x_0$ . Es decir, un punto  $x_0 \neq 0$  tal que  $F(x_0) = 0$ .

Enseguida mostraremos que  $x_0 \notin \partial(S)$ . Para ello consideramos los siguientes casos:

1. Si  $x \in C = \{x \in S : x_1 + x_2 + x_3 = 1\}$  entonces  $F(x) = -RX \neq 0$ .

2. Si  $x \in \{x \in S : x_1 + x_2 + x_3 = k\}$  entonces las entradas de  $F(x)$  son

$$\begin{aligned} F_1(x) &= (1 - k)(a_1x_1 + b_1x_2 + c_1x_3) - r_1x_1, \\ F_2(x) &= (1 - k)(a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3) - r_2x_2, \\ F_3(x) &= (1 - k)(a_3x_1 + b_3x_2 + c_3x_3) - r_3x_3. \end{aligned}$$

Al sumar tenemos que

$$\begin{aligned} F_1(x) + F_2(x) + F_3(x) &= (1 - k)k - r_1x_1 - r_2x_2 - r_3x_3 \\ &> (1 - k)k - Rk = k^2 > 0. \end{aligned}$$

3. Si  $x \in \{x \in S : x_1 = 0\} \setminus C$  entonces

$$F_1(x) = (1 - x_2 - x_3)(b_1x_2 + c_1x_3) > 0.$$

Análogamente, se verifica que  $F_2(x) > 0$  si  $x \in \{x \in S : x_2 = 0\} \setminus C$  y  $F_3(x) > 0$  si  $x \in \{x \in S : x_3 = 0\} \setminus C$ .

Por 1-3,  $x_0 \in \text{int}(S)$ .

Para demostrar la unicidad de  $x_0$  haremos uso del Teorema 2.1.

Tenemos que  $x_0 = (x_1, x_2, x_3)$  satisface

$$((1 - x_1 - x_2 - x_3)R^{-1}A - I)x_0 = 0$$

donde  $R^{-1}A$  es una matriz cuyas entradas son positivas. Por lo que, según el ejemplo 2.3,  $R^{-1}A$  es indescomponible. Luego, por la ecuación anterior tenemos

$$\left( R^{-1}A - \left( \frac{1}{1 - x_1 - x_2 - x_3} \right) I \right) x_0 = 0. \quad (2.3)$$

Es decir,  $\lambda = \frac{1}{1 - x_1 - x_2 - x_3}$  es un valor propio de  $R^{-1}A$  con vector propio asociado  $x_0$  y puesto que  $x_0 \notin \partial(S)$  se tiene  $x_i > 0$ . Por tanto, de acuerdo al Teorema 2.1-5,  $\lambda$  es la raíz de Frobenius de  $R^{-1}A$ .

Si existe otro punto crítico  $x^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*) \in \text{int}(S)$  que satisface la ecuación 2.3 en-

tonces, por el Teorema 2.1-5, se tiene que

$$x_1^* + x_2^* + x_3^* = x_1 + x_2 + x_3, \quad (2.4)$$

$$x^* = \alpha x_0, \quad (2.5)$$

con  $\alpha > 0$ . Al sustituir (2.5) en (2.4) se tiene que  $\alpha = 1$ . De lo cual  $x^* = x_0$ .  $\square$

**Corolario 2.1.** *Si  $\lambda_*$  es la raíz de Frobenius de  $R^{-1}A$  con vector asociado  $v$  y  $x_0 = (x_1, x_2, x_3)$  es el único punto crítico de (1.1) entonces  $x_0 = \alpha v$  con  $\alpha = \frac{\lambda_* - 1}{\lambda_*(v_1 + v_2 + v_3)}$*

*Demostración.* De (2.3) tenemos que

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1 - \frac{1}{\lambda_*} \quad (2.6)$$

$$x_0 = \alpha v \quad (2.7)$$

con  $\alpha > 0$ . Al sumar las entradas del vector  $x_0$  y usar las ecuaciones (2.6) y (2.7) se sigue el resultado.  $\square$

**Ejemplo 2.4.** *Tomando la matriz definida en (2.3) y  $\epsilon = \frac{1}{4}$ ,  $r_1 = \frac{1}{16}$ ,  $r_2 = \frac{1}{18}$ ,  $r_3 = \frac{1}{20}$ . De acuerdo con el teorema anterior, siempre vamos a encontrar un punto crítico de  $F$  en el interior  $S$  y este es único. Entonces, sustituyendo los valores anteriores:*

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = (1 - x_1 - x_2 - x_3) \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{4} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{16} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{18} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{20} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

*Resolviendo el sistema (2.8) tenemos un solo punto crítico en el interior de la región de interés  $x_0 \approx (0.2294, 0.3042, 0.41159)$ . Con base en el teorema de linealización calculamos la matriz jacobiana de  $F$  y evaluando en el punto crítico obtenemos que los eigenvalores son  $\lambda_1 \approx -0.945$ ,  $\lambda_2 \approx -0.026$  y  $\lambda_3 \approx -0.018$ ; por lo tanto, este punto es un pozo. Lo anterior, es congruente con el Teorema (2.2).*

**Proposición 2.1.** *Dada la matriz  $A$  y  $r_1 = r_2 = r_3 = r$ , entonces el punto crítico  $x^*$  del sistema (1.1) es*

$$x^* = \frac{1 - r}{(\text{Det}(A) - \text{Tr}(A) + 2)} v \quad (2.9)$$

donde  $v$  satisface  $R^{-1}Av = \lambda_* v$ .

*Demostración.* Sea  $x_1^* + x_2^* + x_3^* = s^*$  y por definición de punto crítico

$$((1 - s^*)A - R)x^* = 0$$

por (3.1)  $x_1^* + x_2^* + x_3^* = 1 - r$  entonces

$$r(A - I)x^* = 0$$

tenemos que

$$(A - I)x^* = \begin{pmatrix} a_1 - 1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 - 1 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 - 1 \end{pmatrix} x^* = 0,$$

y dado que las preferencias con complementarias, la última fila de esta matriz es combinación lineal de las primeras dos, de manera que

$$= \begin{pmatrix} a_1 - 1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 - 1 & c_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} x^* = 0.$$

Observamos que  $x^*$  es ortogonal a los vectores de la matriz  $(A - I)$ . Entonces, el producto vectorial entre estos dos vectores de la matriz será un múltiplo escalar del vector  $x^*$ . De manera que

$$\lambda v = \lambda((a_1 - 1), b_1, c_1) \times (a_2, (b_2 - 1), c_2) = x^*.$$

Desarrollando este producto vectorial y sumando un cero en la última entrada  $c_3 - c_3$ , obtenemos

$$\lambda v = \lambda(\underbrace{b_1 c_2 - c_1 b_2 + c_1}_{v_1}, \underbrace{c_1 a_2 - a_1 c_2 + c_2}_{v_2}, \underbrace{a_1 b_2 - b_1 a_2 + c_3 - Tr(A) + 1}_{v_3})$$

y dado que queremos asegurar que se quede en el plano  $1 - r$  entonces  $\lambda v_1 + \lambda v_2 + \lambda v_3 = 1 - r$ . Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{1 - r}{v_1 + v_2 + v_3} \\ &= \frac{1 - r}{Det(A) - Tr(A) + 2} \end{aligned} \tag{2.10}$$

lo que demuestra la proposición. □

## Capítulo 3

# Análisis del comportamiento dinámico del sistema

Ya demostramos que (1.1) tiene un único punto crítico en  $S$ . En el presente capítulo estudiamos el comportamiento cualitativo de las soluciones de nuestro modelo haciendo uso de herramientas de ecuaciones diferenciales, como lo son las soluciones de ecuaciones de Bernoulli, identificar regiones invariantes del sistema, así como un Teorema de estabilidad de O. Perron [30] y el uso del concepto de estabilidad estructural de Peixoto [32].

### 3.1. Existencia de un plano invariante

En el contexto de ecuaciones diferenciales, el término “flujo del sistema” se refiere a la evolución de las soluciones a medida que el tiempo transcurre. En nuestro caso, el flujo nos proporciona una descripción completa de cómo evolucionan los puestos de trabajo en cualquier tiempo  $t$  dada una condicional inicial  $(x_1(0), x_2(0), x_3(0))$ . Decir que un subconjunto es *invariante* bajo el flujo significa que si las soluciones del sistema comienzan en este espacio, permanecerán en este espacio para todo tiempo  $t \geq 0$ .

Por la demostración del Teorema (2.2) sabemos que el campo vectorial dado por  $F(x)$  apunta al interior de  $S$  y por tanto  $S$  es un subconjunto invariante del flujo del sistema. Este no es el único subconjunto invariante del sistema como se verá a continuación.

Si  $r_1 = r_2 = r_3 = r$  entonces al sumar las tres ecuaciones del modelo (1.1) e introducir

la variable  $u = x_1 + x_2 + x_3$  tenemos

$$u'(t) = (1 - r - u)u. \quad (3.1)$$

La ecuación (3.1) es una ecuación para la suma de las proporciones de puestos de trabajo ocupadas al tiempo  $t$ . Notamos que si  $u < 1 - r$ , entonces  $u'$  es positiva y por tanto  $u$  es creciente. Además, si  $u > 1 - r$ , entonces  $u'$  es negativa y por tanto  $u$  es decreciente. Al resolver esta ecuación obtuvimos (1.16). En la solución observamos que si la condición inicial es  $u_0 = 1 - r$  entonces  $u(t) = 1 - r, \forall t \geq 0$ . Esto es, si la condición inicial de la solución  $(x_1(t), x_2(t), x_3(t))$  satisface  $x_1(0) + x_2(0) + x_3(0) = 1 - r$  entonces  $x_1(t) + x_2(t) + x_3(t) = 1 - r \forall t \geq 0$ . Es decir, el subconjunto

$$\tilde{S} = \{(x_1, x_2, x_3) \in S : x_1 + x_2 + x_3 = 1 - r\}$$

es invariante bajo el flujo del sistema (1.1). Si sustituimos  $u(t) = 1 - r$  en la ecuación diferencial anterior

$$u'(t) = (1 - r)(1 - r) - (1 - r)^2 = 0 \quad (3.2)$$

por tanto, la derivada en  $u'(t) = 0$ , esto es,  $(x_1 + x_2 + x_3)' = 0$ . Dicho de otra manera, si  $(x_1(0), x_2(0), x_3(0)) \notin \tilde{S}$  entonces  $x(t)$  tiende a  $\tilde{S}$  cuando  $t \rightarrow \infty$ , es decir, la suma de las proporciones de puestos de trabajo tiende a  $1 - r$  y en  $\tilde{S}$  las curvas solución se mantienen (ya que la derivada es cero). Por lo que el análisis se reduce a estudiar la dinámica dentro de este plano, lo que nos lleva al siguiente teorema.

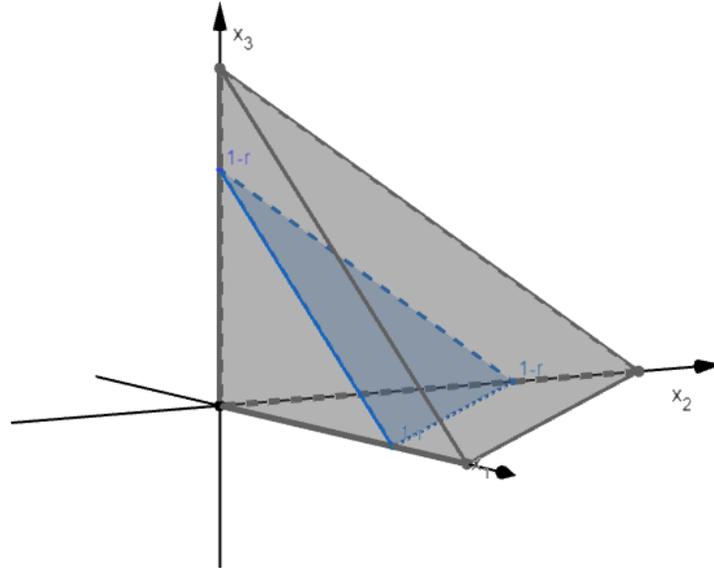


Figura 3.1: Plano Invariante  $\tilde{S} = \{(x_1, x_2, x_3) \in S : x_1 + x_2 + x_3 = 1 - r\}$

**Teorema 3.1.** Dado  $\{(x_1, x_2, x_3) \in S : x_1 + x_2 + x_3 = 1 - r\}$  y dada  $A$  matriz de preferencias (1.3) y  $r$  tasa de salida constante para los tres grupos entonces el sistema converge al punto  $(\frac{1-r}{3}, \frac{1-r}{3}, \frac{1-r}{3})$ .

*Demostración.* Tenemos el sistema (1.14) y haciendo  $x_1 + x_2 + x_3 = 1 - r$  tenemos:

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= (r)[(1 - \epsilon)x_1 + \frac{\epsilon}{2}x_2 + \frac{\epsilon}{2}x_3] - rx_1 \\ \frac{dx_2}{dt} &= (r)[\frac{\epsilon}{2}x_1 + (1 - \epsilon)x_2 + \frac{\epsilon}{2}x_3] - rx_2 \\ \frac{dx_3}{dt} &= (r)[\frac{\epsilon}{2}x_1 + \frac{\epsilon}{2}x_2 + (1 - \epsilon)x_3] - rx_3\end{aligned}\tag{3.3}$$

al reducir términos semejantes nos queda el siguiente sistema:

$$X' = \begin{pmatrix} -r\epsilon & \frac{r\epsilon}{2} & \frac{r\epsilon}{2} \\ \frac{r\epsilon}{2} & -r\epsilon & \frac{r\epsilon}{2} \\ \frac{r\epsilon}{2} & \frac{r\epsilon}{2} & -r\epsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\tag{3.4}$$

denotamos a  $B = \begin{pmatrix} -r\epsilon & \frac{r\epsilon}{2} & \frac{r\epsilon}{2} \\ \frac{r\epsilon}{2} & -r\epsilon & \frac{r\epsilon}{2} \\ \frac{r\epsilon}{2} & \frac{r\epsilon}{2} & -r\epsilon \end{pmatrix}$  y diagonalizando  $B$  obtenemos que los valores propios son  $\lambda_1 = \frac{-3r\epsilon}{2}$ ,  $\lambda_2 = \frac{-3r\epsilon}{2}$  y  $\lambda_3 = 0$  y asociando cada valor propio con su respectivo vector propio obtenemos la matriz  $P$  de cambio de base y  $P^{-1}$ :

$$P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

por lo que la solución al sistema es:

$$\begin{aligned}X(t) &= e^{tB} X_0 \\ &= P e^{tD} P^{-1} X_0\end{aligned}$$

la matriz exponencial es

$$e^{tD} = \begin{pmatrix} e^{\frac{-3}{2}ret} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\frac{-3}{2}ret} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

sustituyendo las matrices y haciendo  $t \rightarrow \infty$  obtenemos que:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} X(t) &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} X_0 \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} X_0 \end{aligned}$$

y por hipótesis  $x_1 + x_2 + x_3 = 1 - r$ , por lo tanto

$$\lim_{t \rightarrow \infty} X(t) = \begin{pmatrix} \frac{1-r}{3} \\ \frac{1-r}{3} \\ \frac{1-r}{3} \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

lo que demuestra el teorema. □

Este resultado es congruente con lo calculado en la sección (1.3), por lo que para cualquier  $x \in S$  las curvas tienden a este punto, pero la condición para que pase esto es que ambos grupos tengan la misma tasa de salida.

Análogamente, sumando las columnas para el caso donde tenemos la matriz de preferencias  $A$  y la misma tasa de salida  $R$

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} r & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & r \end{pmatrix}$$

tenemos que  $x_1(t) + x_2(t) + x_3(t) = 1 - r$  cuando  $t \rightarrow \infty$ , es decir, el flujo del sistema es invariante y dado que todas las curvas convergen a este plano generado, podemos encontrar el punto crítico para cualquier tipo de preferencias y una misma tasa de salida.

### 3.2. Soluciones asintóticamente estables

En esta sección probamos que si  $r_1 = r_2 = r_3 = r$  entonces la solución constante  $x(t) = x^*$ , del sistema (1.1), es asintóticamente estable. Para ello tenemos que recordar algunos conceptos.

**Definición 3.1.** Una solución  $x(t)$  del sistema  $x' = F(x)$  se dice estable si para todo  $\epsilon > 0$

existe  $\delta > 0$  tal que cualquier solución  $y(t)$  del sistema que satisface  $\|x(0) - y(0)\| < \delta$ , implica que  $\|x(t) - y(t)\| < \epsilon$  para todo  $t \geq 0$ . La solución  $x(t)$  se dice asintoticamente estable si es estable y además

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - y(t)\| = 0.$$

**Lema del determinante de una matriz** [15]. Si  $A$  una matriz cuadrada y  $u, v$  vectores columna. Entonces,

$$\det(A + uv^T) = \det(A) + v^T \text{adj}(A)u.$$

Haremos uso del siguiente resultado de Perron que se puede consultar.

**Teorema 3.2.** *Si en el sistema*

$$x' = Ax + f(t, x),$$

*A es una matriz con entradas reales y cuyos valores propios tienen parte real negativa y además  $f$  es una función continua tal que*

$$f(t, x) = o(\|x\|)$$

*uniformemente para  $t \geq 0$ , cuando  $\|x\| \rightarrow 0$ . Entonces, la solución  $x(t) \equiv 0$  es asintoticamente estable.*

**Teorema 3.3.** *Si  $r_1 = r_2 = r_3 = r$  entonces la solución constante  $x(t) = x^*$ , del sistema (1.1), es asintoticamente estable.*

*Demostración.* Para empezar necesitamos hacer una traslación del punto crítico  $x^*$  al origen. Para ello definimos  $u_i = x_i - x_i^*$  entonces  $u'_i = x'_i$  y  $x_1^* + x_2^* + x_3^* = s^*$ . Sustituyendo  $x_i = u_i + x_i^*$  y  $s^*$  en (1.1) tenemos que

$$u'_i = ((1 - s^*) - u_1 - u_2 - u_3)(a_i u_1 + b_i u_2 + c_i u_3 + a_i x_1^* + b_i x_2^* + c_i x_3^*) - r_i u_i - r_i x_i^* \quad (3.6)$$

observamos que  $(1 - s^*)(a_i x_1^* + b_i x_2^* + c_i x_3^*) - r_i x_i^* = 0$  (por la definición de punto crítico)

entonces  $(a_i x_1^* + b_i x_2^* + c_i x_3^*) = \frac{r_i x_i^*}{(1-s^*)}$ . Por lo tanto, (3.6) es

$$\begin{aligned} u'_i = & \left( (1-s^*)a_i - \frac{r_i x_i^*}{(1-s^*)} \right) u_1 + \left( (1-s^*)b_i - \frac{r_i x_i^*}{(1-s^*)} \right) u_2 \\ & + \left( (1-s^*)c_i - \frac{r_i x_i^*}{(1-s^*)} \right) u_3 - r_i u_i - (u_1 + u_2 + u_3)(a_i u_1 + b_i u_2 + c_i u_3) \end{aligned} \quad (3.7)$$

de manera matricial

$$u'_i = \left( (1-s^*)A - R - \frac{1}{(1-s^*)} \begin{pmatrix} r_1 x_1^* & r_1 x_1^* & r_1 x_1^* \\ r_2 x_2^* & r_2 x_2^* & r_2 x_2^* \\ r_3 x_3^* & r_3 x_3^* & r_3 x_3^* \end{pmatrix} \right) u - (u_1 + u_2 + u_3) A u \quad (3.8)$$

denotamos a

$$B = \left( (1-s^*)A - R - \frac{1}{(1-s^*)} \begin{pmatrix} r_1 x_1^* & r_1 x_1^* & r_1 x_1^* \\ r_2 x_2^* & r_2 x_2^* & r_2 x_2^* \\ r_3 x_3^* & r_3 x_3^* & r_3 x_3^* \end{pmatrix} \right) u$$

y

$$f(t, u) = (u_1 + u_2 + u_3) A u$$

la parte no lineal del sistema. Observamos que

$$\frac{\|(u_1 + u_2 + u_3) A u\|}{\|u\|} = \frac{|u_1 + u_2 + u_3| \|A u\|}{\|u\|} \leq \frac{M |u_1 + u_2 + u_3| \|u\|}{\|u\|} = M |u_1 + u_2 + u_3| \rightarrow 0$$

por lo tanto

$$f(t, u) = o(\|u\|)$$

cuando  $\|u\| \rightarrow 0$ .

Para terminar vamos a demostrar que las partes reales de los valores propios de la matriz  $B$  son negativos. Si  $r_1 = r_2 = r_3 = r$  sabemos que  $x_1^* + x_2^* + x_3^* = 1 - r$ . Entonces  $1 - r = s^*$ , sustituyendo en (3.2) se tiene que

$$B = r(A - I) - \underbrace{\begin{pmatrix} x_1^* & x_1^* & x_1^* \\ x_2^* & x_2^* & x_2^* \\ x_3^* & x_3^* & x_3^* \end{pmatrix}}_T \quad (3.9)$$

Observamos que  $Bx^* = (r(A - I) - T)x^*$  y por definición de punto crítico

$$\begin{aligned} Bx^* &= -Tx^* \\ &= - \begin{pmatrix} x_1^*(x_1^* + x_2^* + x_3^*) \\ x_2^*(x_1^* + x_2^* + x_3^*) \\ x_3^*(x_1^* + x_2^* + x_3^*) \end{pmatrix} \\ &= -(1-r) \begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_3^* \end{pmatrix} \end{aligned}$$

por lo que,  $(r - 1) < 0$  es un valor propio de  $B$  con vector propio asociado  $x^*$ . Además

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 + r - 1 &= \text{Tr}(B) \\ &= r\text{Tr}(A) + 3r - (1 - r) \end{aligned}$$

es decir,

$$\lambda_1 + \lambda_2 = r(\text{Tr}(A) - 3) < 0$$

Basta con calcular el  $\det(B)$  para determinar el signo de  $\text{re}(\lambda_i)$ . De (3.9) y utilizando el lema del determinante de una matriz

$$\det(B) = \det(r(A - I) - T) = \underbrace{\det(r(A - I))}_0 + v^T \text{adj}(r(A - I))u$$

donde  $u = - \begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_3^* \end{pmatrix}$  y  $v^T = (1, 1, 1)$ . Calculando  $\text{adj}(r(A - I))$

$$\begin{aligned} &= \text{adj} \begin{pmatrix} r(a_1 - 1) & rb_1 & rc_1 \\ ra_2 & r(b_2 - 1) & rc_2 \\ ra_3 & rb_3 & r(c_3 - 1) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} r^2[(b_2 - 1)(c_3 - 1) - c_2b_3] & -r^2[b_1(c_3 - 1) - c_1b_3] & r^2[b_1c_2 - c_1(b_2 - 1)] \\ -r^2[a_2(c_3 - 1) - c_2a_3] & r^2[(a_1 - 1)(c_3 - 1) - c_1a_3] & -r^2[(a_1 - 1)c_2 - c_1a_2] \\ r^2[a_2b_3 - (b_2 - 1)a_3] & -r^2[(a_1 - 1)b_3 - b_1a_3] & r^2[(a_1 - 1)(b_2 - 1) - b_1a_2] \end{pmatrix} \end{aligned}$$

luego,  $(1, 1, 1) * \text{adj}(r(A - I))$ ; lo cual implica sumar los elementos de la primera columna para obtener la primera entrada del vector resultante y así sucesivamente, para las demás entradas. Posteriormente, utilizando el hecho de que las preferencias son complementarias,

es decir,  $a_3 = 1 - a_1 - a_2$ ,  $b_3 = 1 - b_1 - b_2$  y  $c_3 = 1 - c_1 - c_2$  resulta

$$= \left( r^2[Det(A) - Tr(A) + 2] \quad r^2[Det(A) - Tr(A) + 2] \quad r^2[Det(A) - Tr(A) + 2] \right) \quad (3.10)$$

entonces

$$\begin{aligned} (1, 1, 1)adj(r(A - I))u &= r^2[Det(A) - Tr(A) + 2](-1)(x_1^* + x_2^* + x_3^*) \\ &= \underbrace{(r - 1)}_{\lambda_1} \underbrace{r^2[Det(A) - Tr(A) + 2]}_{\lambda_2 \lambda_3} \end{aligned} \quad (3.11)$$

y dado que  $\lambda_2 + \lambda_3 < 0$  y  $\lambda_2 \lambda_3 > 0$ , se tiene que  $\lambda_2 < 0$  y  $\lambda_3 < 0$ . Por lo tanto, los valores propios de la matriz  $B$  son negativos y por Teorema (3.2) la solución es asintóticamente estable.  $\square$

### 3.3. Sistemas estructuralmente estables

Si el comportamiento cualitativo sigue siendo el mismo para todos los campos vectoriales “cercaños”, entonces se dice que el sistema (1.1) o el campo vectorial  $F$  es **estructuralmente estable** [32]. Por otro lado, si una pequeña variación en los valores de los parámetros del sistema causa un brusco cambio cualitativo en su comportamiento, el campo vectorial  $F$  no es estructuralmente estable. Lo que nos lleva a las siguientes definiciones.

**Definición 3.2.** Si  $E \subseteq \mathbb{R}^n$  es abierto entonces para  $F \in C^1(E)$

$$\|F\|_1 := \max_{x \in E} |F(x)| + \max_{x \in E} \|JF(x)\|.$$

En esta definición  $|\cdot|$  es la norma euclidiana de  $\mathbb{R}^n$ ,  $JF(x)$  es la matriz jacobiana de  $F$  en  $x$  y  $\|\cdot\|$  denota la norma usual de una matriz:

$$\|A\| = \max_{x \neq 0} \frac{|Ax|}{|x|} = \max_{|x|=1} |Ax|.$$

Se puede demostrar que  $\|F\|_1$ , en conjuntos compactos, satisface las propiedades usuales que definen a una norma.

**Definición 3.3.** Sea  $F$  un campo vectorial  $C^1$  en un abierto  $E \subseteq \mathbb{R}^n$ . Entonces  $F \in C^1(E)$  es **estructuralmente estable** sobre  $E$  si existe un  $\delta > 0$  tal que para toda  $G \in C^1(E)$

con

$$\|F - G\|_1 < \delta,$$

$G$  es topologicamente equivalente a  $F$  en  $E$  y preserva la orientación del tiempo.

En el capítulo 2 demostramos que si los parámetros  $r_i$  son todos iguales entonces existe un único punto crítico en el interior de la región  $S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1, x_2, x_3 \geq 0, k \leq x_1 + x_2 + x_3 \leq 1\}$  y que todas las soluciones tienden a este punto crítico. Con el siguiente resultado tenemos que estas propiedades cualitativas de las soluciones del sistema se preservan localmente.

**Teorema 3.4.** *Sea  $F \in C^1(E)$ , con  $E$  es un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^n$  que contiene un punto crítico hiperbólico  $x_0$  de  $F$ . Entonces, para cualquier  $\epsilon > 0$  existe un  $\delta > 0$  tal que para todo  $G \in C^1(E)$  con*

$$\|F - G\|_1 < \delta$$

*existe un  $y_0 \in B_\epsilon(x_0)$  tal que  $y_0$  es un punto crítico hiperbólico de  $G$ . Además,  $JF(x_0)$  y  $JG(y_0)$  tienen el mismo número de valores propios con partes reales negativas.*

**Corolario 3.1.** *Si  $F$  es la función del sistema dinámico (1.1) donde  $r_i = r$  entonces para cualquier  $\epsilon > 0$  existe un  $\delta > 0$  tal que para todo  $G \in C^1(E)$  con*

$$\|F - G\|_1 < \delta$$

*existe un  $y_0 \in B_\epsilon(x_0)$  tal que  $y_0$  es un punto crítico hiperbólico de  $G$  y además todas las partes reales de los valores propios de  $JG(y_0)$  son negativas.*

*Demostración.* De la demostración del Teorema (3.3) se sigue que las partes reales de los valores propios de  $JF(x^*)$  son negativas y aplicando el Teorema (3.4) se concluye lo deseado.  $\square$

Para concluir vamos a poner un ejemplo de una función  $G$  que satisface de las hipótesis del Corolario (3.1)

**Ejemplo 3.1.** Si  $F$  y  $G$  son las siguientes funciones

$$F(x) = (1 - x_1 - x_2 - x_3) \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} r & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$G(x) = (1 - x_1 - x_2 - x_3) \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} r_1 & 0 & 0 \\ 0 & r_2 & 0 \\ 0 & 0 & r_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$\max\{|r - r_1|, |r - r_2|, |r - r_3|\} < \frac{\delta}{2}$  entonces  $\|F - G\|_1 < \delta$ .

Por la definición (3.2) tenemos

$$\|F - G\|_1 = \max_{x \in S} \sqrt{(r - r_1)^2 x_1^2 + (r - r_2)^2 x_2^2 + (r - r_3)^2 x_3^2} + \max_{x \in S} \{|r - r_1|, |r - r_2|, |r - r_3|\}$$

Observamos que el primer término al lado derecho de la ecuación es el máximo de una función convexa en un conjunto convexo por lo que se alcanza en un punto extremo de  $S$ . Luego, si  $\max\{|r - r_1|, |r - r_2|, |r - r_3|\} < \frac{\delta}{2}$  entonces

$$\begin{aligned} \|F - G\|_1 &= 2 \max_{x \in S} \{|r - r_1|, |r - r_2|, |r - r_3|\} \\ &= 2 \left( \frac{\delta}{2} \right) \\ &< \delta. \end{aligned}$$

En este ejemplo, observamos que ante cambios pequeños en las tasas de salidas  $r_i$ , las soluciones del sistema (1.1) al usar  $G$  tiene un comportamiento local similar al comportamiento del sistema al usar  $F$ . Más aún, por el Teorema (3.4) existe un  $y^*$  cercano al punto crítico  $x^*$ , tal que  $y^*$  también es un pozo. Por lo que mientras no haya un cambio grande en las tasas de salida de algún género, ya sea por despidos, renunciaciones, o algún otra causa del termino de la relación laboral, podemos encontrar un equilibrio del sistema al usar  $G$ .

## Capítulo 4

# Condiciones de igualdad en el mercado laboral

En capítulos anteriores obtuvimos si en la matriz de preferencias (1.3), cada grupo se apoya a sí mismo en mayor medida y en una proporción menor pero igual a los otros dos entonces se obtiene que todas las soluciones tienden a un único punto crítico  $x^*$ . Por lo que, en este último capítulo estamos interesados en analizar bajo qué condiciones el mercado de trabajo con preferencias  $a_i, b_i, c_i$  y aislando los efectos de diferentes tasas de salida  $r_i$ , tendería a la igualdad, es decir, a la misma proporción de puestos ocupados en el punto  $x^*$ . Para ello es necesario determinar las condiciones en las preferencias tales que las soluciones del sistema tiendan a un punto donde  $x_1^* = x_2^* = x_3^* = w$ . Puesto que  $x^*$  es un punto crítico tenemos que

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = (1 - x_1^* - x_2^* - x_3^*) \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_3^* \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} r & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_3^* \end{pmatrix}. \quad (4.1)$$

Sabemos que cuando tenemos una misma tasa de salida se cumple que  $x_1^* + x_2^* + x_3^* = 1 - r$ , e imponiendo la igualdad de contrataciones obtenemos:

$$\begin{aligned} rw[(a_1 + b_1 + c_1 - 1)] &= 0 \\ rw[(a_2 + b_2 + c_2 - 1)] &= 0 \\ rw[(a_3 + b_3 + c_3 - 1)] &= 0. \end{aligned}$$

Es decir,

$$\begin{aligned} a_1 + b_1 + c_1 &= 1 \\ a_2 + b_2 + c_2 &= 1 \\ a_3 + b_3 + c_3 &= 1. \end{aligned} \tag{4.2}$$

De este modo, además de que las preferencias de cada género sean complementarias, las preferencias también deben de ser complementarias en el sentido grupal. Por ejemplo, si en una empresa los hombres presentan algún tipo de sesgo de género en contratar mujeres y género no binario, entonces los parámetros  $b_1$  y  $b_3$  son bajos, por que lo que para compensar este efecto, las mujeres y el género no binario tendrán que equilibrar este sesgo de los hombres. En lo que respecta a la contratación de mujeres, las preferencias  $a_1$  y  $c_1$  tendrán que ser de tal manera que  $a_1 + b_1 + c_1 = 1$ , esto implica que si las mujeres actúan conjuntamente con el género no binario de tal manera que  $a_1 + c_1$  contrarreste el sesgo de los hombres  $b_1$ . Asimismo, para el género no binario  $a_3 + c_3$  equilibre  $b_3$ , sumado al hecho de que  $a_2$  y  $c_2$  sean pequeños para los hombres, se podrá llegar a un equilibrio igualitario en el largo plazo. Para el caso en que no actúen conjuntamente se llegará a la misma conclusión planteada al inicio de este capítulo, donde la preferencia por tu mismo género sea mayor. Por lo que la ahora el problema se traslada en la obtención de estos parámetros y que la matriz de estos sea doblemente estocástica.

Si en un escenario alguna empresa como parte de sus políticas internas, plantea tener una plantilla laboral mas equilibrada, tendrá en primera instancia que identificar las proporciones iniciales de como están distribuidos sus puestos de trabajo, y con base en ello será el desarrollo de la política. Sin embargo, será muy difícil condicionar las preferencias grupales de tal manera que sumen uno, pero sí se puede percibir el comportamiento de los reclutadores y con ello la inclinación de sus preferencias por algún o algunos géneros. De acuerdo con ello el responsable de la política tratará de que las personas que conforman el equipo de contratación sea lo mayormente orientado hacía la política de largo plazo y observar la evolución de esta através del tiempo.

# Conclusiones

Suponer que  $r_1 = r_2 = r_3 = 0$  es un tipo de mercado laboral donde la gente tiende a permanecer mucho tiempo o incluso se jubila ahí. Por lo que, las soluciones del sistema tenderán a saturar los puestos de trabajo, es decir al plano  $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ .

Cuando se introduce el dinamismo de mercado pero aislando los efectos impuestos por diferencias en el mercado de salida, se encontró que todas las curvas solución tienden a un plano invariante, lo que dio la pauta para simplificar el análisis dinámico del modelo (1.1) con tasa de salida constante, ya que para cualquiera parámetros de preferencias, resulto que la función de empleo total  $x_1(t) + x_2(t) + x_3(t) = 1 - r$  cuando  $t \rightarrow \infty$  y el punto de estabilidad donde convergen todas estas curvas es  $(\frac{1-r}{3}, \frac{1-r}{3}, \frac{1-r}{3})$  con la matriz de preferencias (1.3) que representa tener mayor apoyo de personas de tu mismo género, y en menor medida pero con la misma proporción a los géneros restantes, podemos llegar al equilibrio igualitario en las proporciones de contratación.

Por otro lado, cuando la tasa de salida del mercado no es la misma para los diferentes géneros, existe una superficie que corta al espacio  $S$ , pero por el Teorema (2.2) demostramos que existe un único punto crítico en  $\text{int}(S)$ , por lo tanto, podemos encontrar la condición estacionaria en la dinámica del sistema (1.1). Más aún, en condiciones ideales del mercado de trabajo, cuando la tasa de salida del mercado es la misma para los tres géneros, podemos calcular directamente este punto crítico  $x^*$  mediante (2.9), el cual es asintóticamente estable por el Teorema (3.3).

Por último, para garantizar la igualdad en las contrataciones de los tres géneros a lo largo del tiempo con  $r$  iguales, la matriz de preferencias debe ser doblemente estocástica, con ello se lograría compensar la posible inclinación (o lo contrario) que podría tener un género por otro, el cual tendría que ser equilibrado por las preferencias por los dos géneros restantes. Se puede observar que hay incentivos por parte de cada género de actuar individualmente y solo apoyar a su propio género, y de esta manera también se asegura la igualdad de contrataciones. O proponer que los reclutadores en los procesos de

selección sean diversos y tengan una representación equitativa de cada género. O en su caso utilizar procesos de selección a ciegas para minimizar los sesgos en la evaluación de candidatos. Adicionalmente, se tendría que fomentar un cambio de cultura tanto dentro de las organizaciones y la sociedad para cambiar estereotipos y percepciones de género principalmente en estas áreas de STEM y puestos de liderazgo.

Esta investigación da pauta a una posible generalización que consideraría  $n$ -géneros en el mercado laboral. Además, de quitar el supuesto sobre las preferencias que se mantienen constantes a lo largo del tiempo y un análisis más profundo de la dinámica cuando la tasa de salida del mercado laboral no es constante.

# Referencias

- [1] Accinelli, E., & Zazueta, J. (2021). Exploring the gender gap in the labor market: a sex-disaggregated view. *The Social Science Journal*.
- [2] Azzakia, R., & Widyaningsih, Y., & Sari, S. F. (2020). Analysis of Variables that Affect Women's Participation to Work in Kelurahan Pondok Cina, Depok. *AIP Conference Proceedings*.
- [3] Brauer, F., & Castillo-Chavez, C. (2012). *Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology*. Springer
- [4] Bullo, F. (2023). *Contraction Theory for Dynamical Systems*. Kindle Direct Publishing.
- [5] Bordalo, Pedro, Katherine Coffman, Nicola Gennaioli, and Andrei Shleifer. (2019). "Beliefs about Gender..*American Economic Review*, 109 (3): 739-73.
- [6] Born, A., Ranehill, E., and Sandberg, A. (2019). A man's world? The impact of a male dominated environment on female leadership. *University of Gothenburg, Working Paper in Economics No. 744*.
- [7] Blau, F.D., & Ferber, M.A., & Winkler, A.E. (2010). *The Economics of Women, Men, and Work*. Prentice Hall.
- [8] Blau, F. D., & Kahn, L. M. (2017). The Gender Wage Gap: Extent, Trends, and Explanations. *Journal of Economic Literature*, 55(3), 789–865.
- [9] Chakraborty, P. and Serra, D. (2019). Gender differences in top leadership roles: Does worker backlash matter. Working paper, Department of Economics, Southern Methodist University.

- [10] Clifton, S. M., Hill, K., Karamchandani, A. J., Autry, E. A., McMahon, P., & Sun, G. (2019). Mathematical model of gender bias and homophily in professional hierarchies. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 29(2). doi:10.1063/1.5066450
- [11] Coffman, K. B., Exley, C. L., & Niederle, M. (2021). The role of beliefs in driving gender discrimination. *Management Science*.
- [12] De Paola, M., Ponzo, M., & Scoppa, V. (2018). Are Men Given Priority for Top Jobs? Investigating the Glass Ceiling in Italian Academia. *Journal of Human Capital*, 12(3), 475–503. doi:10.1086/698133
- [13] Deloitte (2023). *LGBT+ Inclusion @ Work: A Global Outlook*.
- [14] Devaney, R.L., Hirsch, M.W., Smale, S. (2004). *Differential Equations, Dynamical Systems & An Introduction to Chaos, Second Edition*. Elsevier, USA.
- [15] Ding, J., & Zhou, A. (2006). *Eigenvalues of rank-one updated matrices with some applications*. Elsevier.
- [16] Eckel, C., Gangadharan L., Grossman P. J., and Xue, N. (2020). *The Gender Leadership Gap: Insights from Experiments (Research Discussion Paper RDP 14/20)*. [https://www.monash.edu/\\_data/assets/pdf\\_file/0012/2368569/14-20-The-Gender-Leadership-Gap.pdf](https://www.monash.edu/_data/assets/pdf_file/0012/2368569/14-20-The-Gender-Leadership-Gap.pdf)
- [17] Eckel, C. C., & Grossman, P. J. (2002). Sex differences and statistical stereotyping in attitudes toward financial risk. *Evolution and Human Behavior*, 23(4), 281–295. doi:10.1016/s1090-5138(02)00097-1.
- [18] Erkal, N., Gangadharan, L., and Koh, B.H. (2020). *Gender biases and performance evaluation: Do outcomes matter more than intentions*. Working Paper.
- [19] Erlandsson, A. (2019). Do Men Favor Men in Recruitment? A Field Experiment in the Swedish Labor Market. *Work and Occupations*, 46(3), 239–264. doi:10.1177/0730888419849467
- [20] Eternod, M. (2018). *Brechas de Genero*. [Diapositiva de PowerPoint]. Repositorio CEPAL. [https://crpd.cepal.org/3/sites/crpd3/files/presentations/panel2\\_marcelaeternod.pdf](https://crpd.cepal.org/3/sites/crpd3/files/presentations/panel2_marcelaeternod.pdf)

- [21] Goldin, C. (2002). A pollution theory of discrimination: male and female differences in occupations and earnings. National Bureau of Economic Research.
- [22] HanBmann, H., & Momin, A. (2024). Dynamical systems of self-organized segregation. *Mathematical Sociology*.
- [23] Hill, C., & Corbett C., & St. Rose, A. (2010). *Why So Few? Women in Science, Technology, Engineering, and Mathematics*. AAUW.
- [24] Holman, L., Stuart-Fox, D., & Hauser, C. E. (2018). The gender gap in science: How long until women are equally represented? *PLOS Biology*, 16(4). doi:10.1371/journal.pbio.2004956
- [25] Instituto Nacional de Estadística y Geografía (2024). Encuesta Nacional de Ocupación y Empleo. Nota técnica primer trimestre 2024.
- [26] Kübler, D., Schmid, J., & Stüber, R. (2018). Gender discrimination in hiring across occupations: a nationally-representative vignette study. *Labour Economics*, 55, 215–229. doi:10.1016/j.labeco.2018.10.002
- [27] Medina, J., & Vivas, C. (2018). Teorema del punto fijo de Brouwer. *Matemática: Una publicación de FCNM-ESPOL*.
- [28] Murray, C., & Kimura, Y. (1978). *Introduction to Mathematical Economics*. Springer-Verlag New York.
- [29] Murray, R. (2008). The Power of Sex and Incumbency: A Longitudinal Study of Electoral Performance in France. *Party Politics*, 14(5), 539–554. <https://doi.org/10.1177/1354068807088122>.
- [30] Perron, O. (1930). Die stabilitätsfrage bei differentialgleichungen. *Mathematische Zeitschrift*.
- [31] Priyanka Chakraborty & Danila Serra. (2018). Gender differences in top leadership roles: Does aversion to worker backlash matter?. Departmental Working Papers 1807, Southern Methodist University, Department of Economics.
- [32] Perko L. (2001). *Differential Equations and Dynamical Systems*. Springer.

- 
- [33] Riach, P.A., & Rich, J. (2002). *Field Experiments of Discrimination in the Market Place*. Oxford University Press.
- [34] Shaw, A., & Stanton, D. (2012). *Leaks in the pipeline: Separating demographic inertia from ongoing gender differences in academia*. The Royal Society.
- [35] Sifuentes, D., & Téllez, I., & Zazueta, J. (2022). Exploring the gender gap in a closed market niche. Explicit solutions of an ODE model. *Journal of Dynamics and Games*.
- [36] Simmons, G. F. (2017). *Differential Equations with Applications and Historical Notes, Third Edition*. CRC Press, Taylor & Francis Group. USA.
- [37] Skinner, B. (2020). First-order transition in a model of prestige bias. *SciPost Phys*.
- [38] Virginia, V. (1999). *Why So Slow? The Advancement of Women*. The MIT Press.
- [39] Williams, W. M., & Ceci, S. J. (2015). National hiring experiments reveal 2:1 faculty preference for women on STEM tenure track. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 112(17), 5360–5365. doi:10.1073/pnas.1418878112
- [40] World Economic Forum (2023). *The Global Gender Gap Report*.