UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE SAN LUIS POTOSÍ

FACULTAD DE CIENCIAS

MULTISENSIBILIDAD EN HIPERESPACIOS

TESIS

PARA OBTENER EL GRADO DE

MAESTRA EN CIENCIAS APLICADAS

PRESENTA:

LIC. IRMA LEÓN TORRES

DIRECTORA DE TESIS:

DRA. ALICIA SANTIAGO SANTOS

SAN LUIS POTOSI, SLP DICIEMBRE 2021

TESIS DE MAESTRÍA

MULTISENSIBILIDAD EN HIPERESPACIOS

ALUMNA

IRMA LEÓN TORRES

COMITÉ QUE ACEPTA LA TESIS

Dra. Alicia Santiago Santos	Asesora	
Dr. Edgardo Ugalde Saldaña	Sinodal	
Dr. Felipe Garcia Ramos Aguilar	Sinodal	
Dr. Rafael Alcaraz Barrera	Sinodal	RAFAEL ALCARAZ B.

DICIEMBRE 2021

DECLARACIÓN DE AUTORÍA Y ORIGINALIDAD DE LA TESIS

Yo, Irma León Torres, estudiante del Posgrado en Ciencias Aplicadas de la Facultad de Ciencias de la Universidad Autónoma de San Luis Potosí, como autora de la tesis "Multisensibilidad en hiperespacios", declaro que la tesis es una obra original, inédita, auténtica, personal, que se han citado las fuentes correspondientes y que en su ejecución se respetaron las disposiciones legales vigentes que protegen los derechos de autor y de propiedad intelectual e industrial. Las ideas, doctrinas, resultados y conclusiones a los que he llegado son de mi absoluta responsabilidad.

Resumen

Dado un sistema dinámico discreto (X, f), donde X es un espacio métrico compacto y $f : X \to X$ es una transformación continua, es natural estudiar a la familia de sistemas que (X, f) induce. Para ser más precisos, describiremos algunas propiedades del sistema inducido por (X, f) en el hiperespacio de subconjuntos compactos no vacíos de X, 2^X. En particular, estudiaremos propiedades topológicas como: sensibilidad a condiciones iniciales, multisensibilidad y parejas $(\mathscr{F}, \delta)$-sensibles para familias de Furstenberg, relacionando las propiedades del sistema (X, f) con las del sistema inducido $(2^X, 2^f)$. Nuestro trabajo está basado en [32].

Abstract

Given a discrete dynamical system (X, f), where X is a compact metric space and $f : X \to X$ is a continuous transformation, it is natural to study the family of systems that (X, f) induces. To be more precise, we will describe some properties of the system induced by (X, f) to the hyperspace of non-empty and compact subsets of X, 2^X. In particular, we will study topological properties such as: sensitivity to initial conditions, multisensitivity, and $(\mathscr{F}, \delta)$ - sensitive pairs for Furstenberg families, relating the properties of (X, f) with those of the induced system $(2^X, 2^f)$. Our work is based on [32].

Agradecimientos

Quiero dar gracias principalmente a mi familia, por el apoyo incondicional que me brindaron y que me han brindado siempre en cada proyecto de mi vida. Esto no hubiera sido posible sin su apoyo.

Agradezco infinitamente a Víctor Martín Muñoz López, por estar siempre a mi lado apoyándome en todos los aspectos de mi vida. Gracias por el amor y el apoyo inmenso que he recibido siempre.

Gracias a la Dra. Alicia Santiago Santos por ser una excelente guía en este trabajo, por su tiempo dedicado en este proyecto. Gracias a sus revisiones y observaciones constantes hicieron que este trabajo fuera posible. Como siempre, un gusto trabajar con usted.

A mis sinodales, Dr. Felipe García Ramos, Dr. Rafael Alcaraz Barrera y Dr. Edgardo Ugalde Saldaña, gracias por el tiempo dedicado a la revisión de mi tesis, sus certeras observaciones hicieron una mejora en la misma. Gracias también por los cursos impartidos durante la maestría, sus enseñanzas y consejos me hacen crecer profesionalmente.

Finalmente, agradezco al CONACyT por el apoyo económico otorgado para mis estudios de maestría.

A la memoria de mi madre, Oliva Torres Fuentes.

Índice general

Introducción

La temática de esta tesis se encuentra dentro de la rama de la matemática llamada Dinámica topológica, sabemos que el objeto central de estudio en Dinámica topológica es un espacio topológico junto con una función continua. En nuestro caso, consideramos X un espacio métrico compacto y $f : X \to X$ una función continua. Al par (X, f) lo denominamos sistema dinámico discreto. Dentro de la dinámica topológica una clase de sistemas dinámicos importantes son los sistemas caóticos. Cabe señalar que actualmente aún no hay una definición matemática que se acepte universalmente para el caos, sin embargo se sabe que una de las nociones para entender un sistema caótico es la sensibilidad a las condiciones iniciales [17]. En 1971, Ruelle introdujo la primera definición de sensibilidad [27]. Decimos que el sistema dinámico discreto (X, f) es *sensible* si existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo $x \in X$ y para toda $\delta > 0$, existen $y \in B(x, \delta)$ y $n \in \mathbb{Z}_+$ tales que $d(f^n(x), f^n(y)) > \varepsilon$. Dada la importancia de los sistemas dinámicos sensibles, empezaron a surgir otras nociones relacionadas con la sensibilidad tales como: Li-Yorke sensible [3], gruesamente sindéticamente sensible [21], sindéticamente sensible, cofinitamente sensible y multisensible, ver [22].
Después, en el 2011, Tan y Zhang [29] introducen una forma más general de sensibilidad vía familias de Furstenberg y estudian la relación entre sensibilidad, pares $\mathscr{F}$-sensibles y $\mathscr{F}$-sensibilidad, donde $\mathscr{F}$ es una familia de Furstenberg.

Dado (X, f) un sistema dinámico, decimos que (X, f) induce el sistema dinámico $(2^X, 2^f)$, donde $2^X = \{A \subset X : A \text{ es compacto en } X \text{ y no vacío}\}$ y $2^f : 2^X \to 2^X$ es tal que $2^f(A) = f(A)$, para cada $A \in 2^X$ [16]. Cuando se estudia el sistema dinámico (X, f) se dice que se analiza la dinámica individual y cuando se considera su sistema dinámico inducido $(2^X, 2^f)$ se dice que se investiga la dinámica colectiva. Un problema muy natural es estudiar las relaciones que existen entre estas estructuras. En 1974, Bauer y Sigmund [6] estudiaron el caos individual y el caos colectivo en los sistemas dinámicos.

El objetivo principal de este trabajo de tesis es realizar un estudio detallado de propiedades que se presentan en un sistema dinámico (X, f) y su sistema dinámico inducido $(2^X, 2^f)$ dada alguna clase de sistemas $\mathcal{M}$. Siguiendo como principal guía el trabajo realizado en [32].
Es decir, se estudia la relación entre los sistemas:

i) $(X, f) \in \mathcal{M}$

ii) $(2^X, 2^f) \in \mathcal{M}$,

Y entre los sistemas:

iii) $(X, f) \in \mathcal{M}$ y/o $(Y, g) \in \mathcal{M}$

iv) $(X \times Y, f \times g) \in \mathcal{M}$

v) $(2^{X \times Y}, 2^{f \times g}) \in \mathcal{M}$, Donde, en $\mathcal{M}$ se encuentran propiedades como sensibilidad, multisensibilidad y $\mathscr{F}$-sensibilidad, donde $\mathscr{F}$ es una familia de Furstenberg, entre otras.

Para lograr dicho objetivo, el trabajo de tesis está organizado de la siguiente manera: en el Capítulo 1 además de dar la notación que será utilizada a lo largo de este trabajo, recordamos conceptos preliminares en funciones continuas sobre espacios métricos. Damos una pequeña introducción a la dinámica simbólica, esto con el fin de mostrar un algunos ejemplos y finalmente los conceptos preliminares de sistemas dinámicos.
Posteriormente, en el Capítulo 2 introducimos a la propiedad de sensibilidad en sistemas dinámicos discretos, mencionamos algunas relaciones entre sistemas dinámicos sensibles y los sistemas cofinitamente sensibles, gruesamente sensibles, sindéticamente sensibles y multisensible. Damos una introducción a las familias de Furstenberg para posteriormente definir la propiedad de $\mathscr{F}$-sensibilidad, donde $\mathscr{F}$ es una familia de Furstenberg y así poder dar relaciones entre sensibilidad, $\mathscr{F}$-sensibilidad y multisensibilidad en un sistema dinámico.
En el Capítulo 3, realizamos un pequeño estudio sobre la dinámica del sistema dinámico producto, mostrando algunas propiedades relacionadas con la propiedad de sensibilidad y cómo la dinámica en un sistema influye en el comportamiento de la dinámica en un sistema dinámico inducido por él. En particular, mostramos que dados (X, f) y (Y, g) sistemas dinámicos, se cumple que si (X, f) o (Y, g) es cofinitamente sensible, entonces $(X \times Y, f \times g)$ es cofinitamente sensible. Análogamente, se cumple para las propiedades gruesamente sensible, sindéticamente sensible y gruesamente sindéticamente sensible. Se muestra también que (X, f) o (Y, g) es sensible si y sólo si $(X \times Y, f \times g)$ es sensible. Mostramos que también se cumple para la propiedad de multisensibilidad.
Finalmente, en el Capítulo 4, iniciamos con una introducción a los hiperespacios y de funciones inducidas sobre ellos. Nos enfocamos en el estudio del hiperespacio 2^X dotado con la topología inducida por la métrica de Hausdorff y mostramos relaciones entre un sistema dinámico (X, f) y su hiperespacio inducido $(2^X, 2^f)$, relaciones que se tiene entre las propiedades sensibilidad, $\mathscr{F}$-sensibilidad y multisensibilidad.

Capítulo 1

Introducción a la dinámica topológica

En este capítulo recordamos conceptos y resultados que permitan introducirnos a la dinámica topológica y poder mostrar propiedades de los espacios con los que estaremos trabajando. Además de establecer convenciones acerca de los conceptos que serán utilizados para el desarrollo de este trabajo de tesis.

1.1. Notaciones y conceptos básicos

En este trabajo de tesis denotaremos por; $\mathbb{I}$ al conjunto de los números irracionales, $\mathbb{R}$ al conjunto de números reales, $\mathbb{R}_+$ al conjunto de números reales positivos, $\mathbb{N}$ al conjunto de números naturales, $\mathbb{Z}_+$ al conjunto números enteros no negativos y por $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_+)$ al conjunto potencia de $\mathbb{Z}_+$. Además, para cualquier $A \subset \mathbb{N}$, denotaremos por $|A|$ a la cardinalidad del subconjunto A.

En la Definición 1.1, definimos subconjuntos de los enteros no negativos que cumplen cierta propiedad, ésto con el fin de poder presentar algunas clases de sistemas dinámicos.

Definición 1.1. Sea $A \subset \mathbb{Z}_+$. Se dice que el conjunto A es:

1. *Cofinito* si $\mathbb{Z}_+ \setminus A$ es finito.
2. *Grueso* si para cada $p \in \mathbb{N}$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\{n, n+1, \ldots, n+p\} \subset A$.
3. *Sindético* si existe $l \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $m \in \mathbb{N}$, $\{m, m+1, \ldots, m+l\} \cap A \neq \emptyset$.
4. *Gruesamente sindético* si para cada $n \in \mathbb{N}$, $\{i \in \mathbb{N} \colon \{i, i+1, \ldots, n\} \subset A\}$ es sindético.

Ejemplos de los conjuntos dados en la Definición 1.1, se muestran en el Ejemplo 1.2.

Ejemplo 1.2. Sea $m \in \mathbb{Z}_+$. Se cumple que:

(a) $A = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ no es divisor de } m\}$ es cofinito.

(b) $A = \{n \in \mathbb{N} : n \geq m\}$ es grueso.

(c) $A = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ es un número par}\}$ es sindético.

En la Proposición 1.3, se muestran algunas propiedades que satisfacen los conjuntos dados en la Definición 1.1. Dicho resultado será útil en la prueba del Lema 3.22, Lema 3.29, Lema 3.35 y Lema 3.41.

Proposición 1.3. Sean $A, B \subset \mathbb{Z}_+$, tales que $A \subset B$. Las siguientes proposiciones son verdaderas:

1. Si A es grueso, entonces B es grueso.
2. Si A es cofinito, entonces B es cofinito.
3. Si A es sindético, entonces B es sindético.
4. Si A es gruesamente sindético, entonces B es gruesamente sindético.

Demostración. 1. Supongamos que A es grueso y sea $p \in \mathbb{N}$. Como A es grueso, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\{n, n+1, \ldots, n+p\} \subset A$. Puesto que $A \subset B$, se concluye que $\{n, n+1, \ldots, n+p\} \subset B$. Por lo tanto, B es grueso.
2. Supongamos que A es cofinito. Luego, $\mathbb{Z}_+ \setminus A$ es finito. Por otro lado, como $A \subset B$, entonces $\mathbb{Z}_+ \setminus B \subset \mathbb{Z}_+ \setminus A$. Puesto que $\mathbb{Z}_+ \setminus A$ es finito, resulta que $\mathbb{Z}_+ \setminus B$ es finito. Por lo tanto, B es cofinito.
3. Supongamos que A es sindético. Luego, existe $l \in \mathbb{N}$ tal que para todo $m \in \mathbb{N}$, $\{m, m+1, \ldots, m+l\} \cap A \neq \emptyset$. Notemos que, $\{m, m+1, \ldots, m+l\} \cap A \subset \{m, m+1, \ldots, m+l\} \cap B$. De aquí, $\{m, m+1, \ldots, m+l\} \cap B \neq \emptyset$. Por lo tanto, B es sindético.
4. Supongamos que A es gruesamente sindético. Sea $n_0 \in \mathbb{N}$. Definamos $\mathcal{A} = \{i \in \mathbb{N} \colon \{i, i+1, \ldots, i+n_0\} \subset A\}$ y $\mathcal{B} = \{i \in \mathbb{N} \colon \{i, i+1, \ldots, i+n_0\} \subset B\}$. Afirmamos que $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$. En efecto; sea $i_0 \in \mathcal{A}$. Luego, $\{i_0, i_0+1, \ldots, i_0+n_0\} \subset A \subset B$. De aquí, $\{i_0, i_0+1, \ldots, i_0+n_0\} \subset B$. Así, $i_0 \in \mathcal{B}$. Esto implica que $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$. Veamos que $\mathcal{B}$ es sindético. Por hipótesis, se tiene que $\mathcal{A}$ es sindético y $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$, por el punto 3 de esta proposición resulta que $\mathcal{B}$ es sindético. Por lo tanto, B es gruesamente sindético. ■

Es natural preguntarse si existen relaciones entre los conceptos dados en la Definición 1.1, en la Proposición 1.4, se muestran algunas de ellas. Una prueba para dicho resultado puede verificarse en [18, Proposiciones 3.1.10, 3.1.11, 3.1.12, 3.1.14].

Proposición 1.4. Sean $A, B \subset \mathbb{Z}_+$. Los siguientes enunciados son verdaderos:

1. Si A es cofinito, entonces A es grueso.
2. Si A es cofinito, entonces A es gruesamente sindético.
3. Si A es sindético y B es grueso, entonces $A \cap B \neq \emptyset$.
4. Si A y B son gruesamente sindético, entonces $A \cap B$ es gruesamente sindético.

En la Proposición 1.5 mostramos la relación entre un conjunto cofinito y un conjunto sindético.

Proposición 1.5. Sea $A \subset \mathbb{Z}_+$. Si A es cofinito, entonces A es sindético.

Demostración. Supongamos que A es cofinito. Luego, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $k = |\mathbb{Z}_+ \setminus A|$. Sea $m \in \mathbb{N}$, notemos que $\{z_m, z_{m+1}, \ldots, z_{m+k}\} \not\subset \mathbb{Z}_+ \setminus A$, con $z_i \in \mathbb{Z}_+$, pues $|\{z_m, z_{m+1}, \ldots, z_{m+k}\}| = k+1$. Luego, existe $i_0 \in \{0, \ldots, k\}$ tal que $z_{i_0} \in A$. Así, $\{z_m, z_{m+1}, \ldots, z_{m+k}\} \cap A \neq \emptyset$. Por lo tanto, A es sindético. ■

Para poder dar conceptos y resultados en los próximos capítulos también es necesario recordar las definiciones de límite inferior y límite superior de una sucesión de números reales.

Definición 1.6. Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión acotada en $\mathbb{R}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, se definen: $\underline{x}_n = \inf\{x_i : i \geq n\}$ y $\overline{x}_n = \sup\{x_i : i \geq n\}$. El *límite inferior* y el *límite superior* de la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ se denotan y definen, respectivamente, como:

$$\liminf_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \underline{x}_n \quad \text{y} \quad \limsup_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \overline{x}_n.$$

Observemos que los límites dados en la Definición 1.6, existen ya que la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada. Luego, $\underline{x}_n$ y $\overline{x}_n$ son acotados. Además, $\{\overline{x}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión creciente y $\{\underline{x}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión decreciente, con esto resulta que, dada una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ acotada en $\mathbb{R}$ se tiene que

$$\liminf_{n\to\infty} x_n = \sup_{n\geq 0} \underline{x}_n = \sup_{n\geq 0} \inf_{k\geq n} x_k \quad \text{y} \quad \limsup_{n\to\infty} x_n = \inf_{n\geq 0} \sup_{k\geq n} x_k.$$

Definición 1.7. Sea $A \subset \mathbb{Z}_+$ se define y denota la *densidad superior* y la *densidad inferior* de A como:

$$\overline{\mathcal{D}(A)} = \limsup \frac{1}{n} |A \cap \{0, 1, \ldots, n-1\}|$$

y

$$\underline{\mathcal{D}(A)} = \liminf \frac{1}{n} |A \cap \{0, 1, \ldots, n-1\}|,$$

respectivamente.

Si existe el número $\mathcal{D}(A)$ tal que $\overline{\mathcal{D}(A)} = \underline{\mathcal{D}(A)} = \mathcal{D}(A)$, entonces el conjunto A tiene densidad $\mathcal{D}(A)$.

Proposición 1.8. Sea $A \subset \mathbb{Z}_+$. Si A es cofinito, entonces $\overline{\mathcal{D}(A)} = 1$.

Demostración. Sean $k = |\mathbb{Z}_+ \setminus A|$ y $N = \max(\mathbb{Z}_+ \setminus A) + 2$. Para $n \geq N$ se tiene que

$$\frac{1}{n} |A \cap \{0, 1, \ldots, n-1\}| = \frac{1}{n}(n-k).$$

De donde,

$$\begin{aligned}
\overline{\mathcal{D}(A)} &= \limsup \frac{1}{n} |A \cap \{0, 1, \ldots, n-1\}| \\
&= \limsup \frac{1}{n}(n-k) \\
&= 1 - \limsup \frac{k}{n} = 1.
\end{aligned}$$

■

Terminamos esta sección recordando el concepto de función y otros conceptos relacionados con ésta. Conceptos bien conocidos pero necesarios para establecer la notación para algunas funciones en particular.

Definición 1.9. Sean X y Y conjuntos. Se define una *función* de X en Y como una correspondencia que asocia cada elemento de X un único elemento en Y y se denota como $f : X \to Y$. En tal caso, al conjunto X se le llama *dominio* de f y al conjunto Y se le conoce como *contradominio* de f.

Definición 1.10. Sean X y Y conjuntos y $f : X \to Y$ una función. Dado $A \subset X$, se denota y define la *imagen* de A bajo f como:

$$f(A) = \{y \in Y : y = f(x), \text{ para algún } x \in A\}.$$

Para cualquier $B \subset Y$, se denota y define la *preimagen* de B bajo f, como:

$$f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\}.$$

Ejemplo 1.11. Sea X un conjunto. La correspondencia $id_X : X \to X$ dada por $id_X(x) = x$, para cada $x \in X$, es una función de X en X llamada la *función identidad* en X.

Ejemplo 1.12. Sean X, Y conjuntos, $f : X \to Y$ una función y $A \subset X$. Definimos la *restricción* de f a A, denotada por $f|_A : A \to Y$, como $f|_A(a) = f(a)$, para cada $a \in A$.

Definición 1.13. Sean X y Y conjuntos y $f : X \to Y$ una función. Se dice que f es:

1. *Inyectiva* si para cualesquiera $x, y \in X$ tales que $f(x) = f(y)$ implica que $x = y$.
2. *Sobreyectiva* si para todo $y \in Y$ existe $x \in X$ tal que $f(x) = y$.
3. *Biyectiva* si f es tanto inyectiva como sobreyectiva.

1.2. Espacios shift

En este apartado daremos una pequeña introducción a los espacios shift y algunas propiedades que se cumplen en dichos espacios, esto con el fin de poder mostrar algunos ejemplos.

Definición 1.14. Un *alfabeto* es un conjunto finito cuyos elementos son llamados *símbolos* o *letras*. Un alfabeto será denotado por la letra $\mathcal{A}$.

Definición 1.15. Sea $\mathcal{A}$ un alfabeto. Se dice que un *bloque* o una *palabra* sobre $\mathcal{A}$ es una sucesión finita de símbolos de $\mathcal{A}$, la cual denotaremos comúnmente por las letras u, v, w. Una palabra también puede ser vacía. A la *palabra vacía* la denotaremos como ε.

Definición 1.16. Sean $\mathcal{A}$ un alfabeto y w una palabra sobre $\mathcal{A}$. La *longitud* de w es la cantidad de términos de la sucesión y la denotamos como $|w|$. La longitud de la palabra vacía es 0.

Un bloque de longitud n se llama n*-bloque*. Para una palabra no vacía u el k-ésimo término de la sucesión, se denota como u_k. Entonces una palabra no vacía de largo n sobre $\mathcal{A}$ es denotado por $u_1u_2 \ldots u_n$, con $u_i \in \mathcal{A}$, para todo $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Dos palabras u, v sobre $\mathcal{A}$ son iguales si $|u| = |v|$ y $u_i = v_i$, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, |u|\}$.

El conjunto de todas las palabras de largo n sobre un alfabeto $\mathcal{A}$ se designa por A_n, y el conjunto de todas las palabras sobre $\mathcal{A}$ se designa por $\mathcal{A}^*$. Es decir, $\mathcal{A}^* = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{A}^n$.

Definición 1.17. Sean $\mathcal{A}$ un alfabeto y u, v dos palabras sobre $\mathcal{A}$. La *concatenación de* u y v es la nueva palabra que se obtiene al escribir los símbolos de u, y a continuación, los de v, sin ningún signo especial intermedio. La concatenación de u y v se escribe uv.

Notemos que, $uv \neq vu$. Es directo ver que $|uv| = |u| + |v|$. De manera análoga, la concatenación de tres o más bloques es la palabra que se obtiene de escribir los respectivos símbolos consecutivamente. La concatenación de un bloque u consigo mismo n veces, con $n \in \mathbb{Z}_+$, se designa por u^n. Es decir:

$$u^n = \begin{cases} \varepsilon, & \text{si } \ n = 0; \\ uu^{n-1}, & \text{si } \ n > 0. \end{cases}$$

Dada una palabra w sobre un alfabeto $\mathcal{A}$, denotamos por w^∞ a la concatenación de w consigo misma una infinidad de veces.

Definición 1.18. Sea $\mathcal{F}$ un conjunto de bloques sobre un alfabeto $\mathcal{A}$. Denotamos por $X_\mathcal{F}$ al subconjunto de $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}_+}$ formado por todos aquellos puntos en los que no ocurre ningún bloque de $\mathcal{F}$. Es decir,

$$X_\mathcal{F} = \{x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}_+} | \forall w \in \mathcal{F} : w \text{ no ocurre en } x\} = \{x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}_+} : \forall i, j \in \mathbb{Z}_+, x_{[i,j]} \notin \mathcal{F}\}.$$

Cabe mencionar que los bloques de $\mathcal{F}$ no necesariamente tienen que ser del mismo tamaño. Además este conjunto puede ser finito o infinito. Los elementos de $\mathcal{F}$ son llamados *palabras prohibidas*.

A continuación mencionamos algunos ejemplos para ilustrar las definiciones anteriores.

Ejemplo 1.19. Sea $\mathcal{A}$ un alfabeto.

1. Si $\mathcal{F}_1 = \emptyset$, entonces $X_{\mathcal{F}_1} = A^{\mathbb{Z}_+}$. En efecto, note que $x_{[i,j]} \notin \mathcal{F}_1$, para todo $i, j \in \mathbb{Z}_+$ y todo $x \in A^{\mathbb{Z}_+}$.

2. Si $\mathcal{F}_2 = \mathcal{A}$, entonces $X_{\mathcal{F}_2} = \emptyset$. En efecto, note que $x_{[0,0]} \in \mathcal{F}_2$, para todo $x \in A^{\mathbb{Z}_+}$.

Definición 1.20. Sea $\mathcal{A}$ un alfabeto. Un *espacio shift* X sobre $\mathcal{A}$ es un conjunto $X \subseteq \mathcal{A}^{\mathbb{Z}_+}$ tal que existe un $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}^*$ tal que $X = X_\mathcal{F}$.

A continuación mencionamos algunos ejemplos de espacios shift.

Ejemplo 1.21. Consideremos el alfabeto $\mathcal{A} = \{0, 1\}$.

1. Si $\mathcal{F} = \{\emptyset\}$ entonces $X_\mathcal{F} = \mathcal{A}^{\mathbb{Z}_+}$.

2. Si $\mathcal{F} = \{11\}$ entonces $X = X_\mathcal{F}$. El shift resultante es conocido como *shift áureo*.

De ahora en adelante vamos a considerar al alfabeto $\mathcal{A} = \{0, 1\}$. Cuando $\mathcal{F} = \{\emptyset\}$, el espacio shift obtenido es mejor conocido como el espacio de todas las sucesiones de ceros y unos. Al cual denotaremos como $X_\mathcal{F} = \Sigma_2$. A continuación definimos la función shift sobre este espacio.

Definición 1.22. La *función shift*, denotada por $\sigma : \Sigma_2 \to \Sigma_2$, esta definida como

$$\sigma(x_0 x_1 x_2 \ldots) = x_1 x_2 x_3 \ldots,$$

para cada $x_0 x_1 x_2 \ldots \in \Sigma_2$.

Dado $x \in \Sigma_2$. Denotaremos como $(\sigma(x))_n$ al n-ésimo término de la sucesión $\{\sigma(x)\}$.

1.3. Espacios métricos y funciones continuas

Para poder definir los espacios en los que estaremos trabajando recordaremos lo que es un espacio métrico y algunas propiedades que se satisfacen en estos espacios. Recordamos algunas métricas más usuales y con las cuales dotaremos a nuestros espacios. De igual manera mostramos resultados ya conocidos. Iniciamos esta sección con el siguiente concepto.

Definición 1.23. Sea X un conjunto. Una *métrica* en X es una función $d : X \times X \to \mathbb{R}$, que asocia a cada par ordenado $(x, y) \in X \times X$ un número real $d(x, y)$, llamado la distancia de x a y, de modo que para cualesquiera $x, y, z \in X$, se satisfacen las condiciones siguientes:

1. $d(x, x) = 0$.
2. Si $x \neq y$, entonces $d(x, y) > 0$.
3. $d(x, y) = d(y, x)$.
4. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Un *espacio métrico* es un par (X, d) donde X es un conjunto y d es una métrica en X.

De ahora en adelante, para referirnos al espacio métrico (X, d), escribiremos simplemente X, quedando sobreentendido que se considera con una métrica d, a menos que se especifique lo contrario.

A continuación mostramos un ejemplo de una métrica sobre el espacio Σ_2.

Ejemplo 1.24. Sea $d : \Sigma_2 \times \Sigma_2 \to \mathbb{R}$ la función dada por $d(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x_n - y_n|}{2^n}$, para cada $x, y \in \Sigma_2$. Se puede verificar que d es una métrica sobre Σ_2. Así, (Σ_2, d) es un espacio métrico.

Definición 1.25. Sean X un espacio métrico y $A \subset X$, con A acotado. Se define el *diámetro de A*, denotado como $\text{diám}(A) = \sup\{d(x, y) : x, y \in A\}$.

Definición 1.26. Sean X un espacio métrico, $x \in X$ y $\delta > 0$. Al conjunto

$$B(x, \delta) = \{y \in X : d(x, y) < \delta\}$$

se le llama *bola abierta* con centro en x y radio δ. Decimos que $U \subset X$ es una *vecindad* de x si existe $\delta > 0$ tal que $B(x, \delta) \subset U$.

Definición 1.27. Sean X un espacio métrico, $A \subset X$ y $x \in X$.

1. x es *punto interior de A*, si existe $r > 0$, tal que $B(x, r) \subset A$. Al conjunto

   $$\text{int}(A) = \{x \in A : x \text{ es un punto interior de } A\},$$

   se le llama *interior* del conjunto A.

2. x es *punto clausura de A*, si para todo $r > 0$, se tiene que $B(x, r) \cap A \neq \emptyset$. Al conjunto

   $$\overline{A} = \{x \in X : x \text{ es un punto clausura de } A\},$$

   se le llama *clausura* del conjunto A.

3. A es un *conjunto abierto* en X, si para todo $x \in A$ se tiene que $x \in \operatorname{int}(A)$.

4. A es un *conjunto cerrado* en X si $X \setminus A$ es abierto en X.

Dado a que estaremos trabajando con espacios compactos es necesario recordar este concepto, a continuación recordamos algunas definiciones necesarias para definir dichos espacios.

Definición 1.28. Sean X un espacio métrico, $A \subset X$ y $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(X)$. Se dice que $\mathcal{C}$ es una *cubierta* de A, si $A \subset \bigcup\{B : B \in \mathcal{C}\}$. Decimos que $\mathcal{C}$ es una *cubierta abierta* de A, si $\mathcal{C}$ es una cubierta de A y todos los elementos de $\mathcal{C}$ son subconjuntos abiertos de X. Una *subcubierta* de una cubierta $\mathcal{C}$ de A, es una colección $\mathcal{S}$ de elementos de $\mathcal{C}$ que es también una cubierta de A.

Definición 1.29. Sean X un espacio métrico y $A \subset X$. Decimos que A es *compacto* si toda cubierta abierta de A tiene una subcubierta finita para A.

Ejemplo 1.30. Consideremos el espacio métrico definido en el Ejemplo 1.24. Se puede probar que Σ_2 es un espacio compacto. Así, (Σ_2, d) es un espacio métrico compacto.

Definición 1.31. Sean X un espacio métrico completo y $A \subset X$. Se dice que A es:

1. *Denso* en X si la clausura de A es X, es decir, $\overline{A} = X$.

2. *Denso en ninguna parte* en X si el interior de la clausura de A es vacío, es decir, $\operatorname{int}(\overline{A}) = \emptyset$.

3. *De primera categoría* en X si A es la unión numerable de conjuntos densos en ninguna parte en X.

4. *Residual* si $X \setminus A$ es de primera categoría en X.

Observación 1.32. Sean X un espacio métrico y $A \subset X$. Se puede probar que A es denso en X si y sólo si $A \cap U \neq \emptyset$, para cada subconjunto abierto no vacío U de X.

Definición 1.33. Sea X un espacio métrico. Se dice que X es *disconexo* si existen subconjuntos abiertos no vacíos U y V en X tales que $X = U \cup V$ y $U \cap V = \emptyset$. Decimos que X es *conexo* si X no es disconexo.

A continuación recordamos algunos conceptos, relacionados con funciones continuas sobre espacios métricos, dichos conceptos son bien conocidos.

Definición 1.34. Sean X, Y espacios métricos, $f : X \to Y$ una función y $p \in X$. Se dice que f es *continua en* p, si para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para cada $x \in X$, si $d(x,p) < \delta$, entonces $d(f(x), f(p)) < \varepsilon$. Decimos que f *es continua*, si f es continua en p, para toda $p \in X$.

Ejemplo 1.35. La función shift $\sigma : \Sigma_2 \to \Sigma_2$, definida en el Ejemplo 1.22, es continua.
En efecto, sean $\varepsilon > 0$ y $x \in \Sigma_2$. Pongamos $\delta = \varepsilon$ y sea $y \in \Sigma_2$ tal que $d(x, y) < \delta$. Notemos

$$d(\sigma(x), \sigma(y)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|(\sigma(x))_n - (\sigma(y))_n|}{2^n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n - y_n|}{2^n} \leq d(x, y) < \delta = \varepsilon.$$

Por lo tanto, σ es continua.

Definición 1.36. Sean X, Y espacios métricos y $f : X \to Y$ una función. Decimos que f es *uniformemente continua* si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para todo $x, y \in X$ tal que si $d(x, y) < \delta$, entonces $d(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

A continuación recordamos un resultado, Teorema 1.37, que nos será útil para la prueba del Teorema 2.50. Una prueba para dicho resultado la puede revisar en [15, Teorema 4].

Teorema 1.37. Sean X, Y espacios métricos y $f : X \to Y$ una función continua. Si X es compacto, entonces f es uniformemente continua.

Definición 1.38. Sean X, Y conjuntos y $f : X \to Y$ una función. Decimos que f es un *homeomorfismo* si f es biyectiva, f es continua y f^{-1} es continua.

En el Teorema 1.39, mencionamos equivalencias de una función continua, muy útiles para demostrar resultados en capítulos posteriores. Una demostración de dicho resultado la puede consultar en [9, pág. 79].

Teorema 1.39. Sean X y Y espacios métricos y $f : X \to Y$ una función. Las condiciones siguientes son equivalentes:

1. f es continua.
2. Para cualquier abierto $U \subset Y$, $f^{-1}(U)$ es abierto en X.
3. Para cualquier cerrado $F \subset Y$, $f^{-1}(F)$ es cerrado en X.
4. Para cualquier $U \subset X$, $f(\overline{U}) \subset \overline{(f(U))}$.
5. Para cualquier $B \subset Y$, $\overline{(f^{-1}(B))} \subset f^{-1}(\overline{B})$.

A continuación, recordamos conceptos necesarios para definir lo que es una gráfica finita, ya que nos va a permitir mostrar un resultado sobre este espacio.

Definición 1.40. Un *continuo* es un espacio métrico, compacto, conexo y con más de un punto.

A continuación mostramos un ejemplo de un continuo.

Definición 1.41. Un *arco* es un continuo X homeomorfo al intervalo $[0, 1]$.

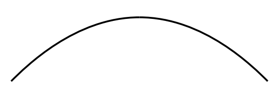

Figura 1.1: Arco.

Definición 1.42. Una *gráfica finita* es un continuo que puede escribirse como la unión de una cantidad finita de arcos, tales que cualesquiera dos de ellos son ajenos o bien se intersectan en uno o en sus dos puntos extremos. Un *árbol* es una gráfica finita que no contiene curvas cerradas simples.

En la Figura 1.2, se muestra la representación gráfica de un árbol.

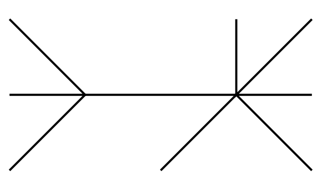

Figura 1.2: Árbol.

Terminamos esta sección mostrando algunos ejemplos de gráficas finitas.

Ejemplo 1.43. Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq 3$. Un *n-odo simple* es una gráfica finita que es una unión de n-arcos que se intersectan dos a dos en un punto $\{p\}$, el cual es llamado el corazón de T_n. Además, p es un punto extremo de cada uno de los n-arcos. En el caso de que $n = 3$, diremos que T_3 es un *triodo simple*.

En la Figura 1.3, se representa un triodo simple con corazón p y puntos extremos e_1, e_2 y e_3.

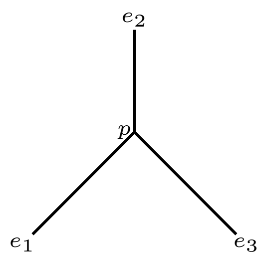

Figura 1.3: Triodo simple.

Ejemplo 1.44. Sea $R = S^1 \cup \{[1, 2] \times \{0\}\}$. El espacio R es una gráfica finita y cualquier espacio homeomorfo a él se le llama *paleta*.

Ejemplo 1.45. Sea $\Gamma = S^1 \cup ([-1, 1] \times \{0\})$. El espacio Γ es una gráfica finita y cualquier espacio homeomorfo a él se llama *theta*.

1.4. Iteración de funciones. Sistemas dinámicos

Sean X un espacio métrico compacto, $f : X \to X$ una función continua y $k \in \mathbb{Z}_+$. La *k-ésima iteración* de f, se define como la composición de f consigo misma k veces y se denota por f^k, esto es:

$$f^k = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{k \text{ veces}},$$

donde f^0 es la función identidad en X.

El siguiente concepto es la definición abstracta de sistema dinámico.

Definición 1.46. Sean X un espacio métrico compacto y $(G, *)$ un semi-grupo topológico [1] con elemento neutro. Un *sistema dinámico* es una función continua $\phi : G \times X \to X$ que satisface lo siguiente:

1. $\phi(e, x) = x$, para cada $x \in X$, donde e es el elemento neutro de G.

2. $\phi(s, \phi(t, x)) = \phi(s * t, x)$, para cada $s, t \in G$ y para cada $x \in X$.

Generalmente, un sistema dinámico se denota como (G, X, ϕ), donde al espacio X se le llama *espacio fase, de configuraciones* o *de estados*; al semi-grupo G se le llama *conjunto de parámetros* y a la función ϕ se le conoce como *regla de correspondencia* o *ley determinista*.

[1] Un semi-grupo topológico es un semi-grupo con una topología.

Dependiendo del semi-grupo en el cual se trabaje, los sistemas dinámicos se clasifican en dos clases. Si $G = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ al sistema dinámico se le conoce como sistema dinámico continuo, y si $G = \mathbb{Z}_+$ al sistema dinámico se le conoce como sistema dinámico discreto. En este trabajo sólo nos enfocamos en los sistemas dinámicos discretos.

Proposición 1.47. Sean X un espacio métrico compacto, $f : X \to X$ una función continua y $\phi : \mathbb{Z}_+ \times X \to X$ la función definida por $\phi(n, x) = f^n(x)$, para todo $n \in \mathbb{Z}_+$ y para todo $x \in X$. Se tiene que $(\mathbb{Z}_+, X, \phi)$ es un sistema dinámico discreto.

Demostración. Primero veamos que ϕ es continua. Por el Teorema 1.39, basta verificar que para todo subconjunto abierto U en X, se cumple que $\phi^{-1}(U)$ es un subconjunto abierto en $\mathbb{Z}_+ \times X$. Sea U un subconjunto abierto en X. Notemos que:

$$\begin{aligned}
\phi^{-1}(U) &= \{(n, x) : \phi(n, x) \in U\} \\
&= \{(n, x) : f^n(x) \in U\} \\
&= \bigcup_{n \in \mathbb{Z}_+} \{(n, x) : f^n(x) \in U\} \\
&= \bigcup_{n \in \mathbb{Z}_+} \left(\{n\} \times f^{-n}(U)\right).
\end{aligned}$$

Por otro lado, $\{n\}$ es un subconjunto abierto en $\mathbb{Z}_+$ y, por la continuidad de f, del inciso (2) del Teorema 1.59, se deduce que $f^{-n}(U)$ es abierto en X. Luego, $\{n\} \times f^{-n}(U)$ es un abierto en $\mathbb{Z}_+ \times X$, para cada $n \in \mathbb{Z}_+$. Así, $\phi^{-1}(U)$ es un abierto en $\mathbb{Z}_+ \times X$. Por lo tanto, ϕ es continua. Veamos ahora que ϕ cumple los incisos (1) y (2) de la Definición 1.46. Notemos que:

$$\phi(0, x) = f^0(x) = x.$$

Además,

$$\begin{aligned}
\phi(n, \phi(m, x)) &= f^n(\phi(m, x)) \\
&= f^n(f^m(x)) \\
&= f^{n+m}(x) \\
&= \phi(n + m, x).
\end{aligned}$$

Con todo, se obtiene que $(\mathbb{Z}_+, X, \phi)$ es un sistema dinámico discreto. ■

Así, el sistema dinámico $(\mathbb{Z}_+, X, \phi)$, definido en la Proposición 1.47, está determinado completamente por el espacio X y la función continua f. En esta tesis, vamos a considerar sistemas dinámicos construidos de esta forma. A este sistema dinámico discreto lo denotamos como (X, f) y para referirnos a él decimos solamente sistema dinámico.

Definición 1.48. Sean (X, f) un sistema dinámico y $A \subset X$. Decimos que $(A, f|_A)$ es un *subsistema* de (X, f) si A es compacto y $f(A) \subset A$.

A continuación presentamos algunos ejemplos de sistemas dinámicos que aparecen frecuentemente en este trabajo.

Ejemplo 1.49. Consideremos el espacio métrico definido en el Ejemplo 1.24. Del Ejemplo 1.30 y del Ejemplo 1.22, se obtiene que (Σ_2, σ) es un sistema dinámico.

Ejemplo 1.50. Consideremos el intervalo cerrado $[0, 1]$ con la topología del subespacio de la recta real y la función $T : [0, 1] \to [0, 1]$, definida por:

$$T(x) = \begin{cases} 2x, & \text{si } \; x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]; \\ \\ 2 - 2x, & \text{si } \; x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right], \end{cases}$$

para cada $x \in [0, 1]$. Puesto que $[0, 1]$ es un subconjunto compacto de $\mathbb{R}$ y T es continua se obtiene que $([0, 1], T)$ es un sistema dinámico. La función T es mejor conocida como la *función Tienda*.

De manera similar se obtiene el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.51. Consideremos el intervalo cerrado $[0, 1]$ con la topología del subespacio de la recta real y la función $L : [0, 1] \to [0, 1]$, definida como:

$$L(x) = 4x(1 - x), \text{ para cada } x \in [0, 1].$$

Note que el intervalo $[0, 1]$ es compacto. Además, L es continua. Así, $([0, 1], L)$ es un sistema dinámico. La función L es conocida como la *función logística*.

Ejemplo 1.52. Consideremos la bola unitaria $S^1 = \{e^{2\pi i\theta} : \theta \in [0, 1]\}$ con la topología del subespacio de $\mathbb{R}^2$ y la función $R_\alpha : S^1 \to S^1$, dada por $R_\alpha(z) = e^{2\pi i\alpha}z$, para cada $z \in S^1$ y $\alpha \in \mathbb{I}$. Se puede verificar que S^1 es compacto y R_α es continua. Así, se tiene que (S^1, R_α) es un sistema dinámico. A la función R se le conoce *función rotación irracional*.

En el estudio de los sistemas dinámicos nos enfocamos en estudiar las órbitas de los puntos, ya que son éstas las que nos dan información de la dinámica en el espacio a través del tiempo. A continuación, damos la definición de órbita de un punto, así como también de otros puntos particulares que nos ayudan a analizar propiedades de dichas órbitas y por lo tanto de la dinámica en nuestro sistema.

Definición 1.53. Sean (X, f) un sistema dinámico y $x \in X$. Se define la *órbita* de x bajo f, denotada por $\mathcal{O}(x, f)$, como el conjunto:

$$\mathcal{O}(x, f) = \{f^n(x) : n \in \mathbb{Z}_+\} = \{x, f(x), f^2(x), f^3(x), \ldots\}.$$

Definición 1.54. Sean (X, f) un sistema dinámico y $x \in X$. Decimos que x es un:

1. *Punto fijo* si $f(x) = x$.
2. *Punto periódico* si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(x) = x$, al $\min\{n \in \mathbb{N} : f^n(x) = x\}$ se le llama *periodo* de x. Denotamos como $Per(f)$ al conjunto de puntos periódicos de f.
3. *Casi-periódico* si para cada vecindad U de x, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$\{f^l(x), f^{l+1}(x), \ldots, f^{l+k}(x)\} \cap U \neq \emptyset,$$

para todo $l \in \mathbb{N}$.

Una vez mencionados estos conceptos, pasamos a definir subconjuntos de los enteros no negativos que nos serán útiles para caracterizar a algunos sistemas dinámicos, dependiendo del comportamiento de su órbita. Así, como también mencionamos observaciones que se siguen de dicha definición.

Definición 1.55. Sean (X, f) un sistema dinámico, $x \in X, \delta > 0, U$ y V subconjuntos abiertos no vacíos de X. Se definen los siguientes conjuntos:

1. $N_f(x, U) = \{n \in \mathbb{Z}_+ : f^n(x) \in U\}$.
2. $N_f(U, V) = \{n \in \mathbb{Z}_+ : f^n(U) \cap V \neq \emptyset\}$.
3. $N_f(U, \delta) = \{n \in \mathbb{Z}_+ :$ existen $x, y \in U$ tales que $d(f^n(x), f^n(y)) > \delta\}$.

La Observación 1.56, se obtiene inmediatamente de la Definición 1.55.

Observación 1.56. Sean (X, f) un sistema dinámico, U, U_1, V y V_1, subconjuntos abiertos no vacíos de X y $\delta > 0$.

1. Si $U \subset V$, entonces $N_f(U, \delta) \subset N_f(V, \delta)$.
2. Si $U \subset U_1$ y $V \subset V_1$, entonces $N_f(U, V) \subset N_f(U_1, V_1)$.

Observación 1.57. Dado (X, f) un sistema dinámico se tiene que $N_f(U, \delta) = \{n \in \mathbb{Z}_+ : \text{diám}(f^n(U)) > \delta\}$, para todo $U \subset X$ abierto no vacío.

Dado un sistema dinámico (X, f), hay propiedades que satisface la función $f : X \to X$ cuando se habla de imágenes directas e inversas de un subconjunto del espacio. A continuación mostramos que algunas de esas propiedades también se cumplen mientras iteramos la función f, es decir, se siguen cumpliendo mientras componemos la función consigo misma n veces.

Proposición 1.58. Sean (X, f) un sistema dinámico, $n, m \in \mathbb{N}$ y $U, V \subset X$. Se cumple que:

1. $f^{-(n+m)}(U) = f^{-n}(f^{-m}(U))$.
2. Si $U \subset f^{-n}(V)$, entonces $f^n(U) \subset V$.

Demostración. (1) Verifiquemos primero que $f^{-(n+m)}(U) \subset f^{-n}(f^{-m}(U))$. Para eso, sea $x \in f^{-(n+m)}(U)$. Luego, $f^{n+m}(x) \in U$. De donde, $f^{m+n}(x) \in U$. Dado que $f^{m+n}(x) = f^m(f^n(x))$, obtenemos que $f^m(f^n(x)) \in U$. Así, $f^n(x) \in f^{-m}(U)$. Luego, $x \in f^{-n}(f^{-m}(U))$. Por lo tanto, $f^{-(n+m)}(U) \subset f^{-n}(f^{-m}(U))$.
Ahora veamos que $f^{-n}(f^{-m}(U)) \subset f^{-(n+m)}(U)$. Sea $x \in f^{-n}(f^{-m}(U))$. Luego, $f^n(x) \in f^{-m}(U)$. Esto implica que $f^m(f^n(x)) \in U$. Así, $f^{m+n}(x) \in U$. De donde, $x \in f^{-(m+n)}(U)$.
(2) Supongamos que $U \subset f^{-n}(V)$, veamos que $f^n(U) \subset V$. Para esto, sea $x \in f^n(U)$. Luego, existe $y \in U$ tal que $f^n(y) = x$. Por otro lado, como $y \in U$, por el supuesto, $y \in f^{-n}(V)$. Así, $x = f^n(y) \in V$. De donde, $x \in V$. Por lo tanto, $f^n(U) \subset V$. ■

Teorema 1.59. Sean (X, f) un sistema dinámico y $n \in \mathbb{N}$. Las condiciones siguientes son equivalentes:

1. f^n es continua.
2. Para cualquier abierto $U \subset X$, $f^{-n}(U)$ es abierto en X.
3. Para cualquier cerrado $F \subset Y$, $f^{-n}(F)$ es cerrado en X.
4. Para cualquier $A \subset X$, $f^n(\overline{A}) \subset \overline{f^n(A)}$.
5. Para cualquier $A \subset X$, $\overline{f^{-n}(A)} \subset f^{-n}(\overline{A})$.

Observación 1.60. Sean (X, f) un sistema dinámico, $A \subset X$ y $n \in \mathbb{N}$. Se satisface lo siguiente:

1. $f^n(f^{-n}(A)) \subset A$.
2. $A \subset f^{-n}(f^n(A))$.

El resultado que presentamos en la Proposición 1.61, nos será útil para probar la Proposición 4.9.

Proposición 1.61. Sean (X, f) un sistema dinámico, U y V subconjuntos no vacíos de X y $n \in \mathbb{N}$. Se cumple que $U \cap f^{-n}(V) \neq \emptyset$ si y sólo si $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$.

Demostración. Supongamos que $U \cap f^{-n}(V) \neq \emptyset$. Luego, existe $x \in X$ tal que $x \in U$ y $x \in f^{-n}(V)$. Así, $f^n(x) \in f^n(U)$ y por el punto 1 de la Observación 1.60, se tiene que $f^n(x) \in V$. Por lo tanto, $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$.
Ahora, supongamos que $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$. Luego, existe $y \in X$ tal que $y \in f^n(U)$ y $y \in V$. Es decir, existe $x \in U$ tal que $f^n(x) = y$. Luego, $f^n(x) \in V$, que por el punto 2 de la Observación 1.60, se tiene que $x \in f^{-n}(V)$. Por lo tanto, $U \cap f^{-n}(V) \neq \emptyset$. ■

Para un mejor estudio de los sistemas dinámicos, se han realizado clasificaciones de éstos dependiendo del comportamiento en su dinámica. Una primera clasificación de los sistemas dinámicos discretos que presentamos para nuestros fines, esta dada en la Definición 1.62, propiedades que ya han tenido en gran estudio actualmente, por ejemplo vea [13],[20] y [25]. Cabe mencionar que la propiedad de *compacto transitivo* es una de las propiedades introducidas recientemente, vea [13].

Definición 1.62. Sea (X, f) un sistema dinámico. Se dice que (X, f) es:

1. *Mezclante* si para cualesquiera U, V subconjuntos abiertos no vacíos en X, existe $n \in \mathbb{Z}_+$ tal que $U \cap f^{-k}(V) \neq \emptyset$, para todo $k \geq n$.

2. *Débilmente mezclante* si para cualesquiera U_1, U_2, V_1, V_2 subconjuntos abiertos no vacíos de X, existe $n \in \mathbb{Z}_+$ tal que $U \cap f^{-1}(V_1) \neq \emptyset$ y $U_2 \cap f^{-n}(V_2) \neq \emptyset$.

3. *Transitivo* si para cualesquiera dos subconjuntos U, V abiertos no vacíos de X existe $n \in \mathbb{Z}_+$ tal que $U \cap f^{-n}(V) \neq \emptyset$.

4. *M-sistema* si el sistema es transitivo y el conjunto de los puntos casi-periódicos es denso en X.

5. *Minimal* si no existe un subconjunto propio A de X el cuál es no vacío, cerrado y $f(A) \subset A$.

6. *Compacto transitivo* si para cada $x \in X$, existe $z \in X$ tal que $N_f(x, G) \cap N_f(U, V) \neq \emptyset$, para cada vecindad G de z y para cualesquiera subconjuntos abiertos no vacíos U, V de X.

Definición 1.63. Sean (X, f) un sistema dinámico y $x \in X$. Decimos que x es un *punto minimal* de X, si $\left(\overline{\mathcal{O}(x, f)}, f\right)$ es un subsistema minimal de (X, f). Denotamos por $\mathcal{AP}(f)$ al conjunto de todos los puntos minimales de X.

Una prueba para el Lema 1.64, la puede encontrar en [18, Lema 3.3.5].

Lema 1.64. Sea (X, f) un sistema dinámico. Se cumple que (X, f) es mezclante si y sólo si para cada par de subconjuntos U, V abiertos no vacíos de X, se tiene que $N_f(U, V)$ es cofinito.

En la Proposición 1.65 y la Proposición 1.66, se muestran algunas propiedades, relacionadas con la Definición 1.62, que presenta en su dinámica la función tienda y la función logística, respectivamente. Para más detalles puede revisar [10], [18] y [25].

Proposición 1.65. Consideremos el sistema dinámico definido en el Ejemplo 1.50. El sistema dinámico $([0, 1], T)$ es mezclante, débilmente mezclante, transitivo, compacto transitivo y el conjunto $Per(T)$ es denso en X.

Proposición 1.66. Consideremos el sistema dinámico definido en el Ejemplo 1.51. El sistema dinámico $([0, 1], L)$ es mezclante, débilmente mezclante, transitivo, compacto transitivo y el conjunto $Per(L)$ es denso en X.

Algunas de las propiedades que presenta la función rotación irracional relacionadas con la Definición 1.62 se mencionan la siguiente proposición, dicho resultado lo puede consultar en [25].

Proposición 1.67. El sistema dinámico (S^1, R_α) es transitivo y minimal.

Terminamos esta sección mencionando la Proposición 1.68, donde se muestran algunas relaciones que se tienen entre este tipo de sistemas. Una prueba para dicho resultado la puede revisar en [18, Teorema 3.3.12].

Proposición 1.68. Sea (X, f) un sistema dinámico. Los siguientes enunciados son verdaderos:

1. Si (X, f) es mezclante, entonces (X, f) es débilmente mezclante.
2. Si (X, f) es débilmente mezclante, entonces (X, f) es compacto transitivo.
3. Si (X, f) es compacto transitivo, entonces (X, f) es transitivo.
4. Si (X, f) es M-sistema, entonces (X, f) es transitivo.

En base a la Proposición 1.68, se obtiene el siguiente diagrama, en el cual se representa de manera gráfica algunas relaciones que se tienen entre los sistemas dinámicos dados en la Definición 1.62.

$$\begin{tikzcd}
\text{Mezclante} \arrow[d] & \\
\text{Débilmente mezclante} \arrow[d] & \\
\text{Compacto transitivo} \arrow[d] & \\
\text{Transitivo} & \text{M-sistema} \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Figura 1.4: Relaciones entre sistemas dinámicos discretos.

Capítulo 2

Sensibilidad en sistemas dinámicos

En este capítulo mencionaremos algunas propiedades presentadas en los sistemas dinámicos discretos relacionadas con la sensibilidad, daremos algunas relaciones que se tienen entre estas propiedades así como también algunos ejemplos más representativos de sistemas dinámicos. Terminamos mencionando tipos de sensibilidad con respecto a las familias de Furstenberg, de igual manera algunas relaciones que se tienen entre estas propiedades y que nos son de gran interés.

2.1. Sensibilidad

Saber si la dinámica de un sistema dinámico presenta *sensibilidad* es muy importante para determinar si existe *caos* en dicho sistema. Empezamos mencionando clasificaciones que se han realizado en los sistemas dinámicos relacionados con la propiedad de sensibilidad.

Definición 2.1. Sea (X, f) un sistema dinámico. Se dice que el sistema dinámico (X, f) es:

1. *Sensible* si existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo $x \in X$ y para toda $\delta > 0$, existen $y \in B(x, \delta)$ y $n \in \mathbb{Z}_+$ tales que $d(f^n(x), f^n(y)) > \varepsilon$. A ε se le conoce como constante de sensibilidad.

2. *Cofinitamente sensible* si existe $\delta \in \mathbb{R}_+$ tal que para cada abierto U en X, se tiene que $N_f(U, \delta)$ es cofinito.

3. *Gruesamente sensible* si existe $\delta \in \mathbb{R}_+$ tal que para cada abierto U en X, se tiene que $N_f(U, \delta)$ es grueso.

4. *Sindéticamente sensible* si existe $\delta \in \mathbb{R}_+$ tal que para cada abierto U en X, se tiene que $N_f(U, \delta)$ es sindético.

5. *Gruesamente sindéticamente sensible (TSS)* si existe $\delta \in \mathbb{R}_+$ tal que para cada abierto U en X, se tiene que $N_f(U, \delta)$ es gruesamente sindético.

6. *Multisensible* si existe $\varepsilon > 0$, tal que para cualquier $k \in \mathbb{N}$ y para cualesquiera $U_1, U_2, \ldots, U_k$ subconjuntos abiertos no vacíos en X, $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{k}\{n \in \mathbb{Z}_+ : \text{diám}(f^n(U_i)) > \varepsilon \neq \emptyset\}$, es decir, existe $n \in \mathbb{Z}_+$ tal que $\text{diám}(f^n(U_i)) > \varepsilon$, para todo $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$. A ε se le conoce como constante de multisensibilidad.

7. *Infinitamente sensible* si existe $\varepsilon > 0$ tal que para cualquier $x \in X$ y cualquier $\delta > 0$, existe $y \in B(x, \delta)$ tal que $\limsup_{n\to\infty} d(f^n(x), f^n(y)) \geq \varepsilon$.

8. *Colectivamente sensible* si existe $\varepsilon > 0$ tal que para cualesquiera puntos $x_1, \ldots, x_n \in X$ y $\delta > 0$, existen n puntos distintos $y_1, y_2, \ldots, y_n \in X$ y $k \in \mathbb{Z}_+$ tales que satisfacen las siguientes condiciones:

   (i) $d(x_i, y_i) < \delta$ para todo $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$;

   (ii) Existe $i_0 \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tal que $d(f^k(x_i), f^k(y_{i_0})) > \varepsilon$ para todo $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ o $d(f^k(x_{i_0}), f^k(y_i)) > \varepsilon$ para todo $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Una vez mencionadas estas clasificaciones, pasamos a dar un ejemplo de un sistema dinámico que presenta sensibilidad en su dinámica.

Ejemplo 2.2. El sistema dinámico (Σ_2, σ), definido en el Ejemplo 1.49, es sensible.
En efecto: Sea $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Sean $x = x_0x_1x_2\ldots \in \Sigma_2$ y $\delta > 0$. Veamos que (Σ_2, σ) es sensible con ε constante de sensibilidad. Sea $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^N} < \delta.$$

Consideremos a $y = x_0x_1\ldots x_Ny_{N+1}y_{N+2}\ldots$, con $y_{N+1} \neq x_{N+1}$. Notemos que

$$d(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x_n - y_n|}{2^n} = \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{|x_n - y_n|}{2^n} < \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^N} < \delta.$$

Además, $\sigma^{N+1}(x_0) \neq \sigma^{N+1}(y_0)$. Así,

$$d(\sigma^{N+1}(x), \sigma^{N+1}(y)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|(\sigma^{N+1}(x))_n - (\sigma^{N+1}(y))_n|}{2^n} \geq \frac{|\sigma^{N+1}(x_0) - \sigma^{N+1}(y_0)|}{2^0} = 1 > \frac{1}{2} = \varepsilon.$$

Por lo tanto, (Σ_2, σ) es sensible con $\frac{1}{2}$ constante de sensibilidad.

A continuación mostramos un ejemplo de un sistema dinámico que no es sensible.

Ejemplo 2.3. Consideremos el sistema dinámica (S^1, R_α), definido en el Ejemplo 1.52. Se tiene que el sistema dinámico (S^1, R_α) no es sensible. En efecto;
Sean $\varepsilon > 0$ y $x \in S^1$. Sea $y \in B(x, \varepsilon)$. Notemos que para todo $n \in \mathbb{Z}_+$:

$$\begin{aligned} d(R_\alpha^n(x), R_\alpha^n(y)) &= |R_\alpha(x) - R_\alpha(y)| \\ &= |e^{2\pi i\alpha}x - e^{2\pi i\alpha}y| \\ &= |e^{2\pi i\alpha}||x - y| \\ &= |x - y| = d(x, y) \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Una prueba para la Proposición 2.4 la puede encontrar en [22, Proposición 1].

Proposición 2.4. Sea (X, f) un sistema dinámico. Si (X, f) es sensible y el conjunto de puntos periódicos de f es denso en X, entonces (X, f) es sindéticamente sensible.

La Proposición 2.5, nos muestra algunas de las tantas propiedades que se presentan en la dinámica de la función tienda en el intervalo $[0,1]$. Una prueba para dicho resultado la puede verificar en [18, Ejemplo 4.3.3].

Proposición 2.5. Consideremos el sistema dinámico definido en el Ejemplo 1.50. El sistema dinámico $([0,1],T)$ es sensible, cofinitamente sensible, gruesamente sensible, tickly sindéticamente sensible y multisensible.

Como consecuencia de la Proposición 1.65 y de la Proposición 2.4 se obtiene otra propiedad de la función tienda, resultado que enunciamos a continuación.

Proposición 2.6. Consideremos el sistema dinámico definido en el Ejemplo 1.50. El sistema dinámico $([0,1],T)$ es sindéticamente sensible.

La función logística presenta una dinámica similar a la dinámica de la función tienda, la Proposición 2.7, se obtiene de [18, Ejemplo 5.1.6].

Proposición 2.7. Consideremos el sistema dinámico definido en el Ejemplo 1.51. El sistema dinámico $([0,1],L)$ es sensible, cofinitamente sensible, gruesamente sensible, tickly sindéticamente sensible y multisensible.

De manera similar, como consecuencia de la Proposición 1.65 y de la Proposición 2.4 se obtiene el siguiente resultado.

Proposición 2.8. Consideremos el sistema dinámico definido en el Ejemplo 1.51. El sistema dinámico $([0,1],L)$ es sindéticamente sensible.

Terminamos esta sección mostrando la Proposición 2.9 un resultado útil para verificar cuándo un subshift es sensible. Una prueba para dicho resultado la puede verificar en [22, Proposición 4].

Proposición 2.9. Sea (X,σ) un espacio shift. Se cumple que (X,σ) es sensible si y solo si X no tiene puntos aislados.

2.2. Relaciones entre sistemas dinámicos de tipo sensibles

Iniciamos esta sección mostrando equivalencias a la definición de sensibilidad. Lo cual nos es de gran utilidad para mostrar algunas relaciones que se tienen entre los sistemas dinámicos de tipo sensibles dados en la Definición 2.1.

Una prueba para la Proposición 2.10, la puede revisar en [18, Proposición 4.1.4]. Dicho resultado nos es útil para probar el Lema 2.41 y la Proposición 2.49.

Proposición 2.10. Sea (X,f) un sistema dinámico. Se cumple que (X,f) es sensible si y sólo si existe $\varepsilon>0$, tal que para todo subconjunto abierto no vacío U de X, el conjunto $N_f(U,\varepsilon)\neq\emptyset$.

El Teorema 2.11, nos muestra otra equivalencia a la propiedad de sensibilidad. Una prueba para dicho resultado, se puede encontrar en [3, Teorema 3.4]. Dicha caracterización será útil en la prueba del Teorema 2.50.

Teorema 2.11. Sea (X, f) un sistema dinámico. Se tiene que (X, f) es sensible si y sólo si existe $\varepsilon > 0$ tal que el conjunto

$$\{(x, y) \in X \times X : \limsup_{n\to\infty} d(f^n(x), f^n(y)) > \varepsilon\}$$

es denso en $X \times X$.

En el Teorema 2.12, mostramos que un sistema dinámico sensible es equivalente a un sistema dinámico infinitamente sensible. Además, dicho resultado nos ayuda a verificar el Lema 2.41.

Teorema 2.12. Sea (X, f) un sistema dinámico. Se tiene que (X, f) es infinitamente sensible si y sólo si (X, f) es sensible.

Demostración. Supongamos que (X, f) es infinitamente sensible. Veamos que (X, f) es sensible. Sean $x \in X$ y $\delta > 0$. Por hipótesis, existen $\varepsilon_0 > 0$ y $y \in B(x, \delta)$ tal que

$$\limsup_{n\to\infty} d(f^n(x), f^n(y)) \geq \varepsilon_0.$$

Luego, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(f^{n_0}(x), f^{n_0}(y)) > \dfrac{\varepsilon_0}{2}$. Por lo tanto, (X, f) es sensible con constante de sensibilidad $\dfrac{\varepsilon_0}{2}$.

Ahora supongamos que (X, f) es sensible con $\varepsilon > 0$ constante de sensibilidad. Veamos que (X, f) es infinitamente sensible. Sea $N \in \mathbb{N}$ y definamos

$$\mathcal{D}_N = \left\{(x, y) \in X \times X : d(f^n(x), f^n(y)) \leq \frac{\varepsilon}{4}, \text{ para cada } n \geq N\right\}.$$

Note que $\mathcal{D}_N$ es un conjunto cerrado en $X \times X$. Además se cumple que $\operatorname{int}(\mathcal{D}_N) = \emptyset$, para verificar eso supongamos que $\operatorname{int}(\mathcal{D}_N) \neq \emptyset$. Luego, existen subconjuntos $U, V \subset X$ abiertos no vacíos tal que $U \times V \subset \mathcal{D}_N$, esto implica que para cualquier pareja $(x, y) \in U \times V$,

$$d\left(f^n(x), f^n(y)\right) \leq \frac{\varepsilon}{4}, \text{ para todo } n \geq N.$$

De aquí, notemos que para cualesquiera $x_1, x_2 \in U$ y para todo $n \geq N$ se tiene que:

$$d(f^n(x_1), f^n(x_2)) \leq d(f^n(x_1), f^n(y)) + d(f^n(y), f^n(x_2)) \leq \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.1}$$

Sean $x_0 \in U$ y $N \in \mathbb{N}$. Definamos $U^* = \displaystyle\bigcap_{i=1}^{N} f^{-i}\left(B\left(f^i(x_0), \frac{\varepsilon}{2}\right)\right) \cap U$. Note que $U^* \subset U$ es un subconjunto abierto y no vacío. Sea $y \in U^*$. Luego, $y \in f^{-i}\left(B\left(f^i(x_0), \frac{\varepsilon}{2}\right)\right)$, para todo $i \in \{1, 2, \ldots, N\}$. De donde $f^i(y) \in B\left(f^i(x_0), \frac{\varepsilon}{2}\right)$ para todo $i \in \{1, 2, \ldots, N\}$. Esto implica que

$$d(f^i(y), f^i(x_0)) \leq \frac{\varepsilon}{2} \text{ para todo } i \in \{1, 2, \ldots, N\}. \tag{2.2}$$

Además, por (2.1), se tiene que $d(f^i(x_0), f^i(y)) \leq \frac{\varepsilon}{2}$ para todo $n \geq N$. Con todo, para todo $y \in U^*$ y para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $d(f^i(x_0), f^i(y)) \leq \varepsilon$. De donde (X, f) no es sensible. Lo cual es una contradicción. Con esto $\operatorname{int}(\mathcal{D}_N) = \emptyset$. Luego, $\mathcal{D}_N$ es denso en ninguna parte en

$X \times X$. Hagamos, sea $\mathcal{D} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{D}_N$. Note que $\mathcal{D}$ es un conjunto de primera categoría en $X \times X$. Luego, el conjunto

$$(X \times X) \setminus \mathcal{D} = \left\{(x, y) : \forall N \in \mathbb{N},\ \text{existe } n > N \text{ tal que } d(f^n(x), f^n(y)) > \frac{\varepsilon}{4}\right\}$$

es un conjunto residual en $X \times X$. Ahora, supongamos que X no es infinitamente sensible, es decir para $\varepsilon > 0$ existe $x_0 \in X$ y $\eta_0 > 0$ tal que para todo $y \in B(x_0, \eta_0)$ se tiene que $\limsup_{n\to\infty} d(f^n(x_0), f^n(y)) \leq \frac{\varepsilon}{16}$. Como $(X \times X) \setminus \mathcal{D}$ es residual existe $(y_1, y_2) \in (B(x_0, \eta_0) \times B(x_0, \eta_0)) \cap ((X \times X) \setminus \mathcal{D})$. Como para cualquier $n \in \mathbb{N}$,

$$d(f^n(y_1), f^n(y_2)) \leq d(f^n(y_1), f^n(x_0)) + d(f^n(x_0), f^n(y_2)) \leq \frac{\varepsilon}{16} + \frac{\varepsilon}{16} = \frac{\varepsilon}{8},$$

lo cual es una contradicción. Por lo tanto, (X, f) es infinitamente sensible. ■

Como consecuencia del Ejemplo 2.2 y del Teorema 2.12 obtenemos la siguiente proposición.

Proposición 2.13. El sistema dinámico (Σ_2, σ) es infinitamente sensible.

Por el Ejemplo 2.5 y por el Teorema 2.12, se obtiene el siguiente resultado.

Proposición 2.14. El sistema dinámico $([0, 1], T)$ es infinitamente sensible.

Por el Ejemplo 2.7 y por el Teorema 2.12, obtenemos la siguiente proposición.

Ejemplo 2.15. El sistema dinámico $([0, 1], L)$ es infinitamente sensible.

El Teorema 2.16 muestra las relaciones que se tienen entre los distintos tipos de sensibilidad, una prueba para dichas relaciones las puede consultar en [18, Proposición 4.2.1, Proposición 4.2.2, Teorema 4.2.5, Teorema 4.2.6].

Teorema 2.16. Sea (X, f) un sistema dinámico. Las proposiciones siguientes son verdaderas:

1. Si (X, f) es cofinitamente sensible, entonces (X, f) es gruesamente sindéticamente sensible.
2. Si (X, f) es gruesamente sindéticamente sensible, entonces (X, f) es multisensible.
3. Si (X, f) es multisensible, entonces (X, f) es gruesamente sensible.
4. Si (X, f) es gruesamente sensible, entonces (X, f) es sensible.

Proposición 2.17. Sea (X, f) un sistema dinámico. Si (X, f) es cofinitamente sensible, entonces (X, f) es sindéticamente sensible.

Demostración. Supongamos que (X, f) es cofinitamente sensible. Sea $U \subset X$ abierto no vacío. Por hipótesis, existe $\delta > 0$ tal que $N_f(U, \delta)$ es cofinito. Luego, por la Proposición 1.5, se tiene que $N_f(U, \delta)$ es sindético. Por lo tanto, (X, f) es sindéticamente sensible. ■

En la Figura 2.2, se presenta un diagrama de las relaciones que se tienen entre los tipos de sensibilidad, el cual se obtiene del Teorema 2.12, Teorema 2.16 y de la Proposición 2.17.

$$
\begin{tikzcd}
\text{Cofinitamente sensible} \arrow[r] \arrow[d] & \text{Sindéticamente sensible} \arrow[d] & \\
\text{Gruesamente sindéticamente sensible} \arrow[d] & \text{Sensible} \arrow[r, leftrightarrow] & \text{Infinitamente sensible} \\
\text{Multisensible} \arrow[r] & \text{Gruesamente sensible} \arrow[u] &
\end{tikzcd}
$$

Figura 2.1: Diagrama que muestra algunas relaciones entre los sistemas dinámicos del tipo sensible.

Terminamos esta sección mostrando un diagrama, Figura 2.2, donde se muestran relaciones entre sistemas dinámicos de tipo sensibles y sistemas dinámicos de tipo transitivos.

$$
\begin{tikzcd}
\text{Cofinitamente sensible} \arrow[d] & \text{Infinitamente sensible} \arrow[d, leftrightarrow] & \text{Débilmente mezclante} \arrow[d] \\
\text{Gruesamente sindéticamente sensible} \arrow[d] & \text{Sensible} & \text{Compacto transitivo} \arrow[l] \arrow[d] \\
\text{Multisensible} \arrow[r] & \text{Gruesamente sensible} \arrow[u] & \text{Transitivo}
\end{tikzcd}
$$

Figura 2.2: Diagrama que muestra algunas relaciones entre sistemas dinámicos.

Ejemplo 2.18. Por la Figura 2.2 y el Ejemplo 2.3, los enunciados siguientes son verdaderos. El sistema dinámico (S^1, R_α) cumple lo siguiente:

1. El sistema dinámico (S^1, R_α) no es débilmente mezclante.
2. El sistema dinámico (S^1, R_α) no es cofinitamente sensible.
3. El sistema dinámico (S^1, R_α) no es gruesamente sindéticamente sensible.
4. El sistema dinámico (S^1, R_α) no es compacto transitivo.
5. El sistema dinámico (S^1, R_α) no es multisensible.
6. El sistema dinámico (S^1, R_α) no es gruesamente sensible.
7. El sistema dinámico (S^1, R_α) no es infinitamente sensible.

2.3. Familias de Furstenberg

En esta sección recordamos conceptos relacionados con las familias de *Furstenberg* ya que nos será útil para poder definir otras propiedades relacionadas a la sensibilidad con respecto a una familia de este tipo.

Definición 2.19. Sean $i \in \mathbb{Z}_+$ y $F \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}_+)$. Se definen los conjuntos

$$F + i = \{j + i : j \in F\} \cap \mathbb{Z}_+ \quad \text{y} \quad F - i = \{j - i : j \in F\} \cap \mathbb{Z}_+.$$

Definición 2.20. Un subconjunto $\mathscr{F}$ de $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_+)$ es una *familia de Furstenberg*, si para cualesquiera $F_1, F_2 \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}_+)$ tales que $F_1 \subset F_2$ y $F_1 \in \mathscr{F}$ implica que $F_2 \in \mathscr{F}$.

A continuación mostramos ejemplos de familias de Furstenberg.

Ejemplo 2.21. Consideremos la familia $\mathcal{B} = \{A \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}_+) : A \text{ es infinito}\}$. Se tiene que $\mathcal{B}$ es una familia de Furstenberg.
En efecto, sean $A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}_+)$ tales que $A \subset B$ y $A \in \mathcal{B}$. Como $A \in \mathcal{B}$ entonces A es infinito y puesto que $A \subset B$ se tiene que B es infinito. Por lo tanto, $B \in \mathcal{B}$. Y con esto $\mathcal{B}$ es una familia de Furstenberg.

Ejemplo 2.22. Usando la Proposición 1.3, se puede verificar que las siguientes familias son de Furstenberg.

1. $\mathscr{F}_g = \{F \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}_+) : F \text{ es grueso}\}$.
2. $\mathscr{F}_c = \{F \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}_+) : F \text{ es cofinito}\}$.
3. $\mathscr{F}_s = \{F \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}_+) : F \text{ es sindético}\}$.
4. $\mathscr{F}_{gs} = \{F \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}_+) : F \text{ es gruesamente sindético}\}$.

Definición 2.23. Sean $\mathscr{F}_1$ y $\mathscr{F}_2$ familias de Furstenberg. Se define $\mathscr{F}_1 \cdot \mathscr{F}_2 = \{F_1 \cap F_2 : F_1 \in \mathscr{F}_1, F_2 \in \mathscr{F}_2\}$.

Definición 2.24. Sea $\mathscr{F}$ una familia de Furstenberg. Se dice que $\mathscr{F}$ es:

1. *Propia* si $\mathscr{F}$ es un subconjunto propio de $\mathcal{P}(\mathbb{Z}_+)$.
2. *Filtro dual* si $\mathscr{F}$ es propia y $\mathscr{F} \cdot \mathscr{F} \subset \mathscr{F}$.
3. *Traslación invariante* si para cualquier $F \in \mathscr{F}$ y para cualquier $i \in \mathbb{Z}_+$, $F + i \in \mathscr{F}$ y $F - i \in \mathscr{F}$.

Observación 2.25. Una familia $\mathscr{F}$ es propia si y sólo si $\mathbb{Z}_+ \in \mathscr{F}$ y $\emptyset \notin \mathscr{F}$.

En este trabajo de tesis, todas las familias con las que trabajamos son propias.

Definición 2.26. Sean $\mathscr{F}$ una familia de Furstenberg. La *familia dual* de $\mathscr{F}$, denotada por $k\mathscr{F}$, se define como:

$$k\mathscr{F} = \{F \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}_+) : F \cap F' \neq \emptyset, \text{ para cualquier } F' \in \mathscr{F}\}.$$

Ejemplo 2.27. La familia dual de la familia $\mathcal{B}$, definida en el Ejemplo 2.21, es $k\mathcal{B} = \{F \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}_+) : F \text{ es cofinito}\}$.

Proposición 2.28. Sea $\mathscr{F}$ una familia de Furstenberg. La familia dual de $\mathscr{F}$ es de Furstenberg.

Demostración. Sean $A_1, A_2 \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}_+)$ tales que $A_1 \subset A_2$ y $A_1 \in k\mathscr{F}$. Sea $F \in \mathscr{F}$, notemos $A_1 \cap F \subset A_2 \cap F$ y puesto que $A_1 \in k\mathscr{F}$ se tiene que $A_1 \cap F \neq \emptyset$. Luego, $A_2 \cap F \neq \emptyset$. Con esto $A_2 \in k\mathscr{F}$. Por lo tanto, la familia $k\mathscr{F}$ es de Furstenberg. ■

Proposición 2.29. La familia $k\mathcal{B}$ es traslación invariante.

Demostración. Sean $F \in k\mathcal{B}$ y $i \in \mathbb{Z}_+$. Notemos, $|\mathbb{Z}_+ \setminus (F+i)| = |\mathbb{Z}_+ \setminus F| < \infty$. Luego, $F+i$ es cofinito. Así, $F+i \in k\mathcal{B}$. De manera similar se puede verificar que $F-i \in k\mathcal{B}$. Por lo tanto, $k\mathcal{B}$ es traslación invariante. ■

Proposición 2.30. La familia $k\mathcal{B}$ es un filtro dual.

Demostración. Dado que $\emptyset$ no es cofinito, el conjunto $\emptyset \notin k\mathcal{B}$. De aquí, $k\mathcal{B}$ es propia. Por otro lado, veamos que $k\mathcal{B} \cdot k\mathcal{B} \subset k\mathcal{B}$. Sea $F \in k\mathcal{B} \cdot k\mathcal{B}$. Luego existen $F_1, F_2 \in k\mathcal{B}$ tales que $F = F_1 \cap F_2$. Notemos:

$$\mathbb{Z}_+ \setminus F = \mathbb{Z}_+ \setminus (F_1 \cap F_2) = (\mathbb{Z}_+ \setminus F_1) \cup (\mathbb{Z}_+ \setminus F_2).$$

Puesto que F_1, F_2 son cofinitos, se tiene que $(\mathbb{Z}_+ \setminus F_1) \cup (\mathbb{Z}_+ \setminus F_2)$ es finito. Luego, $\mathbb{Z}_+ \setminus F$ es finito. Así, F es cofinito. Por lo tanto, $F \in k\mathcal{B}$. Con todo, $k\mathcal{B}$ es un filtro dual. ■

La prueba para la Proposición 2.31, es un argumento similar a la prueba de la Proposición 2.30.

Proposición 2.31. La familia $\mathscr{F}_c = \{F \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}_+) : F \text{ es cofinito}\}$ es un filtro dual.

Lema 2.32. El conjunto $\overline{\mathcal{M}}(0^+) = \{F \in \mathcal{B} : \overline{\mathcal{D}(F)} > 0\}$ es una familia de Furstenberg.

Demostración. Sean $A_1, A_2 \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}_+)$ tales que $A_1 \subset A_2$ y $A_1 \in \overline{\mathcal{M}}(0^+)$. Como $A_1 \in \overline{\mathcal{M}}(0^+)$ entonces A_1 es infinito y es tal que $\overline{\mathcal{D}(A_1)} > 0$. Sea $n \in \mathbb{Z}_+$. Puesto que $A_1 \subset A_2$ se sigue que $A_1 \cap \{0, 1, \ldots, n-1\} \subset A_2 \cap \{0, 1, \ldots, n-1\}$. Luego,

$$|A_1 \cap \{0, 1, \ldots, n-1\}| \leq |A_2 \cap \{0, 1, \ldots, n-1\}|.$$

En consecuencia,

$$\limsup \frac{1}{n} |A_1 \cap \{0, 1, \ldots, n-1\}| \leq \limsup \frac{1}{n} |A_2 \cap \{0, 1, \ldots, n-1\}|.$$

Con esto, $0 < \overline{\mathcal{D}(A_1)} \leq \overline{\mathcal{D}(A_2)}$. De donde $\overline{\mathcal{D}(A_2)} > 0$. Así, $A_2 \in \mathcal{M}(0^+)$. Por lo tanto, $\overline{\mathcal{M}}(0^+)$ es de Furstenberg. ■

2.4. $\mathscr{F}$-sensibilidad

En esta sección mencionamos otra clasificación de sistemas dinámicos relacionadas con la sensibilidad con respecto a una familia de Furstenberg. Así como también algunas relaciones que se presentan entre ellos.

Definición 2.33. Sean (X, f) un sistema dinámico y $\mathscr{F}$ una familia de Furstenberg.

1. Un punto $(x, y) \in X \times X$ es un *par* $(\mathscr{F}, \delta)$*-sensible de* f para algún $\delta > 0$ si $\{n \in \mathbb{Z}_+ : d(f^n(x), f^n(y)) > \delta\} \in \mathscr{F}$. Denotaremos como $Par_{(\mathscr{F},\delta)}$ al conjunto de todos los pares $(\mathscr{F}, \delta)$-sensible de f.

2. (X, f) tiene *pares $\mathscr{F}$-sensible casi por todas partes* si existe un $\delta > 0$ tal que para cualquier subconjunto abierto no vacío U de X, existen $x, y \in U$ tales que (x, y) es un par $(\mathscr{F}, \delta)$-sensible.

3. (X, f) es *$\mathscr{F}$-sensible* si existe $\varepsilon > 0$ tal que para cualquier subconjunto abierto no vacío U de X, se cumple que $\{n \in \mathbb{Z}_+ : \text{diám}(f^n(U)) > \varepsilon\} \in \mathscr{F}$.

4. (X, f) es *ergódicamente sensible* si existe $\varepsilon > 0$ tal que para cualquier subconjunto abierto no vacío U de X, se cumple que $\{n \in \mathbb{Z}_+ : \text{diám}(f^n(U)) > \varepsilon\} \in \overline{\mathcal{M}}(O^+)$.

Definición 2.34. Sean (X, f) un sistema dinámico, $x \in X$ y $\mathscr{F}$ una familia de Furstenberg. Se dice que x es un *punto $\mathscr{F}$-recurrente de f* si $N_f(x, U) \in \mathscr{F}$ para cualquier vecindad U no vacía de x.

Para el siguiente ejemplo es necesario recordar que $\mathcal{B} = \{A \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}_+) : A \text{ es infinito}\}$, es la familia definida en Ejemplo 2.21.

Ejemplo 2.35. Consideremos el sistema dinámico (Σ_2, σ) y la familia $\mathcal{B}$ de Furstenberg.
Sea $x = (100)^\infty \in \Sigma_2$. Veamos que x es un punto $\mathcal{B}$-recurrente de σ. Sea U una vecindad de x. Veamos que $N_\sigma(x, U) \in \mathcal{B}$. Notemos que:

$$\begin{aligned} \sigma(x) &= 001001001\ldots \\ \sigma^2(x) &= 010010010\ldots \\ \sigma^3(x) &= 100100100\ldots \end{aligned}$$

Es decir, x es un punto periódico de σ de periodo 3. Luego, $\sigma^3(x) \in U$. Más aún, $\sigma^{3n}(x) \in U$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Esto implica que $3n \in N_\sigma(x, U)$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Así, $N_\sigma(x, U)$ es infinito. Luego, $N_\sigma(x, U) \in \mathcal{B}$. Por lo tanto, x es un punto $\mathcal{B}$-recurrente.

La Proposición 2.36 nos caracteriza sistemas dinámicos de tipo sensibles con familias de Furstenberg en particular. Para enunciar dicho resultado es necesario recordar las familias dadas en el Ejemplo 2.22.

Proposición 2.36. Sean (X, f) un sistema dinámico y $\mathscr{F}$ una familia de Furstenberg. Los siguientes enunciados son verdaderos.

1. (X, f) es gruesamente sensible si y sólo si (X, f) es $\mathscr{F}_t$-sensible

2. (X, f) es cofinitamente sensible si y sólo si (X, f) es $\mathscr{F}_c$-sensible

3. (X, f) es sindéticamente sensible si y sólo si (X, f) es $\mathscr{F}_s$-sensible

4. (X, f) es gruesamente sindéticamente sensible si y sólo si (X, f) es $\mathscr{F}_{ts}$-sensible

Demostración. 1. Supongamos que (X, f) es gruesamente sensible con δ constante de sensibilidad. Sea $U \subset X$ abierto no vacío. Por hipótesis $N_f(U, \delta)$ es grueso. Luego, por la Observación 1.57 se tiene que $N_f(U, \delta) = \{n \in \mathbb{Z}_+ : \text{diám}(f^n(U)) > \delta\}$. De aquí, $\{n \in \mathbb{Z}_+ : \text{diám}(f^n(U)) > \delta\} \in \mathscr{F}_t$. Por lo tanto, (X, f) es $\mathscr{F}_t$-sensible.
Recíprocamente, supongamos que (X, f) es $\mathscr{F}_t$-sensible, con δ constante de sensibilidad. Sea $U \subset X$ abierto y no vacío. Por hipótesis se tiene que $\{n \in \mathbb{Z}_+ : \text{diám}(f^n(U)) > \delta\} \in \mathscr{F}_t$. Luego, por la Observación 1.57 se obtiene que $\{n \in \mathbb{Z}_+ : \text{diám}(f^n(U)) > \delta\} = N_f(U, \delta)$. Así, $N_f(U, \delta)$ es grueso. Por lo tanto, (X, f) es gruesamente sensible. De manera similar se prueba los puntos 2, 3 y 4. ∎

La Proposición 2.37 nos muestra que para verificar la propiedad de $\mathscr{F}$-sensibilidad en un sistema dinámico, solo basta verificarlo en un subconjunto denso del espacio. Dicho resultado es muy necesario para verificar la prueba del Teorema 4.43 y otros resultados en el capítulo 4.

Proposición 2.37. Sean (X, f) un sistema dinámico, $\mathscr{F}$ una familia de Furstenberg y $D \subset X$ denso en X. Si para todo $V \subset D$ abierto no vacío en D se cumple que $\{n \in \mathbb{Z}_+ : \text{diám}(f^n(V)) > \varepsilon\} \in \mathscr{F}$, entonces (X, f) es $\mathscr{F}$-sensible.

Demostración. Sea $V \subset D$ abierto no vacío en D. Luego, existe $U \subset X$ abierto no vacío tal que $V = U \cap D$. Note que $U \cap D \subset U$. De aquí,

$$\{n \in \mathbb{Z}_+ : \text{diám}(f^n(U \cap D)) > \varepsilon\} \subset \{n \in \mathbb{Z}_+ : \text{diám}(f^n(U)) > \varepsilon\}. \tag{2.3}$$

Como $\{n \in \mathbb{Z}_+ : \text{diám}(f^n(U \cap D)) > \varepsilon\} \in \mathscr{F}$ y $\mathscr{F}$ es de Furstenberg se obtiene que $\{n \in \mathbb{Z}_+ : \text{diám}(f^n(U)) > \varepsilon\} \in \mathscr{F}$. Por lo tanto, (X, f) es $\mathscr{F}$-sensible. ■

Una prueba para el Teorema 2.38 la puede encontrar en [31, Teorema 2.1].

Teorema 2.38. Sea (X, f) un sistema dinámico. Si para cualesquiera U, V subconjuntos de X abiertos no vacíos se cumple que:

$$\overline{\mathcal{D}(N_f(U,U))} + \underline{\mathcal{D}(N_f(U,V))} > 1 \quad \text{ó} \quad \underline{\mathcal{D}(N_f(U,U))} + \overline{\mathcal{D}(N_f(U,V))} > 1,$$

entonces (X, f) es ergódicamente sensible.

Proposición 2.39. El sistema dinámico $([0,1], T)$ es ergódicamente sensible.

Demostración. Sean $U, V \subset X$ abiertos no vacíos. Por la Lema 1.65 se tiene que el sistema dinámico $([0,1], T)$ es mezclante. Luego, por la Lema 1.64 se obtiene $N_T(U,U)$ es cofinito. De donde, por la Proposición 1.8 resulta que $\overline{\mathcal{D}(N_T(U,U))} = 1$. Así, $\overline{\mathcal{D}(N_T(U,U))} + \underline{\mathcal{D}(N_T(U,V))} \geq \overline{\mathcal{D}(N_T(U,U))} = 1$. Por lo tanto, por el Teorema 2.38 se concluye que el sistema $([0,1], T)$ es ergódicamente sensible. ■

Para la demostración de la Proposición 2.40 se usa un argumento similar a la prueba de la Proposición 2.39.

Proposición 2.40. El sistema dinámico $([0,1], L)$ es ergódicamente sensible.

2.5. Relaciones entre sistemas dinámicos $\mathscr{F}$-sensibles

A continuación mostramos una equivalencia a la propiedad de sensibilidad de un sistema dinámico.

Lema 2.41. Sea (X, f) un sistema dinámico. Se tiene que (X, f) es sensible si y sólo si (X, f) es $\mathcal{B}$-sensible.

Demostración. Supongamos que (X, f) es sensible. Por el Teorema 2.12, se tiene que (X, f) es infinitamente sensible, luego existe $\varepsilon_0 > 0$ constante de sensibilidad. Sean $\varepsilon = \dfrac{\varepsilon_0}{2}$ y $U \subset X$ abierto y no vacío. Veamos que $\{n \in \mathbb{Z}_+ : \text{diám}(f^n(U)) > \varepsilon\} \in \mathcal{B}$, es decir, probemos que $\{n \in \mathbb{Z}_+ : \text{diám}(f^n(U)) > \varepsilon\}$ es infinito. Sea $x \in U$. Luego, existe $\delta > 0$ tal que $B(x, \delta) \subset U$. Además, como (X, f) es infinitamente sensible existe $y \in B(x, \delta)$ tal que $\limsup_{n\to\infty} d(f^n(x), f^n(y)) \geq \varepsilon_0$, esto implica que

$$\inf_{m\in\mathbb{N}} \sup_{n\geq m} d(f^n(x), f^n(y) \geq \varepsilon_0. \tag{2.4}$$

De aquí, resulta que ε_0 es cota inferior del conjunto: $\sup_{n\geq m} d(f^n(x), f^n(y) \geq \varepsilon_0 > \varepsilon$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Sea $m \in \mathbb{N}$. Luego, $\sup_{n\geq m} d(f^n(x), f^n(y) > \varepsilon$ de donde ε no es cota superior de $d(f^n(x), f^n(y)$, es decir, existe $n_m \geq m$ tal que $d(f^{n_m}(x), f^{n_m}(y)) > \varepsilon$. Con esto, para cada $m \in \mathbb{N}$ existe $n_m \in \mathbb{N}$ tal que $d(f^{n_m}(x), f^{n_m}(y)) > \varepsilon$. Esto implica que $\{n \in \mathbb{Z}_+ : \text{diám}(f^n(U)) > \varepsilon\}$ es infinito. Por lo tanto (X, f) es $\mathcal{B}$-sensible.
Ahora supongamos que (X, f) es $\mathcal{B}$-sensible con ε_0 constante de sensibilidad. Veamos que (X, f) es sensible usando la Proposición 2.10. Sean $\varepsilon = \varepsilon_0$ y $U \subset X$ abierto no vacío. Por hipótesis, $\{n \in \mathbb{Z}_+ : \text{diám}(f^n(U)) > \varepsilon_0\} \in \mathcal{B}$. Esto implica que, $\{n \in \mathbb{Z}_+ : \text{diám}(f^n(U)) > \varepsilon_0\} \neq \emptyset$. Luego, existe $n_0 \in \mathbb{Z}_+$ tal que $\text{diám}(f^{n_0}(U)) > \varepsilon_0$. De aquí, existen $u_1, u_2 \in U$ tales que $d(f^{n_0}(u_1), f^{n_0}(u_2)) > \varepsilon_0 = \varepsilon$. Con esto resulta que $n_0 \in N_f(U, \varepsilon)$. Luego, $N_f(U, \varepsilon) \neq \emptyset$. Por la Proposición 2.10, obtenemos que (X, f) es sensible. ■

Como consecuencia de la Proposición 2.2 y del Lema 2.41, se obtiene la siguiente proposición.

Proposición 2.42. El sistema dinámico (Σ_2, σ) es $\mathcal{B}$-sensible.

Por la Proposición 2.5 y por el Lema 2.41, tenemos el siguiente resultado.

Proposición 2.43. El sistema dinámico $([0, 1], T)$ es $\mathcal{B}$-sensible.

De manera similar, por la Proposición 2.7 y por el Lema 2.41, obtenemos la siguiente proposición.

Proposición 2.44. El sistema dinámico $([0, 1], L)$ es $\mathcal{B}$-sensible.

Como consecuencia del Lema 2.41 y del Ejemplo 2.3, se obtiene la siguiente proposición.

Proposición 2.45. El sistema dinámico (S^1, R_α) no es $\mathcal{B}$-sensible.

Proposición 2.46. Sean (X, f) un sistema dinámico y $\mathscr{F}$ una familia de Furstenberg. Si (X, f) tiene pares $\mathscr{F}$-sensible casi por todas partes, entonces (X, f) es $\mathscr{F}$-sensible.

Demostración. Supongamos que (X, f) tiene pares $\mathscr{F}$-sensibles casi por todas partes, con $\delta > 0$ constante de sensibilidad. Sean $U \subset X$ abierto no vacío. Veamos que $\{n \in \mathbb{Z}_+ : \text{diám}(f^n(U)) > \delta\} \in \mathscr{F}$. Por hipótesis, existe $(x, y) \in U$ tal que (x, y) es un par $(\mathscr{F}, \delta)$-sensible. Es decir, $\{n \in \mathbb{Z}_+ : d(f^n(x), f^n(y)) > \delta\} \in \mathscr{F}$. Además, $\{n \in \mathbb{Z}_+ : d(f^n(x), f^n(y)) > \delta\} \subset \{n \in \mathbb{Z}_+ : \text{diám}(f^n(U)) > \delta\}$ y puesto que $\mathscr{F}$ es de Furstenberg resulta que $\{n \in \mathbb{Z}_+ : \text{diám}(f^n(U)) > \delta\} \in \mathscr{F}$. Por lo tanto (X, f) es $\mathscr{F}$-sensible. ■

El siguiente corolario resulta de aplicar la Proposición 2.46 a la familia de Furstenberg $\mathcal{B}$ definida en el Ejemplo 2.21.

Corolario 2.47. Sea (X, f) un sistema dinámico. Si (X, f) tiene pares $\mathcal{B}$-sensible casi por todas partes, entonces (X, f) es $\mathcal{B}$-sensible.

De la Proposición 2.45 y el Corolario 2.47 se sigue el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.48. El sistema dinámico (S^1, R_α) no tiene pares $\mathcal{B}$-sensible casi por todas partes.

Proposición 2.49. Sean (X,f) un sistema dinámico y $\mathscr{F}$ una familia de Furstenberg. Si (X,f) es $\mathscr{F}$-sensible, entonces (X,f) es sensible.

Demostración. Supongamos que (X,f) es $\mathscr{F}$-sensible con ε_0 constante de sensibilidad. Probemos que (X,f) es sensible usando la Proposición 2.10. Sean $\varepsilon=\varepsilon_0$ y $U\subset X$ abierto no vacío. Por hipótesis, $\{n\in\mathbb{Z}_+ : \text{diám}(f^n(U))>\varepsilon_0\}\in\mathscr{F}$. Note que $\{n\in\mathbb{Z}_+ : \text{diám}(f^n(U))>\varepsilon_0\}\neq\emptyset$. Luego, existe $m\in\mathbb{Z}_+$ tal que $\text{diám}(f^m(U))>\varepsilon_0$. De aquí, existen $y,z\in U$ tales que $d(f^m(y),f^m(z))>\varepsilon_0=\varepsilon$. Con esto, $m\in N_f(U,\varepsilon)$. Así, $N_f(U,\varepsilon)\neq\emptyset$. Por lo tanto, (X,f) es sensible. ■

El Teorema 2.50, nos da condiciones para que sensibilidad sea equivalente a $\mathscr{F}$-sensibilidad.

Teorema 2.50. Sean (X,f) un sistema dinámico y $\mathscr{F}$ una familia de Furstenberg traslación invariante. Si para cualquier subconjunto abierto no vacío U de $X\times X$, existe $p\in U$ tal que $N_{f\times f}(p,U)\in\mathscr{F}$, entonces los siguientes enunciados son equivalentes:

1. (X,f) es sensible.
2. (X,f) es $\mathscr{F}$-sensible.
3. (X,f) tiene pares $\mathscr{F}$-sensibles casi por todas partes.
4. $\overline{\text{Pares}_{(\mathscr{F},\delta)}}=X\times X$, para algún $\delta>0$.

Demostración. Primero veamos que (1) implica (4). Supongamos que (X,f) es sensible y veamos que el conjunto $\text{Pares}_{(\mathscr{F},\delta)}$ es denso en $X\times X$ para algún $\delta>0$. Sea $U\subset X\times X$. Luego, existen subconjuntos abiertos no vacíos $U_1,U_2\subset X$ tales que $U_1\times U_2\subset U$. Como (X,f) es sensible, por el Teorema 2.11, existe $\varepsilon>0$ tal que el conjunto

$$A=\{(x,y)\in X\times X : \limsup_{n\to\infty} d(f^n(x),f^n(y))>\varepsilon\}$$

es denso en $X\times X$. Luego,

$$A\cap(U_1\times U_2)\neq\emptyset.$$

De aquí, existe $(x,y)\in U_1\times U_2$ tal que $\limsup_{n\to\infty} d(f^n(x),f^n(y))>\varepsilon$. Esto implica que, existe $k\in\mathbb{N}$ tal que $d(f^k(x),f^k(y))>\varepsilon$. Sea $\xi=\dfrac{|d(f^k(x),f^k(y))-\varepsilon|}{4}$. Además, existe $\gamma_1>0$ tal que $B(x,\gamma_1)\times B(y,\gamma_1)\subset U_1\times U_2$. Por otro lado, por el Teorema 1.37, f es uniformemente continua. Así, para ξ existe $\gamma_2>0$ tal que para cualquier $z_1,z_2\in X$ con $d(z_1,z_2)<\gamma_2$ y cualquier $0\leq i\leq k$ se tiene que $d(f^i(z_1),f^i(z_2))<\xi$. Haciendo $\gamma=\text{mín}\{\gamma_1,\gamma_2\}$, de lo anterior se obtiene lo siguiente:

(a) $B(x,\gamma)\times B(y,\gamma)\subset U_1\times U_2\subset U$.

(b) Para cualquier $z_1,z_2\in X$ con $d(z_1,z_2)<\gamma$ y cualquier $0\leq i\leq k$ se tiene que $d(f^i(z_1),f^i(z_2))<\xi$.

Por otro lado, por hipótesis, existe $(x_1,y_1)\in B(x,\gamma)\times B(y,\gamma)\subset U$ tal que

$$N_{f\times f}\left((x_1,y_1),B(x,\gamma)\times B(y,\gamma)\right)\in\mathscr{F}.$$

Luego, de (b) se tiene que para cualquier $(x_2, y_2) \in B(x,\gamma) \times B(y,\gamma)$,

$$\begin{aligned} d(f^k(x), f^k(y)) &\leq d(f^k(x), f^k(x_2)) + d(f^k(x_2), f^k(y_2)) + d(f^k(y_2), f^k(y)) \\ &< \xi + d(f^k(x_2), f^k(y_2)) + \xi \\ &= d(f^k(x_2), f^k(y_2)) + 2\xi. \end{aligned}$$

Con esto,

$$\varepsilon < d(f^k(x), f^k(y)) - 2\xi < d(f^k(x_2), f^k(y_2)). \tag{2.5}$$

Luego, para cualquier $j \in N_{f\times f}((x_1, y_1), B(x,\gamma) \times B(y,\gamma))$, de (2.5) se tiene que

$$d(f^{k+j}(x_1), f^{k+j}(y_1)) > \varepsilon.$$

Esto implica que

$$N_{f\times f}((x_1, y_1), B(x,\gamma) \times B(y,\gamma)) + k \subset N_{f\times f}((x_1, y_1), X \times X \setminus \overline{\Delta_\varepsilon}), \tag{2.6}$$

donde $\Delta_\varepsilon = \{(x, y) \in X \times X : d(x, y) < \varepsilon\}$. Como $\mathscr{F}$ es de translación invariante resulta que $N_{f\times f}((x_1, y_1), B(x,\gamma)\times B(y,\gamma))+k \in \mathscr{F}$. Con esto se sigue que $N_{f\times f}((x_1, y_1), X\times X \setminus \overline{\Delta_\varepsilon}) \in \mathscr{F}$. De aquí, $(x_1, y_1) \in \text{Pares}_{(\mathscr{F},\varepsilon)}$. Como $(x_1, y_1) \in U$, se tiene que $\text{Pares}_{(\mathscr{F},\varepsilon)} \cap U \neq \emptyset$. Por lo tanto, el conjunto $\text{Pares}_{(\mathscr{F},\varepsilon)}$ es denso en $X \times X$.

Ahora, veamos que (4) implica (3). Supongamos que existe $\delta > 0$ tal que $\text{Pares}_{(\mathscr{F},\delta)}$ es denso en $X \times X$. Sea $U \subset X$ abierto y no vacío, por hipótesis $\text{Pares}_{(\mathscr{F},\delta)} \cap U \neq \emptyset$. De aquí, existe $(x, y) \in U$ tal que (x, y) es un par $(\mathscr{F}, \delta)$-sensible. Con esto, (X, f) tiene pares $\mathscr{F}$-sensible casi por todos lados.

Luego, (3) implica (2), se tiene por la Proposición 2.46. Finalmente, (2) implica (1) se obtiene por la Proposición 2.49. ■

Capítulo 3

Dinámica en el producto $X \times Y$

En este capítulo estudiamos la dinámica en el sistema dinámico producto, discutimos cómo las condiciones o propiedades que se presentan en la dinámica de un sistema dinámico influye al comportamiento de la dinámica en un sistema producto o viceversa.

Recordemos que dados los conjuntos $X_1, X_2, \ldots, X_k$ denotamos y definimos el *producto cartesiano* como:

$$X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_k = \{(x_1, x_2, \ldots, x_k) : x_i \in X_i, \text{ para cada } i \in \{1, 2, \ldots, k\}\}.$$

Para simplificar la notación, para $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_k$ escribimos simplemente $\prod_{i=1}^{k} X_i$. De manera similar, dados $X_1, X_2, X_3, \ldots$ una sucesión de conjuntos, denotamos al producto como $\prod_{i=1}^{\infty} X_i$. Cuando $X_i = X$ para todo $i \in \mathbb{N}$ escribimos $\prod_{i=1}^{\infty} X$.

A continuación definimos la función producto y recordamos algunas propiedades que se satisfacen en el producto de espacios métricos compactos, todo esto para cuando $k = 2$, que también se puede extender al producto de k espacios.

Definición 3.1. Sean X, Y espacios métricos, $f : X \to X$ y $g : Y \to Y$ funciones. Se define la *función producto*, denotada como $f \times g : X \times Y \to X \times Y$, dada por

$$(f \times g)((x, y)) = (f(x), g(y)), \text{para cada } (x, y) \in X \times Y.$$

Lema 3.2. Sean (X, d_1) y (Y, d_2) espacios métricos. La función $d : X \times Y \to X \times Y$ definida como:

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{d_1^2(x_1, x_2) + d_2^2(y_1, y_2)}, \quad \text{para todo } \ (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in X \times Y,$$

es una métrica para el espacio $X \times Y$.

Lema 3.3. Sean X y Y espacios métricos. Si X y Y son compactos, entonces $X \times Y$ es compacto.

El Lema 3.4, nos indica cuándo la función $f \times g : X \times Y \to X \times Y$ es continua.

Lema 3.4. Sean X y Y espacios métricos. Si $f : X \to X$ y $g : Y \to Y$ son funciones continuas, entonces $f \times g : X \times Y \to X \times Y$ es continua.

Como consecuencia del Lema 3.2, Lema 3.3 y del Lema 3.4 obtenemos la siguiente definición.

Definición 3.5. Sean (X, f) y (Y, g) sistemas dinámicos. El sistema dinámico $(X \times Y, f \times g)$ es el inducido por los sistemas dinámicos (X, f) y (Y, g), al cual llamaremos *sistema dinámico producto.*

Para nuestros fines, de ahora en adelante consideraremos el espacio producto infinito para cuando $X_i = X$, para todo $i \in \mathbb{N}$. En la siguiente proposición mostramos una métrica sobre el espacio producto infinito.

Lema 3.6. Sea X un espacio métrico compacto. La función denotada como $D : \left(\prod_{i=1}^{\infty} X\right) \times \left(\prod_{i=1}^{\infty} X\right) \to \mathbb{R}$ y definida por:

$$D(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{d(x_i, y_i)}{2^i}, \text{ para cada } (x, y) \in \left(\prod_{i=1}^{\infty} X\right) \times \left(\prod_{i=1}^{\infty} X\right),$$

es una métrica para el espacio $\prod_{i=1}^{\infty} X$.

Como consecuencia del Lema 3.6, se tiene que $\left(\prod_{i=1}^{\infty} X, D\right)$ es un espacio métrico. Más aún, como X es compacto se puede verificar que $\prod_{i=1}^{\infty} X$ es compacto. Así, $\left(\prod_{i=1}^{\infty} X, D\right)$ es un espacio métrico compacto.

Por otro lado, recordemos también que dado X un espacio métrico y $f : X \to X$ una función, se denota la *función producto infinito* como $\prod_{i=1}^{\infty} f : \prod_{i=1}^{\infty} X \to \prod_{i=1}^{\infty} X$ y es definida como:

$$\prod_{i=1}^{\infty} f((x_1, x_2, \ldots)) = (f(x_1), f(x_2), \ldots),$$

para cada $(x_1, x_2, \ldots) \in \prod_{i=1}^{\infty} X$.

Lema 3.7. Sean X un espacio métrico y $f : X \to X$ una función continua. Se cumple que $\prod_{i=1}^{\infty} f$ es continua.

Como consecuencia del Lema 3.6 y del Lema 3.7, se tiene que la pareja $(\prod_{i=1}^{\infty} X, \prod_{i=1}^{\infty} f)$ es un sistema dinámico.

A continuación mostramos un ejemplo de un sistema dinámico producto, donde estudiamos la dinámica en este espacio.

Ejemplo 3.8. Consideremos el sistema dinámico producto $(\Sigma_2 \times \Sigma_2, \sigma \times \sigma)$, inducido por el sistema dinámico (Σ_2, σ). Sea $(0^\infty, 1^\infty) \in \Sigma_2 \times \Sigma_2$. Notemos:

$$(\sigma \times \sigma)((0^\infty, 1^\infty)) = (\sigma(0^\infty), \sigma(1^\infty)) = (0^\infty, 1^\infty).$$

Con esto se tiene que $(0^\infty, 1^\infty)$ es un punto fijo de $\sigma \times \sigma$. Análogamente, se puede verificar que los puntos $(1^\infty, 1^\infty)$, $(1^\infty, 0^\infty)$ y $(0^\infty, 0^\infty)$ son puntos fijos de $\sigma \times \sigma$.

Por otro lado, consideremos el punto $(x, y) = ((10)^\infty, (1100)^\infty) \in \Sigma_2 \times \Sigma_2$. Calculemos la órbita de (x, y). Notemos:

$$\begin{aligned}
(\sigma \times \sigma)((x, y)) &= (010101\ldots, 100110\ldots)\\
(\sigma \times \sigma)^2((x, y)) &= (101010\ldots, 001100\ldots)\\
(\sigma \times \sigma)^3((x, y)) &= (010101\ldots, 011001\ldots)\\
(\sigma \times \sigma)^4((x, y)) &= (101010\ldots, 110011\ldots).
\end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned}
\mathcal{O}((x, y), \sigma \times \sigma) = &\{((10)^\infty, (1100)^\infty), (010101\ldots, 100110\ldots), (101010\ldots, 001100\ldots)\\
&(010101\ldots, 011001\ldots)\}.
\end{aligned}$$

Más aún, note que x es un punto periódico de periodo 4.

A continuación mostramos un resultado que nos va a permitir mostrar algunas relaciones entre dos sistemas dinámicos y el sistema dinámico producto que inducen.

Proposición 3.9. Sean (X, f), (Y, g) sistemas dinámicos, $U \subset X$ y $V \subset Y$ subconjuntos abiertos no vacíos. Para todo $\delta > 0$ se cumple que $N_f(U, \delta) \cup N_g(V, \delta) \subset N_{f\times g}(U \times V, \delta)$.

Demostración. Sea $n \in N_f(U, \delta) \cup N_f(V, \delta)$. Sin pérdida de generalidad supongamos que $n \in N_f(U, \delta)$. Luego, existen $u_1, u_2 \in U$ tales que $d_1(f^n(u_1), f^n(u_2)) > \delta$. Por otro lado, sea $v_1 \in V$ y consideremos $(u_1, v_1), (u_2, v_1) \in U \times V$. Notemos:

$$\begin{aligned}
d((f \times g)^n((u_1, v_1)), (f \times g)^n((u_2, v_1))) &= d((f^n(u_1), g^n(v_1)), (f^n(u_2), g^n(v_1)))\\
&= \sqrt{d_1^2(f^n(u_1), f^n(u_2)) + d_2^2(g^n(v_1), g^n(v_1))}\\
&\geq \sqrt{d_1^2(f^n(u_1), f^n(u_2))}\\
&\geq d_1(f^n(u_1), f^n(u_2)) > \delta.
\end{aligned}$$

De aquí, $\text{diám}((f \times g)^n(U \times V)) > \delta$. Así, $n \in N_{f\times g}(U \times V, \delta)$. Por lo tanto,

$$N_f(U, \delta) \cup N_f(V, \delta) \subset N_{f\times g}(U \times V, \delta).$$

■

3.1. Sensibilidad en el sistema producto

El Teorema 3.10, nos muestra cuándo un sistema dinámico producto es sensible, dependiendo de la sensibilidad en cada factor.

Teorema 3.10. Sean (X, f) y (Y, g) sistemas dinámicos. Se cumple que:

1. Si (X, f) o (Y, g) es sensible, entonces $(X \times Y, f \times g)$ es sensible.
2. Si $(X \times Y, f \times g)$ es sensible, entonces (X, f) o (Y, g) es sensible.

Demostración. Primero verifiquemos 1. Sin pérdida de generalidad supongamos que (X, f) es sensible con ε la constante de sensibilidad. Sean $p = (x, y) \in X \times Y$ y $\delta > 0$. Pongamos $W = B(p, \delta)$, luego existen $U \subset X$ y $V \subset Y$ abiertos no vacíos tales que $U \times V \subseteq W$. Como (X, f) es sensible, existe $x' \in U$ y $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(f^n(x), f^n(x')) > \varepsilon.$$

Note que para todo $y' \in V$ se tiene que $p' = (x', y') \in W$. Luego,

$$\begin{aligned} d((f \times g)^n(p), (f \times g)^n(p')) &= d((f \times g)^n(x, y), (f \times g)^n(x', y')) \\ &= d((f^n(x), g^n(y)), (f^n(x'), g^n(y'))) \\ &= \sqrt{d^2(f^n(x), f^n(x')) + d^2(g^n(y), g^n(y'))} \\ &\geq d(f^n(x), f^n(x')) > \varepsilon. \end{aligned}$$

Por lo tanto, el sistema dinámico $(X \times Y, f \times g)$ es sensible con constante de sensibilidad ε. Ahora probemos 2. Supongamos que ni (X, f) y ni (Y, g) son sensibles. Luego, para todo $\varepsilon > 0$ existen $x_0 \in X$ y $\delta_1 > 0$, tal que para todo $x \in B(x_0, \delta_1)$ y para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$d(f^n(x_0), f^n(x)) < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3.1}$$

De manera similar, para todo $\varepsilon > 0$ existen $y_0 \in Y$ y $\delta_2 > 0$, tal que para todo $y \in B(y_0, \delta_2)$ y para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$d(g^n(y_0), g^n(y)) < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3.2}$$

Sean $p = (x_0, y_0)$ y $\delta = \text{mín}\{\delta_1, \delta_2\}$. Consideremos $W = B(x_0, \delta) \times B(y_0, \delta)$, notemos que para todo $(x, y) \in W$ se tiene que:

$$\begin{aligned} d((f \times g)^n((x_0, y_0)), (f \times g)^n((x, y))) &= d((f^n(x_0), g^n(y_0)), (f^n(x), g^n(y))) \\ &= \sqrt{d^2(f^n(x_0), f^n(x)) + d^2(g^n(y_0), g^n(y))} \\ &< \sqrt{\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2 + \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Con esto resulta que el sistema dinámico $(X \times Y, f \times g)$ no es sensible. ■

Por el Teorema 3.10 y por el Ejemplo 2.2, se obtiene el siguiente resultado.

Corolario 3.11. El sistema dinámico $(\Sigma_2 \times S^1, \sigma \times R_\alpha)$ es sensible.

Como consecuencia del Corolario 3.11 y del Lema 2.41 se obtiene el siguiente resultado.

Corolario 3.12. El sistema dinámico $(\Sigma_2 \times S^1, \sigma \times R_\alpha)$ es $\mathcal{B}$-sensible.

Por el Teorema 3.10 y por el Ejemplo 2.5, se obtiene el siguiente corolario.

Corolario 3.13. El sistema dinámico $([0, 1] \times [0, 1], T \times L)$ es sensible.

Por el Corolario 3.13 y por el Lema 2.41 se obtiene el siguiente corolario.

Corolario 3.14. El sistema dinámico $([0, 1] \times [0, 1], T \times L)$ es $\mathcal{B}$-sensible.

En seguida mostramos un resultado que nos da condición para que el espacio producto infinito sea sensible.

Teorema 3.15. Sea (X, f) un sistema dinámico. Se cumple que $\left(\prod_{i=1}^{\infty} X, \prod_{i=1}^{\infty} f\right)$ es sensible si y solo si (X, f) es sensible.

Demostración. Supongamos que $\left(\prod_{i=1}^{\infty} X, \prod_{i=1}^{\infty} f\right)$ es sensible con ε constante de sensibilidad. Veamos que (X, f) es sensible. Sean $x \in X$ y $\delta > 0$. Consideremos $z = xxx\ldots$ y $\frac{\delta}{2}$. Por hipótesis, existen $w \in B(z, \frac{\delta}{2})$ y $n \in \mathbb{N}$ tales que $D(f^n(x), f^n(y)) > \varepsilon$. Como $D(z, w) < \frac{\delta}{2}$, se tiene que $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{d(z_i,w_i)}{2^i} < \frac{\delta}{2}$, esto implica que $d(z_1, w_1) < \delta$. De aquí, $w = yxx\ldots$, para algún $y \in X$. Así, $d(x, y) < \delta$, es decir, $y \in B(x, \delta)$. Por otro lado, puesto que $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{d(f^n(z_i),f^n(w_i))}{2^i} > \varepsilon$ se obtiene que $\frac{d(f^n(z_1),f^n(w_1))}{2} > \varepsilon$. Luego, $d(f^n(x), f^n(y)) > 2\varepsilon$. Por lo tanto, (X, f) es sensible con constante de sensibilidad 2ε.
Ahora supongamos que (X, f) es sensible con constante de sensibilidad ε. Sean $x = (x_1, x_2, \ldots) \in \prod_{i=1}^{\infty} X$ y $\delta > 0$. Por hipótesis, para cada x_i, existen $y_i \in B(x_i, \delta)$ y $n_i \in \mathbb{N}$, tales que $d(f^{n_i}(x_i), f^{n_i}(y_i)) > \varepsilon$. Luego, $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{d(f^{n_1}(x_i),f^{n_1}(y_i))}{2^i} > \dfrac{\varepsilon}{2}$. Haciendo $y = (y_1, y_2, \ldots)$. Tenemos que

$$D(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{d(x_i, y_i)}{2^i} < \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\delta}{2^i} = \delta.$$

Así, $y \in B(x, \delta)$. Además, $D\left(\prod_{i=1}^{\infty} f^{n_1}(x), \prod_{i=1}^{\infty} f^{n_1}(y)\right) > \frac{\varepsilon}{2}$. Por lo tanto, $\left(\prod_{i=1}^{\infty} X, \prod_{i=1}^{\infty} f\right)$ es sensible con ε constante de sensibilidad. ■

Por el Ejemplo 2.2 y por el Teorema 3.15, se obtiene el siguiente resultado.

Proposición 3.16. Consideremos el sistema dinámico (Σ_2, σ), definido en el Ejemplo 1.49. Se tiene que el sistema dinámico $\left(\prod_{i=1}^{\infty} \Sigma_2, \prod_{i=1}^{\infty} \sigma\right)$ es sensible.

De la Proposición 3.16 y del Lema 2.41 se sigue el siguiente corolario.

Corolario 3.17. El sistema dinámico $\left(\prod_{i=1}^{\infty} \Sigma_2, \prod_{i=1}^{\infty} \sigma\right)$ es $\mathcal{B}$-sensible.

Por la Proposición 2.5 y por el Teorema 3.15 obtenemos el siguiente resultado.

Proposición 3.18. Consideremos el sistema dinámico $([0, 1], T)$, definido en el Ejemplo 1.50. El sistema dinámico $\left(\prod_{i=1}^{\infty}[0, 1], \prod_{i=1}^{\infty} T\right)$ es sensible.

Por la Proposición 3.18 y por el Lema 2.41 se obtiene el siguiente corolario.

Corolario 3.19. El sistema dinámico $\left(\prod_{i=1}^{\infty}[0, 1], \prod_{i=1}^{\infty} T\right)$ es $\mathcal{B}$-sensible.

Por el Ejemplo 2.7 y por el Teorema 3.15 se obtiene la siguiente proposición.

Proposición 3.20. Consideremos el sistema dinámico $([0, 1], L)$, definido en el Ejemplo 1.51. El sistema dinámico $\left(\prod_{i=1}^{\infty}[0, 1], \prod_{i=1}^{\infty} L\right)$ es sensible.

Por la Proposición 3.20 y por el Lema 2.41 se obtiene el siguiente corolario.

Corolario 3.21. El sistema dinámico $\left(\prod_{i=1}^{\infty}[0, 1], \prod_{i=1}^{\infty} L\right)$ es $\mathcal{B}$-sensible.

3.2. Otros tipos de sensibilidad en el sistema producto

En esta sección mencionamos algunas propiedades que se presentan en la dinámica de un sistema dinámico producto, propiedades como cofinitamente sensible, gruesamente sensible, sindéticamente sensible y otros tipos de sensibilidad.

Lema 3.22. Sean (X, f) y (Y, g) sistemas dinámicos. Si (X, f) o (Y, g) es cofinitamente sensible, entonces $(X \times Y, f \times g)$ es cofinitamente sensible.

Demostración. Sin pérdida de generalidad, supongamos que (X, f) es cofinitamente sensible, es decir, existe $\delta_0 > 0$ tal que para todo $A \subset X$ abierto no vacío, se tiene que $N_f(A, \delta_0)$ es cofinito. Sean $\delta = \delta_0$ y $W \subset X \times Y$ abierto no vacío. Luego, existen $U \subset X$ y $V \subset Y$ abiertos no vacíos tales que $U \times V \subset W$. Notemos, por la Proposición 3.9 se tiene que:

$$N_f(U, \delta_0) \subset N_f(U, \delta_0) \cup N_g(V, \delta_0) \subset N_{f\times g}(U \times V, \delta_0).$$

Luego, por hipótesis se tiene que $N_f(U, \delta_0)$ es cofinito. Así, por la Proposición 1.3, resulta que $N_{f\times g}(U \times V, \delta_0)$ es cofinito. Por otro lado, como $U \times V \subset W$, por la Observación 1.56, se tiene que $N_{f\times g}(U \times V, \delta_0) \subset N_{f\times g}(W, \delta_0)$. Y puesto que $N_{f\times g}(U \times V, \delta_0)$ es cofinito, nuevamente por la Proposición 1.3 concluimos que $N_{f\times g}(W, \delta_0)$ es cofinito. Por lo tanto, $(X \times Y, f \times g)$ es cofinitamente sensible. ■

Como consecuencia del Lema 3.22, se obtienen los siguientes ejemplos.

Ejemplo 3.23. Consideremos el sistema dinámico definido en el Ejemplo 1.50. De la Proposición 2.5, se obtiene que $([0, 1] \times [0, 1], T \times T)$ es cofinitamente sensible.

Ejemplo 3.24. Consideremos el sistema dinámico definido en el Ejemplo 1.51. De la Proposición 2.7, se obtiene que $([0, 1] \times [0, 1], L \times L)$ es cofinitamente sensible.

Ejemplo 3.25. Consideremos los sistemas dinámicos definidos en el Ejemplo 1.50 y en el Ejemplo 1.52. De la Proposición 2.5, se obtiene que $([0, 1] \times S^1, T \times R_\alpha)$ es cofinitamente sensible.

Ejemplo 3.26. Consideremos los sistemas dinámicos definidos en el Ejemplo 1.51 y en el Ejemplo 1.52. De la Proposición 2.7, se obtiene que $([0, 1] \times S^1, L \times R_\alpha)$ es cofinitamente sensible.

Ejemplo 3.27. Consideremos los sistemas dinámicos definidos en el Ejemplo 1.49 y en el Ejemplo 1.50. El sistema dinámico $(\Sigma_2 \times [0, 1], \sigma \times T)$ es cofinitamente sensible.

El recíproco del Lema 3.22 no se cumple. En [34, Ejemplo 4] puede encontrar un ejemplo en el cual un sistema dinámico $(X \times Y, f \times g)$ es cofinitamente sensible, pero ni (X, f) ni (Y, g) son cofinitamente sensible.

Proposición 3.28. Existen sistemas dinámicos (X, f) y (Y, g) tales que $(X \times Y, f \times g)$ es cofinitamente sensible y ni (X, f) ni (Y, g) es cofinitamente sensible.

Lema 3.29. Sean (X, f) y (Y, g) sistemas dinámicos. Si (X, f) o (Y, g) es gruesamente sensible, entonces $(X \times Y, f \times g)$ es gruesamente sensible.

Demostración. Sin pérdida de generalidad, supongamos que (X, f) es gruesamente sensible. Esto es, existe $\delta_0 > 0$ tal que para todo $A \subset X$ se tiene que $N_f(A, \delta_0)$ es grueso. Pongamos $\delta = \delta_0$ y sea $W \subset X \times Y$ abierto no vacío. Luego, existen $U \subset X$ y $V \subset Y$ abiertos no vacíos tales que $U \times V \subset W$. Por la Proposición 3.9, obtenemos que:

$$N_f(U, \delta_0) \subset N_f(U, \delta_0) \cup N_g(V, \delta_0) \subset N_{f\times g}(U \times V, \delta_0).$$

Luego, por hipótesis se tiene que $N_f(U, \delta_0)$ es grueso. Así, por la Proposición 1.3 obtenemos que $N_{f\times g}(U \times V, \delta_0)$ es grueso. Por otro lado, como $U \times V \subset W$, por la Observación 1.56 se tiene que $N_{f\times g}(U \times V, \delta_0) \subset N_{f\times g}(W, \delta_0)$. Luego, como $N_{f\times g}(U \times V, \delta_0)$ es grueso aplicando nuevamente la Proposición 1.3 se concluye que $N_{f\times g}(W, \delta_0)$ es grueso. Por lo tanto, $(X \times Y, f \times g)$ es gruesamente sensible. ■

Como consecuencia del Lema 3.29, se obtienen los siguientes ejemplos.

Ejemplo 3.30. Consideremos el sistema dinámico definido en Ejemplo 1.50. De la Proposición 2.5, se obtiene que $([0, 1] \times [0, 1], T \times T)$ es gruesamente sensible.

Ejemplo 3.31. Consideremos el sistema dinámico definido en Ejemplo 1.51. De la Proposición 2.7, se obtiene que $([0, 1] \times [0, 1], L \times L)$ es gruesamente sensible.

Ejemplo 3.32. Consideremos los sistemas dinámicos definidos en el Ejemplo 1.50 y en el Ejemplo 1.52. De la Proposición 2.5, se obtiene que $([0, 1] \times S^1, T \times R_\alpha)$ es gruesamente sensible.

Ejemplo 3.33. Consideremos los sistemas dinámicos definidos en el Ejemplo 1.51 y en el Ejemplo 1.52. De la Proposición 2.7, se obtiene que $([0, 1] \times S^1, L \times R_\alpha)$ es gruesamente sensible.

Ejemplo 3.34. Consideremos los sistemas dinámicos definidos en el Ejemplo 1.49 y en el Ejemplo 1.51. El sistema dinámico $(\Sigma_2 \times [0, 1], \sigma \times L)$ es gruesamente sensible.

Lema 3.35. Sean (X, f) y (Y, g) sistemas dinámicos. Si (X, f) o (Y, g) es sindéticamente sensible, entonces $(X \times Y, f \times g)$ es sindéticamente sensible.

Demostración. Sin pérdida de generalidad, supongamos que (X, f) es sindéticamente sensible, es decir, existe $\delta_0 > 0$ tal que para todo $A \subset X$ abierto no vacío se tiene que $N_f(A, \delta_0)$ es sindético. Probemos que $(X \times Y, f \times g)$ es sindéticamente sensible. Sean $\delta = \delta_0$ y $W \subset X \times Y$ abierto no vacío. Luego, existen $U \subset X$ y $V \subset Y$ abiertos no vacíos tales que $U \times V \subset W$. Veamos que $N_{f\times g}(U \times V, \delta)$ es sindético. Por la Proposición 3.9, se tiene que

$$N_f(U, \delta_0) \subset N_f(U, \delta_0) \cup N_g(V, \delta_0) \subset N_{f\times g}(U \times V, \delta_0).$$

Luego, por hipótesis se tiene que $N_f(U, \delta_0)$ es sindético. Así, por la Proposición 1.3 obtenemos que $N_{f\times g}(U \times V, \delta)$ es sindético. Por otro lado, como $U \times V \subset W$, por la Observación 1.56 se tiene que $N_{f\times g}(U \times V, \delta_0) \subset N_{f\times g}(W, \delta_0)$. Así, puesto que $N_{f\times g}(U \times V, \delta_0)$ es sindético, por la Proposición 1.3 obtenemos que $N_{f\times g}(W, \delta_0)$ es sindético. Por lo tanto, $(X \times Y, f \times g)$ es sindéticamente sensible. ■

Como consecuencia del Lema 3.35, se obtienen los siguientes ejemplos.

Ejemplo 3.36. Consideremos el sistema dinámico definido en Ejemplo 1.50. De la Proposición 2.6, se obtiene que $([0, 1] \times [0, 1], T \times T)$ es sindéticamente sensible.

Ejemplo 3.37. Consideremos el sistema dinámico definido en Ejemplo 1.51. De la Proposición 2.8, se obtiene que $([0,1] \times [0,1], L \times L)$ es sindéticamente sensible.

Ejemplo 3.38. Consideremos los sistemas dinámicos definidos en el Ejemplo 1.50 y en el Ejemplo 1.52. De la Proposición 2.6, se obtiene que $([0,1] \times S^1, T \times R_\alpha)$ es sindéticamente sensible.

Ejemplo 3.39. Consideremos los sistemas dinámicos definidos en el Ejemplo 1.51 y en el Ejemplo 1.52. De la Proposición 2.8, se obtiene que $([0,1] \times S^1, L \times R_\alpha)$ es sindéticamente sensible.

El recíproco del Lema 3.35 no se cumple, en [34, Ejemplo 4], puede encontrar un ejemplo en el cual el sistema $(X \times Y, f \times g)$ es sindéticamente sensible, pero ni el sistema (X, f) ni el sistema (Y, g) son sindéticamente sensible.

Proposición 3.40. Existen sistemas dinámicos (X, f) y (Y, g) tales que $(X \times Y, f \times g)$ es sindéticamente sensible pero ni (X, f) ni (Y, g) es sindéticamente sensible.

Lema 3.41. Sean (X, f) y (Y, g) sistemas dinámicos. Si (X, f) o (Y, g) es gruesamente sindéticamente sensible, entonces $(X \times Y, f \times g)$ es gruesamente sindéticamente sensible.

Demostración. Sin pérdida de generalidad supongamos que (X, f) es gruesamente sindéticamente sensible. Luego, existe $\delta_0 > 0$ tal que para cualquier $A \subset X$ abierto no vacío, $N_f(A, \delta_0)$ es gruesamente sindético. Sean $\delta = \delta_0$ y $W \subset X \times Y$ abierto no vacío. Luego, existen $U \subset X$ y $V \subset Y$ abiertos no vacíos tales que $U \times V \subset W$. Notemos que, por la Proposición 3.9, se tiene que

$$N_f(U, \delta_0) \subset N_f(U, \delta_0) \cup N_g(V, \delta_0) \subset N_{f \times g}(U \times V, \delta_0).$$

Por hipótesis, $N_f(U, \delta_0)$ es gruesamente sindético. Con esto, por la Proposición 1.3 obtenemos que $N_{f\times g}(U \times V, \delta)$ es gruesamente sindético. Por otro lado, puesto que $U \times V \subset W$, por la Observación 1.56 se obtiene que $N_{f\times g}(U \times V, \delta_0) \subset N_{f\times g}(W, \delta_0)$. Finalmente, por la Proposición 1.3 y puesto que $N_{f\times g}(U \times V, \delta)$ es gruesamente sindético, concluimos que $N_{f\times g}(U \times V, \delta)$ es gruesamente sindético. Por lo tanto, $(X \times Y, f \times g)$ es gruesamente sindéticamente sensible. ■

Como consecuencia de la Proposición 2.7 y el Lema 3.41, se obtiene el siguiente corolario.

Corolario 3.42. Consideremos los sistemas dinámicos definidos en el Ejemplo 1.50 y en el Ejemplo 1.51. El sistema dinámico $([0,1] \times [0,1], T \times L)$ es gruesamente sindéticamente sensible.

Como consecuencia del Lema 3.41, se obtiene el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.43. Consideremos el sistema dinámico definido en Ejemplo 1.50. De la Proposición 2.5, se obtiene que $([0,1] \times [0,1], T \times T)$ es gruesamente sindéticamente sensible.

Ejemplo 3.44. Consideremos el sistema dinámico definido en Ejemplo 1.51. De la Proposición 2.7, se obtiene que $([0,1] \times [0,1], L \times L)$ es gruesamente sindéticamente sensible.

Ejemplo 3.45. Consideremos el sistema dinámico definido en Ejemplo 1.50 y Ejemplo 1.49. De la Proposición 2.5, se obtiene que $([0,1] \times \Sigma_2, T \times \sigma)$ es gruesamente sindéticamente sensible.

Ejemplo 3.46. Consideremos los sistemas dinámicos definidos en Ejemplo 1.51 y Ejemplo 1.49. De la Proposición 2.7, se obtiene que $([0,1] \times \Sigma_2, L \times \sigma)$ es gruesamente sindéticamente sensible.

Teorema 3.47. Sean (X, f) y (Y, g) sistemas dinámicos. Se tiene que $(X \times Y, f \times g)$ es multisensible si y sólo si (X, f) o (Y, g) es multisensible.

Demostración. Supongamos que $(X \times Y, f \times g)$ es multisensible, con ε_0 constante de multisensibilidad. Supongamos también que (X, f) y (Y, g) no son multisensibles. Luego, para ε_0 existen $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}_+$ y subconjuntos abiertos no vacíos $U_1, \ldots, U_{k_1} \subset X, V_1, \ldots, V_{k_2} \subset Y$ tales que para todo $n \in \mathbb{Z}_+$ existen $i_n \in \{1, \ldots, k_1\}$ y $j_n \in \{1, \ldots, k_2\}$ de tal manera que

$$\text{diám}(f^n(U_{i_n})) \leq \frac{\varepsilon_0}{2} \quad \text{y} \quad \text{diám}(f^n(V_{j_n})) \leq \frac{\varepsilon_0}{2}. \tag{3.3}$$

Por otro lado, sean $W_{i,j} = U_i \times V_j$ con $i \in \{1, \ldots, k_1\}, j \in \{1, \ldots, k_2\}$. Note que $W_{i,j} \subset X \times Y$ es abierto no vacío. Como $(X \times Y, f \times g)$ es multisensible existe $m \in \mathbb{Z}_+$ tal que para cualquier $i \in \{1, \ldots, k_1\}, j \in \{1, \ldots, k_2\}$ se tiene que

$$\varepsilon_0 < \text{diám}\left((f \times g)^m(W_{i,j})\right) = \text{diám}(f^m(U_i) \times f^m(V_j)).$$

Luego, de (3.3), se tiene que

$$\varepsilon_0 < \text{diám}(f^m(U_{i_n}) \times f^m(V_{j_m})) \leq \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_0}{2}\right)^2 + \left(\frac{\varepsilon_0}{2}\right)^2} = \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{2}},$$

lo cual es una contradicción. Por lo tanto, (X, f) o (Y, g) es multisensible.
Ahora supongamos que (X, f) o (Y, g) es multisensible. Sin pérdida de generalidad supongamos que (X, f) es multisensible con ε_0 constante de multisensibilidad. Sean $\varepsilon = \varepsilon_0$ y $W_1, \ldots, W_k \subset X \times Y$ subconjuntos abiertos no vacíos. Luego, existen subconjuntos abiertos no vacíos $U_1, \ldots, U_k \subset X$ y $V_1, \ldots, V_k \subset Y$ tales que $U_i \times V_i \subset W_i$, para todo $i \in \{1, \ldots, k\}$. Como (X, f) es multisensible, existe $n \in \mathbb{Z}_+$, tal que $\text{diám}(f^n(U_i)) > \varepsilon$, para todo $i \in \{1, \ldots, k\}$. De aquí, resulta que $n \in N_f(U_i, \varepsilon)$, para todo $i \in \{1, \ldots, k\}$. Por otro lado, por la Proposición 3.9, se tiene que

$$N_f(U_i, \varepsilon) \subset N_f(U_i, \varepsilon) \cup N_g(V_i, \varepsilon) \subset N_{f \times g}(U_i \times V_i, \varepsilon).$$

De aquí, $n \in N_{f \times g}(U_i \times V_i, \varepsilon)$, para todo $i \in \{1, \ldots, k\}$. Con esto, $\text{diám}((f \times g)^n(U_i \times V_i)) > \varepsilon$, para todo $i \in \{1, \ldots, k\}$. Por lo tanto, $(X \times Y, f \times g)$ es multisensible. ■

Por el Teorema 3.47 y la Proposición 2.5, se obtienen los siguientes ejemplos.

Ejemplo 3.48. El sistema dinámico $([0, 1] \times [0, 1], T \times \sigma)$ es multisensible.

Ejemplo 3.49. El sistema dinámico $([0, 1] \times [0, 1], T \times L)$ es multisensible.

Por el Teorema 3.47 y la Proposición 2.7, obtenemos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.50. El sistema dinámico $([0, 1] \times [0, 1], L \times \sigma)$ es multisensible.

Una prueba para la Proposición 3.51, la puede revisar en [20, Lema 3.3].

Proposición 3.51. Sean (X, f) y (Y, g) sistemas dinámicos. El sistema dinámico $(X \times Y, f \times g)$ es ergódicamente sensible si y sólo si (X, f) o (Y, g) es ergódicamente sensible.

Como consecuencia de la Proposición 2.39 y de la Proposición 3.51 se obtiene el siguiente corolario.

Corolario 3.52. Consideremos los sistemas dinámicos $([0,1],T)$ y (Σ_2,σ). Se tiene que el sistema dinámico $([0,1]\times\Sigma_2, T\times\sigma)$ es ergódicamente sensible.

De la Proposición 2.40 y de la Proposición 3.51 se obtienen los siguientes resultados.

Corolario 3.53. Consideremos los sistemas dinámicos $([0,1],L)$ y (Σ_2,σ). Se tiene que el sistema dinámico $([0,1]\times\Sigma_2, L\times\sigma)$ es ergódicamente sensible.

Corolario 3.54. Consideremos los sistemas dinámicos $([0,1],T)$ y (S^1,R_α). Se tiene que el sistema dinámico $([0,1]\times S^1, T\times R_\alpha)$ es ergódicamente sensible.

Terminamos este capítulo resumiendo en el Cuadro 3.1 las relaciones que se tienen entre los sistemas dinámicos (X,f),(Y,g) y $(X\times Y, f\times g)$. Cabe mencionar que para los recuadros que aparecen en blanco son propiedades que hasta el 2012 no se tiene una respuesta a cierta implicación. Para más detalles puede revisar [20].

Propiedad	$\boldsymbol{f}$ **ó** $\boldsymbol{g \Longrightarrow f\times g}$	$\boldsymbol{f\times g \Longrightarrow f}$ **ó** $\boldsymbol{g}$
Sensible	sí Teorema 3.10	sí Teorema 3.10
Cofinitamente sensible	sí Lema 3.22	no Proposición 3.28
Gruesamente sensible	sí Lema 3.29	?
Sindéticamente sensible	sí Lema 3.35	no Proposición 3.40
Gruesamente sindéticamente sensible	sí Lema 3.41	?
Multisensible	sí Teorema 3.47	sí Teorema 3.47
Ergódicamente sensible	sí Teorema 3.51	sí Teorema 3.51

Cuadro 3.1: Relaciones en el sistema dinámico producto.

Capítulo 4

Dinámica colectiva

En este capítulo damos definiciones relacionadas a hiperespacios y funciones inducidas, todo esto a fin de estudiar la dinámica colectiva en los hiperespacios. Y ver la relación entre la dinámica puntual y la dinámica colectiva. En este apartado discutimos algunas propiedades que se heredan de un espacio dado a su hiperespacio o viceversa. En particular estudiamos a los hiperespacios 2^X y $2^{X\times Y}$ dotados con la topología de vietoris.

4.1. Topología de Vietoris. Métrica de Hausdorff

Sea (X,τ) un espacio topológico. Un *hiperespacio de* X es una colección específica de subconjuntos de X, dotado con alguna topología. En este caso con la topología de Vietoris, que enunciaremos más adelante. En esta tesis restringiremos el estudio de los hiperespacios cuando X es un espacio métrico compacto. A continuación mencionamos algunos de los hiperespacios más conocidos. En este trabajo analizaremos al hiperespacio 2^X.

- $\mathcal{CL}(X)=\{A\subset X : A$ es cerrado en X y no vacío$\}$.
- $2^X=\{A\subset X : A$ es compacto en X y no vacío$\}$.
- $\mathcal{F}_n(X)=\{A\subset X : 1\leq |A|\leq n\}$.

Denotamos como $\mathcal{F}(X)=\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{F}_n(X)$.

En la Proposición 4.1, definimos una métrica para este hiperespacio, conocida como *métrica de Hausdorff*, una prueba para dicho resultado se puede consultar en [14, Teorema 2.2].

Proposición 4.1. Sea X un espacio métrico. La función $d_H : 2^X\times 2^X\to\mathbb{R}$, definida como

$$d_H(A,B)=\text{máx}\{\sup_{x\in A}\inf_{y\in B} d(x,y),\sup_{y\in B}\inf_{x\in A} d(x,y)\},$$

para cualesquiera $A,B\in 2^X$, es una métrica para el hiperespacio 2^X.

De la Proposición 4.1, se obtiene el siguiente resultado.

Lema 4.2. Sea X un espacio métrico. Se tiene que $(2^X,d_H)$ es un espacio métrico.

Definición 4.3. Sean $A \in 2^X$ y $\varepsilon > 0$, denotamos y definimos la *bola abierta* con centro en A y radio ε como:

$$B_{d_H}(A, \varepsilon) = \{B \in 2^X : d_H(A, B) < \varepsilon\}.$$

Una prueba para el Teorema 4.4, la puede revisar en [23, Teorema 0.8].

Teorema 4.4. Sea X un espacio métrico. Se tiene que el hiperespacio 2^X es compacto.

Ahora pasamos a definir una topología con la cual dotaremos al hiperespacio 2^X.

Definición 4.5. Sea X un espacio métrico. La *topología de Vietoris* es la topología más pequeña, para 2^X que cumpla las siguientes propiedades:

1. $\{A \in 2^X : A \subset U\} \in \mathcal{T}_V$, para cualquier subconjunto U abierto en X.
2. $\{A \in 2^X : A \subset F\}$ es cerrado respecto a $\mathcal{T}_V$, para todo F cerrado en X.

Dados $A_1, A_2, \ldots, A_k \subset X$ abiertos no vacíos. Definimos la siguiente subfamilia de 2^X:

$$\langle A_1, A_2, \ldots, A_k \rangle = \Big\{ B \in 2^X : B \subset \bigcup_{i=1}^{k} A_i \ \text{ y } \ B \cap A_i \neq \emptyset, \\ \text{para todo } i \in \{1, 2, \ldots, k\} \Big\}.$$

Estas familias son llamados *Vietóricos*.

A continuación, Teorema 4.6, se muestra una base para la topología de Vietoris. Una prueba para dicho resultado se puede consultar en [14, Teorema 1.2].

Teorema 4.6. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico. La colección

$$\mathscr{B}_v = \{\langle A_1, A_2, \ldots, A_k \rangle : k \in \mathbb{N}, U_i \in \mathcal{T} \text{ y } U_i \neq \emptyset, \text{ para cada } i \in \{1, 2, \ldots, k\}\},$$

es una base para la topología de Vietoris.

Observación 4.7. Sea X un espacio métrico. Para cualquier $A_1, A_2, \ldots, A_k \in 2^X$ se cumple que $\langle A_1, A_2, \ldots, A_k \rangle \subset \langle \overline{A_1}, \overline{A_2}, \ldots, \overline{A_k} \rangle$.

Proposición 4.8. Sea X un espacio métrico. Se cumple que $\mathcal{F}(X)$ es denso en 2^X.

Demostración. Sea $U \subset 2^X$ abierto y no vacío. Veamos que $\mathcal{F}(X) \cap U \neq \emptyset$. Como U es abierto en 2^X, existen $A_1, \ldots, A_k \subset X$, subconjuntos abiertos no vacíos, tales que $\langle A_1, \ldots, A_k \rangle \subset U$. Note que $\{A_1, \ldots, A_k\} \in \langle A_1, \ldots, A_k \rangle \subset U$. Así, $\{A_1, \ldots, A_k\} \subset U$. Por otro lado, se tiene que $\{A_1, \ldots, A_k\} \subset \mathcal{F}(X)$. Por lo tanto, $\mathcal{F}(X) \cap U \neq \emptyset$. ■

4.2. Funciones inducidas

Sean X, Y espacios métricos y $f : X \to Y$ una función continua. Definimos la función $2^f : 2^X \to 2^Y$ como:

$$2^f(A) = f(A), \text{ para cada } A \in 2^X.$$

La función 2^f es llamada *función inducida* por f entre 2^X y 2^Y.

En la Proposición 4.9, mostramos que la función inducida es continua.

Proposición 4.9. Sean X, Y espacios métricos y $f : X \to Y$ una función continua. Se tiene que la función inducida $2^f : 2^X \to 2^Y$ es continua.

Demostración. Procederemos usando el punto 2 del Teorema 1.39. Sean $A_1, A_2, \ldots, A_k \subset Y$ abiertos no vacíos. Veamos que $2^{f^{-1}}(\langle A_1, \ldots, A_k \rangle)$ es abierto en 2^X. Puesto que f es continua se tiene que $f^{-1}(A_i)$, es abierto en X para todo $i \in \{1, \ldots, k\}$.
Afirmamos que

$$(2^f)^{-1}(\langle A_1, \ldots, A_k \rangle) = \langle f^{-1}(A_1), \ldots, f^{-1}(A_k) \rangle.$$

En efecto, sea $K \in (2^f)^{-1}(\langle A_1, \ldots, A_k \rangle)$ luego, $2^f(K) \in \langle A_1, \ldots, A_k \rangle$ de donde $f(K) \in \langle A_1, \ldots, A_k \rangle$. Esto implica que

$$f(K) \subset \bigcup_{i=1}^{k} A_i \quad \text{y} \quad f(K) \cap A_i \neq \emptyset \text{ para cada } i \in \{1, \ldots, k\}.$$

De aquí, $K \subset f^{-1}\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right)$. Con esto, $K \subset \bigcup_{i=1}^{k} f^{-1}(A_i)$. Por otro lado, como $f(K) \cap A_i \neq \emptyset$ para todo $i \in \{1, \ldots, k\}$, por la Proposición 1.61, resulta que $K \cap f^{-1}(A_i) \neq \emptyset$, para todo $i \in \{1, \ldots, k\}$. Con esto, $K \in \langle f^{-1}(A_1), \ldots, f^{-1}(A_k) \rangle$. Así,

$$\left(2^f\right)^{-1}(\langle A_1, \ldots, A_k \rangle) \subset \langle f^{-1}(A_1), \ldots, f^{-1}(A_k) \rangle. \tag{4.1}$$

Ahora veamos la otra contención. Sea $K \in \langle f^{-1}(A_1), \ldots, f^{-1}(A_k) \rangle$. Luego,

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{k} f^{-1}(A_i) \quad \text{y} \quad K \cap f^{-1}(A_i) \neq \emptyset, \text{ para todo } i \in \{1, \ldots, k\}.$$

Esto implica que $K \subset f^{-1}\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right)$. Es decir, $2^f(K) = f(K) \subset \bigcup_{i=1}^{k} A_i$. Además, puesto que $K \cap f^{-1}(A_i) \neq \emptyset$, para todo $i \in \{1, \ldots, k\}$, por la Proposición 1.61, se obtiene que $f(K) \cap A_i \neq \emptyset$ para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$. O bien, $2^f(K) \cap A_i \neq \emptyset$ para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$. Con esto se tiene que $2^f(K) \in \langle A_1, \ldots, A_k \rangle$. Así, $K \in \left(2^f\right)^{-1}(\langle A_1, \ldots, A_k \rangle)$. Con todo, resulta que

$$\langle f^{-1}(A_1), \ldots, f^{-1}(A_k) \rangle \subset (2^f)^{-1}(\langle A_1, \ldots, A_k \rangle). \tag{4.2}$$

Así, de (4.1) y (4.2) se concluye que:

$$\left(2^f\right)^{-1}(\langle A_1, \ldots, A_k \rangle) = \langle f^{-1}(A_1), \ldots, f^{-1}(A_k) \rangle.$$

Por lo tanto 2^f es continua. ■

Del Lema 4.2, del Teorema 4.4 y de la Proposición 4.9, se obtiene la Definición 4.10.

Definición 4.10. Sea (X, f) un sistema dinámico. Se dice que el sistema dinámico $(2^X, 2^f)$ *es el sistema dinámico inducido* por (X, f). Donde $2^f : 2^X \to 2^X$ es tal que $2^f(A) = f(A)$, para todo $A \in 2^X$.

Denotamos por 2^{f^n} a la n-ésima iteración de 2^f, es decir $2^{f^n} = (2^f)^n$. A continuación mostramos algunas relaciones que se tiene entre las funciones f y su inducida 2^f.

Lema 4.11. Sea (X, f) un sistema dinámico. Para cualquier subconjunto abierto no vacío U de X y cualquier $n \in \mathbb{Z}_+$, se cumple que $\text{diám}(f^n(U)) = \text{diám}(2^{f^n}(\langle U \rangle))$.

Demostración. Sean $U \subset X$ abierto no vacío y $n \in \mathbb{Z}_+$. Denotemos como $\varsigma = \text{diám}(f^n(U))$ y $\xi = \text{diám}(2^{f^n}(\langle U \rangle))$. Notemos que para todo $x \in U$, $\{x\} \subset U$. Luego $\{x\} \in \langle U \rangle$, para todo $x \in X$. Así,

$$\varsigma = \text{diám}(f^n(\{\{x\} : x \in U\})) = \text{diám}(2^{f^n}(\{\{x\} : x \in U\})) \leq \text{diám}(2^{f^n}(\langle U \rangle)) = \xi.$$

De aquí, $\varsigma \leq \xi$.
Por otro lado, sea $\varepsilon > 0$. Luego, existen $A, B \in \langle U \rangle$ tales que $d_H(2^{f^n}(A), 2^{f^n}(B)) > \xi - \varepsilon$. De donde, existen $a \in A$ y $b \in B$ tales que $\xi - \varepsilon < d(f^n(a), f^n(b)) \leq \varsigma$, esto es $\varsigma > \xi - \varepsilon$, para todo $\varepsilon > 0$. Así, $\varsigma \geq \xi$. Por lo tanto, $\xi = \varsigma$. ■

Proposición 4.12. Sea X un espacio métrico compacto y $f : X \to X$ una función continua. Para cada $A \in 2^X$ y cada $n \in \mathbb{Z}_+$ se cumple que $2^{f^n}(A) = f^n(A)$.

Demostración. Sea $A \in 2^X$. Hagamos la prueba por inducción sobre n. Para el caso base, consideremos $n = 0$. Notemos

$$2^{f^0}(A) = id_{2^X}(A) = A = f^0(A).$$

Ahora supongamos que se cumple para n, es decir,

$$2^{f^n}(A) = f^n(A). \tag{4.3}$$

Veamos que se cumple para $n + 1$. Notemos

$$2^{f^{(n+1)}}(A) = 2^{f^n}(2^f(A)) = 2^{f^n}(f(A)). \tag{4.4}$$

Así, de las ecuaciones (4.3) y (4.4) se obtiene que $2^{f^{(n+1)}}(A) = f^n(f(A)) = f^{n+1}(A)$. ■

Terminamos esta sección definiendo el sistema dinámico inducido por el sistema dinámico $(X \times Y, f \times g)$ más adelante estudiaremos su dinámica.

Definición 4.13. Sean X, Y espacios métricos. El sistema dinámico $(2^{X \times Y}, 2^{f \times g})$ es *el inducido por* $f \times g$, donde

$$2^{f \times g} : 2^{X \times Y} \to 2^{X \times Y}$$

y es tal que $2^{f \times g}(A) = (f \times g)(A)$, para todo $A \in 2^{X \times Y}$.

Denotamos por $2^{(f \times g)^n}$ a la n-ésima iteración de $2^{f \times g}$, es decir $2^{(f \times g)^n} = \left(2^{f \times g}\right)^n$.

4.3. Propiedades del hiperespacio 2^X

Lema 4.14. Sea X un espacio métrico. Para cualesquiera $x \in X$ y $A \in 2^X$, se cumple que $d_H(\{x\}, A) = \sup\{d(x, y) : y \in A\}$.

Demostración. Sean $x \in X$ y $A \in 2^X$. Notemos:

$$\begin{aligned} d_H(\{x\}, A) &= \max\{\sup_{x\in\{x\}} \inf_{y\in A} d(x,y), \sup_{y\in A} \inf_{x\in\{x\}} d(x,y)\} \\ &= \max\{\inf_{y\in A} d(x,y), \sup_{y\in A} d(x,y)\} \\ &= \sup_{y\in A} d(x,y). \end{aligned}$$

■

Proposición 4.15. Sea (X, f) un sistema dinámico. Para todo $U \subset X$ y para toda $\delta > 0$ se cumple que $N_{2^f}(\langle U\rangle, \delta) \subset N_f(U, \delta)$.

Demostración. Sean $U \subset X$ y $\delta > 0$. Sea $n \in N_{2^f}(\langle U\rangle, \delta)$. Luego, existen $A, B \in \langle U\rangle$ tales que $d_H(2^{f^n}(A), 2^{f^n}(B)) > \delta$. Notemos,

$$\delta < d_H(f^n(A), f^n(B)) = \max\{\sup_{x\in f^n(A)} \inf_{y\in f^n(B)} d(x,y), \sup_{y\in f^n(B)} \inf_{x\in f^n(A)} d(x,y)\}.$$

Sin pérdida de generalidad, supongamos que $\max = \sup_{x\in f^n(A)} \inf_{y\in f^n(B)} d(x,y)$. Luego,

$$\delta < \sup_{x\in f^n(A)} \inf_{y\in f^n(B)} d(x,y).$$

Como X es compacto, existe $x_0 \in A$ tal que $\delta < \inf_{y\in f^n(B)} d(f^n(x_0), y)$. De aquí, tomando $y_0 \in B$, se cumple que $\delta < d(f^n(x_0), f^n(y_0))$. Así, $n \in N_f(U, \delta)$. Por lo tanto, $N_{2^f}(\langle U\rangle, \delta) \subset N_f(U, \delta)$. ■

Proposición 4.16. Sean X, Y espacios métricos. Para cualesquiera $A_1, A_2 \subset X$ y $B_1, B_2 \subset Y$, se cumple que $d_H(A_1 \times B_1, A_2 \times B_2) \geq d_H(A_1, A_2)$.

Demostración. Sean $A_1, A_2 \subset X$ y $B_1, B_2 \subset Y$. Notemos que para cualquier $x = (a_1, b_1) \in A_1 \times B_1$ y $y = (a_2, b_2) \in A_2 \times B_2$ se cumple que

$$d(x,y) = \sqrt{(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2} \geq |a_1 - a_2| = d(a_1, a_2). \tag{4.5}$$

Luego, por (4.5), se tiene que

$$\begin{aligned} d_H(A_1 \times B_1, A_2 \times B_2) &= \max\{\sup_{x\in A_1\times B_1} \inf_{y\in A_2\times B_2} d(x,y), \sup_{y\in A_2\times B_2} \inf_{x\in A_1\times B_1} d(x,y)\} \\ &\geq \max\{\sup_{a_1\in A_1} \inf_{a_2\in A_2} d(a_1,a_2), \sup_{a_2\in A_2} \inf_{a_1\in A_1} d(a_1,a_2)\} \\ &= d_H(A_1, A_2). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $d_H(A_1 \times B_1, A_2 \times B_2) \geq d_H(A_1, A_2)$. ■

Lema 4.17. Sean X y Y espacios métricos. Para cualquier $A \in 2^{X\times Y}$ y $\varepsilon > 0$ existen subconjuntos abiertos no vacíos $U_1, \ldots, U_n \subset X$ y $V_1, \ldots, V_n \subset V$ tales que $A \in \langle U_1 \times V_1, \ldots, U_n \times V_n\rangle \subset \langle \overline{U_1 \times V_1}, \ldots, \overline{U_n \times V_n}\rangle \subset B_{d_H}(A, \varepsilon)$.

Demostración. Sean $A \in 2^{X\times Y}$ y $\varepsilon > 0$. Consideremos

$$\mathcal{C} = \left\{ B\left(x, \frac{\varepsilon}{4\sqrt{2}}\right) \times B\left(y, \frac{\varepsilon}{4\sqrt{2}}\right) : (x,y) \in A \right\}.$$

Notemos que $\mathcal{C}$ forma una cubierta abierta para A. Como A es compacto, existen $\{(x_i, y_i) : i \in \{1,\ldots,n\}\} \subset A$ tales que

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{n} \left(B\left(x_i, \frac{\varepsilon}{4\sqrt{2}}\right) \times B\left(y_i, \frac{\varepsilon}{4\sqrt{2}}\right) \right).$$

Observemos que para todo $i \in \{1,\ldots,n\}$ se tiene que $(x_i, y_i) \in A$ entonces

$$A \cap \left(B\left(x_i, \frac{\varepsilon}{4\sqrt{2}}\right) \times B\left(y_i, \frac{\varepsilon}{4\sqrt{2}}\right) \right) \neq \emptyset, \text{ para todo } i \in \{1,\ldots,n\}. \tag{4.6}$$

De donde,

$$A \in \left\langle B\left(x_1, \frac{\varepsilon}{4\sqrt{2}}\right) \times B\left(y_1, \frac{\varepsilon}{4\sqrt{2}}\right), \ldots, B\left(x_n, \frac{\varepsilon}{4\sqrt{2}}\right) \times B\left(y_n, \frac{\varepsilon}{4\sqrt{2}}\right) \right\rangle.$$

Ahora sea

$$B \in \left\langle \overline{B\left(x_1, \frac{\varepsilon}{4\sqrt{2}}\right) \times B\left(y_1, \frac{\varepsilon}{4\sqrt{2}}\right)}, \ldots, \overline{B\left(x_n, \frac{\varepsilon}{4\sqrt{2}}\right) \times B\left(y_n, \frac{\varepsilon}{4\sqrt{2}}\right)} \right\rangle,$$

veamos que $B \in B_{d_H}(A, \varepsilon)$. Tomemos $b = (b_1, b_2) \in B$, luego existe $j \in \{1,\ldots,n\}$ tal que $(b_1, b_2) \in \overline{B\left(x_j, \frac{\varepsilon}{4\sqrt{2}}\right) \times B\left(y_j, \frac{\varepsilon}{4\sqrt{2}}\right)}$. Por otro lado, por (4.6) existe $a = (a_1, a_2) \in A$ tal que $(a_1, a_2) \in B\left(x_j, \frac{\varepsilon}{4\sqrt{2}}\right) \times B\left(y_j, \frac{\varepsilon}{4\sqrt{2}}\right)$. Notemos que

$$\begin{aligned}
d((a_1,a_2),(b_1,b_2)) &\leq d((a_1,a_2),(x_j,y_j)) + d((x_j,y_j),(b_1,b_2)) \\
&= \sqrt{d^2(a_1,x_j) + d^2(a_2,y_j)} + \sqrt{d^2(x_j,b_1) + d^2(y_j,b_2)} \\
&< \sqrt{\left(\frac{\varepsilon}{4\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{\varepsilon}{4\sqrt{2}}\right)^2} + \sqrt{\left(\frac{\varepsilon}{4\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{\varepsilon}{4\sqrt{2}}\right)^2} \\
&= 2\sqrt{\frac{\varepsilon^2}{16(2)} + \frac{\varepsilon^2}{16(2)}} \\
&= 2\sqrt{\frac{\varepsilon^2}{16}} = 2\frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2}.
\end{aligned}$$

De aquí, se obtiene que $\text{ínf}_{x\in A} d(x,B) \leq d(a,B) \leq d(a,b) < \dfrac{\varepsilon}{2}$ de donde

$$\sup_{y\in B} \inf_{x\in A} d(x,y) \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon. \tag{4.7}$$

De manera similar se puede verificar que

$$\sup_{y\in B} \inf_{x\in A} d(x,y) \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon. \tag{4.8}$$

Por lo tanto de (4.7) y (4.8), se concluye que $d_H(A, B) < \varepsilon$. Así, $B \in B_{d_H}(A, \varepsilon)$. Con todo,

$$\left\langle \overline{B\left(x_1, \frac{\varepsilon}{4\sqrt{2}}\right) \times B\left(y_1, \frac{\varepsilon}{4\sqrt{2}}\right)}, \ldots, \overline{B\left(x_n, \frac{\varepsilon}{4\sqrt{2}}\right) \times B\left(y_n, \frac{\varepsilon}{4\sqrt{2}}\right)} \right\rangle \subset B_{d_H}(A, \varepsilon).$$

Considerando los conjuntos abiertos $U_i = B(x_i, \frac{\varepsilon}{4\sqrt{2}})$ y $V_i = B(y_i, \frac{\varepsilon}{4\sqrt{2}})$, para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$ obtenemos lo deseado. ■

Lema 4.18. Sean X y Y espacios métricos. Para cualesquiera subconjuntos abiertos no vacíos $U_1, \ldots, U_n \subset X$ y $V_1, \ldots, V_n \subset Y$ y para cualquier $j \in \mathbb{Z}_+$ se cumple que

$$\text{diám}\left(2^{(f\times g)^j}(\langle \overline{U_1 \times V_1}, \ldots, \overline{U_n \times V_n} \rangle)\right) \geq \text{diám}\left(2^{(f\times g)^j}(\langle \overline{U_1}, \ldots, \overline{U_n} \rangle)\right).$$

Demostración. Sean $U_1, \ldots, U_n \subset X$ y $V_1, \ldots, V_n \subset Y$ abiertos no vacíos. Para todo $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tomemos $v_i \in V_i$. Luego, para cualquier $A, B \in \langle \overline{U_1}, \ldots, \overline{U_n} \rangle$ sean $A_i = A \cap \overline{U_i}$ y $B_i = B \cap \overline{U_i}$, $\tilde{A}_i = A_i \times \{v_i\}$, $\tilde{B}_i = B_i \times \{v_i\}$. Se tiene que $A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ y $B = \bigcup_{i=1}^{n} B_i$. Sean $\tilde{A} = \bigcup_{i=1}^{n} \tilde{A}_i$ y $\tilde{B} = \bigcup_{i=1}^{n} \tilde{B}_i$. Observe que $\tilde{A}, \tilde{B} \in \langle \overline{U_1 \times V_1}, \ldots, \overline{U_n \times V_n} \rangle$. Por otro lado, sea $j \in \mathbb{Z}_+$, notemos:

$$\begin{aligned}
d_H\left(2^{(f\times g)^j}\left(\tilde{A}\right), 2^{(f\times g)^j}\left(\tilde{B}\right)\right) &= d_H\left(2^{(f\times g)^j}\left(\bigcup_{i=1}^{n} \tilde{A}_i\right), 2^{(f\times g)^j}\left(\bigcup_{i=1}^{n} \tilde{B}_i\right)\right) \\
&= d_H\left(2^{(f\times g)^j}\left(\bigcup_{i=1}^{n}(A_i \times \{v_i\})\right), 2^{(f\times g)^j}\left(\bigcup_{i=1}^{n}(B_i \times \{v_i\})\right)\right) \\
&= d_H\left(2^{(f\times g)^j}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \times \bigcup_{i=1}^{n}\{v_i\}\right), 2^{(f\times g)^j}\left(\bigcup_{i=1}^{n} B_i \times \bigcup_{i=1}^{n}\{v_i\}\right)\right) \\
&= d_H\left(2^{f^j}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \times 2^{g^j}\left(\bigcup_{i=1}^{n}\{v_i\}\right), 2^{f^j}\left(\bigcup_{i=1}^{n} B_i\right) \times 2^{g^j}\left(\bigcup_{i=1}^{n}\{v_i\}\right)\right). \\
&= d_H\left(2^{f^j}(A) \times 2^{g^j}\left(\bigcup_{i=1}^{n}\{v_i\}\right), 2^{f^j}(B) \times 2^{g^j}\left(\bigcup_{i=1}^{n}\{v_i\}\right)\right).
\end{aligned}$$

Por la Proposición 4.16, se tiene que

$$d_H\left(2^{(f\times g)^j}(\tilde{A}), 2^{(f\times g)^j}(\tilde{B})\right) \geq d_H\left(2^{f^j}(A), 2^{f^j}(B)\right).$$

Esto implica que $\text{diám}\left(2^{(f\times g)^j}(\langle \overline{U_1 \times V_1}, \ldots, \overline{U_n \times V_n} \rangle)\right) \geq \text{diám}\left(2^{(f\times g)^j}(\langle \overline{U_1}, \ldots, \overline{U_n} \rangle)\right)$. ■

4.4. Sensibilidad y otros tipos de sensibilidad sobre el hiperespacio 2^X

Una prueba para el Teorema 4.19, la puede consultar en [24, Teorema 2.1].

Teorema 4.19. Sea (X, f) un sistema dinámico. Los siguientes enunciados son equivalentes:

1. (X, f) es débilmente mezclante.
2. $(2^X, 2^f)$ es débilmente mezclante.
3. $(2^X, 2^f)$ es transitivo.

Como consecuencia del Teorema 4.19 y de la Proposición 1.65, se obtiene el siguiente corolario.

Corolario 4.20. Consideremos el sistema dinámico $([0,1], T)$, definido en el Ejemplo 1.50. El sistema dinámico $(2^{[0,1]}, 2^T)$ es débilmente mezclante y transitivo.

Del Teorema 4.19 y de la Proposición 1.66, se obtiene el siguiente corolario.

Corolario 4.21. Consideremos el sistema dinámico $([0,1], L)$, definido en el Ejemplo 1.51. El sistema dinámico $(2^{[0,1]}, 2^L)$ es débilmente mezclante y transitivo.

Teorema 4.22. Sea (X, f) un sistema dinámico. Se cumple que (X, f) es multisensible si y sólo si existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo $k \in \mathbb{N}$ y $U_1, \ldots, U_k \subset X$ abiertos no vacíos, $\bigcap_{i=1}^{k}\{n \in \mathbb{Z}_+ : \text{diám}(2^{f^n}(\langle U_i \rangle)) > \varepsilon\} \neq \emptyset$.

Demostración. Supongamos que (X, f) es multisensible. Luego, existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo $k \in \mathbb{N}$ y $U_1, \ldots, U_k \subset X$ abiertos no vacíos, $\bigcap_{i=1}^{k}\{n \in \mathbb{Z}_+ : \text{diám}(f^n(U)) > \varepsilon\} \neq \emptyset$. Por el Lema 4.11, se tiene que $\bigcap_{i=1}^{k}\{n \in \mathbb{Z}_+ : \text{diám}(2^{f^n}(\langle U_i \rangle)) > \varepsilon\} = \bigcap_{i=1}^{k}\{n \in \mathbb{Z}_+ : \text{diám}(f^n(U)) > \varepsilon\} \neq \emptyset$, con esto se obtiene el resultado.
Inversamente, supongamos que existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo $k \in \mathbb{N}$ y $U_1, \ldots, U_k \subset X$ abiertos no vacíos, $\bigcap_{i=1}^{k}\{n \in \mathbb{Z}_+ : \text{diám}(2^{f^n}(\langle U_i \rangle)) > \varepsilon\} \neq \emptyset$. Por el Lema 4.11, se tiene que $\bigcap_{i=1}^{k}\{n \in \mathbb{Z}_+ : \text{diám}(2^{f^n}(\langle U_i \rangle)) > \varepsilon\} = \bigcap_{i=1}^{k}\{n \in \mathbb{Z}_+ : \text{diám}(f^n(U)) > \varepsilon\} \neq \emptyset$. Por lo tanto (X, f) es multisensible. ■

Del Teorema 4.22, se obtiene el Corolario 4.23.

Corolario 4.23. Sea (X, f) un sistema dinámico. Si (X, f) es multisensible, entonces $(2^X, 2^f)$ es multisensible.

Como consecuencia del Corolario 4.23 y de la Proposición 2.5, se obtiene el siguiente resultado.

Corolario 4.24. Consideremos el sistema dinámico $([0,1], T)$, definido en el Ejemplo 1.50. El sistema dinámico $(2^{[0,1]}, 2^T)$ es multisensible.

Corolario 4.25. Consideremos el sistema dinámico $([0,1], L)$, definido en el Ejemplo 1.51. El sistema dinámico $(2^{[0,1]}, 2^L)$ es multisensible.

Una prueba para el Teorema 4.26, se puede encontrar en [19, Teorema 3.3].

Teorema 4.26. Sea (X, f) un sistema dinámico. Si $(2^X, 2^f)$ es multisensible, entonces (X, f) es multisensible.

Corolario 4.27. Consideremos el sistema dinámico (S^1, R_α). El sistema dinámico $(2^{S^1}, 2^{R_\alpha})$ no es multisensible.

Demostración. Se sigue del Teorema 4.26, de la figura Figura 2.2 y del Ejemplo 2.3. ■

Una prueba para el Teorema 4.28, la puede revisar en [30, Corolario 2.4].

Teorema 4.28. Sea (X, f) un sistema dinámico. Se tiene que $(2^X, 2^f)$ es sensible si y sólo si (X, f) es colectivamente sensible.

Como consecuencia del Teorema 4.19 y del Teorema 4.28 tenemos el siguiente resultado.

Teorema 4.29. Sea (X, f) un sistema dinámico. Si (X, f) es débilmente mezclante, entonces (X, f) es colectivamente sensible.

Demostración. Supongamos que (X, f) es débilmente mezclante. Por el Teorema 4.19, se tiene que $(2^X, 2^f)$ es débilmente mezclante. De donde, $(2^X, 2^f)$ es sensible. Finalmente, por el Teorema 4.28, concluimos que (X, f) es colectivamente sensible. ■

Nota: Otra prueba para el Teorema 4.29, la puede revisar en [30, Teorema 4.1].

Como consecuencia del Teorema 4.29 y de la Proposición 1.65, se obtiene la siguiente proposición.

Proposición 4.30. Consideremos el sistema dinámico definido en el Ejemplo 1.50. El sistema dinámico $([0, 1], T)$ es colectivamente sensible.

Del Teorema 4.29 y de la Proposición 1.66, se obtiene el siguiente resultado.

Proposición 4.31. Consideremos el sistema dinámico definido en el Ejemplo 1.51. El sistema dinámico $([0, 1], L)$ es colectivamente sensible.

El Teorema 4.32, nos muestra una relación entre un sistema dinámico dado y su sistema dinámico inducido. Detallamos una prueba para dicho resultado. Ver [28, Proposición 2.1].

Teorema 4.32. Sea (X, f) un sistema dinámico. Si $(2^X, 2^f)$ es sensible, entonces (X, f) es sensible.

Demostración. Supongamos que $(2^X, 2^f)$ es sensible, con ε_0 constante de sensibilidad. Probemos que (X, f) es sensible. Sean $\varepsilon = \varepsilon_0$, $x \in X$ y $\delta > 0$. Notemos que $\{x\} \in 2^X$, por hipótesis existen $A \in B(\{x\}, \delta)$ y $n \in \mathbb{N}$ tales que $d_H(2^{f^n}(\{x\}), 2^{f^n}(A)) > \varepsilon_0$. Luego,

$$\varepsilon_0 < d_H(2^{f^n}(\{x\}), 2^{f^n}(A)) = d_H(f^n(\{x\}), f^n(A)) = d_H(\{f^n(x)\}, f^n(A)).$$

Por el Lema 4.14, resulta que

$$\varepsilon_0 < d_H(\{f^n(x)\}, f^n(A)) = \sup_{z \in f^n(A)} d(f^n(x), z).$$

Como X es compacto, existe $z_0 \in f^n(A)$ tal que $d(f^n(x), z_0) > \varepsilon_0$. Además, existe $y_0 \in A$ tal que $z_0 = f^n(y_0)$, de aquí, $d(f^n(x), f^n(y_0)) > \varepsilon_0 = \varepsilon$. Por otro lado, puesto que $A \in B(\{x\}, \delta)$ se tiene que $d_H(\{x\}, A) < \delta$, aplicando el Lema 4.14, se tiene que $d_H(\{x\}, A) = \sup_{y \in A} d(x, y) < \delta$. Es decir, $d(x, y) < \delta$ para todo $y \in A$. Esto implica que $A \subset B(x, \delta)$. De aquí, $y_0 \in B(x, \delta)$ y es tal que $d(f^n(x), f^n(y_0)) > \varepsilon$. Por lo tanto, (X, f) es sensible. ■

Como consecuencia del Ejemplo 2.3 y del Teorema 4.32, se obtiene el siguiente resultado.

Corolario 4.33. El sistema dinámico $(2^{S^1}, 2^{R_\alpha})$ no es sensible.

El recíproco del Teorema 4.32 no se cumple. A continuación enunciamos un ejemplo de un sistema dinámico sensible pero su sistema dinámico inducido no lo es. Para más detalles puede revisar [28, Ejemplo 2.11].

Ejemplo 4.34. Consideremos los sistemas dinámicos (Σ_2, σ) y (S^1, R_α), con $\alpha \in \mathbb{I}$. Consideremos la sucesión $x = \{x_n\}_{n=0}^{\infty}$, dada por

$$x_n = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad 0 \leq R_\alpha^n(e^{2\pi i 0}) < \pi; \\ 1, & \text{si} \quad \pi \leq R_\alpha^n(e^{2\pi i 0}) < 2\pi. \end{cases}$$

La sucesión anterior codifica la trayectoria del punto $e^{2\pi i 0}$. Esta sucesión genera un subshift $(\hat{X}, \sigma)$, donde $\hat{X} = \overline{\{\sigma^n(x) : n \in \mathbb{Z}_+\}}$. Dado que $\hat{X}$ no tiene puntos aislados, por la Proposición 2.9, se obtiene que el sistema dinámico $(\hat{X}, \sigma)$ es sensible, sin embargo, se puede verificar que el sistema dinámico $(2^{\hat{X}}, 2^\sigma)$ no es sensible. Vea [28, Ejemplo 2.11].

Una prueba alternativa del Teorema 4.35 la puede encontrar el [28, Proposición 2.3].

Teorema 4.35. Sea (X, f) un sistema dinámico. Si $(2^X, 2^f)$ es cofinitamente sensible, entonces (X, f) es cofinitamente sensible.

Demostración. Supongamos que $(2^X, 2^f)$ es cofinitamente sensible con δ constante de sensibilidad. Veamos que (X, f) es cofinitamente sensible con constante de sensibilidad δ. Sea $U \subset X$ abierto no vacío. Notemos que $\langle U \rangle \subset X$ es abierto no vacío. Por hipótesis, se tiene que $N_{2^f}(\langle U \rangle, \delta)$ es cofinito. Por la Proposición 4.15, se tiene que $N_{2^f}(\langle U \rangle, \delta) \subset N_f(U, \delta)$. Así, dado que $N_{2^f}(\langle U \rangle, \delta)$ es cofinito, por la Proposición 1.3 punto 2, se tiene que $N_f(U, \delta)$ es cofinito. Por lo tanto, (X, f) es cofinitamente sensible. ■

Teorema 4.36. Sea (X, f) un sistema dinámico. Si $(2^X, 2^f)$ es gruesamente sensible, entonces (X, f) es gruesamente sensible.

Demostración. Supongamos que $(2^X, 2^f)$ es gruesamente sensible con δ constante de sensibilidad. Veamos que (X, f) es gruesamente sensible con constante de sensibilidad δ. Sea $U \subset X$ abierto no vacío. Notemos que $\langle U \rangle \subset X$ es abierto no vacío. Por hipótesis, se tiene que $N_{2^f}(\langle U \rangle, \delta)$ es grueso. Por la Proposición 4.15, se tiene que $N_{2^f}(\langle U \rangle, \delta) \subset N_f(U, \delta)$. Así, dado que $N_{2^f}(\langle U \rangle, \delta)$ es grueso, por la Proposición 1.3 punto 1, se tiene que $N_f(U, \delta)$ es grueso. Por lo tanto, (X, f) es gruesamente sensible. ■

Una prueba para el Teorema 4.37, la puede revisar en [19, Teorema 3.1].

Teorema 4.37. Sea (X, f) un sistema dinámico. Si (X, f) es sindéticamente sensible, entonces $(2^X, 2^f)$ es sindéticamente sensible.

Teorema 4.38. Sea (X, f) un sistema dinámico. Si $(2^X, 2^f)$ es sindéticamente sensible, entonces (X, f) es sindéticamente sensible.

Demostración. Supongamos que $(2^X, 2^f)$ es sindéticamente sensible con constante de sensibilidad δ. Veamos que (X, f) es sindéticamente sensible con constante de sensibilidad δ. Sea $U \subset X$ abierto no vacío. Notemos que $\langle U \rangle \subset X$ es abierto no vacío. Por hipótesis, se tiene que $N_{2^f}(\langle U \rangle, \delta)$ es sindético. Por la Proposición 4.15, se tiene que $N_{2^f}(\langle U \rangle, \delta) \subset N_f(U, \delta)$. Así, dado que $N_{2^f}(\langle U \rangle, \delta)$ es sindético, por la Proposición 1.3 punto 3, se tiene que $N_f(U, \delta)$ es sindético. Por lo tanto, (X, f) es sindéticamente sensible. ■

Teorema 4.39. Sea (X, f) un sistema dinámico. Si $(2^X, 2^f)$ es gruesamente sindéticamente sensible, entonces (X, f) es gruesamente sindéticamente sensible.

Demostración. Supongamos que $(2^X, 2^f)$ es gruesamente sindéticamente sensible con constante de sensibilidad δ. Veamos que (X, f) es sindéticamente sensible con δ constante de sensibilidad. Sea $U \subset X$ abierto no vacío. Notemos que $\langle U \rangle \subset X$ es abierto no vacío. Por hipótesis, se tiene que $N_{2^f}(\langle U \rangle, \delta)$ es gruesamente sindético. Por la Proposición 4.15, se tiene que $N_{2^f}(\langle U \rangle, \delta) \subset N_f(U, \delta)$. Así, dado que $N_{2^f}(\langle U \rangle, \delta)$ es gruesamente sindético, por la Proposición 1.3 punto 4, se tiene que $N_f(U, \delta)$ es gruesamente sindético. Por lo tanto, (X, f) es gruesamente sindéticamente sensible. ■

Una prueba para el Teorema 4.40, la puede revisar en [19, Teorema 3.3].

Teorema 4.40. Sea (X, f) un sistema dinámico. Si $(2^X, 2^f)$ es ergódicamente sensible, entonces (X, f) es ergódicamente sensible.

4.5. $\mathscr{F}$-sensibilidad en el hiperespacio 2^X

En esta sección mostramos propiedades relacionadas con la $\mathscr{F}$-sensibilidad en el hiperespacio 2^X y en el hiperespacio $2^{X \times Y}$. Así como también las relaciones que se tiene entre éstos y su sistema dinámico que lo induce.

Teorema 4.41. Sean (X, f) un sistema dinámico y $\mathscr{F}$ una familia de Furstenberg. Se cumple que (X, f) es $\mathscr{F}$-sensible si y sólo si existe $\varepsilon > 0$ tal que para cualquier subconjunto abierto no vacío U de X, $\{n \in \mathbb{Z}_+ : \text{diám}(2^{f^n}(\langle U \rangle)) > \varepsilon\} \in \mathscr{F}$.

Demostración. Supogamos que (X, f) es $\mathscr{F}$-sensible. Sea $U \subset X$ abierto y no vacío, por hipótesis existe $\varepsilon > 0$ tal que $\{n \in \mathbb{Z}_+ : \text{diám}(f^n(U)) > \varepsilon\} \in \mathscr{F}$. Por el Lema 4.11, resulta que $\{n \in \mathbb{Z}_+ : \text{diám}(2^{f^n}(\langle U \rangle)) > \varepsilon\} = \{n \in \mathbb{Z}_+ : \text{diám}(f^n(U)) > \varepsilon\} \in \mathscr{F}$.
Ahora supongamos que existe $\varepsilon > 0$ tal que para cualquier subconjunto abierto no vacío U de X, $\{n \in \mathbb{Z}_+ : \text{diám}(2^{f^n}(\langle U \rangle)) > \varepsilon\} \in \mathscr{F}$. Por el Lema 4.11, se tiene que $\{n \in \mathbb{Z}_+ : \text{diám}(2^{f^n}(\langle U \rangle)) > \varepsilon\} = \{n \in \mathbb{Z}_+ : \text{diám}(f^n(U)) > \varepsilon\} \in \mathscr{F}$. Por lo tanto (X, f) es $\mathscr{F}$-sensible. ■

Del Teorema 4.41, se obtiene el Corolario 4.42.

Corolario 4.42. Sean (X, f) un sistema dinámico y $\mathscr{F}$ una familia de Furstenberg. Si $(2^X, 2^f)$ es $\mathscr{F}$-sensible, entonces (X, f) es $\mathscr{F}$-sensible.

Teorema 4.43. Sean (X, f) un sistema dinámico y $\mathscr{F}$ filtro dual. Se tiene que (X, f) es $\mathscr{F}$-sensible si y sólo si $(2^X, 2^f)$ es $\mathscr{F}$-sensible.

Demostración. Supongamos que (X, f) es $\mathscr{F}$-sensible, veamos que $(2^X, 2^f)$ es $\mathscr{F}$-sensible. Por la Proposición 4.8, se tiene que $\mathcal{F}(X)$ es denso en 2^X. Así, por la Proposición 2.37 basta verificar para todo $U \subset \mathcal{F}(X)$ se cumple que $\{n \in \mathbb{Z}_+ : \text{diám}(f^n(U)) > \varepsilon\} \in \mathscr{F}$. Sean $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\} \in \mathcal{F}(X)$ y $\delta > 0$. Como (X, f) es $\mathscr{F}$-sensible existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$\{n \in \mathbb{Z}_+ : \text{diám}\,(f^n(B(x_i, \delta/2))) > \varepsilon\} \in \mathscr{F}, \text{ para todo } i \in \{1, 2, \ldots, k\}.$$

Como $\mathscr{F}$ es filtro dual resulta que

$$\Omega = \bigcap_{i=1}^{k} \{n \in \mathbb{Z}_+ : \text{diám}\,(f^n(B(x_i, \delta/2))) > \varepsilon\} \in \mathscr{F}.$$

Luego, para cualquier $n \in \Omega$, existe $(y_1, \ldots, y_k) \in B(x_1, \delta/2) \times \ldots \times B(x_k, \delta/2)$ tal que

$$d(f^n(x_i), f^n(y_i)) > \frac{\varepsilon}{2} \text{ para todo } i \in \{1, \cdots, k\}. \tag{4.9}$$

Sea $B = \{z_1, \ldots, z_k\}$ donde;

$$z_i = \begin{cases} y_i, & \text{si} \quad d(f^n(x_1), f^n(x_i)) \leq \dfrac{\varepsilon}{4}; \\ \\ x_i, & \text{en otro caso.} \end{cases} \tag{4.10}$$

Luego, tomemos $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ y consideremos los siguientes casos:

(i) Si $z_i = y_i$, entonces:

$$d(f^n(x_i), f^n(y_i)) \leq d(f^n(x_i), f^n(x_1)) + d(f^n(x_1), f^n(y_i)).$$

Por (4.9) y por (4.10), se tiene que

$$\frac{\varepsilon}{2} < d(f^n(x_i), f^n(y_i)) \leq \frac{\varepsilon}{4} + d(f^n(x_1), f^n(y_i)).$$

Así,

$$\frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{4} < d(f^n(x_1), f^n(y_i)).$$

(ii) Si $z_i = x_i$, entonces por (4.10), se obtiene que $\dfrac{\varepsilon}{4} < d(f^n(x_1), f^n(x_i))$.

Así, de (I) y (II) se obtiene que $\dfrac{\varepsilon}{4} < d(f^n(x_1), f^n(z_i))$ para todo $i \in \{1, \ldots, k\}$. Notemos:

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon}{4} &< \inf_{z \in B} d(f^n(x_1), f^n(z)) \leq \sup_{x \in A} \inf_{z \in B} d(f^n(x), f^n(z)) \\ &\leq \text{máx}\{\sup_{x \in A} \inf_{z \in B} d(f^n(x), f^n(z)), \sup_{z \in B} \inf_{x \in A} d(f^n(x), f^n(z))\} \\ &= d_H(2^{f^n}(A), 2^{f^n}(B)). \end{aligned}$$

Por otro lado, note que $B \in \mathscr{F}(X)$. Además,

$$\begin{aligned} d_H(A,B) &= \max\{\sup_{x\in A}\inf_{z\in B} d(x,z), \sup_{z\in B}\inf_{x\in A} d(x,z)\} \\ &= \max\{\sup_{x\in A} d(x,B), \sup_{z\in B} d(A,z)\} \\ &\leq \max\left\{\frac{\delta}{2}, \frac{\delta}{2}\right\} \\ &\leq \frac{\delta}{2} < \delta. \end{aligned}$$

De donde, $\Omega \subset \left\{n \in \mathbb{Z}_+ : \text{diám}\left(2^{f^n}(B_{d_H}(A,\delta) \cap \mathscr{F}(X))\right) > \frac{\varepsilon}{4}\right\} \in \mathscr{F}$. Como $\mathscr{F}$ es de Furstenberg concluimos que $\left\{n \in \mathbb{Z}_+ : \text{diám}\left(2^{f^n}(B_{d_H}(A,\delta) \cap \mathscr{F}(X))\right) > \frac{\varepsilon}{4}\right\} \in \mathscr{F}$. Por lo tanto, $(2^X, 2^f)$ es $\mathscr{F}$-sensible.
La otra implicación se obtiene por el Corolario 4.42. ■

Como consecuencia del Teorema 4.43, de la Proposición 2.36, punto 2 y de la Proposición 2.31, se obtiene el siguiente corolario.

Corolario 4.44. Sean (X, f) un sistema dinámico y $\mathscr{F}$ una familia de Furstenberg. Si (X, f) es cofinitamente sensible, entonces $(2^X, 2^f)$ es cofinitamente sensible.

A continuación mostramos que la propiedad de sensibilidad en una gráfica finita es equivalente a su hiperespacio inducido. Para eso es necesario enunciar el Teorema 4.45, una prueba para dicho resultado la puede revisar en [29, Teorema 8].

Teorema 4.45. Sean G una gráfica finita y $f : G \to G$ una función continua. Se cumple que (G, f) es sensible si y sólo si (G, f) tiene pares $k\mathcal{B}$-sensible casi por todas partes.

Corolario 4.46. Sean G una gráfica finita y $f : G \to G$ una función continua. Las condiciones siguientes son equivalentes:

1. (G, f) es sensible.
2. (G, f) es $k\mathcal{B}$-sensible.
3. $(2^G, 2^f)$ es $k\mathcal{B}$-sensible.
4. $(2^G, 2^f)$ es sensible.

Demostración. Notemos, 1 implica 2 se tiene por el Teorema 4.45 y por la Proposición 2.46. Ahora, 2 si y sólo si 3 se obtiene por el Teorema 4.43. Luego, 3 implica 4 se obtiene por la Proposición 2.49. Finalmente, 4 implica 1 se obtiene por el Teorema 4.32. ■

Notemos que el intervalo $[0, 1]$ es una gráfica finita y T una función continua. Así, por el Corolario 4.46 y por la Proposición 2.5 se obtiene el siguiente resultado.

Corolario 4.47. Las condiciones siguientes son verdaderas:

1. $([0, 1], T)$ es $k\mathcal{B}$-sensible.
2. $(2^{[0,1]}, 2^T)$ es $k\mathcal{B}$-sensible.

3. $(2^{[0,1]}, 2^T)$ es sensible.

De manera similar, se tiene que $[0,1]$ es una gráfica finita y L es una función continua. Por el Corolario 4.46 y por la Proposición 2.7 se obtiene el siguiente corolario.

Corolario 4.48. Las condiciones siguientes son verdaderas:

1. $([0,1], L)$ es $k\mathcal{B}$-sensible.
2. $(2^{[0,1]}, 2^L)$ es $k\mathcal{B}$-sensible.
3. $(2^{[0,1]}, 2^L)$ es sensible.

Dado que S^1 es una gráfica finita y R_α es una función continua, por el Corolario 4.46 y el Ejemplo 2.3 se obtiene el siguiente corolario.

Corolario 4.49. Las siguientes condiciones son verdaderas:

1. (S^1, R_α) no es $k\mathcal{B}$-sensible.
2. $(2^{S^1}, 2^{R_\alpha})$ no es $k\mathcal{B}$-sensible.

Teorema 4.50. Sean (X, f) y (Y, g) sistemas dinámicos y sea $\mathscr{F}$ una familia de Furstenberg. Si $(2^X, 2^f)$ o $(2^Y, 2^g)$ es $\mathscr{F}$-sensible, entonces $(2^{X\times Y}, 2^{f\times g})$ es $\mathscr{F}$-sensible.

Demostración. Sin pérdida de generalidad supongamos que $(2^X, 2^f)$ es $\mathscr{F}$-sensible, esto es, existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que para todo $U \subset 2^X$ abierto y no vacío, $\{n \in \mathbb{Z}_+ : \text{diám}(2^{f^n}(U)) > \varepsilon_0\} \in \mathscr{F}$. Veamos que $(2^{X\times Y}, 2^{f\times g})$ es $\mathscr{F}$-sensible. Sea $\varepsilon = \varepsilon_0$ y sea $\mathcal{V} \subset 2^{X\times Y}$ abierto y no vacío. Por el Lema 4.17, existen subconjuntos abiertos no vacíos $U_1, \ldots, U_n \subset X$, $V_1, \ldots, V_n \subset V$ tales que $\langle \overline{U_1 \times V_1}, \ldots, \overline{U_n \times V_n}\rangle \subset \mathcal{V}$. Sea $j \in \mathbb{Z}_+$, por el Lema 4.18, se obtiene que

$$\begin{aligned}
\text{diám}\left(2^{(f\times g)^j}(\mathcal{V})\right) &\geq \text{diám}\left(2^{(f\times g)^j}(\langle \overline{U_1 \times V_1}, \ldots, \overline{U_n \times V_n}\rangle)\right) \\
&\geq \text{diám}\left(2^{f^j}(\langle \overline{U_1}, \ldots, \overline{U_n}\rangle)\right) \\
&\geq \text{diám}\left(2^{f^j}(\langle U_1, \ldots, U_n\rangle)\right)
\end{aligned}$$

Como $\mathscr{F}$ es de Furstenberg y $(2^X, 2^f)$ es $\mathscr{F}$-sensible, entonces

$$\left\{j \in \mathbb{Z}_+ : \text{diám}\left(2^{f^j}(\langle U_1, \ldots, U_n\rangle)\right) > \varepsilon\right\} \subset \left\{j \in \mathbb{Z}_+ : \text{diám}\left(2^{(f\times g)^j}(\mathcal{V})\right) > \varepsilon\right\} \in \mathscr{F}.$$

Por lo tanto, el sistema dinámico $(2^{X\times Y}, 2^{f\times g})$ es $\mathscr{F}$-sensible. ■

Como una consecuencia del Teorema 4.50 y del Corolario 4.47 se obtiene el siguiente resultado.

Corolario 4.51. El sistema dinámico $(2^{[0,1]\times S^1}, 2^{T\times R_\alpha})$ es $k\mathcal{B}$-sensible.

Como una consecuencia del Teorema 4.50 y del Corolario 4.48 se obtiene el siguiente resultado.

Corolario 4.52. El sistema dinámico $(2^{[0,1]\times S^1}, 2^{L\times R_\alpha})$ es $k\mathcal{B}$-sensible.

Teorema 4.53. Sean (X, f) y (Y, g) sistemas dinámicos y $\mathscr{F}$ una familia de furstenberg tal que $k\mathscr{F}$ es un filtro dual. Si $(2^{X\times Y}, 2^{f\times g})$ es $\mathscr{F}$- sensible, entonces (X, f) o (Y, g) es $\mathscr{F}$-sensible.

Demostración. Procedamos por contrarecíproco. Supongamos que (X, f) y (Y, g) no son $\mathscr{F}$-sensibles. Luego, para todo $\varepsilon > 0$ existen $U \subset X$ y $V \subset Y$ tales que

$$\left\{n \in \mathbb{Z}_+ : \text{diám}(f^n(U)) > \frac{\varepsilon}{2}\right\} \notin \mathscr{F} \quad \text{y} \quad \left\{n \in \mathbb{Z}_+ : \text{diám}(f^n(V)) > \frac{\varepsilon}{2}\right\} \notin \mathscr{F}.$$

Sean $F_1 = \mathbb{Z}_+ \setminus \left\{n \in \mathbb{Z}_+ : \text{diám}(f^n(U)) > \frac{\varepsilon}{2}\right\}$ y $F_2 = \mathbb{Z}_+ \setminus \left\{n \in \mathbb{Z}_+ : \text{diám}(f^n(V)) > \frac{\varepsilon}{2}\right\}$. Notemos, como $\mathscr{F}$ es de Furstenberg se tiene que para todo $F \in \mathscr{F}$,

$$F \nsubseteq \left\{n \in \mathbb{Z}_+ : \text{diám}(f^n(U)) > \frac{\varepsilon}{2}\right\} \quad \text{y} \quad F \nsubseteq \left\{n \in \mathbb{Z}_+ : \text{diám}(f^n(V)) > \frac{\varepsilon}{2}\right\}.$$

Esto implica que $F_1 \cap F \neq \emptyset$ y $F_2 \cap F \neq \emptyset$, para todo $F \in \mathscr{F}$. Con esto, $F_1, F_2 \in k\mathscr{F}$. Luego, puesto que $\mathscr{F}$ es filtro dual resulta que $F_1 \cap F_2 \in k\mathscr{F}$. Así, para todo $n \in F_1 \cap F_2$ se tiene que $\text{diám}(f^n(U)) \leq \frac{\varepsilon}{2}$ y $\text{diám}(f^n(V)) \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Usando el Lema 4.11, tenemos que

$$\begin{aligned}
\text{diám}\left(2^{(f\times g)^n}(\langle U \times V\rangle)\right) &= \text{diám}\left((f \times g)^n(U \times V)\right) \\
&= \text{diám}\left((f^n(U) \times g^n(V)\right) \\
&\leq \sqrt{\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2 + \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2} < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Así, $F_1 \cap F_2 \subset \{n \in Z_+ : \text{diám}\left(2^{(f\times g)^n}(\langle U \times V\rangle)\right) < \varepsilon\}$ y como $k\mathscr{F}$ es de Furstenberg se obtiene que $\{n \in Z_+ : \text{diám}\left(2^{(f\times g)^n}(\langle U \times V\rangle)\right) < \varepsilon\} \in k\mathscr{F}$. Por lo cual

$$\{n \in \mathbb{Z}_+ : \text{diám}\left(2^{(f\times g)^n}(\langle U \times V\rangle)\right) \geq \varepsilon\} \notin \mathscr{F}.$$

Dado que ε es arbitrario, concluimos que $(2^{X\times Y}, 2^{f\times g})$ no es $\mathscr{F}$-sensible. ■

Teorema 4.54. Sean (X, f) y (Y, g) sistemas dinámicos. Si $(2^X, 2^f)$ o $(2^Y, 2^g)$ es multisensible entonces $(2^{X\times Y}, 2^{f\times g})$ es multisensible.

Demostración. Sin pérdida de generalidad supongamos que $(2^X, 2^f)$ es multisensible, con ε_0 constante de multisensibilidad. Veamos que $(2^{X\times Y}, 2^{f\times g})$ es multisensible. Sean $\varepsilon = \varepsilon_0$ y $\mathcal{V}_1, \ldots, \mathcal{V}_k \subset 2^{X\times Y}$ abiertos no vacíos. Para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$, por el Lema 4.17, existen subconjuntos abiertos no vacíos $U_{i1}, \ldots, U_{in} \subset X$, $V_{i1}, \ldots, V_{in} \subset Y$ tales que $\langle \overline{U_{i1} \times V_{i1}}, \ldots, \overline{U_{in} \times V_{in}}\rangle \subset \mathcal{V}_i$. Por otro lado, sea $j \in \mathbb{Z}_+$. Por el Lema 4.18, se obtiene que

$$\begin{aligned}
\text{diám}\left(2^{(f\times g)^j}(\mathcal{V}_i)\right) &\geq \text{diám}\left(2^{(f\times g)^j}(\langle \overline{U_{i1} \times V_{i1}}, \ldots, \overline{U_{in} \times V_{in}}\rangle)\right) \\
&\geq \text{diám}\left(2^{f^j}(\langle \overline{U_{i1}}, \ldots, \overline{U_{in}}\rangle)\right) \\
&\geq \text{diám}\left(2^{f^j}(\langle U_{i1}, \ldots, U_{in}\rangle)\right).
\end{aligned}$$

De aquí,

$$\left\{n \in \mathbb{Z}_+ : \text{diám}\left(2^{f^j}(\langle U_{i1}, \ldots, U_{in}\rangle)\right) > \varepsilon\right\} \subset \left\{n \in \mathbb{Z}_+ : \text{diám}\left(2^{(f\times g)^j}(\mathcal{V}_i)\right) > \varepsilon\right\}.$$

Como $(2^X, 2^f)$ es multisensible se tiene que $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{k} \left\{n \in \mathbb{Z}_+ : \text{diám}\left(2^{fj}(\langle U_{i1}, \ldots, U_{in}\rangle)\right) > \varepsilon\right\} \neq \emptyset$, de donde $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{k} \left\{n \in \mathbb{Z}_+ : \text{diám}\left(2^{(f\times g)^j}(\mathcal{V}_i)\right) > \varepsilon\right\} \neq \emptyset$. Por lo tanto, $(2^{X\times Y}, 2^{f\times g})$ es multisensible.

■

Por el Teorema 4.54 y el Corolario 4.24 se obtiene el siguiente corolario.

Corolario 4.55. El sistema dinámico $(2^{[0,1]\times s^1}, 2^{T\times R_\alpha})$ es multisensible.

Por el Teorema 4.54 y el Corolario 4.25 se obtiene el siguiente corolario.

Corolario 4.56. El sistema dinámico $(2^{[0,1]\times s^1}, 2^{L\times R_\alpha})$ es multisensible.

Teorema 4.57. Sean (X, f) y (Y, g) sistemas dinámicos. Si el sistema dinámico $(2^{X\times Y}, 2^{f\times g})$ es sensible, entonces (X, f) o (Y, g) es sensible.

Demostración. Supongamos que $(2^{X\times Y}, 2^{f\times g})$ es sensible. Por el Teorema 4.32, se tiene que $(X\times Y, f\times g)$ es sensible. Luego, por el Teorema 3.10, se tiene que (X, f) o (Y, g) es sensible. ■

Teorema 4.58. Sean (X, f) y (Y, g) sistemas dinámicos. Los siguientes enunciados son equivalentes:

1. $(2^{X\times Y}, 2^{f\times g})$ es multisensible.
2. $(X \times Y, f \times g)$ es multisensible.
3. $(2^X, 2^f)$ o $(2^Y, 2^g)$ es multisensible.
4. (X, f) o (Y, g) es multisensible.

Demostración. Por el Teorema 4.26 y por el Corolario 4.23, se obtiene 1 si y sólo si 2 y 3 si y sólo si 4. Finalmente, por el Teorema 3.47 se obtiene 2 si y sólo si 4. ■

Como consecuencia del Teorema 4.58 y de la Proposición 2.5, se obtiene el siguiente resultado.

Corolario 4.59. Consideremos los sistemas dinámicos $([0, 1], T)$ y (Σ_2, σ), definidos en el Ejemplo 2.5 y Ejemplo 1.49, respectivamente. Las siguientes enunciados son verdaderos:

1. $([0, 1] \times \Sigma_2, T \times \sigma)$ es multisensible.
2. $(2^{[0,1]}, 2^T)$ o $(2^{\Sigma_2}, 2^\sigma)$ es multisensible.
3. $(2^{[0,1]\times\Sigma_2}, 2^{T\times\sigma})$ es multisensible.

Del Teorema 4.58 y de la Proposición 2.7, se obtiene el siguiente resultado.

Corolario 4.60. Consideremos los sistemas dinámicos $([0, 1], L)$ y (Σ_2, σ), definidos en el Ejemplo 2.7 y Ejemplo 1.49, respectivamente. Las siguientes enunciados son verdaderos:

1. $([0, 1] \times \Sigma_2, L \times \sigma)$ es multisensible.
2. $(2^{[0,1]}, 2^L)$ o $(2^{\Sigma_2}, 2^\sigma)$ es multisensible.

3. $(2^{[0,1]\times\Sigma_2}, 2^{L\times\sigma})$ es multisensible.

Teorema 4.61. Sean (X, f) y (Y, g) sistemas dinámicos. Si el sistema dinámico $(2^{X\times Y}, f \times g)$ es ergódicamente sensible, entonces (X, f) o (Y, g) es ergódicamente sensible.

Demostración. Supongamos que $(2^{X\times Y}, 2^{f\times g})$ es ergódicamente sensible. Por el Teorema 4.40, se tiene que $(X \times Y, f \times g)$ es ergódicamente sensible. De donde, por el 3.51, se tiene que (X, f) o (Y, g) es ergódicamente sensible. ■

A continuación, en el Cuadro 4.1, se muestra las relaciones entre el sistema dinámico (X, f) y su inducido $(2^X, 2^f)$.

Propiedad	$\boldsymbol{f \implies 2^f}$	$\boldsymbol{2^f \implies f}$
Sensible	no Ejemplo 4.34	sí Teorema 4.32
Cofinitamente sensible	sí Corolario 4.44	sí Teorema 4.35
Sindéticamente sensible	sí Teorema 4.37	sí Teorema 4.38
Multisensible	sí Corolario 4.23	sí Teorema 4.26
Ergódicamente sensible	?	sí Teorema 4.40
$\mathscr{F}$-sensible, $\mathscr{F}$ filtro dual	sí Teorema 4.43	sí Teorema 4.43

Cuadro 4.1: Tabla de las relaciones entre la función f y su inducida 2^f.

A continuación, en el Cuadro 4.2, se muestra las relaciones entre los sistemas dinámicos (X, f) y (Y, g) y el sistema $(2^{X\times Y}, 2^{f\times g})$.

Propiedad	$\boldsymbol{f}$ ó $\boldsymbol{g \implies 2^{f\times g}}$	$\boldsymbol{2^{f\times g} \implies f}$ **ó** $\boldsymbol{g}$
Sensible	?	sí Teorema 4.57
Multisensible	sí Teorema 4.58	sí Teorema 4.58
Ergódicamente sensible	?	sí Teorema 4.61
$\mathscr{F}$-sensible, $k\mathscr{F}$ filtro dual	?	sí Teorema 4.53

Cuadro 4.2: Tabla de las relaciones entre las funciones f, g y la función $2^{f\times g}$.

Capítulo 5

Conclusiones

Dada la importancia de los sistemas dinámicos sensibles para el estudio del caos, empezaron a surgir otras nociones relacionadas con la sensibilidad tales como: Li-Yorke sensible [3], gruesamente sindéticamente sensible[21], sindéticamente sensible, cofinitamente sensible y multisensibilidad (ver [22]). Después, en el 2011, Tan y Zhang [29] introducen una forma mas general de sensibilidad vía familias de Furtenbergy estudian la relación entre sensibilidad, pares $\mathscr{F}$-sensibles y $\mathscr{F}$-sensibilidad, donde $\mathscr{F}$ es una familia de Furstenberg.
En el presente trabajo de tesis, nos dedicamos a estudiar estas propiedades que se presentan en sistemas dinámicos. Así como también estudiar la relación que existe entre la dinámica individual de los sistemas (X, f), (Y, g) y la dinámica de los sistemas $(X \times Y, f \times g), (2^X, 2^f)$ y $(2^{X \times Y}, 2^{f \times g})$. Cabe mencionar que el desarrollo de esta tesis estuvo basado en el artículo $\mathscr{F}$-sensitivity and multi-sensitivity of hyperspatial dynamical systems ([32]). A lo largo de la tesis, se estudian los distintos conceptos antes mencionados y se estudia de manera detallada las relaciones que existen entre estos conceptos. Algunos de los resultados más significativos los enunciamos a continuación. Teorema 3.10, Teorema 3.47, Teorema 3.51, Teorema 4.40 y Teorema 4.43. Estos resultados son utilizados para construir los tablas obtenidas en Cuadro 5.1, Cuadro 5.2 y Cuadro 5.3. Cabe mencionar que en dichos cuadros faltan por analizar algunas de las posibles relaciones entre esas funciones.
Finalmente, los resultados en cuanto a las definiciones revisadas en este trabajo sólo se conocen para algunos sistemas inducidos, pero no en todos los sistemas inducidos que se pueden definir se han analizado estos conceptos. Esto puede significar un posible trabajo futuro.

A continuación, en el Cuadro 5.1, se muestran las relaciones entre los sistemas dinámicos (X, f), (Y, g) y $(X \times Y, f \times g)$.

Propiedad	$\boldsymbol{f}$ **ó** $\boldsymbol{g \implies f \times g}$	$\boldsymbol{f \times g \implies f}$ **ó** $\boldsymbol{g}$
Sensible	sí Teorema 3.10	sí Teorema 3.10
Cofinitamente sensible	sí Lema 3.22	no Proposición 3.28
Gruesamente sensible	sí Lema 3.29	?
Sindéticamente sensible	sí Lema 3.35	no Proposición 3.40
Gruesamente sindéticamente sensible	sí Lema 3.41	?
Multisensible	sí Teorema 3.47	sí Teorema 3.47
Ergódicamente sensible	sí Teorema 3.51	sí Teorema 3.51

Cuadro 5.1: Relaciones en el sistema dinámico producto.

En el Cuadro 5.2, se muestra las relaciones entre el sistema dinámico (X, f) y su sistema dinámico inducido $(2^X, 2^f)$.

Propiedad	$\boldsymbol{f \implies 2^f}$	$\boldsymbol{2^f \implies f}$
Sensible	no Ejemplo 4.34	sí Teorema 4.32
Cofinitamente sensible	sí Corolario 4.44	sí Teorema 4.35
Sindéticamente sensible	sí Teorema 4.37	sí Teorema 4.38
Multisensible	sí Corolario 4.23	sí Teorema 4.26
Ergódicamente sensible	?	sí Teorema 4.40
$\mathscr{F}$-sensible, $\mathscr{F}$ filtro dual	sí Teorema 4.43	sí Teorema 4.43

Cuadro 5.2: Tabla de las relaciones entre la función f y su inducida 2^f.

Finalmente, en el Cuadro 5.3, se muestra las relaciones entre los sistemas dinámicos (X, f), (Y, g) y el sistema $(2^{X\times Y}, 2^{f\times g})$.

Propiedad	$\boldsymbol{f}$ ó $\boldsymbol{g} \implies \boldsymbol{2^{f\times g}}$	$\boldsymbol{2^{f\times g}} \implies \boldsymbol{f}$ **ó** $\boldsymbol{g}$
Sensible	?	sí Teorema 4.57
Multisensible	sí Teorema 4.58	sí Teorema 4.58
Ergódicamente sensible	?	sí Teorema 4.61
$\mathscr{F}$-sensible, $k\mathscr{F}$ filtro dual	?	sí Teorema 4.53

Cuadro 5.3: Tabla de las relaciones entre las funciones f, g y la función $2^{f\times g}$.

Bibliografía

[1] R. H. Abraham, L. Gardini, C. Mira, *Chaos in Discrete Dynamical Systems: a visual introduction in 2 dimensions*, 1997.

[2] G. Acosta, A. Illanes and H. Méndez-Lango, *The transitivity of induced maps*, Topology Appl. 156, 2009, 1013-1033.

[3] E. Akin and S. Kolyada, *Li-Yorke sensitivity*, Nonlinearity, 16(4), 2003, 1421-1433.

[4] J. Antonio Pérez, *Topología de conjuntos, un primer curso*, Publicaciones electrónicas, Serie Textos Vol. 18, Sociedad Matemática Mexicana, 2015.

[5] M. Barnsley, *Fractals Everywhere*, Academic Press, Inc., San Diego, 1988.

[6] W. Bauer Salzburg and K. Sigmund Wien, *Topological dynamics of transformations induced on the space of probability measures*, Monatsh. Math. 79, 1975, 81-92.

[7] G. D. Birkhoff, *Dinamical Systems*, American Math. Soc. 1927.

[8] N. Degirmenci, S. Kocak, *Chaos in product maps*, Turkish J. Math. 34, 2010, 593-600.

[9] J. Dugundji, *Topology*, Allyn y Bacon, Inc, 1966.

[10] S. Flores Rodríguez, *Un acercamiento a la dinámica colectiva*, tesis de licenciatura, UTM, 2017.

[11] J. L. García, D. Kwietniak, M. Lampart, P. Oprocha, A. Peris, *Chaos on hyperspaces*, Nonlinear Anal. 71, no. 1-2, 2009, 1-8.

[12] G. Higuera and A. Illanes, *Induced mappings on symmetric products*, Topology Proc., 37, 2011, 367-401.

[13] W. Huang, D. Khilko, S. Kolyada y G. Zhang, *Dynamical compactness and sensitivity*, Journal of Differential Equations, Vol. 260, 2016, 6800-6827.

[14] A. Illanes, Sam B. Nadler Jr., *Hyperspaces*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, vol.216, Marcel Dekker Inc., New York, 1999.

[15] I. L. Iribarren, *Topología de espacios métricos*, Universidad Simón Bolívar, Caracas, 2008.

[16] J. E. King Dávalos y H. Méndez Lango, *Sistemas dinámicos discretos*, Serie: Temas de Matemáticas, Facultad de Ciencias, UNAM, 2014.

[17] C. Knudsen, *Chaos without nonperiodicity*, American Mathematical Monthly 101, 1994, 563-565.

[18] I. León Torres, *Compacidad dinámica y sensitividad*, tesis de licenciatura, UTM, 2018.

[19] R. Li, *A note on stronger forms of sensitivity for dynamical systems*, Chaos Solitons Fractals 45, 2012, 753-758.

[20] R. Li, X. Zhou, *A note on chaos in product maps*, Turkish J. Math. 37, 2013, 665-675.

[21] H. Liu, L. Liao, L. Wang, *Thickly syndetical sensitivity of topological dynamical system*, Discrete Dyn. Nat. Soc. (2014).

[22] T.K.S. Moothathu, *Stronger forms of sensitivity for dynamical systems*, Nonlinearity 20, 2007, 2115-2126.

[23] S. B. Nadler Jr., *Hyperspaces of sets*, Marcel Dekker Inc., New York and Bessel, 1978.

[24] A. Peris, *Set-valued discrete chaos*, Chaos Solitons Fractals 26, 2005, 19-23.

[25] A. Rojas Carrasco, *Nociones de Transitividad Topológica en Productos Simétricos Generalizados*, tesis de licenciatura, UTM, 2017.

[26] H. Román-Flores, *A note on transitivity in set-valued discrete systems*, Chaos, Sol. & Fract., 2003, 99-104.

[27] D. Ruelle y F. Takens, *On the nature of turbulence*, Communications in Mathematical Physics, 1971, 178-188.

[28] P. Sharma, A. Nagar, *Inducing sensitivity on hyperspaces*, Topology Appl. 157, 2010, 2052-2058.

[29] F. Tan, R. Zhang, *On F-sensitive pairs*, Acta Math. Sci. 31B, 2011, 1425-1435.

[30] Y. Wang, G. Wei, W.H. Campbell, *Sensitive dependence on initial conditions between dynamical systems and their induced hyperspace dynamical systems*, Topology Appl. 156, 2009, 803-811.

[31] X. Wang, X. Wu, G. Chen, *Sufficient conditions for ergodic sensitivity*, Journal of Nonlinear Sciences and Applications, 2017, 3404-3408.

[32] X. Wu, J. Wang, G. Chen, *$\mathscr{F}$-sensitivity and multi-sensitivity of hyperspatial dynamical systems*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2015, 16-26.

[33] X. Wu, P. Zhu, *Devaney chaos and Li-Yorke sensitivity for product systems*, Studia Sci. Math. Hungar. 49(4), 2012, 538-548.

[34] X. Wu, X. Ma, G. Chen, T. Lu *A note on the sensitivity of semiflows*, Topology Appl. 271, 2020, 107046.

[35] X. Ye y T. Yu, *Sensitivity, proximal extension and higher order almost automorphy*, 2016.

Índice alfabético