



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE SAN LUIS POTOSÍ



FACULTAD DE CIENCIAS

MEDIDAS DE ENTROPÍA MÁXIMA

TESIS

PARA OBTENER EL GRADO DE

MAESTRO EN CIENCIAS APLICADAS

PRESENTA:

CARLOS GUSTAVO REYES PACHECO

DIRECTOR DE TESIS:

DR. FELIPE GARCÍA-RAMOS AGUILAR

SAN LUIS POTOSÍ, SLP

JULIO DEL 2021

Declaración de autoría y originalidad de la tesis

Yo Carlos Gustavo Reyes Pacheco, estudiante del Posgrado en Ciencias Aplicadas de la Facultad de Ciencias de la Universidad Autónoma de San Luis Potosí, como autor de la tesis Medidas de entropía máxima, declaro que la tesis es una obra original, inédita, auténtica, personal, que se han citado las fuentes correspondientes y que en su ejecución se respetaron las disposiciones legales vigentes que protegen los derechos de autor y de propiedad intelectual e industrial. Las ideas, doctrinas, resultados y conclusiones a los que he llegado son de mi absoluta responsabilidad.

Resumen

En esta tesis, después de definir los objetos básicos de la dinámica simbólica, enunciaremos algunos resultados clásicos y recientes para \mathbb{Z} -subshifts relacionados con medidas de entropía máxima. Expondremos el Teorema de Descomposición de Climenhaga-Thompson [6] y mostraremos unas aplicaciones a S -gap shifts y β -shifts. Además mostraremos resultados y pruebas de la familia de los subshifts de densidad acotada introducidos en [23]. Algunas propiedades de la familia de los subshifts de densidad acotada son similares a las propiedades de los β -shifts. Sin embargo, el estudio de los subshifts de densidad acotada requieren diferentes técnicas. En particular, establecemos condiciones para determinar cuando un subshift de densidad acotada es de tipo finito, transitivo y un subshift con la propiedad de especificación. Finalmente introducimos los subshifts de densidad acotada en dos dimensiones.

Abstract

In this thesis, after defining the basic objects in symbolic dynamics, we review some classical and recent results for \mathbb{Z} -subshifts related to measures of maximal entropy. In particular, we present the Climenhaga-Thompson Decomposition Theorem [6] and we show some of its applications to S -gap shifts and β -shifts. We state and prove some results on the family of bounded density shifts introduced in [23]. Certain properties of the family of bounded density shifts are similar to properties of the so-called family of β -shifts. However, the study of bounded density shifts requires different techniques. In particular, we establish conditions to determine when a bounded density shift is a subshift of finite type, a topologically transitive subshift and a subshift with the specification property. Finally, we define the family of two-dimensional bounded density shifts.

Tabla de contenidos

Declaración de autoría y originalidad de la tesis	ii
Resumen	iii
Abstract	iv
Introducción	1
1 Preliminares	3
1.1 Subshifts y lenguajes	3
1.1.1 Shifts de tipo finito	4
1.1.2 S -gap shifts	5
1.1.3 β -shifts	6
1.2 Entropía topológica y medible para subshifts	7
1.3 El principio variacional	8
2 Ergodicidad intrínseca y especificación	10
2.1 Propiedades de especificación	11
2.2 Aplicaciones a S -gap shifts y β -shifts	12
3 Subshifts de densidad acotada	17
3.1 Caracterización de transitividad para subshifts de densidad acotada	25
3.2 Caracterización de los subshifts de tipo finito de densidad acotada	26
3.3 Caracterización de los subshifts de densidad acotada con especificación	32
3.3.1 Preguntas	33
4 Subshifts de densidad acotada en dos dimensiones	34
4.1 \mathbb{Z}^2 Subshifts	34
4.2 \mathbb{Z}^2 Subshifts de densidad acotada	36
Bibliografía	38

Introducción

El estudio formal de los sistemas dinámicos simbólicos inició al final de los 30 con Hedlund y Morse [9], [10]. Por su capacidad de modelar otros sistemas dinámicos y fenómenos físicos, además de su relación con una amplia gama de temas matemáticos, esta área sigue siendo de relevancia e interés actual.

Uno de los invariantes más usados en sistemas dinámicos es la *entropía*. El concepto de entropía aparece en el trabajo de varios físicos del siglo XX como Gibbs y Boltzmann en [4]. La primera definición formal de entropía fue dada por Shannon en [22], en el contexto de la teoría de la información. Finalmente Kolmogorov generalizó esta definición en [15] para poder abarcar todos los sistemas dinámicos medibles. Un sistema dinámico simbólico, en general tiene muchas medidas invariantes; cada medida corresponde a un sistema dinámico medible diferente. Para sistemas dinámicos simbólicos siempre existe una medida con entropía máxima. De hecho algunos sistemas simbólicos tienen una única medida de entropía máxima. Decimos que un sistema dinámico simbólico es *intrínsecamente ergódico* si dicho sistema admite una única medida de entropía máxima.

Es de interés matemático encontrar condiciones necesarias para garantizar que solo existe una medida de entropía máxima. Determinar cuando un sistema dinámico es intrínsecamente ergódico es uno de los problemas importantes en el estudio de la teoría ergódica y la dinámica topológica [26]. En esta tesis, veremos los conceptos básicos para entender los conceptos de entropía topológica y medible para subshifts. Veremos condiciones topológicas relacionadas con el concepto de *especificación*, que informalmente puede definirse como la capacidad de conectar segmentos de órbitas con un segmento de órbita de tamaño fijo, que implican ergodicidad intrínseca. Por otro lado, definiremos y estudiaremos una familia de sistemas simbólicos donde aún no se sabe en generalidad si siempre tienen una única medida de entropía máxima.

En el Capítulo 1 enunciamos algunas definiciones importantes en la dinámica simbólica para que los temas siguientes no sean abordados de forma tan repentina.

En el Capítulo 2 enunciamos resultados que aseguran la existencia de por lo menos una medida de entropía máxima en subshifts, esto nos permite hablar de ergodicidad intrínseca. Aunque Bowen ya sabía explícitamente la manera de aproximar la medida de entropía máxima usando puntos periódicos [5], observaremos cómo la propiedad de especificación de un subconjunto del lenguaje, nos permite caracterizar la medida de entropía máxima para ciertos tipos de subshifts. A priori, el resultado principal de [6] pudiera lucir un poco técnico, pero se ilustran dos aplicaciones para dos clases conocidas de subshifts, hablamos de los β -shifts y S -gap shifts.

En el Capítulo 3 haremos un estudio detallado de los *subshifts de densidad acotada* [23]. Esta clase de subshifts tienen una conexión con la clase de los β -shifts. Aunque las técnicas

usadas para el estudio de los subshifts de densidad acotada difieren de las usadas habitualmente para el estudio de los β -shifts, al final veremos que existe una conexión entre ambas familias de subshifts al tener en ambos casos una sucesión que caracteriza al sistema, respetando el hecho de que se trata de dos órdenes diferentes. Dentro de las propiedades que son posibles de caracterizar en la familia de subshifts de densidad acotada, mostraremos condiciones suficientes y necesarias para garantizar propiedades tales como: transitividad topológica, tipo finito y especificación. Es importante señalar que existen algunas propiedades topológicas que aún no se sabe si son posibles de caracterizar, tal es el caso de los subshifts de densidad acotada sincronizados.

La relación entre los capítulos 2 y 3 se establece al final del Capítulo 3 donde se enuncian dos preguntas, relacionadas con la ergodicidad intrínseca para la familia de los subshifts de densidad acotada. Además de estudiar la ergodicidad intrínseca en subshifts, el trabajo está orientado en encontrar un tema de investigación.

Por último, en el Capítulo 4 definiremos la noción de subshifts de densidad acotada en dos dimensiones. Enunciamos algunos ejemplos, en particular el *modelo de cuadrados duros*. Para establecer una conexión con el tema principal de la tesis y el modelo de cuadrados duros, hay trabajos en la literatura donde se prueba que para el caso de dos dimensiones, existe una única medida de entropía máxima [24], [20].

Capítulo 1

Preliminares

Este capítulo tiene como propósito definir los conceptos necesarios para desarrollar este trabajo.

1.1 Subshifts y lenguajes

Los *subshifts* también conocidos en la literatura como *espacios shift* son uno de los objetos más importantes en el estudio de la dinámica simbólica.

Consideremos \mathcal{A} un conjunto finito al que llamaremos *alfabeto*. El espacio $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ es el conjunto de todas las posibles sucesiones indexadas por \mathbb{Z} de elementos tomados de \mathcal{A} . Aunque $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ es la notación estándar para el conjunto de funciones que van de \mathbb{Z} a \mathcal{A} , estas funciones son justamente las sucesiones que usaremos en todo el texto. Cada sucesión $x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ es un *punto* del espacio y como convención escribimos $x_i = x(i)$. Para un punto $x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ y enteros i, j con $i \leq j$, denotamos a las coordenadas de x desde la posición i hasta la posición j por $x_{[i,j]} = x_i x_{i+1} \cdots x_j$.

Considerando a \mathcal{A} con la topología discreta, entonces por el Teorema de Tychonoff [17, Teorema 37.3] $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ es un espacio topológico compacto. La topología producto en $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ es equivalente a la topología generada por la métrica

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y \\ \frac{1}{2^{|k|}} & \text{si } x \neq y \text{ y } k = \max\{x_{[-k,k]} = y_{[-k,k]}\}. \end{cases} \quad (1.1)$$

Definición 1.1. La *transformación shift* $\sigma : \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$, está definida por $\sigma(x)_n = x_{n+1}$ para toda $n \in \mathbb{Z}$.

La transformación shift es continua con respecto a la métrica definida por la Ecuación (1.1).

Definición 1.2. Un \mathbb{Z} -*subshift* o *espacio shift* o simplemente *subshift* es un subconjunto cerrado $X \subseteq \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ e invariante bajo el shift, es decir $\sigma(X) \subseteq X$.

A lo largo del texto por subshift entenderemos un subconjunto cerrado e invariante de $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$, cuando sea necesario especificaremos que estamos hablando de \mathbb{N} -subshifts que se definen de manera análoga en el conjunto $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$.

Una *palabra* w sobre \mathcal{A} es una sucesión finita de símbolos $w_1w_2\cdots w_n$ tomados de \mathcal{A} . Denotamos por $|w|$ la *longitud* de la palabra w como la cantidad de símbolos que la conforman. Denotamos por ε a la palabra vacía. Una *subpalabra* de $w = w_1w_2\cdots w_n$ es una palabra no vacía de la forma $w_iw_{i+1}\cdots w_j = w_{[i,j]}$ donde $1 \leq i \leq j \leq n$. La *concatenación* de las palabras u y v la denotamos por uv . La notación w^∞ representa la concatenación infinita hacia la derecha de la palabra w , y ${}^\infty w$ la concatenación infinita hacia la izquierda. Una palabra w *ocurre* en $x \in \mathcal{A}^\mathbb{Z}$ si existen $i, j \in \mathbb{Z}$ con $i \leq j$ tal que $w = x_{[i,j]}$.

Sea $\mathcal{B}_n(X)$ el conjunto de palabras de longitud n que ocurren en puntos de x . El *lenguaje* de X está dado por

$$\mathcal{L}(X) = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{B}_n(X). \quad (1.2)$$

Observemos que para cualquier subshift X y para cualquier $w \in \mathcal{L}(X)$ se cumple que

1. Toda subpalabra de w también pertenece a $\mathcal{L}(X)$.
2. Existen palabras no vacías u, v tales que $uwv \in \mathcal{L}(X)$.

Para \mathbb{Z} -subshifts y w una palabra de longitud finita en $\mathcal{L}(X)$, el *cilindro* $[w]_k$ es el conjunto

$$[w]_k = \{x \in X : x_{[k, k+|w|-1]} = w\}. \quad (1.3)$$

Para \mathbb{N} -subshifts el cilindro $[w]$ es el conjunto

$$[w] = \{x \in X : x_i = w_i \text{ para } 1 \leq i \leq |w|\}. \quad (1.4)$$

La familia de cilindros forman una base para la topología producto en $\mathcal{A}^\mathbb{Z}$ y $\mathcal{A}^\mathbb{N}$ respectivamente. Denotamos por

$$\text{Per}(n) = \{x \in X \mid \sigma^k(x) = x \text{ para alguna } 1 \leq k \leq n\}, \quad (1.5)$$

como el conjunto de puntos con periodo a lo más n .

Definición 1.3. Sean $\sigma_X : X \rightarrow X$ y $\sigma_Y : Y \rightarrow Y$ las respectivas transformaciones shift en los subshifts X y Y . Sea $h : X \rightarrow Y$ una transformación continua. Si h es una transformación sobreyectiva que satisface $\sigma_X \circ h = h \circ \sigma_Y$, decimos que σ_X es *topológicamente semiconjugada* a σ_Y . Si además h es inyectiva, decimos que σ_X es *topológicamente conjugada* a σ_Y .

Definición 1.4. Sean X y Y subshifts. Decimos que X es un *factor* de Y si σ_X es topológicamente semiconjugada a σ_Y .

1.1.1 Shifts de tipo finito

Siempre se puede definir un subshift partiendo de un conjunto de palabras prohibidas. Esto es equivalente a definirlos como un subconjunto compacto e invariante de $\mathcal{A}^\mathbb{Z}$. El resultado puede ser revisado en [16, Teorema 6.1.21].

Definición 1.5. Sea \mathcal{F} un conjunto finito de palabras sobre el alfabeto \mathcal{A} . Definimos

$$X_{\mathcal{F}} = \{x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} : \text{existen } m, n \in \mathbb{Z} \text{ tal que } x_{[m,n]} \notin \mathcal{F}\}. \quad (1.6)$$

A $X_{\mathcal{F}}$ lo llamamos un *shift de tipo finito*.

Ejemplo 1.1. Si $\mathcal{F} = \{11\}$, entonces a $X_{\mathcal{F}}$ se le conoce como el shift áureo. Los puntos del shift áureo son sucesiones binarias que no contienen dos símbolos 1 consecutivos. Por ejemplo ${}^{\infty}0.01010010^{\infty}$. Recibe el nombre de shift áureo porque su entropía topológica (ver Definición 1.11) es igual a $\log(\varphi)$ con φ el número áureo.

Ejemplo 1.2. Sea $\mathcal{F} = \{000, 111\}$. Al subshift $X_{\mathcal{F}}$ se le conoce como el shift áureo simétrico. Los puntos del shift áureo simétrico son sucesiones binarias que no contienen tres símbolos 1 y tres símbolos 0 de manera consecutiva. Por ejemplo ${}^{\infty}(01).01100(10)^{\infty}$. Su entropía topológica es igual a $\log(\varphi)$ con φ el número áureo.

Para shifts de tipo finito, las palabras prohibidas pueden tener tamaños diferentes, aunque esto en principio no representa un problema grave. Basta asumir que todas las palabras tienen la misma longitud. Sea N la longitud máxima de las palabras en el conjunto \mathcal{F} y definimos $\overline{\mathcal{F}}$ de la siguiente forma

$$\overline{\mathcal{F}} = \{w \in \mathcal{B}_N(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}) \mid u \in \mathcal{F} \text{ es una subpalabra de } w\}. \quad (1.7)$$

Por definición de $\overline{\mathcal{F}}$ se cumple que $X_{\mathcal{F}} = X_{\overline{\mathcal{F}}}$. Lo anterior nos permite decir que un shift de tipo finito tiene *memoria- M* si puede describirse por una colección de palabras prohibidas donde todas las palabras tienen longitud $M + 1$. Entonces, una manera de determinar si una palabra de longitud mucho mayor que M pertenece al lenguaje del subshift, es verificando que todas las subpalabras de tamaño $M + 1$ están en el lenguaje [16, Ejercicio 2.1.5].

Definición 1.6. [Definición alternativa de shift de tipo finito] Sea X un subshift. Decimos que X es un shift de tipo finito si existe $N \in \mathbb{N}$ y $B \subseteq \mathcal{B}_{N+1}(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}})$ tal que, $x \in X$ sí y sólo si para toda $i \in \mathbb{Z}$, $x_i \dots x_{i+1} \in B$.

La Definición 1.5 y la Definición 1.6 son equivalentes [16]. Para algunas pruebas dentro de los siguientes capítulos del texto, nos convendrá usar la Definición 1.6 en lugar de la Definición 1.5.

1.1.2 S -gap shifts

Los S -gap shifts son sistemas dinámicos simbólicos que tienen una variedad de aplicaciones, entre una de ellas la codificación de datos [16]. También nos son útiles para definir una gran variedad de subshifts a partir de cualquier subconjunto de \mathbb{N}_0 .

Consideremos $S \subseteq \mathbb{N}_0$. Sea

$$X_S = \{x \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}} : \text{si } 0^n \text{ ocurre en } x, \text{ entonces } n \in S\}. \quad (1.8)$$

Si S es un conjunto finito, entonces X_S es un subshift [7]; en caso de que S sea infinito, X_S no es un subshift, sin embargo se cumple que $\overline{X_S} = X_S \cup \{\infty 0^\infty\}$ si lo es [7]. Notemos que si $S \neq S'$ entonces $X_S \neq X_{S'}$. Como existe una cantidad no numerable de subconjuntos de \mathbb{N}_0 , podemos concluir que existe una cantidad no numerable de subshifts de $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$. A la familia de subshifts X_S los llamamos S -gap shifts.

Ejemplo 1.3. Sea $S = \{2n : n \in \mathbb{N}_0\}$. A $\overline{X_S}$ se le llama el shift par. Un elemento de X_S es $\infty 0.10^{2m}10^{2n}10^\infty$ con $m, n \in \mathbb{N}_0$.

Ejemplo 1.4. Sea $S = \{1, 2, 3\}$. Un ejemplo de un elemento en X_S es $\infty (10) . (10)^\infty$.

1.1.3 β -shifts

Una motivación para estudiar los β -shifts es el hecho de que tienen relación con dinámica unidimensional y teoría de números [2]. Ahora consideremos $\mathcal{A} = \{0, 1, \dots, n-1\}$ con su orden parcial natural. Sean $x, y \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$. Decimos que x es *lexicográficamente menor o igual que* y , denotado por $x \leq y$, si $x_i = y_i$ para toda $i \in \mathbb{N}$ o existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $x_i = y_i$ para toda $i \leq k$ y $x_{k+1} < y_{k+1}$. Una sucesión $\beta \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ que no termina con una cantidad infinita de símbolos 0 es una *sucesión de Parry* si $\sigma^n(\beta) \leq \beta$ para toda $n \in \mathbb{N}_0$. Dada β , una sucesión de Parry, definimos

$$S_\beta = \{x \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}} : \sigma^n(x) \leq \beta \text{ para toda } n \in \mathbb{N}_0\}. \quad (1.9)$$

Al subshift S_β lo llamamos un β -shift.

Ejemplo 1.5. No es difícil convencerse que $\beta = (10)^\infty$ es una sucesión de Parry. Entonces el β -shift generado por esta sucesión son todos los puntos lexicográficamente menores o iguales que β . No es difícil ver que estos puntos son justo las sucesiones binarias que no tienen dos símbolos 1 consecutivos y por lo tanto S_β es el shift áureo (ver Ejemplo 1.1).

Ejemplo 1.6. No es difícil convencerse que $\beta = (11010)^\infty$ es una sucesión de Parry. Un ejemplo de un punto en S_β es $x = (10000)^\infty$.

Revisaremos otra manera de definir a los β -shifts para determinar más adelante el valor de la entropía topológica de estos sistemas simbólicos. Denotamos por $\lfloor x \rfloor$ la parte entera de un número real no negativo. Sea $\beta > 1$ un número real y $x \in [0, 1]$. Una *representación de x en base β* es una sucesión infinita $y_{[1, \infty]}$ tal que

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{y_i}{\beta^i}. \quad (1.10)$$

Donde $y_i \in \mathbb{N}_0$. Puede haber más de una representación para el mismo número. Una *expansión en base β* es una representación en base β canónica definida por

$$y_i = \lfloor \beta T_\beta^{i-1}(x) \rfloor, \quad (1.11)$$

para cada $i \in \mathbb{N}$, donde $T_\beta(x) = \beta x - \lfloor \beta x \rfloor$. Sea D_β el conjunto de todas las expansiones en base β de los elementos de $[0, 1)$. El β -shift S_β es la cerradura de D_β . Los siguientes

resultados son bastante conocidos en el estudio de los β -shifts y relacionan las expansiones en base β con el orden lexicográfico.

Teorema 1.7. [Blanchard [2]] Una sucesión s es una expansión en base β de 1 para alguna β sí y sólo si $\sigma^n(s) \leq s$ para toda $n \in \mathbb{N}$.

Teorema 1.8. [Blanchard [2]] Sea $\beta > 1$. Sean s la expansión en base β de 1 y $y \in \{0, \dots, \lfloor \beta - 1 \rfloor\}^{\mathbb{N}}$. Entonces y es una expansión en base β de algún elemento de $[0, 1)$ sí y sólo si, para cada $n \in \mathbb{N}_0$, se cumple que $\sigma^n(y) \leq s$.

Las siguientes definiciones en términos de palabras son equivalentes a las nociones topológicas de transitividad y mezcla.

Definición 1.9. Un subshift X es *topológicamente transitivo* si para cada par de palabras $u, w \in \mathcal{L}(X)$, existe $v \in \mathcal{L}(X)$ tal que $uvw \in \mathcal{L}(X)$.

Definición 1.10. Un subshift X es *topológicamente mezclante* si para cada par de palabras $u, v \in \mathcal{L}(X)$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para cada $n \geq N$ existe $w \in \mathcal{B}_n(X)$ tal que $uvw \in \mathcal{L}(X)$.

1.2 Entropía topológica y medible para subshifts

La entropía topológica para subshifts mide el grado de crecimiento de las palabras en el lenguaje.

Definición 1.11. Sea X un espacio shift. La *entropía topológica* de X está definida por la cantidad

$$h_{\text{top}}(X) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log |\mathcal{B}_n(X)|. \quad (1.12)$$

La entropía topológica de un subshift siempre existe y es una cantidad no negativa [16], en el caso especial de los subshifts de tipo finito, se sabe que la entropía es igual al logaritmo del valor propio más grande de la matriz de adyacencia correspondiente [16]. Para los S -gap shifts con S un conjunto infinito, la entropía de \bar{X}_S es igual a $\log(\lambda)$, donde λ es la única solución positiva a la ecuación $1 = \sum_{n \in S} x^{-(n+1)}$ [16]. Mientras tanto, para los β -shifts es bien sabido que la entropía topológica es $\log(\beta)$ [18], [21].

Sea X un subshift. Dada una colección de palabras $\mathcal{D} \subset \mathcal{L}(X)$ y $n \in \mathbb{N}$, definimos $\mathcal{D}_n = \mathcal{D} \cap \mathcal{B}_n(X)$. Denotamos al *grado de crecimiento del número de palabras de longitud n en \mathcal{D}* por

$$h(\mathcal{D}) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log |\mathcal{D}_n|. \quad (1.13)$$

Se sigue entonces que $h(\mathcal{L}) = h_{\text{top}}(X)$.

Sea μ una medida de probabilidad de Borel en $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$, decimos que μ es σ -invariante si $\mu(A) = \mu(\sigma^{-1}(A))$ para cada conjunto de Borel A . Denotamos por $M(X)$ al conjunto de medidas de probabilidad de Borel, $M(X, \sigma)$ al conjunto de medidas de probabilidad de Borel σ -invariantes en el espacio X y $\mathcal{C} = \{C_1, \dots, C_n\}$ una partición medible de X .

Definición 1.12. Sea X un espacio métrico. La *topología débil** en $M(X)$ es la topología más pequeña que hace continua a cada una de las transformaciones $\mu \rightarrow \int_X f d\mu$, con $f \in C(X)$.

Definición 1.13. Sea μ_n una sucesión de medidas de probabilidad de Borel en el espacio métrico X . En la topología débil*, decimos que $\mu_n \rightarrow \mu \in M(X)$ sí y sólo si para cada $f \in C(X)$, $\int f d\mu_n \rightarrow \int f d\mu$.

Por el resultado enunciado en [25, Teorema 6.5], cuando X es un subshift se cumple que $M(X)$ es compacto en la topología débil*. Por el Teorema de Krylov-Bogoliubov [25] el conjunto $M(X, T)$ es no vacío.

La *entropía de la partición \mathcal{C}* con respecto a la medida μ está dada por

$$H_\mu(\mathcal{C}) = - \sum_i \mu(C_i) \log(\mu(C_i)), \quad (1.14)$$

con la convención de que $0 \log 0 = 0$. El *ensamble en tiempo n de \mathcal{C}* se define como

$$\bigvee_{t=0}^n \sigma^{-t}(\mathcal{C}) = \{C_{t_0} \cap \sigma^{-1}(C_{t_1}) \cap \dots \cap \sigma^{-n}(C_{t_n})\}. \quad (1.15)$$

Notemos que $\bigvee_{t=0}^n \sigma^{-t}(\mathcal{C})$ consiste de todos los conjuntos de la forma $\bigcap_{i=0}^n \sigma^{-i} C_{t_i}$. La *entropía del shift con respecto a la partición \mathcal{C}* se define como

$$h_\mu(X, \mathcal{C}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} H_\mu \left(\bigvee_{t=0}^n \sigma^{-t}(\mathcal{C}) \right). \quad (1.16)$$

Definición 1.14. La *entropía del shift con respecto a μ* o simplemente *la entropía de μ* se define como

$$h_\mu(\sigma) = \sup_{\mathcal{C}} \{h_\mu(X, \mathcal{C})\}.$$

Donde \mathcal{C} es una partición medible.

Aunque esta definición es algo técnica, como estamos considerando únicamente subshifts, es suficiente elegir la partición dada por el alfabeto, es decir $\mathcal{C} = \{[w] : w \in \mathcal{A}\}$. Desde el punto de vista de la teoría ergódica la entropía del shift con respecto a una medida es una medida de incertidumbre o aleatoriedad del shift actuando sobre el espacio medible (X, μ) [14]. Mientras que para el enfoque de la teoría de la información podemos pensar en señales que se reciben donde la probabilidad de recibir una palabra dada en cualquier instante de tiempo es dada por la medida μ [14]. Desde el punto de vista topológico, se interpreta como la medición de la complejidad del lenguaje.

1.3 El principio variacional

Para finalizar este capítulo enunciamos el principio variacional, que como el lector podrá anticipar, será aplicado directamente a los subshifts.

Teorema 1.15. Principio variacional [Goodman 1971 [8]]. Sean X un subshift y T una transformación continua. Entonces

$$h_{\text{top}}(X) = \sup\{h_{\mu}(T) \mid \mu \in M(X, \sigma)\}. \quad (1.17)$$

Una generalización para espacios métricos compactos junto con su respectiva demostración se puede consultar en [25].

Definición 1.16. Una medida invariante que alcanza el supremo como en el Teorema 1.15 la llamamos *medida de entropía máxima*. Si tal medida existe y es única decimos que el subshift es *intrínsecamente ergódico*.

El principio variacional nos es útil porque establece claramente la relación entre la entropía topológica y la entropía medible.

Capítulo 2

Ergodicidad intrínseca y especificación

Resulta atractivo tanto para físicos como para matemáticos saber qué sistemas tienen o no una única medida de entropía máxima, al ser este un problema importante en el estudio de la dinámica topológica y la teoría ergódica [26]. El objetivo de este capítulo es hablar de condiciones suficientes para que un subshift sea intrínsecamente ergódico. En ese sentido, la especificación juega un papel importante. Veremos el resultado clásico de Bowen que asegura la existencia de una medida de entropía máxima [5] y una generalización de Climenhaga-Thompson [6]. Finalizaremos este capítulo mostrando unas aplicaciones del criterio de Climenhaga-Thompson.

Teorema 2.1. [Goodman 1972 [8]] Sea X un \mathbb{Z} -subshift, entonces X tiene al menos una medida de entropía máxima.

De hecho el Teorema 2.1 es más general y se cumple para homeomorfismos expansivos en espacios métricos compactos [8]. Para nuestros intereses en esta tesis, basta enunciarlo para \mathbb{Z} -subshifts y \mathbb{N} -subshifts. Un par de años después Bowen introdujo su noción de especificación, que de manera informal la propiedad de especificación puede pensarse como la capacidad de conectar segmentos de órbitas de un sistema dinámico tomados de manera arbitraria con un segmento de tamaño fijo. Se sabe que la propiedad de especificación implica topológicamente mezclante y a su vez, topológicamente mezclante implica transitividad topológica.

Definición 2.2. Decimos que un \mathbb{Z} -subshift X tiene *especificación* si existe $S \in \mathbb{N}$ tal que para cualesquiera $u, v \in \mathcal{L}(X)$ existe $w \in \mathcal{B}_S(X)$ tal que $uwv \in \mathcal{L}(X)$. Al número S lo llamaremos *el número de especificación de X* .

Ahora veremos como la propiedad de especificación es una condición suficiente para asegurar la ergodicidad intrínseca.

Teorema 2.3. [Bowen 1974 [5]] Sea X un \mathbb{Z} -subshift que tiene la propiedad de especificación, entonces existe una única medida de entropía máxima.

Al igual que el Teorema 2.1 de Goodman, el Teorema 2.3 está enunciado originalmente para homeomorfismos expansivos en espacios métricos compactos. Anteriormente Parry

probó en [19] que todo subshift de tipo finito es intrínsecamente ergódico. Un subshift de tipo finito mezclante tiene la propiedad de especificación.

2.1 Propiedades de especificación

Definición 2.4. Sean X un subshift con lenguaje $\mathcal{L}(X)$, $\mathcal{G} \subset \mathcal{L}(X)$ y $t \in \mathbb{N}_0$. Decimos que \mathcal{G} cumple la *propiedad de especificación* con un *número de especificación* t si, para cada $m \in \mathbb{N}$ y $w^1, \dots, w^m \in \mathcal{G}$, existen $v^1, \dots, v^{m-1} \in \mathcal{L}$ tal que $x := w^1 v^1 \dots v^{m-1} w^m \in \mathcal{L}$ y $|v^i| = t$ para toda $1 \leq i \leq m-1$. Más aún, decimos que \mathcal{G} cumple con la *propiedad de especificación periódica* si \mathcal{G} cumple con la propiedad de especificación y además el cilindro $[x]$ contiene un punto periódico de periodo exactamente $|x| + t$.

Cuando $\mathcal{G} = \mathcal{L}(X)$ recuperaremos la definición de especificación de Bowen. Nos interesan los subshifts con lenguajes que admitan una descomposición de la forma $\mathcal{L}(X) = \mathcal{C}^p \mathcal{G} \mathcal{C}^s$, tal que cada palabra en el lenguaje puede escribirse como una concatenación de palabras, con un prefijo en \mathcal{C}^p , una palabra en \mathcal{G} (al cual llamaremos un *buen núcleo*) y un sufijo en \mathcal{C}^s . Observamos que teniendo dicha descomposición, para cada $M \in \mathbb{N}$ definimos la colección de palabras $\mathcal{G}(M)$ por

$$\mathcal{G}(M) = \{uvw \mid u \in \mathcal{C}^p, v \in \mathcal{G}, w \in \mathcal{C}^s, |u| \leq M, |w| \leq M\}. \quad (2.1)$$

Si $z \in \mathcal{L}(X)$, $z = uvw$ para $u \in \mathcal{C}^p$, $v \in \mathcal{G}$ y $w \in \mathcal{C}^s$, podemos considerar $M = \max\{|u|, |v|\}$. Esto implica que $z \in \mathcal{G}(M)$ para alguna $M \in \mathbb{N}$. De donde obtenemos $\cup_{M \geq 1} \mathcal{G}(M) = \mathcal{L}(X)$.

Recordemos que $\text{Per}(n)$ es el conjunto de puntos con periodo a lo más n . El siguiente resultado es válido para \mathbb{Z} -subshifts y \mathbb{N} -subshifts y la prueba puede ser consultada en [6].

Teorema 2.5. [Climenhaga-Thompson 2012 [6, Teorema C]] Sea X un subshift cuyo lenguaje admite una descomposición $\mathcal{L}(X) = \mathcal{C}^p \mathcal{G} \mathcal{C}^s$ y supongamos que las siguientes condiciones se satisfacen:

1. \mathcal{G} tiene la propiedad de especificación.
2. $h(\mathcal{C}^p \cup \mathcal{C}^s) < h(\mathcal{L}) = h_{\text{top}}(X, \sigma)$.
3. Para cada $M \in \mathbb{N}$, existe τ tal que dado $v \in \mathcal{G}(M)$, existen palabras u, w con $|u| \leq \tau$, $|w| \leq \tau$ tal que $uvw \in \mathcal{G}$.

Entonces X es intrínsecamente ergódico. Además, si \mathcal{G} tiene la propiedad de especificación periódica, entonces la sucesión de medidas de probabilidad

$$\mu_n = \frac{1}{\#\text{Per}(n)} \sum_{x \in \text{Per}(n)} \delta_x \quad (2.2)$$

converge a la única medida de entropía máxima.

La primera condición nos ayuda a entender la importancia de la propiedad de especificación introducida en la Definición 2.4. La segunda condición es importante porque establece que el grado de crecimiento de las palabras de la unión de los prefijos y sufijos, tiene que ser estrictamente menor que el grado de crecimiento de todo el lenguaje del subshift. Notemos que esto nos permite tener una noción del cómo la mayoría de las palabras se concentran en el núcleo. La tercera condición establece que cada palabra en el lenguaje (donde el tamaño del prefijo y el sufijo están controlados por una constante dada) puede ser extendida a una palabra que se queda en el núcleo. La longitud de las palabras con las que se extienden queda determinada por la palabra $v \in \mathcal{G}(M)$.

Para resumir el comportamiento de la descomposición de un lenguaje bajo la operación de tomar factores enunciamos la siguiente proposición.

Proposición 2.6. Sea Y un subshift factor de X y $\mathcal{L}(Y)$, $\mathcal{L}(X)$ sus respectivos lenguajes. Si $\mathcal{L}(X)$ admite una descomposición del tipo $\mathcal{L}(X) = \mathcal{C}^p \mathcal{G} \mathcal{C}^s$, entonces $\mathcal{L}(Y)$ también admite una descomposición $\mathcal{L}(Y) = \overline{\mathcal{C}}^p \overline{\mathcal{G}} \overline{\mathcal{C}}^s$ tal que:

1. Si \mathcal{G} tiene la propiedad de especificación, entonces $\overline{\mathcal{G}}$ también tiene la propiedad de especificación.
2. Si \mathcal{G} tiene la propiedad de especificación periódica, entonces $\overline{\mathcal{G}}$ también tiene la propiedad de especificación periódica.
3. $h(\overline{\mathcal{C}}^p \cup \overline{\mathcal{C}}^s) \leq h(\mathcal{C}^p \cup \mathcal{C}^s)$.
4. Si $\mathcal{L}(X)$ satisface la tercera condición del Teorema 2.5, entonces $\mathcal{L}(Y)$ también la satisface.

Combinando la Proposición 2.6 y el Teorema 2.5 obtenemos el siguiente resultado.

Teorema 2.7. [Climenhaga-Thompson 2012 [6, Teorema D]] Sea X un subshift cuyo lenguaje admite una descomposición $\mathcal{L}(X) = \mathcal{C}^p \mathcal{G} \mathcal{C}^s$ y que además se satisfacen las condiciones (1), (2) del Teorema 2.5 y $h(\mathcal{C}^p \cup \mathcal{C}^s) = 0$. Entonces todo subshift factor de X es intrínsecamente ergódico. Además si \mathcal{G} tiene la propiedad de especificación periódica, entonces la sucesión de medidas de probabilidad (2.2) converge a la única medida de entropía máxima del factor de X .

2.2 Aplicaciones a S -gap shifts y β -shifts

Enunciamos a continuación dos aplicaciones del Teorema 2.5 al ver de manera explícita la descomposición del lenguaje para S -gap shifts y β -shifts.

Teorema 2.8. [Climenhaga-Thompson 2012 [6, Teorema A]] Todo subshift factor de un S -gap shift es intrínsecamente ergódico. Más aún, la única medida de entropía máxima se caracteriza como el límite en la topología débil* cuando $n \rightarrow \infty$ de medidas características igualmente distribuidas en puntos periódicos de periodo a lo más n , como en la Ecuación (2.2).

El Teorema 2.8 es una consecuencia del Teorema 2.5 que es considerado el resultado principal de [6].

Lema 2.9. [Descomposición del lenguaje para S -gap shifts] Sea \overline{X}_S un S -gap shift. Donde S es un conjunto infinito, el lenguaje de X_S está dado por

$$\mathcal{L}(\overline{X}_S) = \{0^n 10^{n_1} 10^{n_2} 1 \cdots 10^{n_k} 10^m | n_i \in S \text{ para toda } 1 \leq i \leq k \text{ y } m, n \in \mathbb{N}_0\} \cup \{0^n | n \in \mathbb{N}\}. \quad (2.3)$$

La descomposición que se propone para $\mathcal{L}(\overline{X}_S)$ es la siguiente:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}^p &= \{0^n 1 | n \notin S\}, \\ \mathcal{G} &= \{0^{n_1} 10^{n_2} 1 \cdots 10^{n_k} 1 | n_i \in S \text{ para toda } 1 \leq i \leq k\}, \\ \mathcal{C}^s &= \{0^n | n \in \mathbb{N}\}. \end{aligned}$$

Demostración

Primero vamos a verificar que la igualdad de conjuntos (2.9) es cierta. Sea w in $\mathcal{B}_n(X_S)$. Podemos asumir que w no es la palabra que consta de n símbolos cero, esto es, al menos tenemos un símbolo 1 en w . Sin pérdida de generalidad, si $w = 0^{n_1} 10^{n_2}$ donde $n_1 + n_2 = n - 1$, se sigue que w pertenece al conjunto de la parte derecha de (2.9). Sucede lo mismo cuando w tiene más de un símbolo 1 por la definición de S -gap shifts. La otra contención se sigue directamente de la definición de S -gap shifts.

Sea $w \in \mathcal{L}(\overline{X}_S)$ con $w = 0^n 10^{n_1} 1 \cdots 10^{n_k} 10^m$, donde $n_1, \dots, n_k \in S$, con $m, n \in \mathbb{N}$. Supongamos que $n \notin S$. Sean $u^{(1)} = 0^n 1$, $u^{(2)} = 0^{n_1} 1 \cdots 10^{n_k} 1$ y $u^{(3)} = 0^m$. Entonces $w = u^{(1)} u^{(2)} u^{(3)}$, donde $u^{(1)} \in \mathcal{C}^p$, $u^{(2)} \in \mathcal{G}$ y $u^{(3)} \in \mathcal{C}^s$. Por otro lado, dada $w \in \mathcal{C}^p \mathcal{G} \mathcal{C}^s$ donde $w = v^{(1)} v^{(2)} v^{(3)}$ con $v^{(1)} \in \mathcal{C}^p$, $v^{(2)} \in \mathcal{C}$ y $v^{(3)} \in \mathcal{C}^s$. Se sigue por la igualdad (2.3) que $w \in \mathcal{L}(\overline{X}_S)$. □

Lema 2.10. La descomposición del lenguaje dada en el Lema 2.9 satisface las condiciones del Teorema 2.5.

Demostración

1. Consideremos $t = 0$. Sean $w^1, \dots, w^m \in \mathcal{G}$ para alguna $m \in \mathbb{N}$. Consideremos $v^1 = v^2 = \dots = v^{m-1} = \varepsilon$, entonces $x := w^1 v^1 w^2 \cdots v^{(m-1)} w^m = w^1 w^2 \cdots w^m \in \mathcal{G} \subset \mathcal{L}$. Más aún, \mathcal{G} tiene la propiedad de especificación periódica porque el punto ${}^\infty (w^1 \cdots w^m)^\infty \in [x]$ es un punto periódico con periodo $|x|$.
2. Como $|\mathcal{C}_n^s| \leq 1$ y $|\mathcal{C}_n^p| = 1$ para cada $n \in \mathbb{N}$, en consecuencia

$$0 = h(\mathcal{C}^p \cup \mathcal{C}^s) < \log(\lambda) = h_{\text{top}}(X_S).$$

Donde λ es la única solución positiva a la ecuación $1 = \sum_{n \in S} x^{-(n+1)}$.

3. Sean $M \in \mathbb{N}$ y $v \in \mathcal{G}(M)$ con

$$v = \underbrace{0^{m_1}}_{u^1} \underbrace{0^{n_1} 10^{n_2} 1 \dots 10^{n_k} 1}_{v^1} \underbrace{0^{m_2}}_{w^1}.$$

Como $m_1 \notin S$, elegimos $p = \min\{n \in \mathbb{N} : m_1 + p \in S\}$.

- (a) Si $m_2 \in S$, $\tau = p$ ya que $0^{p+m} 10^{n_1} 10^{n_2} 1 \dots 10^{n_k} 10^{m_2} 1 \in \mathcal{G}$.
- (b) Si $m_2 \notin S$, sea $q = \min\{n \in \mathbb{N} : (n + m_2) \in S\}$, luego $\tau = \max\{p, q\} + 1$ y de esta forma $0^{p+m} 10^{n_1} 10^{n_2} 1 \dots 10^{n_k} 10^{q+m_2} 1 \in \mathcal{G}$.

Por lo tanto X_S es intrínsecamente ergódico y la sucesión de medidas de probabilidad 2.2 converge a la única medida de entropía máxima.

□

Teorema 2.11. [Climenhaga-Thompson 2012 [6, Teorema A]] Todo subshift factor de un β -shift es intrínsecamente ergódico. Más aún, la única medida de entropía máxima se caracteriza como el límite en la topología débil* cuando $n \rightarrow \infty$ de medidas características igualmente distribuidas en puntos periódicos de periodo a lo más n , como en la Ecuación (2.2).

Al igual que como en el Teorema 2.8, este resultado es consecuencia del Teorema 2.5.

En cuanto a los β -shifts, la descripción de la descomposición del lenguaje se hará apoyándose de la representación de la gráfica con etiquetado de los β -shifts [3]. Los pasos a seguir para la construcción de esta gráfica a la que denotaremos Γ_β , se hacen pensando que la sucesión de Parry que caracteriza al β -shift no es eventualmente periódica. Sea $\{v_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ una sucesión de vértices.

1. Para cada $i \in \mathbb{N}$ dibujar una arista que va de v_i a v_{i+1} y etiquetar la arista con el valor β_i de la sucesión de Parry.
2. Si $\beta_i \geq 1$ para cada $j \in \{0, \dots, i-1\}$, dibujar una arista de v_i a v_1 con el valor que tome j .

Una sucesión $x \in S_\beta$ sí y sólo si x describe una trayectoria infinita de aristas en la gráfica, que siempre empieza en v_1 [11]. La ventaja de usar la representación gráfica del β -shift es que permite tener una buena descripción del lenguaje y con esto determinar una descomposición útil.

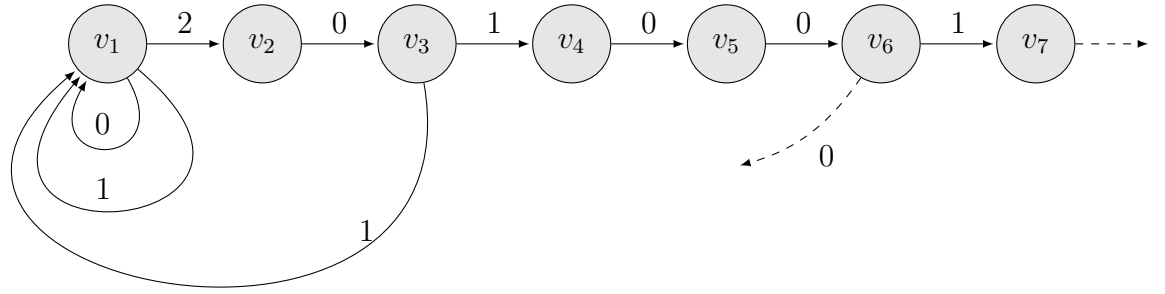


Figura 2.1: Una representación de un β -shift

Lema 2.12. Sea β una sucesión de Parry que no es eventualmente periódica. El lenguaje está dado por todos los caminos de longitud finita en Γ_β que inician en v_1 . La descomposición para $\mathcal{L}(S_\beta)$ es la siguiente:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}^p &= \emptyset. \\ \mathcal{G} &= \{\pi \in \Gamma_G : t(\pi) = v_1\}. \\ \mathcal{C}^s &= \{\pi = \beta_1 \dots \beta_n : n \geq 1\}. \end{aligned}$$

Demostración

La prueba de la primera parte del lema se puede consultar en [11]. Vamos a proceder a probar que la descomposición del lenguaje es cierta. Sea $w \in \mathcal{L}(S_\beta)$ una palabra finita. Iniciamos asumiendo que w no es la palabra que consta sólo de símbolos 0, en este caso se trata de un camino de longitud finita que únicamente visita al vértice v_1 . Como a w le corresponde un camino $\pi \in \Gamma_\beta$, sea $j = \max_{1 \leq i \leq |w|} \{i : w_i \neq 0\}$. Entonces los dos caminos $\pi^{(1)} = w_1 \dots w_j \in \mathcal{G}$ ya que $t(\pi) = v_1$ y $\pi^{(2)} = w_{j+1} \dots w_{|w|} = \beta_1 \dots \beta_{n-j} \in \mathcal{C}^p$. Por otro lado, sea $w \in \mathcal{C}^p \mathcal{G} \mathcal{C}^s$. Entonces el camino que representa a la palabra w en la gráfica Γ_β , consta de dos caminos, uno que termina en el vértice v_1 y otro que inicia en el vértice v_1 y no regresa a v_1 . El camino que representa a w cumple con la condición de iniciar en v_1 , por lo tanto $w \in \mathcal{L}(S_\beta)$.

□

El núcleo está conformado por las palabras cuyo camino correspondiente en Γ_β terminan en v_1 . El conjunto de prefijos es vacío y el conjunto de sufijos son todas las palabras cuyo camino correspondiente en Γ_β nunca regresan a v_1 . Con esta descomposición, cualquier camino puede descomponerse en dos partes, la primera parte del camino termina en v_1 seguida de un camino que no regresa a v_1 .

Lema 2.13. La descomposición del lenguaje dada en el Lema 2.12 satisface las condiciones del Teorema 2.7.

Demostración

1. Observemos que para cada $m \in \mathbb{N}$ y $w^1, \dots, w^m \in \mathcal{G}$ tenemos lo siguiente

$$x = w^1 v^1 w^2 v^2 \dots v^{m-1} w^m \in \mathcal{L}(S_\beta).$$

Donde $x \in \mathcal{L}(S_\beta)$ porque para cada $i \in \{1, \dots, m\}$ se cumple que $w_{|w_i|}^i \leq b_1$. Notemos que $v^i = \varepsilon$ para toda $i \in \{1, \dots, m-1\}$. Se sigue que \mathcal{G} tiene la propiedad de especificación. De hecho \mathcal{G} tiene la propiedad de especificación periódica con $t = 0$ porque todos los ciclos que inician en v_1 pueden ser concatenados de manera arbitraria y estos ciclos describen una órbita periódica.

2. Notemos que $|\mathcal{C}_n^s| = 1$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y con esto $h(\mathcal{C}^p \cup \mathcal{C}^s) = 0$.
3. Sean $M \in \mathbb{N}$ y $u^1 \in \mathcal{G}(M)$. Donde

$$\mathcal{G}(M) = \{vw \mid v \in \mathcal{G}, w \in \mathcal{C}^s, |w| \leq M\}.$$

Elegimos τ como la longitud de un camino menor o igual que M que empieza en v_1 y le toma τ pasos volver a v_1 , con esto $v^1 u^1 w^1 \in \mathcal{G}$.

Hemos verificado que la descomposición del lenguaje satisface las condiciones del Teorema 2.7 y por lo tanto existe una única medida de entropía máxima.

□

Capítulo 3

Subshifts de densidad acotada

Los subshifts de densidad acotada fueron introducidos por Stanley en [23]. En el presente capítulo estudiaremos las caracterizaciones para la propiedad de transitividad, los subshifts de tipo finito y la propiedad de especificación en el contexto de los subshifts de densidad acotada. Al final del capítulo enunciamos dos preguntas que relacionan a esta familia de subshifts con la ergodicidad intrínseca.

Definición 3.1. Sea $f : \mathbb{N}_0 \rightarrow [0, \infty)$ una función. Definimos

$$\Psi_f = \left\{ x \in \mathbb{N}_0^{\mathbb{Z}} : (\forall p \in \mathbb{N}_0)(\forall i \in \mathbb{Z}) \sum_{r=i}^{i+p-1} x_r \leq f(p) \right\}. \quad (3.1)$$

Asumimos que $\mathcal{A} = \mathcal{B}_1(\Psi_f) = \{n \in \mathbb{N}_0 : (\forall m \in \mathbb{N}) n \leq f(m)\}$.

Proposición 3.2. Los subshifts de densidad acotada son subshifts.

Demostración

Sean $x \in \Psi_f$, $y = \sigma(x)$. Fijemos $i \in \mathbb{Z}$ y $p \in \mathbb{N}$. Tenemos que

$$\sum_{r=i}^{i+p-1} y_r = \sum_{r=i+1}^{i+p} x_r = \sum_{s=i}^{i+p-1} x_s \leq f(p).$$

Esto implica que Ψ_f es σ -invariante. Para verificar que Ψ_f es cerrado sea $x \notin \Psi_f$. Entonces existen $p \in \mathbb{N}$ e $i \in \mathbb{Z}$ tales que $\sum_{r=i}^{i+p-1} x_r > f(p)$. Si $w = x_{[i, i+p-1]}$, $x \in [w]_i$ y $[w]_i \cap \Psi_f = \emptyset$. Por lo tanto Ψ_f es cerrado. □

Ejemplo 3.1. Considere $X_{\mathcal{F}}$ el shift áureo del Ejemplo 1.1. Sean $f = (n+1)/2$ y Ψ_f generada por f . Vamos a probar que $X_{\mathcal{F}} = \Psi_f$. Sean $x \in X_{\mathcal{F}}$ y w una palabra que ocurre en x con $|w| = p$. Notemos que el símbolo 1 aparece a lo más $(p+1)/2$ veces en w . Lo que implica que $\sum_{r=i}^{i+p-1} x_r \leq (p+1)/2 = f(p)$ para toda $i \in \mathbb{Z}$. Por lo tanto $X_{\mathcal{F}} \subseteq \Psi_f$. Por otro lado, recordando que el shift áureo tiene memoria 1, se verifica que si $x \in \Psi_f$, para toda $i \in \mathbb{Z}$ $x_i x_{i+1} \in B$ donde $B = \{00, 01, 10\}$. Por lo tanto $\Psi_f \subseteq X_{\mathcal{F}}$.

Ejemplo 3.2. Considere \overline{X}_S el shift par del ejemplo 1.3. El subshift X_S no puede verse como un subshift de densidad acotada puesto que $110 \in \mathcal{L}(X_S)$, mientras que $101 \notin \mathcal{L}(X_S)$.

En el Ejemplo 3.1 la función $f(n) = (n+1)/2$ da origen al shift áureo. No obstante, es posible considerar otras funciones $g \neq f$ tales que $\Psi_f = \Psi_g$. Para restringir nuestra atención a una única función definimos la relación sobre el conjunto de funciones $[0, \infty)^{\mathbb{N}_0}$ por $f \sim g$ sí y sólo si $\Psi_f = \Psi_g$. Es sencillo mostrar que es una relación de equivalencia. El siguiente enunciado nos permite hallar una función cuya imagen sea la mínima en cada punto y que además pertenezca a la clase de equivalencia.

Lema 3.3. Considere la clase de equivalencia de las funciones que generan al subshift de densidad acotada Ψ_f . Entonces la función g definida por

$$g(m) := \min\{f_j(m) : f_j \sim f\}. \quad (3.2)$$

Pertenece a la clase de equivalencia de las funciones que generan al subshift de densidad acotada Ψ_f .

Demostración

Notemos que $\min\{f_j(m) : f_j \sim f\}$ siempre existe, ya que el ínfimo siempre será un entero no negativo. Luego para toda f_j en la clase de equivalencia tenemos que para cada $x \in \Psi_f$, para toda $p \in \mathbb{N}$ y para toda $i \in \mathbb{Z}$, $\sum_{r=i}^{i+p-1} x_r \leq f_j(p)$ sí y sólo si $\sum_{r=1}^{i+p-1} x_r \leq g(p)$. Esto implica que $x \in \Psi_g$. Análogamente, sea $x \in \Psi_g$. Para toda $p \in \mathbb{N}$ y para toda $i \in \mathbb{Z}$, $\sum_{r=i}^{i+p-1} x_r \leq g(p)$ sí y sólo si $\sum_{r=i}^{i+p-1} x_r \leq f_j(p)$. En consecuencia $x \in \Psi_{f_j}$ para toda f_j en la clase de equivalencia de funciones que generan a Ψ_f .

□

Definición 3.4. Sea $f \in [0, \infty)^{\mathbb{N}_0}$. Definimos \underline{f} por

$$\underline{f}(m) := \min\{g(m) : g \sim f\}. \quad (3.3)$$

A la función \underline{f} la llamamos la *función canónica* para el shift Ψ_f .

Observemos que para cada $m \in \mathbb{N}$, la función \underline{f} definida en la Ecuación (3.3) cumple con lo siguiente

$$\underline{f}(m) = \max \left\{ \sum_{r=1}^{|w|} w_r : w \in \mathcal{B}_m(\Psi_f) \right\}. \quad (3.4)$$

La Ecuación (3.4), se verifica al tener en cuenta que \underline{f} es la función en la clase de equivalencia de funciones que generan al subshift Ψ_f , que alcanza el mínimo en cada punto. Puesto que la suma de los elementos de las palabras de longitud m a lo más alcanzan el valor de $\underline{f}(m)$, se cumple la igualdad.

Definición 3.5. Sean $x, y \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$. Escribimos $x \preceq y$ si para toda $i \in \mathbb{N}$ se cumple que

$$\sum_{r=1}^i x_r \leq \sum_{r=1}^i y_r.$$

Para palabras en \mathcal{A}^m , escribimos $u \preceq v$ si para toda $i \leq m$ se cumple que

$$\sum_{r=1}^i u_r \leq \sum_{r=1}^i v_r.$$

Lema 3.6. Sea Ψ_f un subshift de densidad acotada.

1. Si $ubv \in \mathcal{L}(\Psi_f)$ y $a \leq b$ con $a, b \in \mathcal{A}$, entonces $uav \in \mathcal{L}(\Psi_f)$.
2. Si $uv \in \mathcal{L}(\Psi_f)$ entonces $u0v \in \mathcal{L}(\Psi_f)$.

Demostración

1. Se sigue directamente de la desigualdad

$$\sum_{r=1}^{|u|} u_r + a + \sum_{r=1}^{|v|} v_r \leq \sum_{r=1}^{|u|} u_r + b + \sum_{r=1}^{|v|} v_r \leq f(|u| + |v| + 1). \quad (3.5)$$

2. También se sigue directamente de la desigualdad

$$\sum_{r=1}^{|u|} u_r + 0 + \sum_{r=1}^{|v|} v_r = \sum_{r=1}^{|u|} u_r + \sum_{r=1}^{|v|} v_r \leq f(|u| + |v|). \quad (3.6)$$

□

Lema 3.7. Sea Ψ_f un subshift de densidad acotada. Entonces, los siguientes enunciados son equivalentes.

1. $w \in \mathcal{L}(\Psi_f)$.
2. ${}^\infty 0 . w 0^\infty \in \Psi_f$.
3. Para toda v subpalabra de w , $\sum_{r=1}^{|v|} v_r \leq \underline{f}(|v|)$.

Demostración

1 \Rightarrow 2 Como $w \in \mathcal{L}(\Psi_f)$ entonces $0w0 \in \mathcal{L}(\Psi_f)$. En general para toda $n \in \mathbb{N}$ ${}^n 0 w 0^n \in \mathcal{L}(\Psi_f)$, i.e. ${}^\infty 0 . w 0^\infty \in \Psi_f$.

2 \Rightarrow 3 Sea v una subpalabra de w . Existen $k, l \in \mathbb{N}$ tales que $1 \leq k \leq l \leq n = |w|$ y $v_1 = w_k, v_2 = w_{k+1}, \dots, v_{|v|} = w_l$. Entonces

$$\underline{f}(|v|) = \underline{f}(l - k + 1) = \max \left\{ \sum_{r=1}^{l-k+1} u_r : u \in \mathcal{B}_{l-k+1}(\Psi_f) \right\} \geq \sum_{r=1}^{l-k+1} w_r = \sum_{r=1}^{|v|} v_r. \quad (3.7)$$

3 \Rightarrow 1 Como la hipótesis es válida para toda subpalabra de w , al ser w una subpalabra de si misma, se tiene $\sum_{r=1}^{|w|} w_r \leq \underline{f}(|w|)$, i.e. $w \in \mathcal{L}(\Psi_f)$.

□

Definición 3.8. Sea Ψ_f un subshift de densidad acotada y $u \in \mathcal{L}(\Psi_f)$. Definimos de manera inductiva una *sucesión infinita hacia la derecha* por

$$\vec{u}_{i+1} = \max\{a \in \mathcal{A} : u \vec{u}_{[1,i]} a \in \mathcal{L}(\Psi_f)\}. \quad (3.8)$$

Para toda $i \in \mathbb{N}_0$, luego definimos $\vec{u} := u \vec{u}$. De manera análoga definimos una *sucesión infinita hacia la izquierda* por

$$\overleftarrow{u}_{i-1} = \max\{a \in \mathcal{A} : a \overleftarrow{u}_{[i,-1]} u \in \mathcal{L}(\Psi_f)\}. \quad (3.9)$$

Para toda $i \in -\mathbb{N}_0$, luego definimos $\overleftarrow{u} := \overleftarrow{u} u$. Sea ε la palabra vacía del lenguaje del subshift de densidad acotada. Denotamos por $\vec{\varepsilon}$ a la *sucesión característica derecha* de Ψ_f^+ .

El siguiente ejemplo describe cómo la palabra vacía genera a la sucesión característica derecha para un subshift en específico.

Ejemplo 3.3. Sean $f = (n + 1)/2$ y Ψ_f el shift áureo.

1. Para $i = 0$

$$\vec{\varepsilon}_1 = \max\{a \in \mathcal{A} : \varepsilon \vec{\varepsilon}_{[1,0]} a \in \mathcal{L}(\Psi_f)\} = 1.$$

2. Para $i = 1$

$$\vec{\varepsilon}_2 = \max\{a \in \mathcal{A} : \varepsilon \vec{\varepsilon}_{[1,1]} a \in \mathcal{L}(\Psi_f)\} = 0.$$

En general, si i es par $\vec{\varepsilon}_{i+1} = 1$ y si i es impar $\vec{\varepsilon}_{i+1} = 0$, esto es $\vec{\varepsilon} = \varepsilon \vec{\varepsilon} = (10)^\infty$. Observemos que la sucesión anterior es la sucesión de Parry del Ejemplo 1.5.

Lo que sigue es ver cómo esta sucesión característica derecha es el elemento máximo de Ψ_f^+ que denota al \mathbb{N} -subshift de densidad acotada generado por f , pero para esto usaremos el orden introducido en la Definición 3.5.

La demostración del siguiente lema puede revisarse en [23].

Lema 3.9. Sea Ψ_f un subshift de densidad acotada. Sean $m \in \mathbb{N}$ y $u, v \in \mathcal{B}_m(\Psi_f)$ con $u \preceq v$. Entonces

1. $u \vec{u}_1 \preceq v \vec{v}_1$.

2. $u\vec{u} \preceq v\vec{v}$.

Lema 3.10. Sea Ψ_f un subshift de densidad acotada y $u \in \mathcal{L}(\Psi_f)$. Entonces \vec{u} es el elemento máximo de $[u]$ restringido a Ψ_f^+ con respecto a \preceq .

Demostración

Sea $x \in [u] \cap \Psi_f^+$. Probaremos por inducción sobre $i \in \mathbb{N}$ que $x_{[1,i]} \preceq \vec{u}_{[1,i]}$. Para la base inductiva es cierto porque $x_1 \preceq \vec{u}_1$, de hecho se cumple que $x_{[1,i]} \preceq u_{[1,i]}$ para toda $i \leq |u|$ por la definición de \vec{u} . Suponemos cierto $x_{[1,i]} \preceq \vec{u}_{[1,i]}$ para $i \geq |u|$. Entonces por el Lema 3.9, 1.

$$x_{[1,i]} \overrightarrow{(x_{[1,i]})_1} \preceq \vec{u}_{[1,i]} \overrightarrow{(\vec{u}_{[1,i]})_1}.$$

Observemos que

$$\overrightarrow{(x_{[1,i]})_1} = \max \{a \in \mathcal{A} : x_{[1,i]} \vec{x}_{[1,0]} a \in \mathcal{L}(\Psi_f)\} = \max \{a \in \mathcal{A} : x_{[1,i]} a \in \mathcal{L}(\Psi_f)\} \geq x_{i+1}.$$

Además

$$\overrightarrow{(\vec{u}_{[1,i]})_1} = \max \{a \in \mathcal{A} : \vec{u}_{[1,i]} a \in \mathcal{L}(\Psi_f)\} = \vec{u}_{i+1}.$$

Entonces

$$x_{[1,i+1]} \preceq x_{[1,i]} \overrightarrow{(x_{[1,i]})_1} \preceq \vec{u}_{[1,i]} \overrightarrow{(\vec{u}_{[1,i]})_1} = \vec{u}_{[1,i+1]}.$$

Por lo tanto $x \preceq \vec{u}$.

□

Corolario 3.11. $\vec{\varepsilon}$ es el elemento máximo de Ψ_f^+ .

Lema 3.12. Sea Ψ_f un subshift de densidad acotada. Para toda $i \in \mathbb{N}$ tenemos

$$\underline{f}(i) = \sum_{r=1}^i \vec{\varepsilon}_r.$$

Demostración

Sea $i \in \mathbb{N}$. Como $\vec{\varepsilon}$ es el elemento máximo de Ψ_f^+

$$\underline{f}(i) = \max \left\{ \sum_{r=1}^i w_r : w \in \mathcal{B}_i(\Psi_f) \right\} = \sum_{r=1}^i \vec{\varepsilon}_r.$$

□

Hasta ahora hemos visto que la función canónica evaluada en un punto m es justamente el máximo de las sumas de los símbolos que forman las palabras de tamaño m . El siguiente teorema nos da una equivalencia para las funciones canónicas y a partir de dicho teorema, serán estas tres condiciones las que usaremos para verificar que una función f es canónica.

Teorema 3.13. [Stanley 2013 [23, Teorema 2.9]] Una función f es una función canónica para un subshift de densidad acotada Ψ_f sí y sólo si

1. $f(0) = 0$.
2. $\forall m \in \mathbb{N}_0 \ f(m+1) \in f(m) + \mathbb{N}_0$.
3. $\forall m, n \in \mathbb{N} \ f(m+n) \leq f(m) + f(n)$.

Demostración

Sea $f : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$ la función canónica de Ψ_f .

1. $\underline{f}(0) = \min\{g(0) : g \sim f\} = 0$.
2. Sea $m \in \mathbb{N}_0$. Entonces

$$\underline{f}(m+1) = \sum_{r=1}^{m+1} \vec{\varepsilon}_r = \sum_{r=1}^m \vec{\varepsilon}_r + \vec{\varepsilon}_{m+1} \in f(m) + \mathbb{N}_0. \quad (3.10)$$

3. Sean $m, n \in \mathbb{N}_0$. Tenemos que

$$\underline{f}(m+n) = \sum_{r=1}^{m+n} \vec{\varepsilon}_r = \sum_{r=1}^m \vec{\varepsilon}_r + \sum_{r=1}^n \vec{\varepsilon}_{m+r} \leq \underline{f}(m) + \underline{f}(n). \quad (3.11)$$

Por otro lado, supongamos que f satisface (1), (2) y (3). Queremos probar que $f(m) = g(m)$ para toda $m \in \mathbb{N}_0$ y vamos a proceder con un argumento inductivo. Primero $f(0) = 0 = g(0)$ por la definición de función canónica. Sea $m \in \mathbb{N}$ y supongamos que $f(p) = g(p)$ para toda $p \leq m$. Por (2) existe $a \in \mathbb{N}_0$ tal que $f(m+1) = f(m) + a$. Mostraremos que $\vec{\varepsilon}_{[1,m]}a \in \mathcal{L}(\Psi_f)$. Mostraremos que $\vec{\varepsilon}_{[i,m]}a \in \mathcal{L}(\Psi_f)$ para cada $i \in \{1, \dots, m\}$. Sea $i \in \{1, \dots, m\}$. Tenemos que

$$\begin{aligned} \sum_{r=i}^m \vec{\varepsilon}_r + a &= \sum_{r=1}^m \vec{\varepsilon}_r + a - \sum_{r=1}^{i-1} \vec{\varepsilon}_r \\ &= g(m) + a - g(i-1) \\ &= f(m) + a - f(i-1) \\ &= f(m+1) - f(i-1) \\ &= f(m+i-i+1+1-1) - f(i-1) \\ &\leq f(i-1) + f(m-i+2) - f(i-1) \\ &= f(m-i+2) \\ &= f(|\vec{\varepsilon}_{[i,m]}a|). \end{aligned}$$

Como las subpalabras de la forma $\vec{\varepsilon}_{[i,m]}a$ son las subpalabras que no son fáciles de verificar que se encuentran en $\mathcal{L}(\Psi_f)$. Concluimos que $\vec{\varepsilon}_{[1,m]}a \in \mathcal{L}(\Psi_f)$. Como $\vec{\varepsilon}$ es el elemento máximo de Ψ_f^+ se sigue que $\vec{\varepsilon}_{[1,m]}a \preceq \vec{\varepsilon}_{[1,m+1]}$ y

$$\underline{f}(m) + a = \sum_{r=1}^m \vec{\varepsilon}_r + a \leq \sum_{r=1}^{m+1} \vec{\varepsilon}_r = \underline{f}(m+1). \quad (3.12)$$

Usando la Ecuación (3.12) y nuevamente la hipótesis de inducción

$$f(m+1) = \underline{f}(m+1) + a = \underline{f}(m) + a \leq \underline{f}(m+1). \quad (3.13)$$

Como \underline{f} es una función canónica $\underline{f}(m+1) \leq f(m+1)$.

□

El siguiente resultado nos ayuda a establecer una conexión entre los β -shifts y los subshifts de densidad acotada.

Teorema 3.14. [Stanley 2013 [23, Teorema 2.10]] Una sucesión infinita x es la sucesión característica derecha de un subshift de densidad acotada sí y sólo si, para toda $m \in \mathbb{N}$ $\sigma^m(x) \preceq x$.

Demostración

Sea x la secuencia característica derecha del subshift de densidad acotada Ψ_f . Sean $m, i \in \mathbb{N}$. Probaremos que $\sum_{r=1}^i \sigma^m(x)_r \preceq \sum_{r=1}^i x_r$. Tenemos entonces

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^i \sigma^m(x)_r &= \sum_{r=1}^i x_{m+r} \\ &= \sum_{r=1}^{m+i} x_r - \sum_{r=1}^m x_r \\ &= \underline{f}(i+m) - \underline{f}(m) && \text{Lema 3.12} \\ &\leq \underline{f}(i) + \underline{f}(m) - \underline{f}(m) && \text{Teorema 3.13, 3.} \\ &= \underline{f}(i) \\ &= \sum_{r=1}^i x_r. \end{aligned}$$

Conversamente, supongamos que se cumple $\sigma^m(x) \preceq x$ para toda $m \in \mathbb{N}$. Sea $f := \sum_{r=1}^m x_r$. Probaremos que f es una función canónica para el subshift de densidad acotada Ψ_f con alfabeto $\mathcal{A} = \{0, \dots, x_1\}$ usando el Teorema 3.13.

1. Primero, $f(0) = 0$ por definición de f .

2. Sea $m \in \mathbb{N}$. Entonces

$$f(m+1) = \sum_{r=1}^{m+1} x_r = \sum_{r=1}^m x_r + x_{m+1} = f(m) + x_{m+1} \in f(m) + \mathbb{N}_0. \quad (3.14)$$

3. Sean $m, p \in \mathbb{N}$. Entonces

$$\begin{aligned}
f(m+p) &= \sum_{r=1}^{m+p} x_r \\
&= \sum_{r=1}^m x_r + \sum_{r=m+1}^{m+p} x_r \\
&= f(m) + \sum_{r=1}^p x_{m+r} \\
&= f(m) + \sum_{r=1}^p \sigma^m(x)_r \\
&\leq f(m) + \sum_{r=1}^p x_r \quad \text{ya que } \sigma^m(x) \preceq x. \\
&= f(m) + f(p).
\end{aligned}$$

Por lo tanto f es una función canónica. Luego, tenemos lo siguiente

$$\sum_{r=1}^i x_r = f(i) = \underline{f}(i) = \sum_{r=1}^1 \vec{\varepsilon}_r. \quad (3.15)$$

Para cada $i \in \mathbb{N}$. Por último, por el Lema 3.12 concluimos que $x = \vec{\varepsilon}_r$.

□

El siguiente lema establece una conexión entre los subshifts de densidad acotada con los β -shifts. Porque se trata de una propiedad que poseen las sucesiones de Parry.

Lema 3.15. Para dos funciones canónicas f y g , se cumple que $\vec{\varepsilon}_f \preceq \vec{\varepsilon}_g$ sí y sólo si $\Psi_f^+ \subseteq \Psi_g^+$.

Demostración

Sean $x \in \Psi_f$, $i \in \mathbb{Z}$ y $p \in \mathbb{N}$. Tenemos que

$$\sum_{r=i}^{i+p-1} x_r \leq f(p) = \sum_{r=1}^p \vec{\varepsilon}_{f_r} \leq \sum_{r=1}^p \vec{\varepsilon}_{g_r} = g(p),$$

es decir $x \in \Psi_g^+$. Para probar el converso del teorema usamos el Corolario 3.11. Como $\vec{\varepsilon}_g$ es el elemento máximo de Ψ_g^+ , entonces para todo $x \in \Psi_f^+$, $x \preceq \vec{\varepsilon}_g$. En particular tenemos $\vec{\varepsilon}_f \preceq \vec{\varepsilon}_g$.

□

Es posible construir dos subshifts de densidad acotada que no son comparables el uno con el otro.

Ejemplo 3.4. Elegimos $\vec{\varepsilon}_f = (20)^\infty$ y $\vec{\varepsilon}_g = (210)^\infty$. Es sencillo verificar que $\vec{\varepsilon}_f$ y $\vec{\varepsilon}_g$ no son comparables de acuerdo a la Definición 3.5. Entonces podemos concluir que los subshifts de densidad acotada no son totalmente ordenados, a diferencia de los β -shifts que si lo son.

Definición 3.16. Sea f un función canónica. El *límite gradiente* está dado por

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{n}.$$

La condición (3) del Teorema 3.13 implica que el límite gradiente es una sucesión subaditiva. Usando el Lema de Fekete [25, Teorema 4.9] se concluye que el límite gradiente siempre existe.

3.1 Caracterización de transitividad para subshifts de densidad acotada

Se sabe que para los sistemas simbólicos mezclante implica transitivo. Para los subshifts de densidad acotada estos dos conceptos son equivalentes y se tienen otras dos equivalencias para transitividad relacionadas con algunas propiedades que satisface la función canónica. Todo esto será probado en el Teorema 3.18 . Llamamos *subshift de densidad acotada trivial* al subshift generado por la función $f = 0$, i.e. $\Psi_f = \{\infty 0.0^\infty\}$.

Definición 3.17. Decimos que un conjunto $R \subseteq \mathbb{N}_0$ es *sindético* con *constante sindética* k si para cada $i \in \mathbb{N}_0$.

$$\{i, \dots, i + k - 1\} \cap R \neq \emptyset.$$

Teorema 3.18. [Stanley 2013 [23]] Sea Ψ_f un subshift de densidad acotada no trivial y f una función canónica. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes.

1. Ψ_f es transitivo.
2. Ψ_f es mezclante.
3. f no está acotado por arriba por una constante.
4. $\underline{f}(\mathbb{N}_0)$ es un conjunto sindético con constante sindética $\underline{f}(1)$.

Demostración

$1 \Rightarrow 2$ Sean $u, v \in \mathcal{L}(\Psi_f)$. Por hipótesis existe $w \in \mathcal{L}(\Psi_f)$ tal que $uwv \in \mathcal{L}(\Psi_f)$. Usando $N = |w|$ y el segundo inciso del Lema 3.6 obtenemos que $uw0^Nv \in \mathcal{L}(\Psi_f)$, de modo que $|w0^N| \geq N$ y $uw0^Nv \in \mathcal{L}(\Psi_f)$, i.e. Ψ_f es mezclante.

$2 \Rightarrow 1$ Es inmediato de las definiciones de mezclante y transitivo.

1 \Rightarrow 4 Sea Ψ_f transitivo no trivial. Como $\underline{f}(0) = 0$ y para toda $m \in \mathbb{N}_0$ $\underline{f}(m+1) \in \underline{f}(m) + \mathbb{N}_0$ se cumple que $\underline{f}(\mathbb{N}_0) \subseteq \mathbb{N}_0$. Dado que $1 \in \mathcal{L}(\Psi_f)$, sean $u = 1$ y $v = 1$. Como Ψ_f es topológicamente transitivo, entonces existe $w^{(1)} \in \mathcal{L}(\Psi_f)$ tal que $1w^{(1)}1 \in \mathcal{L}(\Psi_f)$. Sea $x^{(1)} = 1w^{(1)}10^\infty$. Como Ψ_f es transitivo, entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos la sucesión infinita derecha $x^{(n)} = 1w^{(1)}1w^{(2)}1 \dots 1w^{(n)}10^\infty$. Como Ψ_f es compacto se tiene que la sucesión $x^{(n)}$ tiene una subsucesión convergente en Ψ_f^+ . Al ser $\vec{\varepsilon}$ el elemento máximo de Ψ_f^+ , concluimos que $\vec{\varepsilon}$ tiene una cantidad infinita de elementos distintos de 0. Para cada $m \in \mathbb{N}$, existe una subpalabra inicial $\vec{\varepsilon}_{[1,p]}$ tal que $\sum_{r=1}^p \vec{\varepsilon}_r < m$ y $\sum_{r=1}^p \vec{\varepsilon}_r \geq m$. Además $\vec{\varepsilon}_p \leq \underline{f}(1)$. Esto implica que $\sum_{r=1}^p \vec{\varepsilon}_r \in \{m, \dots, m + \underline{f}(1)\}$. Para concluir usamos el Lema 3.12 para probar que $\underline{f}(\mathbb{N}_0)$ es un conjunto sindético con constante sindética $\underline{f}(1)$.

4 \Rightarrow 3 Se cumple para toda $i \in \mathbb{N}_0$ que $\{i, \dots, i + \underline{f}(1) - 1\} \cap \underline{f}(\mathbb{N}_0)$, es decir no existe $M \in \mathbb{N}$ tal que $\underline{f}(m) \leq M$ para toda $m \in \mathbb{N}_0$.

3 \Rightarrow 1 Sean $u, v \in \mathcal{L}(\Psi_f)$. Como f no está acotada por arriba por una constante, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$\underline{f}(m) \geq \sum_{r=1}^{|u|} u_r + \sum_{r=1}^{|v|} v_r. \quad (3.16)$$

Como \underline{f} es no decreciente, a la Ecuación (3.16) se le pueden sumar m ceros, de esto se tiene que $u0^m v \in \mathcal{L}(\Psi_f)$.

□

3.2 Caracterización de los subshifts de tipo finito de densidad acotada

Como ya vimos en el Capítulo 1, los shifts de tipo finito fueron definidos en términos de palabras prohibidas. En el caso de los subshifts de densidad acotada, vamos a estudiar unas equivalencias de la propiedad de tipo finito en términos del límite gradiente y otras características de la función canónica.

Definición 3.19. Una función canónica f se dice *maximalmente extendida* si existe una $q \in \mathbb{N}_0$ tal que para cada $n > q$

$$f(n) = \min\{f(k) + f(n-k) : k \in \{1, \dots, n-1\}\}. \quad (3.17)$$

Lema 3.20. Sea f una función canónica. Sean $q \in \mathbb{N}$ y g definida por

$$g(m) := \begin{cases} f(m) & \text{si } m \leq q \\ \min\{f(k) + f(m-k) : k \in \{0, \dots, m\}\} & \text{si } m > q. \end{cases}$$

Entonces g es una función canónica.

Demostración

Nos apoyaremos del Teorema 3.13 para probar que g es canónica.

1. $g(0) = f(0) = 0$, ya que $0 \leq q$.
2. Probaremos que para toda $m \in \mathbb{N}_0$, $g(m+1) \in g(m) + \mathbb{N}_0$. Primero observemos que $g(\mathbb{N}_0) \subseteq \mathbb{N}_0$ porque para valores menores o iguales que q , g toma el valor de f y para valores mayores que q es el mínimo de una suma de dos valores de f . Entonces vamos a enfocarnos en probar que $g(m) \leq g(m+1)$ para $m \geq q$ y procedemos por casos.

Caso 1: Supongamos que $m = q$. Para cada $k \leq q$ dado que f es canónica, el Teorema 3.13 (2)(3) implica que

$$f(q) \leq f(q+1) = f(q+1-k+k) \leq f(k) + f(q-k+1). \quad (3.18)$$

Si $k = 1$, del Teorema 3.13 (1)(2) tenemos que

$$f(q) \leq f(q+1) = f(q+1) + 0 = f(k) + f(q-k+1). \quad (3.19)$$

Tenemos entonces

$$f(q) \leq \min\{f(k) + f(q+1-k) : k \in \{0, \dots, q+1\}\}. \quad (3.20)$$

En conclusión, $g(q) \leq g(q+1)$.

Caso 2: Supongamos que $m = q$.

$$\begin{aligned} g(m) &= \min\{f(k) + f(m-k) : k \in \{0, \dots, m\}\} \\ &\leq \min\{f(k) + f(m+1-k) : k \in \{0, \dots, m\}\} \\ &= \min\{f(k) + f(m+1-k) : k \in \{0, \dots, m+1\}\} \\ &= g(m+1). \end{aligned}$$

3. Para probar que $g(m+p) \leq g(m) + g(p)$ para toda $m, p \in \mathbb{N}$ también hacemos una prueba por casos.

Caso 1: Supongamos que $m+p \leq q$. Es inmediato de

$$g(m+p) = f(m+p) \leq f(m) + f(p) = g(m) + g(p).$$

Caso 2: Supongamos que $m+p > q$. Vamos a considerar los siguientes subcasos

Subcaso 1: Supongamos que $m, p \leq q$. Notemos que

$$\begin{aligned} g(m+p) &= \min\{f(l) + f(m+p-l) : l \in \{0, \dots, m+1\}\} \\ &\leq f(m) + f(p) \\ &= g(m) + g(p). \end{aligned}$$

Subcaso 2: Supongamos que $m \leq q$ y $p > q$. Para toda $k \in \{0, \dots, p\}$ tenemos que

$$\begin{aligned} g(m+p) &= \min\{f(l) + f(m+p-l) : l \in \{0, \dots, m+p\}\} \\ &\leq f(m) + f(p+(k-k)) \\ &\leq f(m) + f(k) + f(p-k) \\ &\leq f(m) + \min\{f(k) + f(p-k) : k \in \{0, \dots, p\}\} \\ &= f(m) + g(p). \end{aligned}$$

La demostración es la misma cuando $m > q$ y $p \leq q$.

Subcaso 3: Supongamos que $m, p > q$. Sean $j \in \{0, \dots, m\}$ y $k \in \{0, \dots, p\}$. Tenemos entonces

$$\begin{aligned} g(m+p) &= \min\{f(l) + f(m+p-l) : l \in \{0, \dots, m+p\}\} \\ &\leq f(m) + f(p) \\ &= f(m+(j-j)) + f(p+(k-k)) \\ &\leq f(j) + f(m-j) + f(k) + f(p-k) \\ &\leq \min\{f(j) + f(m-j) : j \in \{0, \dots, m\}\} \\ &\quad + \min\{f(k) + f(p-k) : k \in \{0, \dots, p\}\} \\ &= g(m) + g(p). \end{aligned}$$

□

El siguiente lema nos permite tener un criterio para determinar cuando dos conjuntos de palabras de tamaño n son iguales, para dos funciones canónicas de subshifts de densidad acotada.

Lema 3.21. Sean $n \in \mathbb{N}_0$, f y g funciones canónicas. Entonces $\mathcal{B}_n(\Psi_f) = \mathcal{B}_n(\Psi_g)$ sí y sólo si $f(m) = g(m)$ para toda $m \leq n$.

Demostración

Sean $n \in \mathbb{N}_0$ y $w \in \mathcal{B}_n(\Psi_f)$. Entonces $\sum_{r=1}^n w_r \leq f(n) = g(n)$. En consecuencia $w \in \mathcal{B}_n(\Psi_g)$. Análogamente si $u \in \mathcal{B}_n(\Psi_g)$ entonces $\sum_{r=1}^n u_r \leq g(n) = f(n)$. Lo que implica que $u \in \mathcal{B}_n(\Psi_f)$. En conclusión $\mathcal{B}_n(\Psi_f) = \mathcal{B}_n(\Psi_g)$. Para probar el converso sea $w \in \mathcal{B}_n(\Psi_f)$. Por el Lema 3.7 se cumple que para toda u subpalabra de w , $\sum_{r=1}^{|u|} u_r \leq \underline{f}(|u|)$, i.e. para toda $m \leq n$ $\sum_{r=1}^m u_r \leq f(m)$. Por hipótesis $w \in \mathcal{B}_n(\Psi_g)$, aplicando nuevamente el Lema 3.7 obtenemos $\sum_{r=1}^m u_r \leq g(m)$. Como f y g son funciones canónicas $g(m) = f(m)$.

□

Teorema 3.22. [Stanley 2013 [23, Teorema 4.3]] Sean Ψ_f un subshift de densidad acotada y f una función canónica. Los siguientes enunciados son equivalentes.

1. Ψ_f es de tipo finito.
2. \underline{f} es una función maximalmente extendida.
3. $\min\{f(m)/m : m \in \mathbb{N}\}$ existe.
4. Existe $p \in \mathbb{N}$ tal que para toda $m \in \mathbb{N}$, se cumple que $f(mp) = mf(p)$.
5. Existen $N \in \mathbb{N}_0$ y $p \in \mathbb{N}$ tal que para toda $n \geq N$, se cumple que $f(m+p) = f(m+p+N)$.

Demostración

1 \Rightarrow 2 Supongamos que Ψ_f un shift de tipo finito de memoria $M - 1$. Definimos g por

$$g(m) := \begin{cases} f(m) & \text{si } m \leq M \\ \min\{f(k) + f(m-k) : k \in \{0, \dots, m\}\} & \text{si } m > M. \end{cases} \quad (3.21)$$

Si $k \leq m$ entonces $\underline{f}(m) \leq \underline{f}(k) + \underline{f}(m-k)$, así que la desigualdad

$$\underline{f}(m) \leq \min\{\underline{f}(k) + \underline{f}(m-k) : k \in \{0, \dots, m\}\} = g(m)$$

es válida para $m > M$. Por definición de g , $\underline{f}(m) \leq g(m)$ para $m \leq M$. Esto implica que $\underline{f} \leq g$. La función g definida en la Ecuación (3.21) es una función canónica por el Lema 3.20. Sea $x \in \Psi_g$. Para toda $i \in \mathbb{Z}$ la palabra $x_{[i, i+M-1]} \in \mathcal{L}(\Psi_g)$. Por el Lema 3.21 se tiene que $\mathcal{B}_M(\Psi_f) = \mathcal{B}_M(\Psi_g)$, esto implica que para toda $i \in \mathbb{Z}$, $x_{[i, i+M-1]} \in \mathcal{L}(\Psi_f)$. Como Ψ_f es un subshift de tipo finito, $x \in \Psi_f$, i.e. $\Psi_g \subseteq \Psi_f$. Por el Lema 3.15 $\vec{\varepsilon}_g \preceq \vec{\varepsilon}_f$ y del Lema 3.11, para cada $m \in \mathbb{N}_0$

$$g(m) = \sum_{r=1}^m \vec{\varepsilon}_{g_r} \leq \sum_{r=1}^m \vec{\varepsilon}_{f_r} = \underline{f}(m). \quad (3.22)$$

Por lo tanto $f = m$.

2 \Rightarrow 3 Como existe $q \in \mathbb{N}_0$ tal que para toda $m > q$

$$\underline{f}(m) = \min\{\underline{f}(k) + \underline{f}(m-k) : k \in \{1, \dots, m-1\}\}. \quad (3.23)$$

Elegimos $p \leq q$ tal que

$$\frac{f(p)}{p} = \min \left\{ \frac{f(m)}{m} : m \leq q \right\}. \quad (3.24)$$

Donde p no necesariamente es única, ahora resta probar que para toda $m \in \mathbb{N}$

$$\frac{f(p)}{p} \leq \frac{f(m)}{m}. \quad (3.25)$$

Por la elección de p la Desigualdad (3.25) se cumple para $m \leq q$. Supongamos que se cumple para $m \geq q$. Sea $k \in \{1, \dots, m\}$. Como $k, (m+1-k) \in \{1, \dots, m\}$ las desigualdades

$$\frac{f(p)}{p} \leq \frac{f(k)}{k} \quad \text{y} \quad \frac{f(p)}{p} \leq \frac{f(m+1-k)}{m+1-k} \quad (3.26)$$

se verifican por hipótesis de inducción. Entonces

$$k\underline{f}(p) + (m+1-k)\underline{f}(p) \leq p\underline{f}(k) + p\underline{f}(m+1-k) \quad (3.27)$$

y

$$(m+1)\underline{f}(p) \leq p \min \{ \underline{f}(p) + \underline{f}(m+1-k) : k \in \{1, \dots, m\} \}. \quad (3.28)$$

Ya que k fue elegida de manera arbitraria y por la Ecuación 3.23

$$(m+1)\underline{f}(p) \leq p\underline{f}(m+1). \quad (3.29)$$

Así que

$$\frac{f(p)}{p} \leq \frac{f(m+1)}{m+1}. \quad (3.30)$$

Por lo tanto $\underline{f}(p)/p = \min\{\underline{f}(m)/m : m \in \mathbb{N}\}$.

3 \Rightarrow 4 Sea

$$\frac{f(p)}{p} = \min \left\{ \frac{f(m)}{m} : m \in \mathbb{N} \right\}. \quad (3.31)$$

Si $m \in \mathbb{N}$ se cumple que $\frac{f(p)}{p} \leq \frac{f(mp)}{mp}$, entonces $m\underline{f}(p) \leq \underline{f}(mp)$. Para $n = 2$, del Teorema 3.13 tenemos

$$\underline{f}(2p) = \underline{f}(p+p) \leq 2\underline{f}(p). \quad (3.32)$$

Suponemos cierto $\underline{f}(\sum_{r=1}^n p) \leq n\underline{f}(p)$. Entonces

$$\underline{f}\left(\sum_{r=1}^{n+1} p\right) = \underline{f}\left(\sum_{r=1}^n p + p\right) \leq \underline{f}\left(\sum_{r=1}^n p\right) + \underline{f}(p) \leq n\underline{f}(p) + \underline{f}(p) = (n+1)\underline{f}(p). \quad (3.33)$$

Hemos verificado que $\underline{f}(mp) \leq m\underline{f}(p)$, lo cual completa la prueba para esta implicación.

4 \Rightarrow 5 Supongamos que para toda $N \in \mathbb{N}_0$ y para toda $p \in \mathbb{N}$, existe $m \geq N$ tal que $\underline{f}(m+p) \neq \underline{f}(m) + \underline{f}(p)$. Sea $p \in \mathbb{N}$. Por nuestra suposición inicial el conjunto $\{m \in \mathbb{N} : \underline{f}(m+p) \neq \underline{f}(m) + \underline{f}(p)\}$ es infinito, por lo cual existe $i \in \{1, \dots, p\}$ tal que el siguiente conjunto es infinito

$$R = \{m \in p\mathbb{N}_0 + i : \underline{f}(m+p) \neq \underline{f}(m) + \underline{f}(p)\}.$$

Como \underline{f} es canónica y del Teorema 3.13 (3) tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} R &= \{m \in p\mathbb{N}_0 + i : \underline{f}(m+p) < \underline{f}(m) + \underline{f}(p)\} \\ &= \{m \in p\mathbb{N}_0 + i : \underline{f}(m+p) \leq \underline{f}(m) + \underline{f}(p) - 1\}. \end{aligned}$$

Posteriormente vamos a usar inducción sobre $k \in \mathbb{N}_0$ para demostrar que

$$\underline{f}(i+kp) \leq \underline{f}(i) + k\underline{f}(p) - |R \cap \{1, \dots, i+kp-1\}|. \quad (3.34)$$

Para $k=0$, $\underline{f}(0) \leq \underline{f}(0) - |R \cap \{1, \dots, i-1\}| = \underline{f}(0)$. Suponemos válido

$$\underline{f}(i+kp) \leq \underline{f}(i) + k\underline{f}(p) - |R \cap \{1, \dots, i+kp-1\}|,$$

para alguna $k \in \mathbb{N}_0$. Luego

$$\begin{aligned} & \underline{f}(i) + (k+1)\underline{f}(p) - |R \cap \{i, \dots, i+(k+1)p-1\}| \\ &= \underline{f}(i) + k\underline{f}(p) - |R \cap \{1, \dots, i+kp-1\}| + \underline{f}(p) - |R \cap \{i+kp, \dots, i+(k+1)p-1\}| \\ &\geq \begin{cases} \underline{f}(i+kp) + \underline{f}(p) & \text{si } i+kp \notin R \\ \underline{f}(i+kp) + \underline{f}(p) - 1 & \text{si } i+kp \in R \end{cases} \\ &\geq \underline{f}(i+(k+1)p). \end{aligned}$$

Para la última desigualdad se usa el Teorema 3.13 (3) o la definición de R respectivamente. Es así como se concluye la prueba por inducción. Como R es infinito, existe $m \in \mathbb{N}_0$ tal que

$$|R \cap \{1, \dots, i+mp-1\}| = p\underline{f}(1) + 1 \quad (3.35)$$

En consecuencia, por la Desigualdad (3.34)

$$\underline{f}(i+mp) \leq \underline{f}(i) + m\underline{f}(p) - p\underline{f}(1). \quad (3.36)$$

Entonces $\underline{f}(i) \leq p\underline{f}(1)$, de donde obtenemos $\underline{f}(i+mp) \leq m\underline{f}(p) - 1$, lo que da como resultado $\underline{f}(mp) \leq m\underline{f}(p) - 1$. Por último, dado que \underline{f} es no decreciente $\underline{f}(mp) < m\underline{f}(p)$.

5 \Rightarrow 1 Supongamos que existen $N \in \mathbb{N}_0$ y $p \in \mathbb{N}$ tal que para toda $m \geq N$, se satisface $\underline{f}(m+p) = \underline{f}(m) + \underline{f}(p)$. Sea X el shift de tipo finito que permite palabras de tamaño $(N+p)$. Sea $x \in \Psi_f$, para toda $i \in \mathbb{Z}$ y para toda $q \in \mathbb{N}$ $\sum_{r=i}^{i+q-1} x_r \leq \underline{f}(q)$. Esto implica que en particular, si $q = N+p$ entonces $\sum_{r=i}^{i+q-1} x_r \leq \underline{f}(q) = \underline{f}(N+p)$. Por lo tanto $x \in X$.

Para demostrar la otra contención sean $x \in X$, $i \in \mathbb{Z}$ y $q \in \mathbb{N}$. Entonces $\sum_{r=i}^{i+q-1} x_r \leq \underline{f}(q)$ para $q \leq N+p$, ya que $x_{[i, i+q-1]}$ es subpalabra de $x_{[i, i+N+p-1]} \in \mathcal{B}_{N+p}(\Psi_f)$. Si $q > N+p$, q puede escribirse como $q = ap + N + b$ para alguna $a \in \mathbb{N}$ y $b \in \{0, \dots, p-1\}$. Entonces

$$\begin{aligned} \sum_{r=i}^{i+q-1} x_r &= \sum_{r=0}^{a-1} \left(\sum_{r=i+cp}^{i+cp+p-1} x_r \right) + \sum_{r=i+ap}^{i+q-1} x_r \\ &\leq a\underline{f}(p) + \underline{f}(N+b) \\ &= \underline{f}(ap + N + b) \\ &= \underline{f}(q). \end{aligned}$$

Con esto $x \in \Psi_f$, por lo tanto Ψ_f es un shift de tipo finito. □

Lema 3.23. Todo subshift de densidad acotada de tipo finito es transitivo.

Demostración

Empezamos asumiendo que el subshift de densidad acotada no es el trivial. Usando la definición alternativa de shifts de tipo finito $0^p 10^{n-p-1} \in \mathcal{L}(\Psi_f)$ para cada $p \geq 1$, se sigue que $(10^{n-1})^m \in \mathcal{L}(\Psi_f)$ para cada $m \in \mathbb{N}$, i.e. f no está acotada por arriba por una constante, del Teorema 3.18 se sigue que Ψ_f es transitivo. □

3.3 Caracterización de los subshifts de densidad acotada con especificación

Teorema 3.24. [Stanley 2013 [23, Teorema 5.1]] Sean Ψ_f un subshift de densidad acotada y f una función canónica, sea $M \in \mathbb{N}$. Los siguientes enunciados son equivalentes.

1. Ψ_f tiene la propiedad de especificación con constante de especificación M .
2. Para cualesquiera m y $p \in \mathbb{N}_0$, se cumple que $f(m+p) \leq f(m+p+M)$.
3. O^M es una palabra intrínsecamente sincronizada.

Demostración

- 1) \Rightarrow 3) Sean $u, v \in \mathcal{L}(\Psi_f)$ con $u0^M, 0^Mv \in \mathcal{L}(\Psi_f)$. Por hipótesis existe $w \in \mathcal{B}_M(\Psi_f)$ tal que $uwv \in \mathcal{L}(\Psi_f)$. Por el Lema 3.6 (2), $u0^Mv \in \mathcal{L}(\Psi_f)$, i.e. 0^M es una palabra intrínsecamente sincronizada.
- 3) \Rightarrow 2) Sean $m, p \in \mathbb{N}$. Como $\overleftarrow{\varepsilon}_{[-m,-1]}0^M, 0^M\overrightarrow{\varepsilon}_{[1,p]} \in \mathcal{L}(\Psi_f)$, por lo que $x := \overleftarrow{\varepsilon}_{[-m,-1]}0^M\overrightarrow{\varepsilon}_{[1,p]} \in \mathcal{L}(\Psi_f)$. Entonces tenemos

$$\underline{f}(m) + \underline{f}(p) = \sum_{r=-m}^{-1} \overrightarrow{\varepsilon}_r + \sum_{r=1}^p \overrightarrow{\varepsilon}_r = \sum_{r=1}^{m+p+M} x_r \leq \underline{f}(m+p+M). \quad (3.37)$$

- 2) \Rightarrow 1) Sean $u, v \in \mathcal{L}(\Psi_f)$ y $x = u0^Mv$. Tenemos entonces

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^{|u|+|v|+M} &= \sum_{r=1}^{|u|} u_r + \sum_{r=1}^{|v|} v_r \\ &\leq \underline{f}(|u|) + \underline{f}(|v|) \\ &= \underline{f}(|u| + |v| + M) \\ &= \underline{f}(|x|). \end{aligned}$$

Puesto que $x \in \mathcal{L}(\Psi_f)$, toda subpalabra de x también pertenece al lenguaje, de esto Ψ_f tiene la propiedad de especificación con constante de especificación M .

□

3.3.1 Preguntas

Puesto que no todos los subshifts de densidad acotada tienen especificación. En el estudio de la caracterización para la transitividad de los subshifts de densidad acotada, una cuestión importante es la siguiente.

Pregunta 3.25. [Stanley 2012 [23]] ¿Todos los subshifts de densidad acotada transitivos son intrínsecamente ergódicos?

Pregunta 3.26. ¿Es cierto que todo subshift de densidad acotada topológicamente transitivo satisface el criterio de Climenhaga-Thompson?

Por el momento no daremos respuesta a la Pregunta 3.25. Sin embargo, la relación con el tema principal de esta tesis supone un tema de investigación para el futuro. Notemos que si la respuesta a la Pregunta 3.26 es verdadera, esta implicaría una respuesta positiva a la Pregunta 3.25.

Capítulo 4

Subshifts de densidad acotada en dos dimensiones

Hemos estudiado hasta ahora unas propiedades que ya están caracterizadas para subshifts de densidad acotada. Tales como transitividad topológica, tipo finito y especificación. En este último capítulo abordaremos los subshifts de densidad acotada en dos dimensiones con una perspectiva menos profunda que en el anterior, no sin antes ver algunas definiciones para \mathbb{Z}^2 -subshifts.

4.1 \mathbb{Z}^2 Subshifts

Consideramos nuevamente \mathcal{A} un alfabeto finito. El \mathbb{Z}^2 *shift completo* es el conjunto $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}^2}$. La métrica para este espacio está definida por

$$d(x, y) := \begin{cases} 0 & \text{si } x = y \\ \frac{1}{2^k} & \text{si } x \neq y \text{ y } k = \max\{a \in [-k, k]^2 : x_a = y_a\}. \end{cases} \quad (4.1)$$

La idea detrás de esta métrica no es muy diferente a la idea para el caso de \mathbb{Z} -subshifts. En el caso del \mathbb{Z}^2 -shift completo estamos comparando cuadrados en ambas configuraciones y viendo hasta dónde tienen los mismos símbolos.

Definimos dos transformaciones en $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}^2}$ de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \sigma_{\downarrow} : \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^2} &\rightarrow \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^2} \\ x &\mapsto y \end{aligned}$$

Donde $y_{[i,j]} = x_{[i,j-1]}$. De manera análoga

$$\begin{aligned} \sigma_{\leftarrow} : \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^2} &\rightarrow \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^2} \\ x &\mapsto y \end{aligned}$$

Donde $y_{[i,j]} = x_{[i-1,j]}$.

Ambas son continuas con respecto a la métrica definida en la Ecuación (4.1) [14]. Más aún, definir las dos funciones es equivalente a la definición clásica de una acción de grupo de \mathbb{Z}^2 en $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}^2}$ [1].

Definición 4.1. Un \mathbb{Z}^2 -*subshift* sobre el alfabeto \mathcal{A} es un conjunto $X \subseteq \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^2}$ que satisface las siguientes propiedades:

1. X es invariante bajo σ_\downarrow y σ_{\leftarrow} , esto es $\sigma_\downarrow(X) \subseteq X$ y $\sigma_{\leftarrow}(X) \subseteq X$.
2. X es cerrado en la topología producto de $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}^2}$.

Una *configuración* u sobre el alfabeto \mathcal{A} es cualquier función de un subconjunto S no vacío de \mathbb{Z}^2 a \mathcal{A} . Al conjunto S lo llamamos la *forma* de u . Para cualquier configuración u con forma S y para algún $T \subseteq S$ denotamos por $u|_T$ la restricción de u a T , esto es una *subconfiguración* de u para el conjunto T .

Definición 4.2. Un \mathbb{Z}^2 *shift de tipo finito* X es definido prohibiendo una colección finita de configuraciones \mathcal{F} . Entonces

$$X = \left(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d} \right)_{\mathcal{F}} = \left\{ x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^2} : x|_S \notin \mathcal{F} \text{ para todos los subconjuntos } S \subseteq \mathbb{Z}^2 \text{ finitos} \right\}. \quad (4.2)$$

Naturalmente, los \mathbb{Z}^2 shifts de tipo finito son \mathbb{Z}^2 -subshifts, la prueba es bastante similar al caso de una dimensión [12].

Ejemplo 4.1. El *hard-square model* o *modelo de cuadrados duros*, es el shift de tipo finito que viene de prohibir la aparición de dos símbolos 1 tanto de manera horizontal como vertical i.e. $\mathcal{F} = \{[11], \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\}$. Un elemento típico del modelo de cuadrados duros es el siguiente

$$\begin{array}{cccccccc} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}$$

El modelo de cuadrados duros es importante en física estadística, como un modelo simple de un gas cuyas partículas tienen un tamaño no despreciable [24]. También aparece en problemas de almacenamiento de datos [13].

Ejemplo 4.2. El modelo *Read/Write Isolated Memory* está dado por $\mathcal{F} = \{11, \overset{1}{1}, \overset{1}{1}\}$. Un punto $x \in \left(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}^2}\right)_{\mathcal{F}}$ se ve de la siguiente forma

$$\begin{array}{cccccccc} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \cdot & \cdot & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}$$

A diferencia del Ejemplo 4.1, en este ejemplo si se admiten dos símbolos 1 de forma vertical.

4.2 \mathbb{Z}^2 Subshifts de densidad acotada

Una motivación para estudiar \mathbb{Z}^2 -subshifts de densidad acotada, es saber si existe una caracterización para los \mathbb{Z}^2 -subshifts de tipo finito, como en el caso de los subshifts de densidad acotada unidimensionales. Aunque empezar con un ejemplo nos hará saber que esta clase de subshifts es no vacía.

Definición 4.3. Sea $f : \mathbb{N}_0^2 \rightarrow [0, \infty)$, definimos

$$\Phi_f = \left\{ x \in \mathbb{N}_0^{\mathbb{Z}^2} : (\forall p, q \in \mathbb{N}_0)(\forall i, j \in \mathbb{Z}) \sum_{r=i}^{i+p-1} \sum_{s=j}^{j+q-1} x_{r,s} \leq f(p, q) \right\}.$$

Estos son los *subshifts de densidad acotada en dos dimensiones*.

Ejemplo 4.3. El modelo de cuadrados duros puede verse como un subshift de densidad acotada con la función $f(m, n) = n(m + 1)/2$. Observemos de nuevo una configuración para este subshift.

$$\begin{array}{cccccccc} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \cdot & \cdot & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \cdot & \cdot & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}$$

Para el caso de una dimensión no puede haber más de $(m + 1)/2$ símbolos 1, por lo tanto es natural pensar que el rectángulo $[m, n]^2$ no puede tener más de $n(m + 1)/2$ símbolos 1. Es de esta forma como se respetan las restricciones dadas en el Ejemplo 4.1.

No se conoce el valor exacto para la entropía topológica del modelo de cuadrados duros, en [20] se combinan técnicas de teoría ergódica y métodos de teoría de percolación e interacción de partículas para hacer una aproximación de este valor (más que una aproximación son algoritmos efectivos), donde sacan ventaja de lo menos complicado que resulta calcular la entropía topológica para una dimensión. Usando la teoría y los resultados de [24] se puede ver que el modelo de cuadrados duros (en dos dimensiones) tiene una única de entropía maximal, donde usan fuertemente conceptos de teoría de percolación.

Bibliografía

- [1] BERTHÉ, V.& RIGO, M. Combinatorics, Words and Symbolic Dynamics. Encyclopedia of Mathematics and its Applications. Cambridge University Press, 2016.
- [2] BLANCHARD, F. β -expansions and symbolic dynamics. Theoretical Computer Science (1989).
- [3] BLANCHARD, F & HANSEL, G. Systèmes codés. Theoretical Computer Science (1986).
- [4] BOLTZMANN, L. Lectures on gas theory (english traslation. dougherty, j. p.). Journal of Fluid Mechanics (1964), 698–699.
- [5] BOWEN, R. Some systems with unique equilibrium states. Mathematical Systems Theory (1974).
- [6] CLIMENHAGA, V. & THOMPSON, D. J. Intrinsic ergodicity beyond specification, β -shifts, s -gap shifts, and their factors. Israel Journal of Mathematics (2012).
- [7] DASTJERDI, D. A., AND JANGJOO, S. Dynamics and topology of s -gap shifts. Topology and its Applications 159 (2012).
- [8] GOODMAN, T. Maximal measures for expansive homeomorphisms. Jornal of the London Math. Soc (1972).
- [9] HEDLUND, G.H. & MORSE, M. Symbolic dynamics. Amer J. Math. (1938).
- [10] HEDLUND, G.H. & MORSE, M. Symbolic dynamics ii. Amer J. Math. (1940).
- [11] JHONSON, K. Beta-shift dynamical systems and their associated languages. PhD thesis, University of North Carolina at Chapel Hill, 1999.
- [12] JOHNSON, AIMEE S.A. & MADDEN, K. The decomposition theorem for two-dimensional shifts of finite type. Proceedings Of The American Mathematical Society (1999).
- [13] KELLY, F. P. Loss networks. The Annals of Applied Probability (1991), 319 – 378.
- [14] KITCHENS, B. P. Symbolic Dynamics. One-sided, Two-sided and Countable State Markov Shifts. Springer, 1997.
- [15] KOLMOGOROV, A. New metric invariant of transitive dynamical systems and endomorphisms of lebesgue spaces. Doklady of Russian Academy of Sciences (1958).

- [16] LIND, D. & MARCUS, B. An introduction to Symbolic Dynamics and Coding. Cambridge University Press, 1995.
- [17] MUNKRES, J. R. Topology. Prentice Hall, Inc, 2000.
- [18] PARRY, W. On the β -expansion of real numbers. Acta Mathematica Acadamiae Scientiarum Hungarica (1960).
- [19] PARRY, W. Intrinsic markov chains. Transactions of the American Mathematical Society (1964).
- [20] PAVLOV, R. Approximating the hard square entropy constant with probabilistic methods. The Annals of Probability (2012).
- [21] RÉNYI, A. Representations for real numbers and their ergodic proprieties. Acta Mathematica Acadamiae Scientiarum Hungarica (1957).
- [22] SHANNON, C. E. A mathematical theory of communication. The Bell System Technical Journal (1948), 379–423.
- [23] STANLEY, B. Bounded density shifts. Ergodic Theory and Dyamical Systems (2013).
- [24] VAN DEN BERG, J. Percolation and the hard-core lattice gas model. Stochastic Processes and their Applications (1994).
- [25] WALTERS, P. An Introduction to Ergodic Theory. Springer, 1975.
- [26] WEISS, B. Intrinsically ergodic systems. Bull. Amer. Math. Soc. (1970).