

Universidad Autónoma de San Luis Potosí  
Instituto de Física  
*“Manuel Sandoval Vallarta”*



Factores de forma eléctrico y  
magnético del protón a partir de un  
potencial de confinamiento de color  
de rango finito

Tesis presentada por:  
**Raúl Antonio Amaya Almazán**

al  
**Instituto de Física**

para obtener el grado de  
**Maestro en Ciencias (Física)**

Asesora de tesis:  
**Dra. Mariana Kirchbach**

San Luis Potosí, San Luis Potosí, México  
Noviembre 2017

# Dedicatoria

A mi madre y padre por ser un gran apoyo y nunca poner límites a mis ideas o ilusiones.

A mis abuelitos por ser un excelente ejemplo y siempre mostrar su cariño y apoyo.

A mi novia por ayudarme en todo lo que está en sus manos y siempre alegrarme, incluso en los días más complicados.

A toda mi familia por su cariño y siempre estar ahí cuando se les necesita.

A mis amigos, ya que no todo es estudio.

# Agradecimientos

Muchas gracias a mi asesora de tesis la Dra. Mariana Kirchbach, por su máximo apoyo y paciencia durante el proceso de creación de esta tesis, además de siempre estar disponible para todo tipo de cuestiones.

Gracias a mi tutor el Dr. Enrique González Tovar, por siempre mostrarme su apoyo y ser de ayuda en las diferentes cuestiones que me surgieron durante la maestría.

Doy gracias a todos mis profesores durante la maestría, por compartir su conocimiento, ser un buen ejemplo y estar siempre disponibles para cualquier duda o consulta.

Muchas gracias a mis compañeros y amigos durante la maestría, ya que siempre fueron amables y el apoyo mutuo que nos dimos fue muy importante para lograr terminar los cursos de manera exitosa.

Gracias a Luz del Carmen Nuche Garza y Limón Castillo por asistencia técnica.

# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>11</b>
<b>2. Modelo de quarks y el problema de clasificación de resonancias bariónicas</b>	<b>19</b>
2.1. Mesones . . . . .	19
2.2. Bariones y estados excitados . . . . .	20
<b>3. Relatividad Especial de de Sitter <math>dS_4</math> y simetrías de QCD</b>	<b>25</b>
3.1. Principio de la relatividad especial de de Sitter: Incorporando el espacio-tiempo de Minkowski en el espacio-tiempo de de Sitter . . . . .	26
3.2. Principios de la geometría espectral: Movimientos cuánticos sobre las geodésicas de $dS_4$ y potenciales . . . . .	27
3.3. Neutralidad de carga sobre $S^3$ , confinamiento de color y el potencial trigonométrico de Rosen-Morse . . . . .	30
<b>4. Ecuación de Dirac con el potencial de confinamiento producido por dipolos de color</b>	<b>33</b>
<b>5. Los factores de forma de la carga eléctrica y del dipolo magnético del protón</b>	<b>40</b>
5.1. Cálculo de los factores de forma del protón . . . . .	42
5.1.1. Cálculo con espinores de Dirac aproximados por espinores correspondientes a un potencial tipo Coulomb . . . . .	42
5.1.2. Cálculo numérico con los espinores de Dirac exactos correspondientes al potencial $\cot \chi$ . . . . .	45
5.1.3. Cálculo con espinores correspondientes a un potencial tipo Coulomb con el radio dependiente del momento transferido . . . . .	47

---

<b>A. La simetría <math>so(4)</math> y el vector de Laplace-Runge-Lenz</b>	<b>51</b>
A.1. Vector de Laplace-Runge-Lenz . . . . .	51
A.2. El álgebra $so(4)$ . . . . .	53
A.3. Niveles de energía del átomo de hidrógeno . . . . .	54
A.4. Grupo conforme $SO(4, 2)$ . . . . .	56

# Índice de figuras

- 1.1. Representación esquemática de un espectro conforme bosónico como agrupaciones de partículas en el plano del espín,  $\ell$ , contra la masa,  $M$ , [6]. El espín entero de los bosones es denotado por  $\ell$ , mientras  $(K + 1)$  cuenta el número de partículas en un grupo, marcado por una caja horizontal. Las paridades, no mostradas aquí, pueden ser todas naturales,  $(-1)^\ell$ , o todas no naturales  $(-1)^{\ell+1}$ . El isoespín  $I$ , y las paridades  $CP$  son las mismas para todos los bosones constituyendo el espectro, ya que la simetría conforme es una propiedad del espacio-tiempo externo y se factoriza de los grados de libertad internos. Las líneas diagonales representan las mismas partículas ordenadas de acuerdo con las trayectorias tipo Ragge, esto es como resonancias transmitidas a través de una barrera (del potencial hiperbólico de Rosen-Morse) con el número nodal,  $n$ , contando las trayectorias de derecha a izquierda como  $(n + 1)$ . Un espectro de este tipo codifica de manera universal la información sobre las masas invariantes de los mesones obtenida tanto en el régimen infrarrojo como en el ultravioleta. 16
- 1.2. La interacción del dipolo de gluones  $(g\bar{g})$ (considerado estático) con el dipolo de quarks  $(q\bar{q})$ . El quark y antiquark se muestran en una geodésica y el dipolo de gluones los perturba (ilustrado con flechas punteadas) moviéndolos a otra geodésica (ilustrado con flechas sólidas). 18
- 2.1. Mesones pseudoescalares del estado base  $(0^{-+})$  para los quarks  $u$ ,  $d$ ,  $s$  y  $c$ . El diagrama está en función de la hipercarga  $x \rightarrow Y$ , la proyección del isoespín  $y \rightarrow I$  y de *charm*  $z \rightarrow C$ . El nonete del plano central representa a los estados ligeros. . . . . 20
- 2.2. Mesones vectoriales del estado base  $(1^{--})$  para los quarks  $u$ ,  $d$ ,  $s$  y  $c$ . El diagrama presenta la misma estructura que el de los mesones pseudoescalares. . . . . 21
- 2.3. Multiplete  $SU_{SF}(4)$  de bariones, compuestos por los quarks  $u$ ,  $d$ ,  $s$  y  $c$ . El octete  $J^P = 1/2^+$ , contiene al nucleón. . . . . 22
- 2.4. Multiplete  $SU_{SF}(4)$  de bariones, compuestos por los quarks  $u$ ,  $d$ ,  $s$  y  $c$ . El decuplete  $J^P = 3/2^+$ , contiene a  $\Delta(1232)$ . . . . . 23

---

2.5.	Representación gráfica de la tabla 2.2. En el recuadro rojo, se encuentran las excitaciones correspondientes a la banda con $N = 1$ y $\Delta\ell = 0$ , y en el recuadro verde se encuentran los miembros de la banda con $N = 2$ y $\Delta\ell = 0, 2$ , en el esquema del modelo tradicional de quarks. En acuerdo con el modelo presentado en la tesis, se muestra el nivel $K = 1$ con las partículas representadas por diamantes rojos y con $\ell = 0, 1$ junto con el nivel $K = 2$ con las partículas representadas por puntos azules y con $\ell = 0, 1, 2$ . El traslape fuerte entre las bandas $N = 1$ y $N = 2$ hace imposible reconstruir el potencial de la interacción fuerte en la base de las separaciones entre los niveles, como se ha procedido en el caso del átomo de hidrógeno, donde el potencial de Coulomb se consolidó en base de las series de Balmer. . . . .	24
3.1.	Representación esquemática del espacio-tiempo de Minkowski reducida al plano. Sobre $\mathbf{H}_{\pm}^3$ están todos los procesos reales, como dispersión de partículas. La región “space-like” $dS_3$ , debe describir todos los procesos y partículas virtuales (como potenciales y barreras). . . . .	27
3.2.	El espacio-tiempo de de Sitter $dS_4$ es un hiperboloide cuatro-dimensional sumergido en un espacio-tiempo cinco-dimensional de Minkowski. La figura es una ilustración de éste en términos de dimensiones reducidas a $(1 + 2)$ , es decir a un espacio tridimensional y un hiperboloide bidimensional, $\mathbf{H}_1^2$ . La figura muestra como un hiperboloide de una pieza puede ser rebanado en espacios cerrados, planos o abiertos (parches causales) como se muestra. En el espacio-tiempo cuatro-dimensional de de Sitter las rebanadas cerradas son hiperesferas $S^3$ y los espacios abiertos son espacios hiperbólicos tridimensionales como $\mathbf{H}_1^3$ y $\mathbf{H}_{\pm}^3$ , además del plano $E^3$ . Las líneas en color rojo, representan el cono de luz de un punto en el ecuador. . . . .	28
3.3.	La neutralidad de carga en una esfera. . . . .	30
3.4.	Potencial de confinamiento de dipolo de color, $V_{CD}(\chi)$ en la ecuación (3.14). . . . .	32

---

4.1.	Representación esquemática de las soluciones $\tilde{G}_{n'a'}^{j\ell}(\chi)$ y $\tilde{F}_{na}^{j\ell}(\chi)$ de las ecuaciones (4.14) y (4.15), las respectivas componentes grande (L) y pequeña (S) del espinor auxiliar intermediario $V_{(n)}^{j\ell}(\chi)$ en (4.12) en el esquema de SUSY-QM. En la figura se separan los espinores de diferentes $j$ por líneas punteadas. Para ser específico, la primera, segunda, tercera y las siguientes columnas ilustran los respectivos espinores $\tilde{\Psi}^{(1/2),0}(\chi)$ , $\tilde{\Psi}^{(3/2),1}(\chi)$ , $\tilde{\Psi}^{(5/2),2}(\chi)$ , etcétera con $n$ creciente. La nomenclatura usada en las etiquetas de $\tilde{\Psi}^{j\ell}(\chi)$ es tal que el índice $\ell$ pertenece al momento angular. Los estados de mayor espín posible para dada $K$ corresponden a $n = 0$ , sus $\ell$ 's son iguales al máximo valor $\ell_{\max} = K$ , y sus espines son $j = (K + \frac{1}{2})$ . Sus espinores todos tienen componentes pequeñas. Las componentes grandes para $n = 0$ estas ausentes (denotadas por puntos sin relleno) debido a que requerirían de acuerdo con (4.4) un número de nodo menor por uno que $n$ , esto es un valor negativo prohibido. Estos espinores describen estados de las energías más bajas (estados base) en una columna. En consecuencia, los espinores de Dirac genuinos de estado base, $\Psi^{j\ell}(R, \chi)$ , en (4.4) (tomando en cuenta (4.10)), tienen componentes grandes y pequeñas de formas funcionales iguales, distintas por una constante. Los arriba mencionados espinores están asociados con soluciones a la ecuación de Dirac correspondientes a mayores energías, $\mathcal{E}^{(j\ell)^2}$ , y sus componentes grandes y pequeñas son de formas funcionales distintas. . . . .	39
5.1.	Funciones esféricas de Bessel $j_0(x)$ y $j_1(x)$ . Estas funciones son utilizadas en el cálculo integral de los factores de forma electromagnéticos del protón (5.6)-(5.7). . . . .	41
5.2.	La densidad de carga eléctrica $\left  \tilde{F}_{0a}^{(1/2)0} \right ^2$ , con los parámetros en (5.12) y con la aproximación $\sin^a \chi \approx \chi^a$ . Se observa que las densidades calculadas una con el $\sin^a \chi$ (línea roja) y otra con $\chi^a$ (línea azul) son prácticamente coincidentes, permitiendo hacer uso de esta aproximación, como una alternativa analítica al cálculo numérico. . . . .	43
5.3.	Factor de forma eléctrico del protón $G_E^p$ calculado analíticamente (línea sólida) con los parámetros en (5.12). Se observa que aproximadamente alrededor de $0.5\text{GeV}^2$ pierde precisión y el cálculo queda por encima de los datos experimentales (puntos) [23]. . . . .	44
5.4.	Factor de forma magnético del protón $G_M^p/\mu_p$ (línea sólida) calculado analíticamente con los parámetros en (5.12). Se observa una apegamiento excelente a los datos experimentales (puntos) [23]. . . . .	44
5.5.	Razón entre los factores de forma eléctrico y magnético del protón (línea sólida) mostrados en las figuras 5.3 y 5.4 respectivamente. Muestra la falta de precisión para altas energías, comparando con los datos experimentales (puntos) [23]. . . . .	44



---

5.6. El factor de forma eléctrico del protón $G_E^p$ calculado con el espinor genuino de Dirac en (4.25) (línea sólida) y para los valores del conjunto de parámetros en (5.15). Los datos fueron tomados de [23] y son marcados por puntos. . . . .	45
5.7. El factor de forma del dipolo magnético del protón $G_M^p/\mu_p$ calculado con el espinor genuino de Dirac en (4.25) (línea sólida) y para los valores del conjunto de parámetros en (5.15). Los datos fueron tomados de [23] y son marcados por puntos. . . . .	46
5.8. La razón $\mu_p G_E^p/G_M^p$ de los factores de forma en las figuras 5.6 y 5.7. Los datos son marcados por puntos, tomados de [23], y la predicción teórica por la línea sólida. . . . .	46
5.9. Factor de forma eléctrico del protón $G_E^p$ calculado analíticamente (línea sólida) con los parámetros en (5.12). Se observa que con la corrección en la dependencia del radio al momento transferido, la precisión mejora y el cálculo pasa justo por los datos experimentales (puntos) [23]. . . . .	48
5.10. Razón entre los factores de forma eléctrico y magnético del protón (línea sólida) mostrados en las figuras 5.9 y 5.4 respectivamente. Muestra una mejora decisiva en la precisión para altas energías, comparando con los datos experimentales (puntos) [23]. . . . .	49

# Índice de tablas

1.1. Leptones con carga eléctrica . . . . .	11
1.2. Grados de libertad de la teoría de campo de norma, la Cromodinámica Cuántica (QCD). $I_z$ es la proyección del isospín. . . . .	12
2.1. Valores de la hipercarga para quarks. . . . .	19
2.2. Estados excitados del nucleón. $N$ representa el número de excitación (nodos), $L^P$ denota el momento angular y la paridad, $S$ el espín y la función de onda espacial es simétrica (S), antisimétrica (A) o de simetría mixta (M). Nótese que un multiplete con $N$ fijo contiene resonancias con $\Delta\ell = 2$ , es decir con $\ell = N, N - 2, \dots, 1(0)$ . . . . .	22

# Capítulo 1

## Introducción

A lo largo de la historia, los pensadores y científicos han estado interesados en la composición de la materia. Han existido distintas teorías en diferentes momentos y en diferentes culturas, sin embargo todo ha llegado al punto actual del conocimiento humano. En el cual se sabe que la materia estable esta formada por tres partículas; el protón, el neutrón y el electrón. Las dos primeras siendo compuestas de otras partículas más pequeñas llamadas quarks, y el electrón sigue creyéndose elemental (sin composición interna). También se conocen las interacciones fundamentales físicas; la electromagnética, la débil, la gravitacional y la fuerte. La teoría de campo dice que cada interacción tiene una partícula encargada de transferirla. Para la electromagnética se tiene al fotón, para la débil a los bosones  $W^\pm$  y  $Z^0$ , para la gravitacional al gravitón, el cual es sólo una partícula teórica ya que no ha sido encontrada experimentalmente, y para la fuerte los gluones.

Las partículas elementales tienen distintas clasificaciones; los leptones, los quarks y los bosones de norma.

Los leptones son partículas fermiónicas con espín  $1/2$  y además no tienen carga fuerte o “color” por lo que no interactúan fuertemente. Existen seis leptones y sus correspondientes antipartículas; el electrón ( $e^-$ ) y el positrón ( $e^+$ ), el muón ( $\mu^-$ ) y el antimuón ( $\mu^+$ ), el tau ( $\tau^-$ ) y el antitau ( $\tau^+$ ) y por último sus respectivos neutrinos ( $\nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau$ ) y antineutrinos ( $\bar{\nu}_e, \bar{\nu}_\mu, \bar{\nu}_\tau$ ).

Partícula	Carga eléctrica ( $e$ )	Masa ( $\text{MeV}/c^2$ )
Electrón ( $e^-$ ), Positrón ( $e^+$ )	-1, +1	$\sim 0.511$
Muón ( $\mu^-$ ), Antimuón ( $\mu^+$ )	-1, +1	$\sim 105.66$
Tau ( $\tau^-$ ), Antitau ( $\tau^+$ )	-1, +1	$\sim 1776.86$

Tabla 1.1: Leptones con carga eléctrica

Los quarks también son partículas fermiónicas con espín  $1/2$ , sin embargo éstos son las únicas partículas elementales que interactúan a través de las cuatro fuerzas fundamentales. Por lo que los quarks sí tienen carga fuerte o “color”, denominada como r (*red*), g (*green*) y b (*blue*); y debido a esto forman otro tipo de partículas, los

hadrones, que se clasifican en dos grupos, los mesones (quark-antiquark) y los bariones (tres quarks). Existen los siguientes tipos de quarks o “sabores”:  $u$  (*up* (arriba)),  $d$  (*down* (abajo)),  $s$  (*strange* (extraño)),  $c$  (*charm* (encanto)),  $t$  (*top* (cima)) y  $b$  (*bottom* (fondo)).

Sabor	Número cuántico	Carga eléctrica ( $e$ )	Masa ( $\text{MeV}/c^2$ )
$u$ (up)	$I_z = +\frac{1}{2}$	$+\frac{2}{3}$	$\sim 2.2$
$d$ (down)	$I_z = -\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$\sim 4.7$
$s$ (strange)	<i>Extrañeza</i> = $-1$	$-\frac{1}{3}$	$\sim 96$
$c$ (charm)	<i>Encanto</i> = $+1$	$+\frac{2}{3}$	$\sim 1270$
$b$ (bottom)	<i>Bottomness</i> = $-1$	$-\frac{1}{3}$	4180-4660
$t$ (top)	<i>Topness</i> = $+1$	$+\frac{2}{3}$	$160 \times 10^3 - 174 \times 10^3$

Tabla 1.2: Grados de libertad de la teoría de campo de norma, la Cromodinámica Cuántica (QCD).  $I_z$  es la proyección del isoespín.

El protón, sujeto de estudio en la presente tesis, está formado por dos quarks  $u$  y un  $d$ , lo que lo hace un barión. Al igual que el neutrón, pero éste formado por un quark  $u$  y dos  $d$ . Los quarks permanecen unidos gracias a la interacción fuerte, de hecho nunca se ha observado experimentalmente un quark libre así como tampoco un gluón libre, este fenómeno es denominado *confinamiento de color*.

La Cromodinámica Cuántica, QCD (*Quantum Chromodynamics*, en inglés) describe a las partículas que perciben la interacción fuerte y sus propiedades. Ésta se diseñó en paralelo con la Electrodinámica Cuántica, QED (*Quantum Electrodynamics*, en inglés), aunque históricamente QCD y QED se desarrollaron de maneras opuestas. QED comenzó con el conocido desde tiempo atrás potencial de Coulomb y con la famosa ecuación de Schrödinger para el átomo de hidrógeno, que es el sistema más simple ligado por la interacción electromagnética; y con el éxito al calcular su espectro, la mecánica cuántica se consolidó.

Después de esto, la teoría de campo electromagnético de norma (la electrodinámica cuántica) se empezó a desarrollar a partir de la mecánica cuántica del átomo de hidrógeno; cuando se estableció QED, se comprendió que el potencial de Coulomb no era nada más que una imagen del propagador del fotón, esto siendo matemáticamente expresado como la transformada de Fourier del propagador instantáneo del fotón, es decir referido a procesos de dispersión elásticos ( $q_0 = 0$ ).

En comparación con la interacción electromagnética, el enlace de las partículas con interacción fuerte es mucho más intenso. Además cuando QCD empezó a desarrollarse no se conocía ningún potencial entre quarks, no había un paralelo al de Coulomb. Por esta razón y para describir los hadrones, se crearon modelos de quarks describiendo sistemas de dos o tres cuerpos (quark-antiquark o quark-diquark) asumiendo como potencial promedio el del oscilador armónico y basados en el modelo de capas. Se suponía que éstos deberían de ser capaces de explicar y reproducir el espectro de al menos los sistemas más simples, ya sea el del quark y antiquark o el del protón visto como, compuesto por un quark y un diquark, pero las expectativas no se cumplieron. El hecho es que en este esquema ningún espectro bariónico es bien

representado sin hacer uso de 20 o 30 parámetros de ajuste.

Los problemas se agravaron debido a que no se han podido observar quarks libres, un fenómeno denominado como confinamiento; todo sistema compuesto es neutro en color. La pregunta, *¿cuál es el potencial que genera esta carga neutra de color?*, no fue planteada. En su lugar, se buscaron mejoras del oscilador armónico en la forma de potenciales de potencias y se encontró el potencial de Cornell [1]

$$V_{Cornell} = \alpha r - \frac{\beta}{r}, \quad (1.1)$$

sin embargo éste resultó más adecuado para mesones pesados.

Otra diferencia esencial de QCD con respecto a QED es que sus campos de norma, los transportadores de la interacción fuerte, los gluones, poseen carga de color; provocando que éstos interactúen entre sí. Mientras que en QED los fotones, los encargados de transportar la interacción electromagnética, no tienen carga eléctrica provocando que no haya interacción entre fotones.

Como ya se mencionó, el aspecto menos satisfactorio de los modelos de quarks es que ninguno es capaz de calcular las propiedades de los bariones o mesones sin hacer uso de docenas de parámetros de ajuste.

Nuestro grupo en estudios pasados se dio cuenta de que los espectros tanto de los bariones como de los mesones son marcadamente estructurados, por lo que se inventó la siguiente fórmula de masa para bariones de tan solo tres parámetros de ajuste,  $A(R)$ ,  $B(R)$  y  $R$ ,

$$M - M_{gst} = A(R)(K + 1)^2 - \frac{B(R)}{(K + 1)^2}, \quad (1.2)$$

donde  $R$  es un parámetro de longitud.

Para mesones la fórmula cambia como  $M \rightarrow M^2$ ; se logró la clasificación de todos los estados observados haciendo uso de ésta y se observó una buena coincidencia entre las predicciones y los datos experimentales [2]. Después se buscó un potencial que reprodujera dicha fórmula de masa y satisfactoriamente se encontró uno trigonométrico conocido bajo el nombre de Rosen-Morse [3].

Un aspecto intrigante de este potencial es que él describe espectros con patrones de degeneración típicos para la simetría conforme. Además, al hacer un desarrollo en series de éste, se encuentra que los primeros dos términos reproducen el potencial de Cornell, mencionado arriba [4]. Se concluyó que la estructura de los espectros se puede explicar por una simetría conforme de la interacción fuerte.

La simetría conforme en el régimen infrarrojo de QCD y para los quarks más ligeros  $u$  y  $d$  adquirió recientemente importancia de manera independiente a través de la observación del caminar de la constante de acoplamiento fuerte hacia un valor

fijo [5] con el decremento del momento transferido,  $\alpha_s \xrightarrow{q^2 \rightarrow 0} \text{const}$  (apertura de una ventanilla conforme en el régimen infrarrojo).

Una parametrización del potencial trigonométrico de Rosen-Morse, aquí denotado por  $V_{S^3}(\chi)$  y en unidades de  $\text{MeV}^2$ , apropiada para los espectros conformes de los hadrones se presentó en [6], y ha sido averiguado en la base del ajuste de los datos sobre las masas de 71 mesones medidas por una ecuación de onda unidimensional con este potencial

$$V_{S^3}(\chi) = A(R) \frac{\ell(\ell+1)}{\sin^2 \chi} - 2B(R) \cot \chi, \quad \chi \in [0, \pi], \quad (1.3)$$

donde  $\chi$  es una variable angular,  $A(R) = \frac{\hbar^2 c^2}{R^2}$ ,  $B(R) = \frac{\hbar^2 c^2}{R^2} b$  y  $b$  es un parámetro sin dimensiones. Mediante el cambio de variables  $\chi \rightarrow \chi - \pi/2$ ,  $V_{S^3}(\chi)$  se transforma en una versión equivalente,

$$\tilde{V}_{S^3}(\chi) = A(R) \frac{\ell(\ell+1)}{\cos^2 \chi} + 2B(R) \tan \chi, \quad \chi \in [-\pi/2, +\pi/2]. \quad (1.4)$$

La última forma es notable ya que  $\tilde{V}_{S^3}(\chi)$  puede ser transformado en el término centrífugo más la solución fundamental al operador Laplaciano sobre una geodésica hiperbólica abierta “time-like”  $\mathbf{H}_1^3$  del espacio de de Sitter  $dS_4$ . Bajo las complejificaciones (i)  $\chi \rightarrow i\chi \rightarrow \rho$ , (ii)  $b \rightarrow ib$ , (iii)  $\ell(\ell+1) \rightarrow i\ell(i\ell+i) = -(\lambda^2 - 1/4)$ , con un subsecuente restablecimiento,  $\lambda = (K+1)$  con  $K = 1, 2, 3, \dots$ , llegando a

$$\tilde{V}_{S^3}(\chi) \rightarrow V_{\mathbf{H}_1^3} = -A(R) \frac{(K+1)^2 - \frac{1}{4}}{\cosh^2 \rho} + 2B(R) \tanh \rho, \quad \rho \in [-\infty, +\infty]. \quad (1.5)$$

El primer término de este potencial se conoce en la mecánica cuántica supersimétrica [7] bajo el nombre de potencial hiperbólico de Pöschl-Teller y  $V_{\mathbf{H}_1^3}$  en su totalidad es el potencial hiperbólico de Rosen-Morse. Finalmente, a través de la complejificación  $(K+1)$  en  $i(K+1)$ , el potencial hiperbólico en (1.5) es transformado en una barrera, cuyas resonancias transmitidas son caracterizadas por las partes reales de sus energías complejas que llevan las mismas degeneraciones conformes que los estados ligados a través del potencial en (1.4). De esta forma, una descripción dual de los mesones como niveles ligados en un potencial o resonancias transmitidas a través de una barrera, pudo ser lograda (ver figura 1.1) [6], [8].

La imagen de estados ligados es más apropiada en el régimen infrarrojo cerca del marco de reposo de QCD, mientras que alejado de éste, la imagen de resonancias transmitidas por una barrera es más adecuada.

Estrictamente dicho, las energías se comparan con los datos experimentales de las masas invariantes de los hadrones. En el régimen infrarrojo, la masa invariante se calcula cerca del marco de reposo, mientras que en el ultravioleta el marco de

reposo se mueve a una velocidad cercana a la velocidad de la luz. El valor de la masa invariante, no depende del marco de referencia por lo que para tener una descripción consistente, ambas masas deben ser idénticas. El régimen ultravioleta se caracteriza por la simetría conforme, la cual se debe reflejar también en las masas hadrónicas, inevitablemente entonces la simetría conforme debe ser visible en el régimen infrarrojo. Este es un argumento más en favor de la simetría conforme.

Los números cuánticos en el espectro de la figura 1.1, coinciden con los del átomo de hidrógeno para el caso en el que se ignora el espín del electrón. Los niveles marcados por  $K$  se comportan como representaciones irreducibles del grupo  $SO(4)$ , y el espectro en su totalidad se puede mapear sobre una representación irreducible de dimensionalidad infinita del grupo conforme  $SO(2, 4)$ . Nótese que el grupo  $SO(4)$  es el grupo máximo compacto del grupo conforme.

La simetría conforme del átomo de hidrógeno se debe a la simetría conforme de las ecuaciones de Maxwell, una propiedad que hereda la Electrodinámica Cuántica. En otras palabras, el potencial central de Coulomb, tiene una simetría más grande que la simetría rotacional, la cual lleva a la conservación del momento angular, esto implica una ley de conservación más allá de  $\vec{L}^2$  en el problema cuántico de Coulomb. Dicha ley de conservación se ha averiguado históricamente tomando en cuenta que el átomo de hidrógeno es la versión cuántica del problema de Kepler de movimientos planetarios en el potencial gravitacional, igual (módulo la constante de magnitud) al potencial de Coulomb, inverso en la distancia. En el caso del problema de Kepler se observa la conservación del vector que conecta el foco de la órbita con el perihelio, llamado vector de Laplace-Runge-Lenz (LRL).

Construyendo el vector de LRL en la teoría clásica de gravitación [9], se obtiene el operador de LRL para el átomo de hidrógeno haciendo uso de la cuantización de los momentos. De esta manera, se encuentran en la teoría del átomo de hidrógeno dos operadores de conservación, el operador del cuadrado del momento angular y el operador del cuadrado del vector de LRL (cada uno de los vectores tiene tres componentes). Después se muestra que las seis componentes de los dos vectores conmutan de tal manera que generan el álgebra de  $SO(4)$ , y de esta forma se explica la degeneración  $N^2$  (número cuántico principal de los niveles del átomo de hidrógeno) [10].

Este  $N$  corresponde en la figura 1.1 con  $K + 1$ , y  $K$  juega formalmente el papel del valor del cuadrado del momento angular en  $SO(4)$ . Los detalles algebraicos de la construcción de arriba, se muestran en el apéndice. Los bariones y mesones se comportan de la misma forma sin importar que el potencial no sea el potencial de Coulomb, lo cual se nota por el hecho de que las separaciones de los niveles en los espectros hadrónicos son distintas de los del átomo de hidrógeno.

Como se explicará más adelante, desde el punto de vista de la teoría de potenciales [11] y su concepto de la geometrización de interacciones, los resultados anteriores pueden ser interpretados como si los quarks virtuales constituyentes de hadrones radican sobre un espacio tridimensional esférico,  $S^3$ , para el caso de los estados ligados, o sobre el hiperboloide tridimensional de una capa  $\mathbf{H}_1^3$ , para el caso de las resonancias transmitidas. Teniendo en cuenta que los grados de libertad virtuales

estén por fuera del cono de luz causal de la relatividad especial de Einstein, los hallazgos de [6] sugieren la admisión de una geometría de la región fuera del cono de luz que sea lo suficientemente grande para permitir como subespacios a  $S^3$  y  $\mathbf{H}_1^3$ .

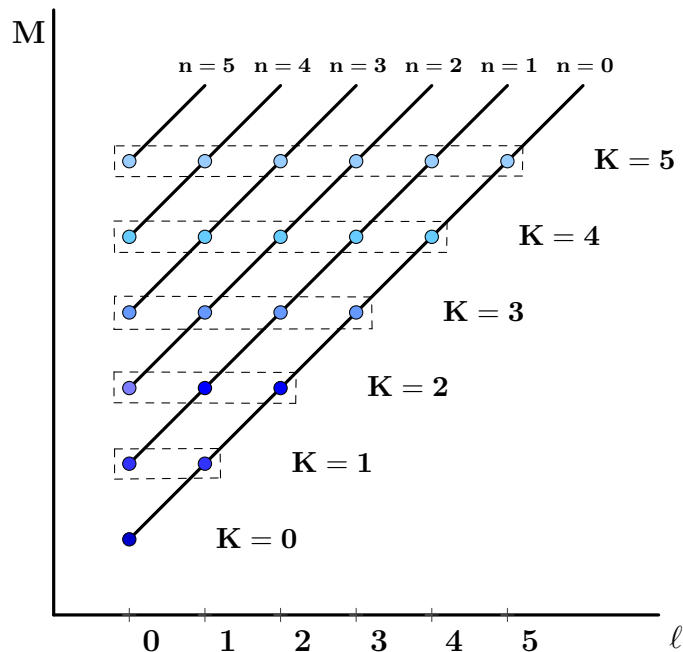


Figura 1.1: Representación esquemática de un espectro conforme bosónico como agrupaciones de partículas en el plano del espín,  $\ell$ , contra la masa,  $M$ , [6]. El espín entero de los bosones es denotado por  $\ell$ , mientras  $(K + 1)$  cuenta el número de partículas en un grupo, marcado por una caja horizontal. Las paridades, no mostradas aquí, pueden ser todas naturales,  $(-1)^\ell$ , o todas no naturales  $(-1)^{\ell+1}$ . El isoespín  $I$ , y las paridades  $CP$  son las mismas para todos los bosones constituyendo el espectro, ya que la simetría conforme es una propiedad del espacio-tiempo externo y se factoriza de los grados de libertad internos. Las líneas diagonales representan las mismas partículas ordenadas de acuerdo con las trayectorias tipo Ragge, esto es como resonancias transmitidas a través de una barrera (del potencial hiperbólico de Rosen-Morse) con el número nodal,  $n$ , contando las trayectorias de derecha a izquierda como  $(n + 1)$ . Un espectro de este tipo codifica de manera universal la información sobre las masas invariantes de los mesones obtenida tanto en el régimen infrarrojo como en el ultravioleta.

Los hallazgos de arriba motivaron reemplazar el espacio fuera del cono de luz por el subespacio  $(1+4)$  del espacio-tiempo conforme  $(2+4)$ , el cual es suficientemente grande para incorporar tanto  $S^3$  como  $\mathbf{H}_1^3$ . En dimensiones  $(1+4)$  se puede ver a  $S^3$  y  $\mathbf{H}_1^3$  como geodésicas, la primera correspondiente a una geodésica “space-like” cerrado, y la segunda a una geodésica hiperboloide “time-like” abierto, siendo ambas partes de un espacio-tiempo de de Sitter cuatro-dimensional,  $dS_4$ , isomorfo a un hiperboloide cuatro-dimensional de una capa,  $\mathbf{H}_1^4$ .

En este escenario hay que asignar un cono de luz causal de Einstein a cada



observador localmente y los espacio-tiempos de (1+3) dimensiones de Minkowski, representados por los hiperboloides tridimensionales usuales de dos capas,  $\mathbf{H}_{\pm}^3$ , ahora aparecen como parches causales, esto es como intersecciones en  $dS_4$  por planos paralelos al eje temporal. De esta manera la geometría de la región “time-like” continua siendo definida localmente por el espacio-tiempo de Minkowski. La elegibilidad de tal geometría de la región “space-like” ha sido recientemente introducida de manera independiente en la llamada Relatividad Especial de de Sitter  $dS_4$  [12]. Por lo tanto, los hallazgos de [6] proveen un argumento más en favor de la relatividad especial  $dS_4$ .

La ventaja principal del espacio de de Sitter es proveer un escenario adecuado para la descripción del confinamiento. El hecho es que este espacio contiene una geodésica cerrada “space-like”, es la anteriormente mencionada  $S^3$ . Como se verá adelante, espacios cerrados no soportan cargas libres y los grados de libertad sobre éstos son neutros de color, los mínimos son dipolos de color (color-anticolor).

La identificación de la carga genérica con el color no solo motiva la neutralidad de color de los hadrones sino también permite expresar la magnitud,  $(-2b)$ , del potencial generado por el dipolo de color confinado en (1.3) (de aquí en adelante denotado por  $V_{CCD}(\chi)$ ) como producto del acoplamiento fuerte  $\alpha_s$  en QCD, con el número de colores,  $N_c$ , dando la siguiente expresión, reportada en [8] en unidades sin dimensión como

$$V_{CCD}(\chi) = -\alpha_s N_c \cot \chi, \quad \chi \in [0, \pi], \quad \chi = \frac{\widehat{r}}{R}. \quad (1.6)$$

En la última ecuación se ha dado preferencia a la parametrización en (1.3) sobre la de (1.4) debido a que la primera genera (en su desarrollo en series) la forma del potencial de Cornell, predicha por QCD [1]. Para ver esto, por ejemplo para bariones, uno tiene que volver a la dimensionalidad de  $V_{CCD}(\chi)$  a MeV, multiplicándolo por  $\hbar c/R$ , y expandir la función cotangente en una serie de McLorain

$$\begin{aligned} V_{CCD}(\chi) &= -\frac{\hbar c}{R} \alpha_s N_c \cot \chi \approx \frac{\hbar c}{R} \alpha_s N_c \left( -\frac{R}{\widehat{r}} + \frac{1}{3} \frac{\widehat{r}}{R} \right) \\ &= -\alpha_s N_c \frac{\hbar c}{\widehat{r}} + \alpha_s N_c \frac{\hbar c}{3R^2} \widehat{r}. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Encontrando que los primeros dos términos son inversos y lineales en el arco geodésica,  $\widehat{r}$ , lo cual se acerca a la distancia radial estándar para  $R$  grandes.

El potencial en (1.6), cuya fuente fue identificada como un dipolo de color, tal como un “glueball” ( $g - \bar{g}$ ), puede ahora ser aplicado como una perturbación externa de cualquier dipolo quark-antiquark o quark-diquark, en balanceo centrífugo libre alrededor del centro de su masa, un proceso gobernado por el término centrífugo,  $\sim \csc^2 \chi$ . Además se desprecia la fuerza tensorial entre ambos dipolos, este proceso es ilustrado en la figura 1.2. En [8], el valor de la constante de acoplamiento fuerte

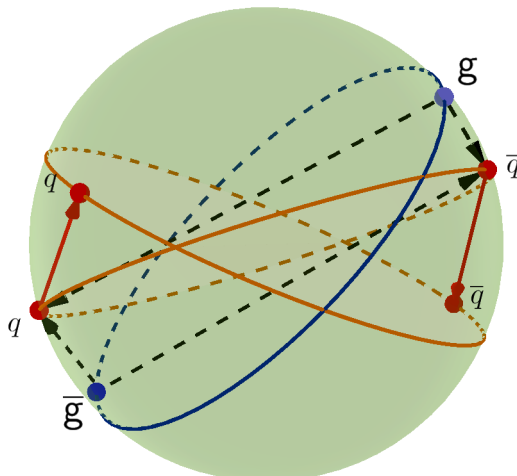


Figura 1.2: La interacción del dipolo de gluones ( $g\bar{g}$ ) (considerado estático) con el dipolo de quarks ( $q\bar{q}$ ). El quark y antiquark se muestran en una geodésica y el dipolo de gluones los perturba (ilustrado con flechas punteadas) moviéndolos a otra geodésica (ilustrado con flechas sólidas).

$\alpha_s$  ha sido extraído por primera vez del espectro conforme de mesones sin sabor en [6], esto es de los 71 miembros observados en las respectivas familias conformes  $a_0, f_0, \pi$  y  $\eta$ , y obtenida como  $\alpha_s/\pi \in [0.58, 0.8]$ , en buen acuerdo con los datos reportados en [5].

Como se menciona arriba, también los números cuánticos de las partículas poblando los espectros bariónicos sin sabor obedecen una simetría conforme. Sin embargo, en comparación con los mesones, los niveles  $K = 2$  y  $K = 4$  fallan notoriamente de los datos experimentales sobre los bariones, aún una pregunta abierta.

En esta tesis se va a aplicar el potencial en (1.3) con la parametrización en (1.6) a propiedades locales como lo son los factores de forma eléctrico y magnético del protón. Estas observables proveen valiosos vislumbramientos sobre las distribuciones de las densidades de las cargas eléctricas y de las corrientes magnéticas dentro de los hadrones y de este modo de sus estructuras internas. Por esto se considera la ecuación de Dirac con el mencionado potencial de confinamiento de dipolo de color, y resolviéndola aproximadamente, se encuentran las funciones de onda espinoriales, las cuales después se emplean en la evaluación de los factores de forma de interés.

La tesis está estructurada como sigue. Primero se dará una breve explicación del modelo de quarks tradicional y los problemas que presenta. En el capítulo 2 se muestra una breve introducción en la Relatividad Especial de de Sitter y en las simetrías de QCD. Continuando con el desarrollo del cálculo de la ecuación de Dirac con el potencial  $V_{CCD}$ , llevando al siguiente capítulo el cual muestra los resultados de los cálculos de los factores de forma utilizando las componentes del espinor de Dirac encontrado. Finalmente las conclusiones y la perspectiva de un posible mejoramiento del cálculo. También se presenta un apéndice sobre simetría  $so(4)$  y el vector de LRL.

# Capítulo 2

## Modelo de quarks y el problema de clasificación de resonancias bariónicas

Como se mencionó previamente en la introducción, los quarks son partículas elementales con espín  $1/2$  e interactúan fuertemente, y además tienen paridad positiva. También tienen un número bariónico que para quarks es  $1/3$  y para antiquarks es  $-1/3$ . Los números cuánticos de los quarks se presentan en la tabla 1.2, y proveen la base para la definición de la hipercarga como

$$Y = \mathcal{B} + S - \frac{C - B + T}{3}, \quad (2.1)$$

donde  $\mathcal{B}$  es el número bariónico,  $S$  es la *extrañeza*,  $C$  es el *encanto*,  $B$  es *bottomness* y  $T$  es *topness*. Los valores de la hipercarga para cada quark son mostrados en la tabla 2.1.

Sabor	$u$	$d$	$s$	$c$	$b$	$t$
Hipercarga $Y$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	0	0	0

Tabla 2.1: Valores de la hipercarga para quarks.

### 2.1. Mesones

Son estados enlazados  $q\bar{q}$  de quarks y antiquarks, su número bariónico es  $\mathcal{B} = 0$ , y si su momento angular es  $\ell$  entonces su paridad es natural  $(-1)^\ell$  o no natural  $(-1)^{\ell+1}$ . El espín del mesón está dado por  $|\ell - s| \leq J \leq |\ell + s|$ . La conjugación de carga  $C = (-1)^{\ell+s}$  está definida para estados hechos de quark ( $q$ ) y su propio antiquark ( $\bar{q}$ )<sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup> $\ell \rightarrow$  momento relativo entre  $\bar{q}$  y  $q$ ,  $s \rightarrow$  suma de los espines de  $\bar{q}$  y  $q$ .





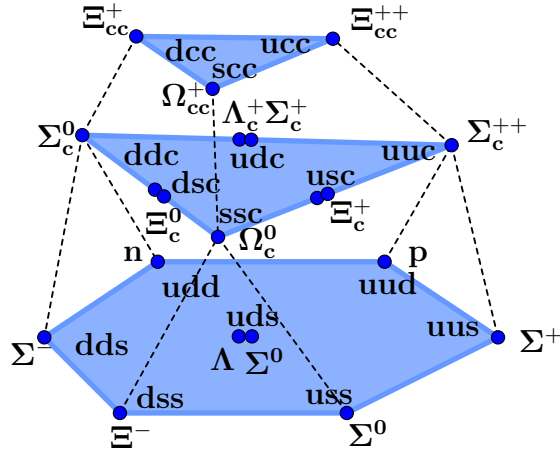


Figura 2.3: Multiplete  $SU_{SF}(4)$  de bariones, compuesto por los quarks  $u$ ,  $d$ ,  $s$  y  $c$ . El octete  $J^P = 1/2^+$ , contiene al nucleón.

Para clasificar a los bariones en el modelo tradicional de quarks, se ordenan en bandas que tienen el mismo número cuántico de excitación del oscilador armónico  $N$ , cada banda consiste en un número de multipletes, los cuales son clasificados por  $(D, L_N^P)$ , donde  $D$  es la dimensionalidad de la representación  $SU_{SF}(6)$ ,  $L$  el momento angular total y  $P$  es la paridad total. Se puede observar esta clasificación del nucleón y sus excitaciones en la tabla 2.2.

$N$	Simetría	$\ell^P$	$S$	$N$
2	M	$0^+$	$1/2$	$N(1710)$
2	S	$2^+$	$1/2$	$N(1720)$ $N(1680)$
2	S	$0^+$	$1/2$	$N(1440)$
1	M	$1^-$	$3/2$	$N(1650)$ $N(1700)$ $N(1675)$
1	M	$1^-$	$1/2$	$N(1535)$ $N(1520)$
0	S	$0^+$	$1/2$	$N(938)$

Tabla 2.2: Estados excitados del nucleón.  $N$  representa el número de excitación (nodos),  $L^P$  denota el momento angular y la paridad,  $S$  el espín y la función de onda espacial es simétrica (S), antisimétrica (A) o de simetría mixta (M). Nótese que un multiplete con  $N$  fijo contiene resonancias con  $\Delta\ell = 2$ , es decir con  $\ell = N, N - 2, \dots, 1(0)$ .

Sin embargo, el esquema mostrado en la tabla 2.2 no es satisfactorio, debido a que los estados excitados del nucleón tienen separaciones significativas de masa entre los miembros de cada banda, indicando rompimiento fuerte de la simetría  $SU_{SF}(6) \otimes O_L(3)$ . Además de que muchas de las excitaciones del nucleón en una de las bandas se traslapan con las excitaciones en la otra. El problema se visualiza gráficamente en la figura 2.5.

La figura 2.5 muestra que una clasificación de resonancias nucleónicas de acuerdo con las líneas punteadas, que corresponden a la simetría  $SO(4)$  discutida en la descripción de la figura 1.1, son más exactas y más apropiadas.

Otra ventaja que presenta el esquema de clasificación de las excitaciones nucleó-



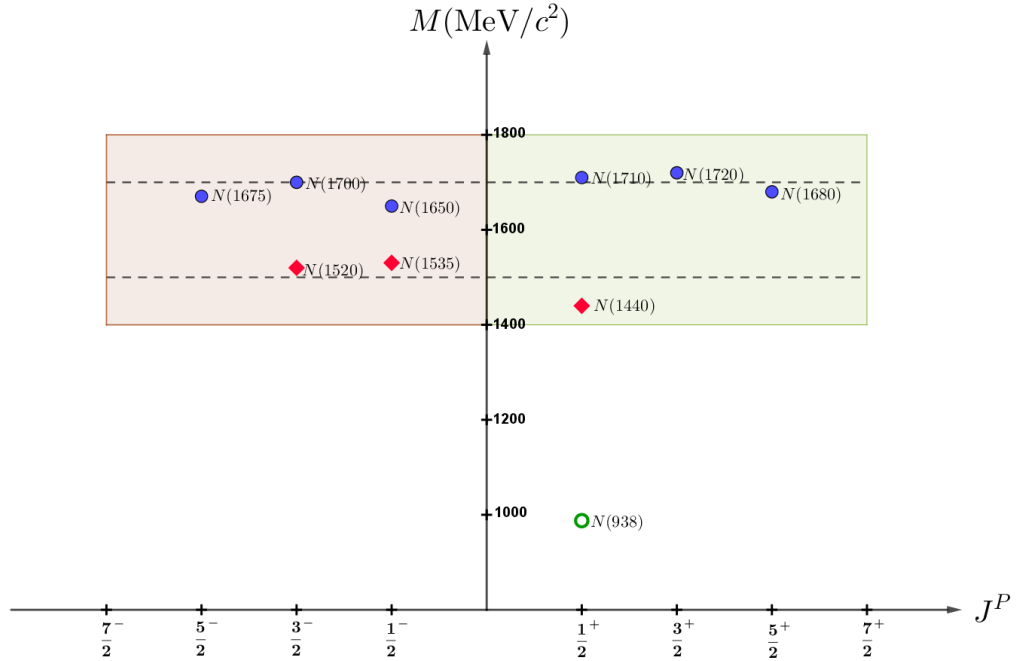


Figura 2.5: Representación gráfica de la tabla 2.2. En el recuadro rojo, se encuentran las excitaciones correspondientes a la banda con  $N = 1$  y  $\Delta\ell = 0$ , y en el recuadro verde se encuentran los miembros de la banda con  $N = 2$  y  $\Delta\ell = 0, 2$ , en el esquema del modelo tradicional de quarks. En acuerdo con el modelo presentado en la tesis, se muestra el nivel  $K = 1$  con las partículas representadas por diamantes rojos y con  $\ell = 0, 1$  junto con el nivel  $K = 2$  con las partículas representadas por puntos azules y con  $\ell = 0, 1, 2$ . El traslape fuerte entre las bandas  $N = 1$  y  $N = 2$  hace imposible reconstruir el potencial de la interacción fuerte en la base de las separaciones entre los niveles, como se ha procedido en el caso del átomo de hidrógeno, donde el potencial de Coulomb se consolidó en base de las series de Balmer.



# Capítulo 3

## Relatividad Especial de de Sitter $dS_4$ y simetrías de QCD

El fenómeno del confinamiento de color y la simetría conforme en el régimen infrarrojo de QCD discutidos arriba y en el método usado en esta tesis, se atribuyen a las propiedades globales del espacio-tiempo cuatro-dimensional de la geometría de de Sitter  $dS_4$ , la cual de acuerdo con el principio de la relatividad especial de de Sitter es posible fuera del cono causal de luz de Minkowski. Es esta región la cual rige sobre las interacciones que involucran gluones y quarks virtuales, y genera los potenciales. En efecto, la simetría conforme de QCD sea interpretada como una consecuencia directa de la simetría conforme del espacio-tiempo  $dS_4$ , mientras que el confinamiento de color aparecerá como consecuencia de la neutralidad de color innata de la geodésica cerrada “space-like” de este espacio, la hiperesfera tridimensional  $S^3$ . Haciendo uso de la teoría matemática de potenciales también conocida como “geometría espectral” se postula que las interacciones fundamentales están definidas por funciones de Green de operadores de Laplace en variedades, tomados aquí como las geodésicas de  $dS_4$ .

En otras palabras, se asume la validez de los dos siguientes principios fundamentales:

- I *El principio de la relatividad especial de de Sitter [12] fuera del cono causal de luz en la relatividad especial de Einstein.*
- II *El principio de la geometría espectral [11], de acuerdo a la cual interacciones fundamentales están definidas por funciones de Green de operadores de Laplace en variedades, en este caso tomados como geodésicas de  $dS_4$ .*

Gracias a estas dos suposiciones, se hace posible derivar de primeros principios potenciales en sistemas de dos cuerpos con interacciones fuertes.

La extensión del espacio-tiempo fuera del cono de luz en la relatividad especial de de Sitter fue necesaria ya que si se aplica el concepto de la geometría espectral a la región “space-like” de la relatividad especial de Einstein (véase figura 3.1), no se

obtienen potenciales razonables. Esto debido a que los hiperboloides  $\mathbf{H}_1^3$ , que definen la geometría aquí, tienen como geodésicas, planos o esferas de dos dimensiones; el potencial de Coulomb en el plano es  $\ln \rho$ , el cual no es un buen potencial para la descripción del átomo de hidrógeno, mientras que el potencial de  $S^2$  es  $\ln \frac{\sin \theta}{2}$  el cual no es bueno para un sistema de dos cuerpos con interacciones fuertes.

### 3.1. Principio de la relatividad especial de de Sitter: Incorporando el espacio-tiempo de Minkowski en el espacio-tiempo de de Sitter

Las descripciones teóricas del mundo microscópico deben obedecer la teoría de la relatividad especial la cual requiere que los valores de todas las observables físicas sean iguales en todos los marcos de referencia relacionadas entre sí por las transformaciones de Lorentz, las cuales conservan los intervalos  $s^2$ , en el espacio-tiempo de Minkowski (véase figura 3.1)

$$(ct)^2 - \mathbf{r}^2 = s^2; \quad s^2 \geq 0 \text{ o } s^2 \leq 0. \quad (3.1)$$

La simetría conforme está asociada con todas las transformaciones que dejan el intervalo  $ds^2 = g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu$  invariante. Tales transformaciones preservan el ángulo pero no la distancia.

Se puede hacer la pregunta *¿qué tipo de física se podría encontrar interpretando el cono de luz y los hiperboloides  $\mathbf{H}_+^3$  del futuro y  $\mathbf{H}_-^3$  del pasado encerrados por éste como inmersos en un hiperboloide de una pieza cuatro-dimensional  $\mathbf{H}_1^4$ ?*, como se muestra en la figura 3.2. En otras palabras, si se podría extender la región inaccesible a mediciones directas del espacio-tiempo fuera del cono de luz, por una dimensión “space-like”  $x_4$  más, y requiriendo la conservación de los intervalos en el espacio-tiempo cinco-dimensional, como

$$c^2t^2 - \mathbf{r}^2 - x_4^2 = s^2, \quad s^2 < 0. \quad (3.2)$$

Un espacio-tiempo definido de esta manera es conocido como “espacio-tiempo cuatro-dimensional de de Sitter”,  $dS_4$ . Este último se representa por un hiperboloide cuatro-dimensional de una hoja,  $\mathbf{H}_1^4$ , con un eje de simetría “time-like”. En un escenario así, los hiperboloides causales en la relatividad especial de Einstein corresponden a los llamados parches causales en  $dS_4$  obtenidos a través de las intersecciones de este espacio-tiempo por planos cuatro-dimensionales paralelos a los ejes de simetría (véase figura 3.2).

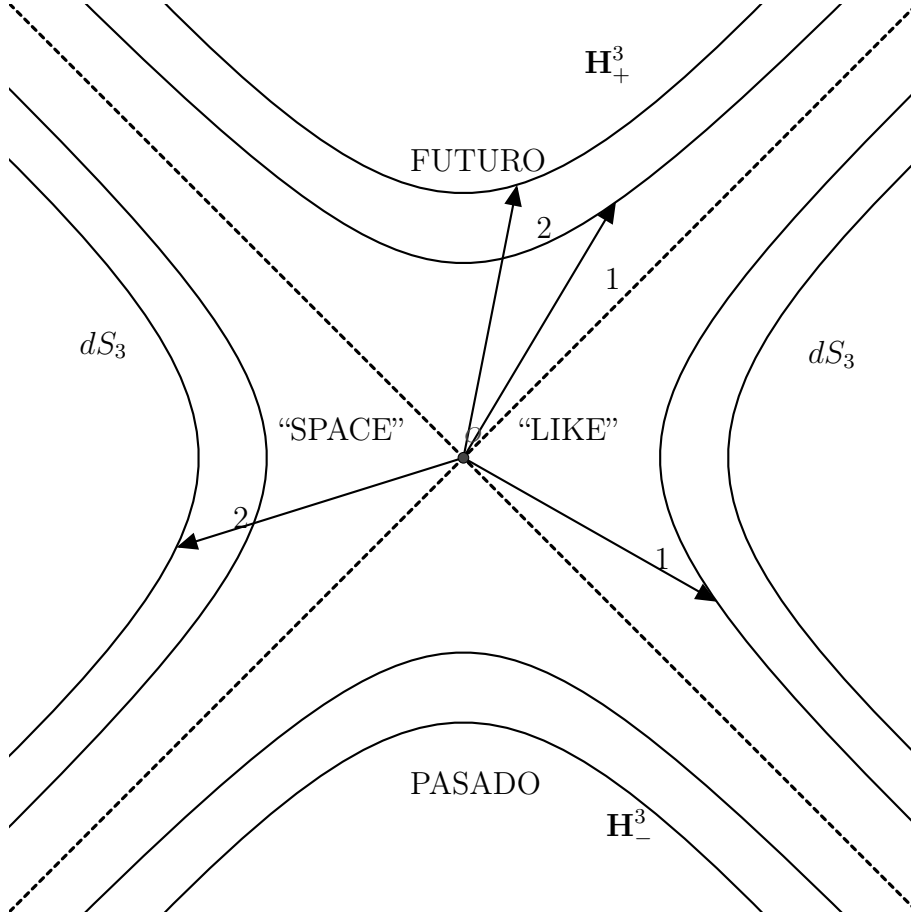


Figura 3.1: Representación esquemática del espacio-tiempo de Minkowski reducida al plano. Sobre  $\mathbf{H}_{\pm}^3$  están todos los procesos reales, como dispersión de partículas. La región “space-like”  $dS_3$ , debe describir todos los procesos y partículas virtuales (como potenciales y barreras).

### 3.2. Principios de la geometría espectral: Movimientos cuánticos sobre las geodésicas de $dS_4$ y potenciales

Los movimientos cuánticos libres en cualquier espacio-tiempo son descritos por los eigenmodos del operador de energía cinética, dados por el respectivo Laplaciano. En  $dS_4$ , parametrizado en coordenadas globales como

$$x^0 = R \sinh \rho, \quad \rho \in [-\infty, \infty],$$

$$x^4 = R \cosh \rho \sin \chi, \quad \chi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],$$

$$x^1 = R \cosh \rho \cos \chi \sin \theta, \quad \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],$$

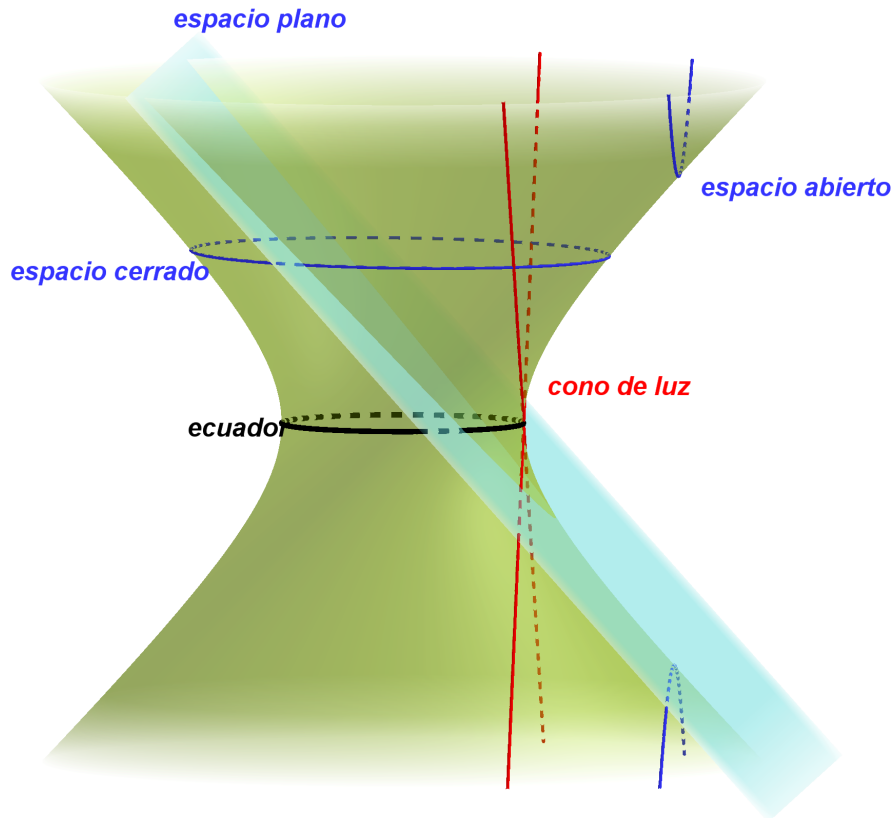


Figura 3.2: El espacio-tiempo de de Sitter  $dS_4$  es un hiperboloide cuatro-dimensional sumergido en un espacio-tiempo cinco-dimensional de Minkowski. La figura es una ilustración de éste en términos de dimensiones reducidas a  $(1+2)$ , es decir a un espacio tridimensional y un hiperboloide bidimensional,  $\mathbf{H}_1^2$ . La figura muestra como un hiperboloide de una pieza puede ser rebanado en espacios cerrados, planos o abiertos (parches causales) como se muestra. En el espacio-tiempo cuatro-dimensional de de Sitter las rebanadas cerradas son hiperesferas  $S^3$  y los espacios abiertos son espacios hiperbólicos tridimensionales como  $\mathbf{H}_1^3$  y  $\mathbf{H}_\pm^3$ , además del plano  $E^3$ . Las líneas en color rojo, representan el cono de luz de un punto en el ecuador.

$$x^2 = R \cosh \rho \cos \chi \cos \theta \sin \phi, \quad \phi \in [0, 2\pi],$$

$$x^3 = R \cosh \rho \cos \chi \cos \theta \cos \phi. \quad (3.3)$$

Se puede mostrar que el Laplaciano es

$$\Delta_{dS_4}(\rho, \chi, \theta, \phi) = \frac{1}{R^2 \cosh^3 \rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \cosh^3 \rho \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\mathcal{K}^2(\chi, \theta, \phi)}{R^2 \cosh^2 \rho}. \quad (3.4)$$

En la ecuación (3.4)  $\mathcal{K}^2(\chi, \theta, \phi)$  es el cuadrado del operador de momento angular cuatro-dimensional, dado por

$$\mathcal{K}^2(\chi, \theta, \phi) = -R^2 \Delta_{S^3}(\chi, \theta, \phi) = -\frac{1}{\cos^2 \chi} \frac{\partial}{\partial \chi} \cos^2 \chi \frac{\partial}{\partial \chi} + \frac{\mathbf{L}^2(\theta, \phi)}{\cos^2 \chi}, \quad (3.5)$$

donde  $\Delta_{S^3}(\chi, \theta, \phi)$  es el operador de Laplace en la geodésica cerrada “space-like” [13] en  $dS_4$ , la cual es una hiperesfera tridimensional  $S^3$  de hiperradio  $R$ .

Los eigenmodos del operador de Laplace en la hiperesfera tridimensional  $S^3$  resuelven la ecuación

$$-\hbar^2 c^2 \Delta_{S^3}(\chi, \theta, \phi) Y_{K\ell m}(\chi, \theta, \phi) = \frac{\hbar^2 c^2}{R^2} K(K+2) Y_{K\ell m}(\chi, \theta, \phi), \quad K = 0, 1, 2, \dots, \quad (3.6)$$

con

$$Y_{K\ell m}(\chi, \theta, \phi) = \mathcal{S}_{n\ell}(\chi) Y_\ell^m(\theta, \phi). \quad (3.7)$$

Siendo  $Y_{K\ell m}(\chi, \theta, \phi)$  los armónicos hiperesféricos cuatro-dimensionales, mientras que  $Y_\ell^m(\theta, \phi)$  son los armónicos esféricos ordinarios. Finalmente,  $\mathcal{S}_{n\ell}(\chi)$  se expresa como

$$\mathcal{S}_{n\ell}(\chi) = \cos^\ell \chi \mathcal{G}_n^{\ell+1}(\sin \chi), \quad n = K - \ell, \quad (3.8)$$

con  $\mathcal{G}_n^{\ell+1}(\sin \chi)$  siendo los polinomios de Gegenbauer.

Bajo el cambio de variable  $Y_{K\ell m}(\chi, \theta, \phi) = \cos^{-1} \chi U_K(\chi) Y_{\ell m}(\theta, \phi)$ , la ecuación (3.6) se transforma en la ecuación unidimensional de Schrödinger con el pozo  $\sec^2 \chi$ . De esta manera se da un ejemplo de como movimientos libres sobre espacios curvados se transforman en movimientos en potenciales unidimensionales. Nótese que movimientos sobre espacios cerrados se transforman en pozos infinitos. De manera similar se puede mostrar que movimientos libres en espacios abiertos como una geodésica hiperbólica llevan tanto a pozos finitos como a barreras. Siguiendo este concepto, se estableció en [6] una dualidad entre el movimiento libre cuántico en un espacio-tiempo  $\mathbf{H}_1^3$  “time-like” hiperbólico abierto y un “space-like” hiperesférico cerrado. Como representantes de los respectivos regímenes, ultravioleta (energías altas) e infrarrojo (energías bajas) de QCD.

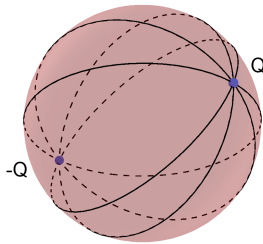


Figura 3.3: La neutralidad de carga en una esfera.

### 3.3. Neutralidad de carga sobre $S^3$ , confinamiento de color y el potencial trigonométrico de Rosen-Morse

Una gran ventaja del espacio de de Sitter, es que contiene la hiperesfera  $S^3$ , sobre la cual no se pueden definir de manera consistente<sup>1</sup> cargas sueltas [14]. El hecho es que las líneas salientes de una carga localizada en un punto particular en la esfera se intersecan en el punto opuesto, creando ahí una carga opuesta ficticia, como se ilustra en la figura 3.3, siendo ésta la razón por la que la esfera necesaria e inevitablemente debe ser neutra de carga. Esto permite definir el confinamiento de color como quarks y gluones ubicados sobre  $S^3$ .

Para satisfacer el teorema de Gauss, que predice una forma funcional  $\sec^2 \chi$  del campo eléctrico para  $\chi \in [-\pi/2, \pi/2]$ , y para poder garantizar la validez del principio de superposición en  $S^3$ , el gradiente de la suma de los potenciales de las cargas opuestas en la esfera tiene que ser proporcional a  $\sec^2 \chi$ . Para poder construir los potenciales generados por las dos cargas, uno debe construir las funciones de Green correspondientes a cargas en el polo *este* o polo *oeste* respectivamente, que se denotarán como  $\mathcal{G}_{-\pi/2}(\chi)$  y  $\mathcal{G}_{+\pi/2}(\chi)$ , los resultados se encuentran entre otros en [15]. En efecto, el potencial  $V_{\pi/2}(\chi)$  en un punto con ángulo polar igual a  $\chi$  producido por una carga ubicada en el polo *oeste*, vale

$$V_{-\pi/2}(\chi) = Q\mathcal{G}_{-\pi/2}(\chi) = -\frac{Q}{4\pi^2} \left( \chi - \frac{3\pi}{2} \right) \tan \chi, \quad (3.9)$$

mientras que el potencial  $V_{+\pi/2}(\chi)$  en el mismo lugar, pero producido por una

---

<sup>1</sup>*Consistente* quiere decir, una definición que respeta el teorema de Gauss y el principio de superposición.

anticarga ubicada en el polo *este* vale

$$V_{+\frac{\pi}{2}}(\chi) = -Q\mathcal{G}_{+\frac{\pi}{2}}(\chi) = -\frac{(-Q)}{4\pi^2} \left(\chi - \frac{\pi}{2}\right) \tan \chi, \quad \chi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]. \quad (3.10)$$

Asumiendo la validez del principio de superposición, se encuentra el potencial de dipolo de carga  $V_{CD}(\chi)$  que emerge en un punto  $\chi$  en  $S^3$  como

$$V_{CD}(\chi) = V_{-\frac{\pi}{2}}(\chi) + V_{+\frac{\pi}{2}}(\chi) = \frac{Q}{4\pi} \tan \chi. \quad (3.11)$$

El campo eléctrico de este dipolo se obtiene mediante la diferenciación como

$$E(\chi) = -\frac{\partial}{\partial \chi} V_{CD}(\chi) = -\frac{Q}{4\pi} \frac{1}{\cos^2 \chi}, \quad \chi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \quad (3.12)$$

lo cual cumple con el teorema de Gauss. Nótese que  $Q$  representa una carga sin dimensión. Ésta se relaciona con cargas con dimensión,  $q$ , como sigue

$$Q = \frac{q}{\sqrt{\hbar c}}. \quad (3.13)$$

Para quedar cerca al potencial de Cornell (1.7), se da preferencia a la parametrización  $\chi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \chi \in [0, \pi]$ . De esta manera, la energía potencial de una carga  $Q$  asume en el potencial (3.11) la forma,<sup>2</sup>

$$V_{CD}(\chi) = \frac{q^2}{4\pi\hbar c} \cot \chi, \quad \chi \in [0, \pi]. \quad (3.14)$$

Esta es una función armónica porque soluciona la ecuación de Laplace sobre  $S^3$ ,  $\Delta_{S^3} \cot \chi = 0$ . Como tal la fuerza relacionada,  $\vec{F} = \vec{\nabla} \cot \chi$ , es conservativa ya que  $\text{div} \vec{F} = 0$ . Un caso similar es el del potencial de Coulomb, que también soluciona la ecuación de Laplace, pero en el espacio tridimensional plano de acuerdo con  $\Delta E_3 \frac{1}{r} = 0$ . La diferencia con (3.14) es que el potencial de Coulomb se genera por una carga suelta, mientras que  $V_{CD}(\chi)$  se genera por dos cargas opuestas (por un dipolo).

Ahora el potencial en (3.14) puede ser aplicado como una perturbación de otro dipolo de color, considerado como un rotador rígido, suspendiéndose libremente alrededor de su centro de masa y descrito por (3.6). De esta manera emerge la siguiente ecuación de onda

---

<sup>2</sup>La energía potencial se va notar con el símbolo  $V_{CD}(\chi)$  al igual que el potencial. La diferencia en el significado se entiende en el concepto.

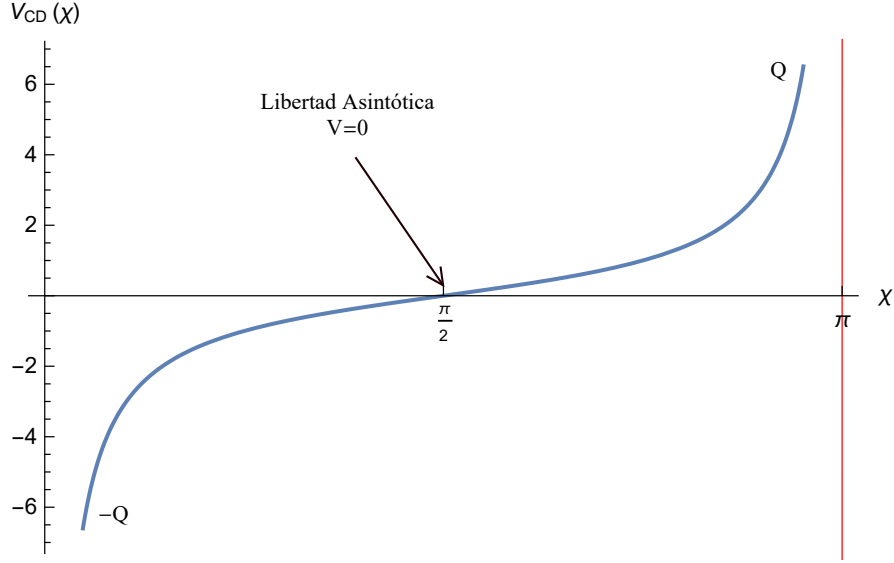


Figura 3.4: Potencial de confinamiento de dipolo de color,  $V_{CD}(\chi)$  en la ecuación (3.14).

$$\left(-\frac{\hbar^2 c^2}{R^2} \frac{d^2}{d\chi^2} + V_{tRM}^{(b)}\right) U_{\ell n}^{(b)} Y_{\ell}^m(\theta, \phi) = \frac{\hbar^2 c^2}{R^2} \left(\epsilon_{\ell n}^{(b)}\right)^2 U_{\ell n}^{(b)} Y_{\ell}^m(\theta, \phi), \quad (3.15)$$

donde

$$V_{tRM}^{(b)}(\chi) = \frac{\hbar^2 c^2 \ell(\ell+1)}{R^2 \sin^2 \chi} - 2 \frac{\hbar^2 c^2}{R^2} b \cot \chi, \quad \chi \in [0, \pi], \quad 2b = \frac{q^2}{4\pi \hbar c}, \quad (3.16)$$

es una versión del potencial trigonométrico de Rosen-Morse, el cual, como se conoce bien de la mecánica cuántica supersimétrica, es exactamente soluble [7].

En resumen, el potencial trigonométrico de Rosen-Morse y con esto la formula de masa en (1.2) pudo ser derivado desde primeros principios y se mostró la relevancia de los grados de libertad neutros de color (dipolos de color) en interacciones fuertes.



## Capítulo 4

# Ecuación de Dirac con el potencial de confinamiento producido por dipolos de color

En esta capítulo se va a aplicar el potencial en (1.3) con la parametrización en (1.6) a propiedades locales como lo son los factores de forma eléctrico y magnético del protón. Estas observables proveen valiosos vislumbramientos sobre las distribuciones de las densidades de las cargas eléctricas y de las corrientes magnéticas dentro de los hadrones y de este modo de sus estructuras internas. Por esto se considera que la ecuación de Dirac con el mencionado potencial de confinamiento de dipolo de color, y resolviéndola aproximadamente, se encuentran las funciones de onda espinoriales, las cuales después se emplean en la evaluación de los factores de forma de interés.

Esta meta es justificada por el hecho de que un diquark se transforme bajo el grupo  $SU(3)_c$  de norma de color como un antiquark. Específicamente, se tiene interés en la descripción de los factores de forma electromagnéticos del protón. Para lograr esta meta se tiene que formular primero el problema relativista completo de los cuatro cuerpos  $(q - (qq)) - (g - \bar{g})$  dados por los dos dipolos de color en el formalismo de Dirac, luego encontrar la corriente electromagnética relativista del sistema, y finalmente someterlo a la apropiada transformación integral al espacio de momento, un problema muy complejo de muchos cuerpos, el cual aquí se simplificará con aproximaciones. Primero se aproximan  $(q - qq)$  y  $(g - \bar{g})$  como partículas casi puntuales de espín  $1/2$  y espín  $0$ , respectivamente, asumiendo la masa fermiónica  $m$  mucho más ligera que la bosónica. Esta estrategia permite reemplazar el sistema de varios cuerpos por un cuerpo, y de esta manera describir bariones por la ecuación de Dirac con el potencial  $V_{CCD}$ , en paralelo al problema de Dirac-Coulomb como,

$$\frac{\hbar}{R} \left( \frac{d}{d\chi} + \frac{(-1)^{j+l+1/2}(j+1/2)}{\chi} \right) G^{jl}(\chi) = (\mathcal{E}^{jl} + mc^2 - \mathcal{V}_{CCD}(\chi)) F^{jl}(\chi), \quad j = |l \pm 1/2|,$$

$$\frac{\hbar}{R} \left( \frac{d}{d\chi} - \frac{(-1)^{j+l+1/2}(j+1/2)}{\chi} \right) F^{jl}(\chi) = (-\mathcal{E}^{jl} + mc^2 + \mathcal{V}_{CCD}(\chi)) G^{jl}(\chi),$$

$$\mathcal{V}_{CCD}(\chi) = \frac{R}{\hbar c} V_{CCD}(\chi) = -\frac{\hbar c \alpha_s N_c \cot \chi}{R}. \quad (4.1)$$

Las siguientes aproximaciones,  $1/\chi \approx 1/\sin(\chi) \approx \cot(\chi)$ , permiten solucionar (4.1) exactamente en analogía al problema de Dirac-Coulomb, ejecutando paso a paso el método en [16]. De acuerdo con lo último, las dos ecuaciones en (4.1) son primero juntadas en una sola ecuación matricial de 4 x 4 (denominada como ecuación de Dirac “cuasi-radial” con un potencial escalar de norma, la cotangente), a la cual se le aplica una transformada de similitud por la siguiente matriz  $D$ ,

$$D = \begin{pmatrix} k+a & -\alpha_s N_c \\ -\alpha_s N_c & k+a \end{pmatrix}, \quad |a| < |k|, \quad (4.2)$$

$$k = (-1)^{j+l+1/2}(j+1/2), \quad a = \sqrt{k^2 - \alpha_s^2 N_c^2}. \quad (4.3)$$

Al efectuar este cálculo se obtienen las soluciones aproximadas para (4.1) como,

$$\Psi^{jl}(\chi) = \begin{pmatrix} \frac{G^{jl}(\chi)}{R\chi} \\ \frac{F^{jl}(\chi)}{R\chi} \end{pmatrix} = D^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\tilde{G}_{n'a'}^{jl}(\chi)}{R\chi} \\ \frac{\tilde{F}_{na}^{jl}(\chi)}{R\chi} \end{pmatrix}, \quad (4.4)$$

$$D^{-1} = \frac{1}{2a(a+k)} \begin{pmatrix} k+a & \alpha_s N_c \\ \alpha_s N_c & k+a \end{pmatrix}. \quad (4.5)$$

Éstas se expresan en términos de las soluciones del siguiente sistema de dos ecuaciones lineales acopladas,

$$A^+ \tilde{G}_{n'a'}^{jl}(\chi) = \left( \frac{k}{a} \mathcal{E}^{jl} + mc^2 \right) \tilde{F}_{na}^{jl}(\chi), \quad (4.6)$$

$$A^- \tilde{F}_{na}^{jl}(\chi) = \left( -\frac{k}{a} \mathcal{E}^{jl} + mc^2 \right) \tilde{G}_{n'a'}^{jl}(\chi), \quad (4.7)$$

$$A^\pm = \pm \frac{\hbar c}{R} \frac{d}{d\chi} + W(\chi), \quad (4.8)$$

$$W(\chi) = -\frac{\hbar c a}{R} \cot \chi - \frac{\mathcal{E}^{jl} \alpha_s N_c}{a}. \quad (4.9)$$

Después, el espinor  $\Psi^{jl}(\chi)$  en (4.4), que se denomina ocasionalmente como “cuasi-radial”, se descompone como

$$\begin{aligned}\Psi^{jl}(\chi) &= \begin{pmatrix} a_+ & a_- \\ a_- & a_+ \end{pmatrix} U_{(n)}^{jl}(\chi) \\ &= \begin{pmatrix} a_- & a_+ \\ a_+ & a_- \end{pmatrix} V_{(n)}^{jl}(\chi), \\ a_+ &= \frac{1}{2a}, \quad a_- = \frac{\alpha_s N_c}{2a(a+k)},\end{aligned}\tag{4.10}$$

donde

$$U_{(n)}^{jl}(\chi) = N \begin{pmatrix} \frac{\tilde{F}_{na}^{jl}(\chi)}{R\chi} \\ \frac{\tilde{G}_{n'a'}^{jl}(\chi)}{R\chi} \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} n' = n - 1 \\ a' = a + 1 \end{matrix},\tag{4.11}$$

$$V_{(n)}^{jl}(\chi) = N \begin{pmatrix} \frac{\tilde{G}_{n'a'}^{j'l}(\chi)}{R\chi} \\ \frac{\tilde{F}_{na}^{jl}(\chi)}{R\chi} \end{pmatrix}, \quad l' = l + 1,\tag{4.12}$$

El factor de normalización  $N$ , de los espinores  $U_{(n)}^{jl}(\chi)$  es determinado por la condición,

$$\int_0^\pi \left( \left[ \tilde{F}_{na}^{jl}(\chi) \right]^2 + \left[ \tilde{G}_{n'a'}^{j'l}(\chi) \right]^2 \right) d\chi = \frac{1}{N^2}.\tag{4.13}$$

Para valores de  $j$  y  $a$  fijos, los espinores  $U$  y  $V$  con números cuánticos  $n$  crecientes proveen una base completa para la expansión de las funciones de onda físicas. Es ahora sencillo verificar que las ecuaciones (4.6)-(4.9) factorizan el siguiente par de ecuaciones de Schrödinger supersimétricas unidimensionales [7],

$$\begin{aligned}A^- A^+ \tilde{G}_{n'a'}^{j'l}(\chi) &= \left( -\frac{\hbar^2 c^2}{R^2} \frac{d^2}{d\chi^2} + V_1(\chi) \right) \tilde{G}_{n'a'}^{j'l}(\chi) \\ &= \left( \frac{(k\mathcal{E}^{jl})^2}{a^2} - m^2 c^4 \right) \tilde{G}_{n'a'}^{j'l}(\chi),\end{aligned}\tag{4.14}$$

$$A^+ A^- \tilde{F}_{na}^{jl}(\chi) = \left( -\frac{\hbar^2 c^2}{R^2} \frac{d^2}{d\chi^2} + V_2(\chi) \right) \tilde{F}_{na}^{jl}(\chi)$$

$$= \left( \frac{(k\mathcal{E}^{jl})^2}{a^2} - m^2 c^4 \right) \tilde{F}_{na}^{jl}(\chi), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (4.15)$$

con los potenciales de pareja  $V_1(\chi)$  y  $V_2(\chi)$  siendo

$$V_1(\chi) = \frac{\hbar^2 c^2}{R^2} \frac{a'(a' - 1)}{\sin^2 \chi} - 2 \frac{\hbar c}{R} \mathcal{E}^{jl} \alpha_s N_c \cot \chi - \frac{\hbar^2 c^2}{R^2} a^2 + \frac{\alpha_s^2 N_c^2}{a^2} (\mathcal{E}^{jl})^2, \quad a' = a + 1, \quad (4.16)$$

$$V_2(\chi) = \frac{\hbar^2 c^2}{R^2} \frac{a(a - 1)}{\sin^2 \chi} - 2 \frac{\hbar c}{R} \mathcal{E}^{jl} \alpha_s N_c \cot \chi - \frac{\hbar^2 c^2}{R^2} a^2 + \frac{\alpha_s^2 N_c^2}{a^2} (\mathcal{E}^{jl})^2. \quad (4.17)$$

La comparación con (1.6) revela que el valor absoluto de la energía depende de los parámetros en los potenciales de pareja  $V_1(\chi)$  y  $V_2(\chi)$ , que son generados por el superpotencial en (4.9), y coinciden en forma con la interacción conforme  $V_{tRM}(\chi)$ . La energía se obtiene como la solución de la siguiente ecuación [7]:

$$\frac{(k\mathcal{E}^{jl})^2}{a^2} - m^2 c^4 = \frac{\hbar^2 c^2}{R^2} (a + n)^2 - \frac{\alpha_s^2 N_c^2 (\mathcal{E}^{jl})^2}{(a + n)^2} + \frac{\alpha_s^2 N_c^2 (\mathcal{E}^{jl})^2}{a^2} - \frac{\hbar^2 c^2}{R^2} a^2. \quad (4.18)$$

Es importante notar la duplicación de la magnitud del potencial cotangente relativo a la versión no relativista en (1.6). Nótese además que  $V_1(\chi)$  se obtiene de su pareja  $V_2(\chi)$  por el reemplazo,  $a \rightarrow a' = a + 1$  en todas partes excepto en las constantes aditivas, en las cuales ésta, en combinación con  $n' = n - 1$ , asegura la constancia de  $(a + n) = (a' + n')$  y por lo tanto garantiza isoenergía al nivel de las ecuaciones cuadráticas. El estado base se define por las ecuaciones (4.6)-(4.7), ya que la parte izquierda en (4.6) puede ser cero, esto por  $k = -1$ ,  $\tilde{F}_{0,a}^{1/2,0}(\chi)$  puede ser no cero, mientras que  $\tilde{G}_{-1,a+1}^{1/2,1}(\chi)$  debe ser cero. De esta manera  $\tilde{F}_{0,a}^{1/2,0}(\chi)$  se obtiene por la condición  $A^- \tilde{F}_{0,a}^{1/2,0}(\chi) = 0$  y el estado base se queda sin pareja supersimétrica. Todos los estados excitados por encima están en pareja. El par  $\left( \tilde{F}_{n,a}^{j,l}, \tilde{G}_{n-1,a+1}^{j,l=l+1} \right)$  representa un espinor de mecánica cuántica súper simétrica.

Las (no normalizadas) funciones de onda solucionando (4.14)-(4.15) son conocidas y disponibles en la literatura. De la forma particular formuladas por [3], y revisadas en [17], y en la presente notación, son dadas por

$$\tilde{F}_{na}^{jl}(\chi) = \sin^{-\beta_n} \chi e^{-\frac{\alpha_n}{2} \chi} \mathcal{R}_n^{(\alpha_n, \beta_n)}(\cot \chi), \quad (4.19)$$

$$\beta_n = -(n + a), \quad \alpha_n = \frac{2\alpha_s N_c}{n + a} \frac{m c^2 a}{|k| \hbar c} R, \quad (4.20)$$

$$\tilde{G}_{n'a'}^{jl'}(\chi)|_{a'=a+1, n'=n+1} = \sin^{-\beta_{n'-1}} \chi e^{-\frac{\alpha_{n'-1}}{2}\chi} \mathcal{R}_{n'=n-1}^{(\alpha_{n'-1}, \beta_{n'-1})}(\cot \chi)|_{a'=a+1},$$

$$\beta_{n'-1}|_{a'=a+1, n'+n-1} = \beta_n, \quad \alpha_{n'-1}|_{a'=a+1, n'=n-1} = \alpha_n, \quad (4.21)$$

donde  $R_n^{(\alpha_n, \beta_n)}(\cot(\chi))$  son los polinomios de Romanovski [17], obtenidos de la fórmula de Rodrigues como

$$\mathcal{R}_n^{(\alpha_n, \beta_n)}(x) = \frac{1}{\omega^{(\alpha_n, \beta_n)}(x)} \frac{d^n}{dx^n} [\omega^{(\alpha_n, \beta_n)}(x)(1+x^2)^n],$$

y con la siguiente función de peso

$$\omega^{(\alpha_n, \beta_n)}(x) = (1+x^2)^{\beta_n} e^{-\alpha_n \cot^{-1} x}, \quad x = \cot \chi. \quad (4.22)$$

Las expresiones explicitas para los espinores definiendo el estado base (índice bajo cero) ahora son,

$$U_{(0)}^{1/2,0}(\chi) = \frac{N_0}{R\chi} \begin{pmatrix} \tilde{F}_{0a}^{1/2,0} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{N_0}{R\chi} \begin{pmatrix} \sin^a \chi e^{-\frac{b}{a}\chi} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b = \frac{\alpha_s N_c a m c^2 R}{|k| \hbar c}, \quad (4.23)$$

$$V_{(0)}^{1/2,0}(\chi) = \frac{N_0}{R\chi} \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{F}_{0a}^{1/2,0} \end{pmatrix} = \frac{N_0}{R\chi} \begin{pmatrix} 0 \\ \sin^a \chi e^{-\frac{b}{a}\chi} \end{pmatrix}. \quad (4.24)$$

Sustituyéndolas en (4.10)-(4.12), el espinor de Dirac del estado base,  $\Psi_{gst}^{1/2,0}(\chi)$ , se obtiene como

$$\begin{aligned} \Psi_{gst}^{1/2,0}(\chi) &= \mathcal{N}_0 \begin{pmatrix} \frac{G^{1/2,1}(\chi)}{R\chi} \\ \frac{F^{1/2,0}(\chi)}{R\chi} \end{pmatrix} = \frac{\mathcal{N}_0}{R\chi} \begin{pmatrix} a_- \tilde{F}_{0a}^{1/2,0}(\chi) \\ a_+ \tilde{F}_{0a}^{1/2,0}(\chi) \end{pmatrix} \\ &= (a_- U_{(0)}^{1/2,0}(\chi) + a_+ V_{(0)}^{1/2,0}(\chi)), \end{aligned} \quad (4.25)$$

donde  $\mathcal{N}_0$  es un factor de normalización superior del  $N_0$  en (4.23) y es necesario tomarlo en cuenta por ser la determinante de la matriz D en (4.2) diferente de uno. En efecto, el espinor del primer estado radialmente excitado,  $[\Psi^{1/2,0}]^*(\chi)$ , esta dado por,

$$[\Psi^{1/2,0}]^*(\chi) = \mathcal{N}_1 \begin{pmatrix} \frac{G^{1/2,0}(\chi)^*}{R\chi} \\ \frac{F^{1/2,0}(\chi)^*}{R\chi} \end{pmatrix} = \mathcal{N}_1 \begin{pmatrix} a_+ & a_- \\ a_- & a_+ \end{pmatrix} U_{(1)}^{1/2,0}(\chi), \quad (4.26)$$

donde

$$U_{(1)}^{1/2,0}(\chi) = \frac{N_1}{R\chi} \begin{pmatrix} \tilde{F}_{1a}^{1/2,0}(\chi) \\ \tilde{G}_{0a'}^{1/2,1}(\chi) \end{pmatrix}, \quad (4.27)$$

$$V_{(1)}^{1/2,0}(\chi) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} U_{(1)}^{1/2,0}(\chi) = \frac{N_1}{R\chi} \begin{pmatrix} \tilde{G}_{0a'}^{1/2,1}(\chi) \\ \tilde{F}_{1a}^{1/2,0}(\chi) \end{pmatrix}. \quad (4.28)$$

Las constantes de normalización  $\mathcal{N}_0$ ,  $\mathcal{N}_1$ ,  $N_0$  y  $N_1$  no pueden ser calculadas analíticamente para cualquier valor del parámetro  $a$  y tienen que ser evaluadas numéricamente. Además,

$$\tilde{F}_{1a}^{1/2,0}(\chi) = \sin^{a+1} \chi e^{-\frac{b}{(a+1)}\chi} \mathcal{R}_1^{(\alpha_1, \beta_1)}(\cot \chi), \quad (4.29)$$

$$\tilde{G}_{0a'}^{1/2,0}(\chi) = \sin^{a+1} \chi e^{-\frac{b}{(a+1)}\chi} \mathcal{R}_0^{(\alpha_0, \beta_0)}(\cot \chi), \quad (4.30)$$

con

$$\mathcal{R}_0^{(\alpha_0, \beta_0)}(\cot \chi) = 1,$$

$$\mathcal{R}_1^{(\alpha_1, \beta_1)}(\cot \chi) = -2(a+1) \cot \chi + \frac{2\alpha_s N_c a m c^2 R}{\hbar c |k| (a+1)}. \quad (4.31)$$

La base definida por los espinores  $U_{(0)}^{1/2,0}(\chi)$ ,  $V_{(0)}^{1/2,0}(\chi)$ ,  $U_{(1)}^{1/2,0}(\chi)$ ,  $V_{(1)}^{1/2,0}(\chi)$  dados en (4.23),(4.24),(4.27),(4.28), es relevante por su propio mérito como un conjunto completo en el cual expansiones de funciones de onda de bariones físicos pueden ser construidos para lograr un acercamiento mejor a una descripción más realista de las observables, al mismo tiempo evitando las severas restricciones impuestas en (4.10) en las constantes  $a_+$  y  $a_-$  por la ecuación de Dirac genuina. Una función de onda posiblemente más realista que la de [29] puede ser construida relajando las restricciones en las constantes  $a_+$ ,  $a_-$  y  $a$  y considerando en su lugar una expansión en la base de los espinores en (4.23)-(4.24) y (4.27)-(4.28),

$$\Psi^p(\chi) = \beta V_{(0)}^{1/2,0}(\chi) + \sqrt{1 - \beta^2} \left( \alpha U_{(0)}^{1/2,0}(\chi) + \sqrt{1 - \alpha^2} U_{(1)}^{1/2,0}(\chi) \right), \quad (4.32)$$

donde las constantes  $\alpha$  y  $\beta$  son tratadas como parámetros libres fenomenológicos, para ser ajustados a los datos.

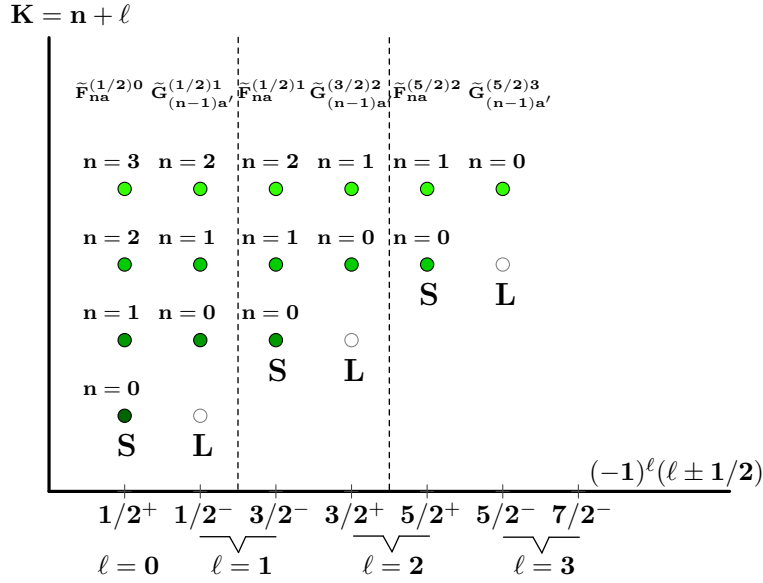


Figura 4.1: Representación esquemática de las soluciones  $\tilde{G}_{n'a'}^{j\ell}(\chi)$  y  $\tilde{F}_{na}^{j\ell}(\chi)$  de las ecuaciones (4.14) y (4.15), las respectivas componentes grande (L) y pequeña (S) del espinor auxiliar intermediario  $V_{(n)}^{j\ell}(\chi)$  en (4.12) en el esquema de SUSY-QM. En la figura se separan los espinores de diferentes  $j$  por líneas punteadas. Para ser específico, la primera, segunda, tercera y las siguientes columnas ilustran los respectivos espinores  $\tilde{\Psi}^{(1/2),0}(\chi)$ ,  $\tilde{\Psi}^{(3/2),1}(\chi)$ ,  $\tilde{\Psi}^{(5/2),2}(\chi)$ , etcétera con  $n$  creciente. La nomenclatura usada en las etiquetas de  $\tilde{\Psi}^{j\ell}(\chi)$  es tal que el índice  $\ell$  pertenece al momento angular. Los estados de mayor espín posible para dada  $K$  corresponden a  $n = 0$ , sus  $\ell$ 's son iguales al máximo valor  $\ell_{\max} = K$ , y sus espines son  $j = (K + \frac{1}{2})$ . Sus espinores todos tienen componentes pequeñas. Las componentes grandes para  $n = 0$  estas ausentes (denotadas por puntos sin relleno) debido a que requerirían de acuerdo con (4.4) un número de nodo menor por uno que  $n$ , esto es un valor negativo prohibido. Estos espinores describen estados de las energías más bajas (estados base) en una columna. En consecuencia, los espinores de Dirac genuinos de estado base,  $\Psi^{j\ell}(R, \chi)$ , en (4.4) (tomando en cuenta (4.10)), tienen componentes grandes y pequeñas de formas funcionales iguales, distintas por una constante. Los arriba mencionados espinores están asociados con soluciones a la ecuación de Dirac correspondientes a mayores energías,  $\mathcal{E}^{(j\ell)^2}$ , y sus componentes grandes y pequeñas son de formas funcionales distintas.

## Capítulo 5

# Los factores de forma de la carga eléctrica y del dipolo magnético del protón

Los factores de forma proveen información importante sobre la estructura del nucleón. En particular el factor de forma de la carga eléctrica  $G_E^p(Q^2)$ , y el del dipolo magnético,  $G_M^p(Q^2)$ , del protón, el tema del actual capítulo, codifica hasta cierto punto las distribuciones internas de la carga eléctrica, y de la corriente de magnetización dentro de la partícula. Esto es ya que en el marco de referencia de Breit, definido en cero transferencia de energía, y con  $\mathbf{p} = -\mathbf{p}'$ , la corriente electromagnética en el espacio de momentos puede ser vista de la forma

$$j_\mu^p(Q^2) = (\rho^p(Q^2), \mathbf{J}^p(Q^2)) = (G_E^p(Q^2), \mu_N i \vec{\sigma} \cdot \mathbf{q} G_M^p(Q^2)), \mu_N = \frac{e_p \hbar c}{2m_p}, \quad (5.1)$$

donde el cuatrimomento transferido es “space-like”,  $-q^2 = Q^2 \geq 0$ .

Al considerar  $\rho^p(Q^2)$  y  $\mathbf{J}^p(Q^2)$  como transformadas de Fourier de las correspondientes densidades de la carga eléctrica y de la corriente de magnetización en el espacio de posiciones,  $\rho^p(r)$ , y  $\rho_{mgn}^p(r)$ , donde  $\rho_{mgn}^p(r) = J_+^p(r)\mu_N$ , los factores de forma  $G_E(Q^2)$  y  $G_M(Q^2)$  pueden ser expresados como las siguientes transformadas integrales [18],

$$G_E^p(Q^2) = \int_0^\infty \rho^p(r) e^{i\mathbf{r}\cdot\mathbf{q}} d\mathbf{r}, \quad (5.2)$$

$$G_M^p(Q^2) = \int_0^\infty \rho_{mgn}^p(r) e^{i\mathbf{r}\cdot\mathbf{q}} d\mathbf{r}. \quad (5.3)$$

Dentro del formalismo de Dirac, las densidades de la carga eléctrica y de la



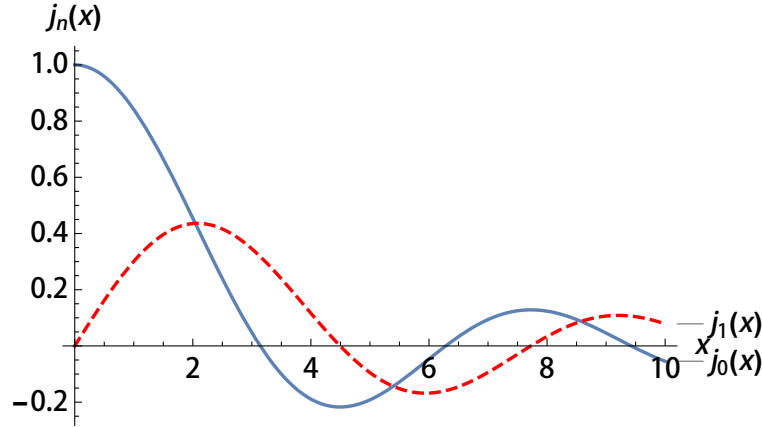


Figura 5.1: Funciones esféricas de Bessel  $j_0(x)$  y  $j_1(x)$ . Estas funciones son utilizadas en el cálculo integral de los factores de forma electromagnéticos del protón (5.6)-(5.7).

corriente de magnetización están expresadas en términos de las componentes grande,  $G^{1/2,0}(r)$ , y pequeña,  $F^{1/2,0}(r)$ , de un espinor radial de acuerdo con [19] como,

$$\rho^p(r) = \left| \Psi_{\text{gst}}^{1/2,0} \right|^2 = [G^{1/2,0}(r)]^2 + [F^{1/2,0}(r)]^2, \quad (5.4)$$

$$\rho_{\text{mgn}}^p = \left| \tilde{\Psi}_{\text{gst}}^{1/2,0} \gamma_5 \Psi_{\text{gst}}^{1/2,0} \right| = \frac{2\mu_N G^{1/2,0}(r) F^{1/2,0}(r)}{Q} \frac{\partial}{\partial r}. \quad (5.5)$$

Con esto, las ecuaciones (5.2) y (5.3) se reducen a

$$G_E^p(Q^2) = \int_0^\infty \left( [G^{1/2,0}(r)]^2 + [F^{1/2,0}(r)]^2 \right) j_0(Qr) dr, \quad (5.6)$$

$$G_M^p(Q^2) = \mu_N \int_0^\infty \frac{2G^{1/2,0}(r) F^{1/2,0}(r)}{Q} j_1(Qr) dr, \quad (5.7)$$

donde  $j_0(x)$  y  $j_1(x)$  son funciones esféricas de Bessel representadas en la figura 5.1.

Hablando estrictamente, esta interpretación de los factores de forma de la carga eléctrica y del dipolo magnético está limitada al marco de Breit, y está condicionada por  $Q^2/(4M^2) < 1$ . A transferencias más grandes de momento los efectos del “boost” en el marco de Breit adquieren importancia y correcciones relativistas más sofisticadas, calculadas vía técnicas de teoría de campo, tienen que ser introducidas (ver [20] para una revisión reciente exhaustiva teórica y experimental en los factores de forma electromagnéticos del nucleón). A pesar de esto, algunos métodos fenomenológicos como el presentado aquí, pueden contener parámetros que pueden absorber parte de los efectos relativistas y permitir alcanzar una descripción satisfactoria a 5 GeV<sup>2</sup> y mayores.

A fin de tomar en cuenta la propiedad de la función de onda de ser definida en un intervalo finito, la transformada de Fourier debe ser apropiadamente modificada. Transformadas integrales de funciones definidas en intervalos finitos en la línea real han sido estudiadas por ejemplo en [21], donde la modificación de la onda plana ha sido obtenida como

$$e^{iqr \cos \theta} \longrightarrow e^{iQR\chi \cos \theta}, \quad \chi \in [0, \pi]. \quad (5.8)$$

Con esto, el calculo de los factores de forma en consideración con el genuino espinor de Dirac en (4.25) se reduce a la evaluación de las siguientes dos integrales,

$$G_E^p(Q^2) \sim \int_0^\pi \left| \tilde{F}_{0a}^{1/2,0}(\chi) \right|^2 j_0(QR\chi) d\chi, \quad (5.9)$$

$$G_M^p(Q^2) \sim \int_0^\pi 2 \left| \tilde{F}_{0a}^{1/2,0}(\chi) \right|^2 \frac{j_1(QR\chi)}{QR} d\chi. \quad (5.10)$$

El factor de forma  $G_E^p(Q^2)$  es normalizado a  $Q = 0$  al total de la carga eléctrica del protón, esto es a  $e_p = 1$ , mientras  $G_M^p(Q^2)$  es normalizado a  $\mu_p$ , cuyo valor experimental es  $\mu_p = 2.792847\mu_N$ , donde  $\mu_N$  es el magnetón nuclear,  $e_p\hbar/(2M_p)$ . En términos de los espinores cuasiradiales de Dirac (4.25),  $\mu_p$  se expresa como [22]

$$\frac{\mu_p}{\mu_N} = -\frac{2e}{3\mu_N}\gamma \int_0^\pi \left[ \Psi_{gst}^{1/2,0}(\chi) \right]^2 R\chi d\chi. \quad (5.11)$$

## 5.1. Cálculo de los factores de forma del protón

El cálculo esta basado en (4.25), y usa parámetros iguales para la descripción de los factores de forma, tanto eléctrico como magnético.

Con el fin de realizar los cálculos de manera analítica, esto es mediante el uso de cálculo simbólico, se decidió utilizar el bastante conocido *Wolfram Mathematica* debido a que este programa tiene herramientas poderosas para esta clase de desarrollos.

### 5.1.1. Cálculo con espinores de Dirac aproximados por espinores correspondientes a un potencial tipo Coulomb

Por medio de la aproximación  $\sin^a \chi \approx \chi^a$  correspondiente a ángulos pequeños, y para el conjunto de parámetros en (5.12) se pudo mostrar que las densidades de las funciones de onda son prácticamente coincidentes (véase la figura 5.2), haciendo de ésta una buena aproximación.

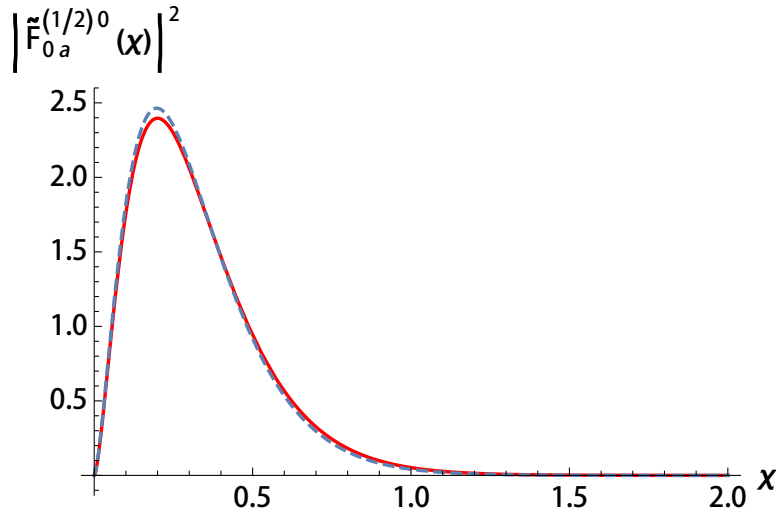


Figura 5.2: La densidad de carga eléctrica  $\left| \tilde{F}_{0a}^{(1/2)0} \right|^2$ , con los parámetros en (5.12) y con la aproximación  $\sin^a \chi \approx \chi^a$ . Se observa que las densidades calculadas una con el  $\sin^a \chi$  (línea roja) y otra con  $\chi^a$  (línea azul) son prácticamente coincidentes, permitiendo hacer uso de esta aproximación, como una alternativa analítica al cálculo numérico.

Los resultados de los factores de forma eléctrico y magnético a este cálculo aproximado, con los siguientes parámetros

$$a = 0.8, \quad b = 1.9, \quad R = 1.3\text{fm}, \quad (5.12)$$

y extendiendo los límites de integración a infinito son presentados en las figuras 5.3 y 5.4 respectivamente.

Las soluciones normalizadas obtenidas son,

$$G_E^p(Q^2) = {}_2F_1[1.3, 1.8; 3/2; -0.0749Q], \quad (5.13)$$

$$G_M^p(Q^2) = {}_2F_1[1.8, 2.3; 5/2; -0.0749Q], \quad (5.14)$$

donde  ${}_2F_1(a, b; c; x)$  es la función hipergeométrica.

También se hizo la comparación entre los factores de forma mediante la razón  $\mu_p G_E^p / G_M^p$  mostrada en la figura 5.5.

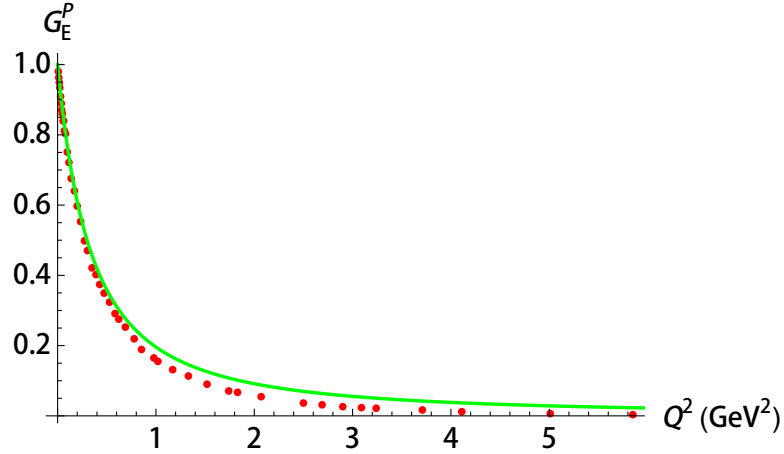


Figura 5.3: Factor de forma eléctrico del protón  $G_E^p$  calculado analíticamente (línea sólida) con los parámetros en (5.12). Se observa que aproximadamente alrededor de  $0.5\text{GeV}^2$  pierde precisión y el cálculo queda por encima de los datos experimentales (puntos) [23].

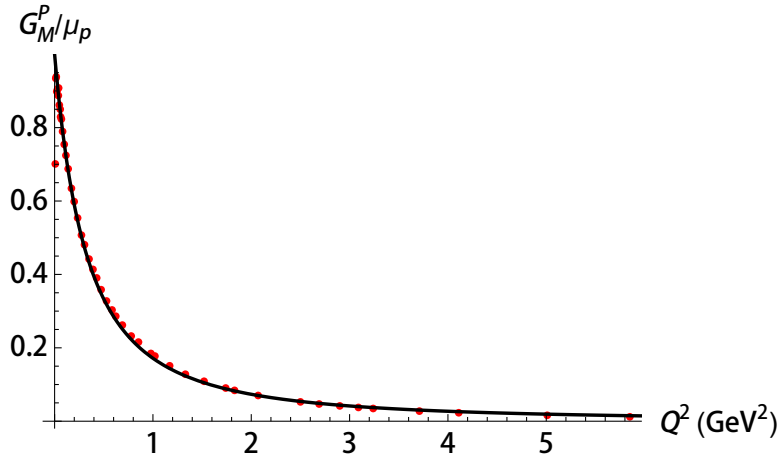


Figura 5.4: Factor de forma magnético del protón  $G_M^p/\mu_p$  (línea sólida) calculado analíticamente con los parámetros en (5.12). Se observa una apegamiento excelente a los datos experimentales (puntos) [23].

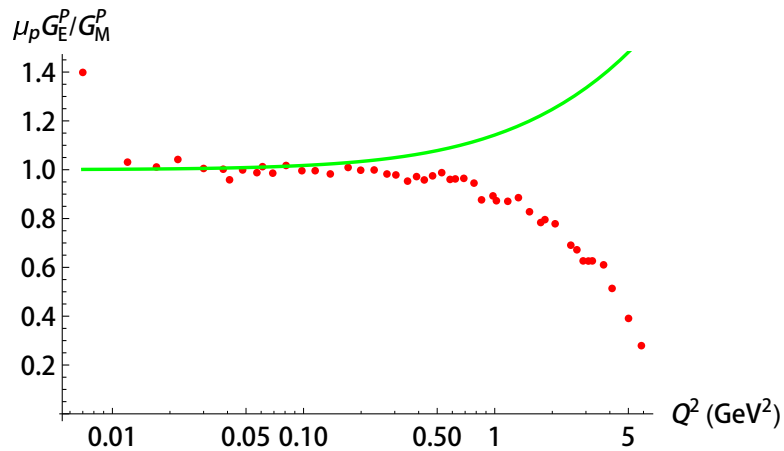


Figura 5.5: Razón entre los factores de forma eléctrico y magnético del protón (línea sólida) mostrados en las figuras 5.3 y 5.4 respectivamente. Muestra la falta de precisión para altas energías, comparando con los datos experimentales (puntos) [23].

A simple vista, los resultados para los factores de forma aparentan ser buenos, el magnético mejor que el eléctrico; pero al observar la razón entre ellos se pudo concluir que hacía falta más precisión para mayores energías.

### 5.1.2. Cálculo numérico con los espinores de Dirac exactos correspondientes al potencial $\cot \chi$

Por lo que se decidió realizar un cálculo numérico con la función de onda (4.25) sin la aproximación  $\sin^a \chi \approx \chi^a$ .

Los resultados bajo estas condiciones con los parámetros

$$a = 0.8, b = 1.9, R = 1.4fm, \alpha_s N_c = 0.6, \quad (5.15)$$

se muestran ilustradas en las figuras 5.6 y 5.7.

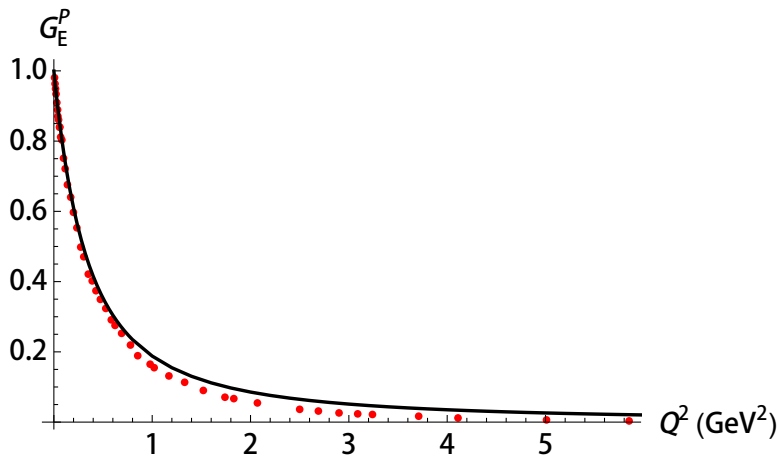


Figura 5.6: El factor de forma eléctrico del protón  $G_E^p$  calculado con el espinor genuino de Dirac en (4.25) (línea sólida) y para los valores del conjunto de parámetros en (5.15). Los datos fueron tomados de [23] y son marcados por puntos.

Además se calcularon los valores numéricos del radio de carga cuadrático promedio,  $\langle r_{e_p}^2 \rangle$ , como el segundo momento con respecto a la distribución  $[\Psi_{gst}^{1/2,0}(\chi)]^\dagger \Psi_{gst}^{1/2,0}(\chi)$ , y del momento magnético,  $m\mu_p$ , obteniendo  $\langle r_{e_p}^2 \rangle = 0.6793fm^2$ , y  $\mu_p = 2.66\mu_N$ . Consideramos estos números como razonables ya que el momento magnético está solo a un 5% por debajo del punto de los datos, sin embargo el radio de carga cuadrático promedio es un 28% menor que el valor experimental. Los cálculos muestran que la caída exponencial de las funciones de onda con la coordenada cuasiradial,  $R\chi$ , es esencial para la correcta reproducción del perfil del comportamiento de las observables bajo investigación. En la figura 5.8 se muestra la razón  $\mu_p G_E^p(Q^2)/G_M^p(Q^2)$ . El análisis muestra que las predicciones permanecen congruentes con los datos hasta  $0.5GeV^2$ , pero falla al reproducir la correcta desviación desde la ley de escalamiento [24]

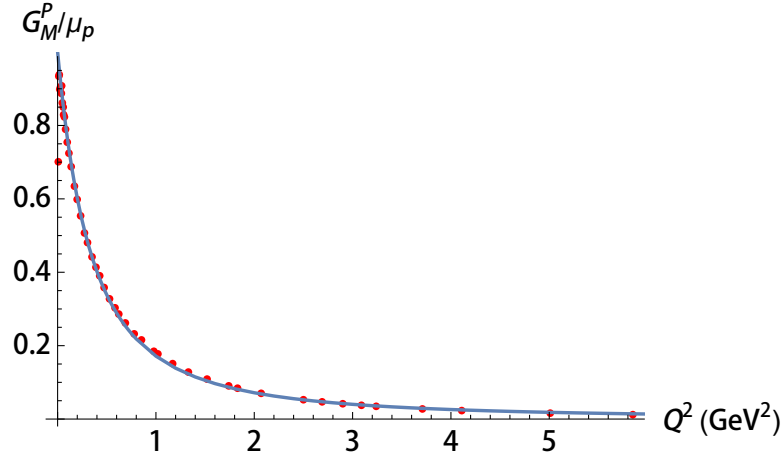


Figura 5.7: El factor de forma del dipolo magnético del protón  $G_M^p/\mu_p$  calculado con el espinor genuino de Dirac en (4.25) (línea sólida) y para los valores del conjunto de parámetros en (5.15). Los datos fueron tomados de [23] y son marcados por puntos.

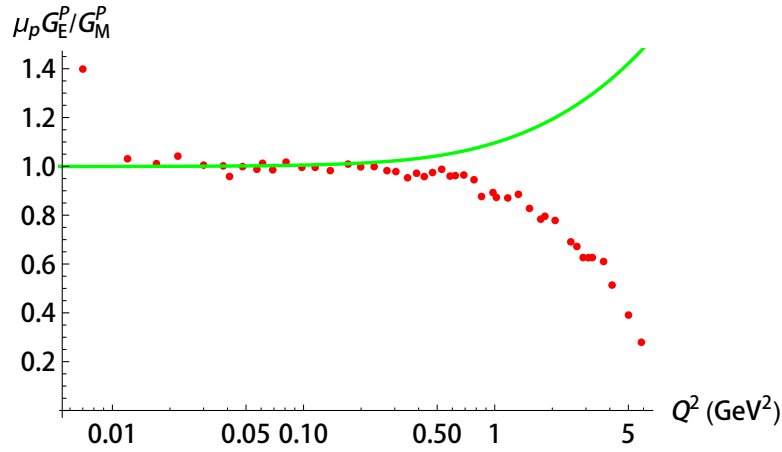


Figura 5.8: La razón  $\mu_p G_E^p/G_M^p$  de los factores de forma en las figuras 5.6 y 5.7. Los datos son marcados por puntos, tomados de [23], y la predicción teórica por la línea sólida.

$$G_E^p(Q^2) = G_M^p(Q^2) = G_D(Q^2) = \frac{1}{(1 + \frac{Q^2}{0.71})^2}, \quad (5.16)$$

donde  $G_D(Q^2)$  es la forma estándar del dipolo, llevando a un aumento en lugar del observado decremento.

Se concluyó que el resultado obtenido por el cálculo numérico fue bastante similar al realizado con la aproximación para ángulos pequeños.

### 5.1.3. Cálculo con espinores correspondientes a un potencial tipo Coulomb con el radio dependiente del momento transferido

Para mejorar la descripción de los factores de forma de la carga eléctrica y del dipolo magnético es importante recordar que, el cuadrivector de corriente de Dirac en el espacio de los momentos se puede escribir de la siguiente forma

$$j^\mu(p, p') = \bar{u}(p')\gamma^\mu u(p) = \bar{u}(p') [\gamma^\mu + \mu_N i\sigma^{\mu\nu}(p' - p)_\nu] u(p), \quad (5.17)$$

sin embargo esta ecuación es válida sólo para partículas puntuales como el electrón.

Para partículas compuestas, como el protón, el cuadrivector de la corriente de Dirac está dado por la siguiente ecuación

$$j^\mu(p, p') = \bar{u}(p') \left[ F_1(q^2)\gamma_\mu + i\frac{\kappa}{2M}F_2(q^2)\sigma^{\mu\nu}(p' - p)_\nu \right] u(p), \quad (p' - p)_\nu = q_\nu, \quad (5.18)$$

donde  $F_1(q^2)$  y  $F_2(q^2)$ <sup>1</sup> son los factores de forma de Dirac y  $\kappa$  es el momento magnético anómalo, con  $\kappa = \mu_p - 1$ .

Haciendo uso de los factores de forma de Dirac, se pueden definir los factores de forma de Sachs, los cuales tienen la siguiente forma

$$G_E(q^2) = F_1(q^2) + \frac{\kappa q^2}{4M^2}F_2(q^2), \quad \frac{q^2}{4M^2} < 1, \quad -q^2 = Q^2 \quad (5.19)$$

y

$$G_M(q^2) = F_1(q^2) + \kappa F_2(q^2). \quad (5.20)$$

La igualdad de los factores de forma de Sachs es una aproximación, para cuando las transferencias de momento son pequeñas y  $\kappa F_2$  es cero.

Sin embargo como se está buscando una descripción de los factores de forma de hasta momentos de  $\sim 5 \text{ GeV}^2$ , en esta sección se va a tomar en cuenta que el factor de forma eléctrico posee una dependencia cinemática de  $q^2$  a través del factor  $\frac{q^2}{4M^2}$ , adicional a la dependencia dinámica de  $q^2$  producida por la transformada de Fourier de la densidad de la carga eléctrica.

La manera en la que se tomará en cuenta lo anterior, será implementando una dependencia del radio del momento transferido

<sup>1</sup> $q$  es el cuádrimomento transferido.

$$R \rightarrow R(1 + 0.1Q^2). \quad (5.21)$$

Tomando la ecuación (5.9) y haciendo el radio dependiente del momento transferido (5.21), se puede hacer una expansión en series de Taylor de  $j_0(QR(1+0.1Q^2)\chi)$ , y con esto es posible escribir (5.9) en la forma del factor de forma eléctrico de Sachs en (5.19).

Haciendo uso de esta dependencia y de los parámetros en (5.12), fue posible mejorar el cálculo mostrado en la figura 5.3 y se reprodujo el factor de forma eléctrico en la figura 5.9.

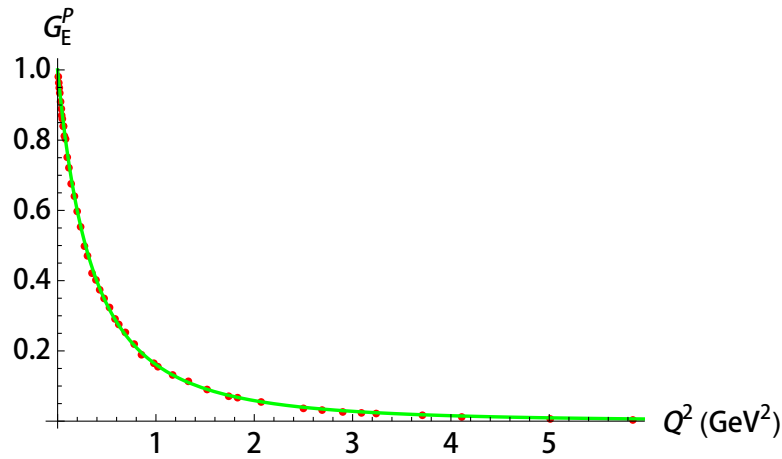


Figura 5.9: Factor de forma eléctrico del protón  $G_E^p$  calculado analíticamente (línea sólida) con los parámetros en (5.12). Se observa que con la corrección en la dependencia del radio al momento transferido, la precisión mejora y el cálculo pasa justo por los datos experimentales (puntos) [23].

Obteniendo de esta forma una solución normalizada distinta a (5.13),

$$G_E^p(Q^2) = {}_2F_1[1.3, 1.8; 3/2; -1.1984 \times 10^{-6}q(q + 250)^2], \quad (5.22)$$

donde  ${}_2F_1(a, b; c; x)$  es la función hipergeométrica.

La razón  $\mu_p G_E^p / G_M^p$  mejoró de manera dramática al hacer el ajuste mencionado arriba en el cálculo del factor de forma eléctrico, como se puede observar en la figura 5.10.



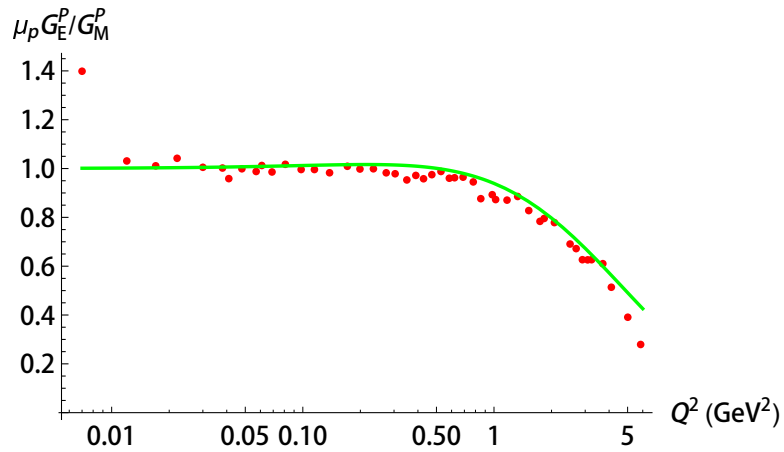


Figura 5.10: Razón entre los factores de forma eléctrico y magnético del protón (línea sólida) mostrados en las figuras 5.9 y 5.4 respectivamente. Muestra una mejora decisiva en la precisión para altas energías, comparando con los datos experimentales (puntos) [23].

Se puede concluir que al introducir  $R \rightarrow R(1 + 0.1Q^2)\text{fm}$ , la descripción de los factores de forma de la carga eléctrica y del dipolo magnético, al igual que la de su razón, fue satisfactoria.

# Conclusiones

El modelo presentado en esta tesis propone que la estructura interna del protón está dominada por un dipolo de color ( $q - qq \sim q - \bar{q}$ ), el cual es perturbado por el potencial de rango finito de otro dipolo de color cuya fuente es pensada como un dipolo de gluones ( $g - \bar{g}$ ). Dicho potencial, definido en (4.1) y denotado como  $V_{CCD}(\chi)$ , se ha empleado en la ecuación de Dirac, la cual ha sido solucionada mediante algunas aproximaciones. Encontrando las componentes grande y pequeña del espinor de Dirac del protón, se han calculado los factores de forma de la carga eléctrica y del dipolo magnético del protón.

Se ha logrado una descripción muy satisfactoria de estos dos factores de forma y de su razón. Los resultados se mostraron en las figuras 5.7, 5.9 y 5.10.

Se concluyó que la ecuación de Dirac con el potencial  $V_{CCD}(\chi)$  describe de manera adecuada la física del espín del protón. Este hallazgo provee un argumento sólido en favor del modelo del confinamiento de color basado en la relatividad especial de de Sitter en [6], [8].

# Apéndice A

## La simetría $so(4)$ y el vector de Laplace-Runge-Lenz

Estados degenerados en espectros se describen matemáticamente en términos de bases de representaciones irreducibles de grupos de simetrías. En este apéndice se presentan los fundamentos de los grupos  $SO(4)$  y  $SO(4, 2)$  de simetrías del átomo de hidrógeno y los espectros hadrónicos.

### A.1. Vector de Laplace-Runge-Lenz

En problemas de dos cuerpos interactuando por una fuerza central se tienen conservación de energía, momento y momento angular. Cuando la fuerza es del tipo  $1/r^2$ , existe una cantidad conservada adicional a las anteriormente mencionadas. A esta cantidad se le llama vector de Laplace-Runge-Lenz (LRL).

Para encontrar su forma<sup>1</sup>, se comienza con la definición del vector de posición relativa

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_1(t) - \mathbf{r}_2(t). \quad (\text{A.1})$$

En la ecuación (A.1),  $\mathbf{r}_1(t)$  y  $\mathbf{r}_2(t)$  son las posiciones de dos partículas como función del tiempo.

El vector  $\mathbf{r}(t)$  satisface la segunda ley de Newton

$$\mu \ddot{\mathbf{r}}(t) = f(r) \frac{\mathbf{r}(t)}{r}. \quad (\text{A.2})$$

En la ecuación (A.2),  $f(r)$  es la fuerza central en este caso y  $\mu$  es la masa reducida.

---

<sup>1</sup>El desarrollo de esta sección, sigue la presentación en [9]

En este apéndice, se trabajará con una fuerza del tipo  $1/r^2$ . Por lo que la ecuación (A.2) toma la forma

$$\mu\ddot{\mathbf{r}}(t) = -k\frac{\mathbf{r}(t)}{r^3}. \quad (\text{A.3})$$

Ahora se define el vector de momento angular

$$\mathbf{L} = \mu\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}, \quad (\text{A.4})$$

y se toma en cuenta su conservación,

$$\dot{\mathbf{L}} = 0. \quad (\text{A.5})$$

Luego se toma el producto cruz de ambos lados de la ecuación (A.3) con (A.4), encontrando

$$\ddot{\mathbf{r}} \times \mathbf{L} = k\frac{\dot{\mathbf{r}}}{r}. \quad (\text{A.6})$$

Gracias a (A.5), la anterior ecuación se puede escribir como

$$\frac{d}{dt}(\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{L}) = k\frac{\dot{\mathbf{r}}}{r}, \quad (\text{A.7})$$

equivalentemente

$$\frac{d}{dt}(\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{L} - k\frac{\mathbf{r}}{r}) = 0. \quad (\text{A.8})$$

Esta ecuación muestra que la cantidad dentro del paréntesis, es una constante de movimiento  $\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{L} - k\frac{\mathbf{r}}{r} = \text{constante}$ .

El vector de LRL ahora se define como

$$\mathbf{M} = \frac{\mathbf{p} \times \mathbf{L}}{\mu} - \kappa\frac{\mathbf{r}}{r}, \quad (\text{A.9})$$

con  $\kappa = Ze^2$  para el átomo de hidrógeno.

Siendo obviamente una cantidad conservada

$$\dot{\mathbf{M}} = 0. \quad (\text{A.10})$$

La conservación del vector de LRL en la mecánica clásica se pasa a la mecánica cuántica utilizando la prescripción de la primera cuantización y se emplea

$$\mathbf{M}' = \sqrt{-\frac{\mu}{2E}} \mathbf{M}. \quad (\text{A.11})$$

En la ecuación anterior  $E$  es el eigenvalor del hamiltoniano y para estados ligados tiene valores negativos. Debido a que el hamiltoniano y  $\mathbf{M}$  son conservados entonces  $\mathbf{M}'$  también lo es.

La conservación de momento angular se interpreta como la simetría rotacional  $SO(3)$  del espacio, la cual existe para cualquier fuerza central. Sin embargo, la ley de fuerza del inverso al cuadrado tiene una simetría más grande,  $SO(4)$  o  $SO(3,1)$ .

El grupo  $SO(4)$  es el grupo rotacional en cuatro dimensiones y es localmente isomorfo a  $SO(3,1)$ , el grupo de Lorentz, con el cual se relaciona por medio de una transformación llamada rotación de Wick,  $x_4 = ict$ . Ambos grupos tienen seis generadores, por lo que tienen 6 cantidades conservadas. Las tres componentes de  $\mathbf{L}$  y las tres componentes de  $\mathbf{M}'$  y se relacionan mediante los conmutadores

$$[M'_i, L_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}M'_k, \quad (\text{A.12})$$

y

$$[M'_i, M'_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}L_k. \quad (\text{A.13})$$

Éstos junto con  $[L_i, L_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}L_k$ , forman el álgebra  $so(4)$  del grupo.

## A.2. El álgebra $so(4)$

Los seis generadores en (A.12) y (A.13), constituyen un álgebra cerrada. Para ver mejor esto, se deben reetiquetar los índices de las componentes de  $\mathbf{L}^2$ . Primero se escriben los respectivos vectores de posición y de momento lineal

$$\mathbf{r} = (r_1, r_2, r_3) \text{ y } \mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3), \quad (\text{A.14})$$

con el conmutador

$$[r_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij}. \quad (\text{A.15})$$

---

<sup>2</sup>El desarrollo de esta sección, sigue la presentación en [10]

Al tomar en cuenta la definición de  $\mathbf{L}$  como  $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ , se ve que las componentes  $L_1, L_2, L_3$  de  $\mathbf{L}$  se pueden expresar de la siguiente forma

$$L_{ij} = r_i p_j - r_j p_i. \quad (\text{A.16})$$

Por la antisimetría

$$L_{ij} = -L_{ji}, \quad (\text{A.17})$$

permite reducir (A.16) a tan solo tres componentes

$$\mathbf{L} = (L_1, L_2, L_3) = (L_{23}, L_{31}, L_{12}). \quad (\text{A.18})$$

Ahora agregamos una cuarta componente  $r_4 \rightarrow ict$  y  $p_4 \rightarrow \frac{\partial}{\partial(ict)}$  para extender (A.15) y (A.16) a cuatro dimensiones con  $i, j = 1, 2, 3, 4$ . Esto da la oportunidad de definir un segundo trivector

$$M'_x = L_{14}, \quad M'_y = L_{24}, \quad M'_z = L_{34}. \quad (\text{A.19})$$

Los seis generadores  $L_{ij}$  constituyen una generalización de los tres generadores  $\mathbf{L}$  de tres a cuatro dimensiones. Ahora (A.12) y (A.13) se juntan en

$$[L_{ij}, L_{kl}] = i(\delta_{ik}L_{jl} + \delta_{il}L_{kj} + \delta_{jk}L_{li} + \delta_{jl}L_{ik}). \quad (\text{A.20})$$

Por lo que el álgebra  $so(4)$  genera el grupo ortogonal especial o grupo propio de rotaciones en cuatro dimensiones,  $SO(4)$ . Éste consta de todas las matrices ortogonales de  $4 \times 4$  con determinante igual a uno.

### A.3. Niveles de energía del átomo de hidrógeno

El álgebra del grupo  $so(4)$  tiene dos operadores que conmutan con todos los generadores, llamados operadores de Casimir ( $C_1, C_2$ ). Cuando el Hamiltoniano se puede diagonalizar en la base de eigenfunciones de  $C_1$  y uno de los generadores, se habla de una simetría dinámica de Hamiltoniano  $SO(4)$ .

Para construir los índices  $K, \ell, m$  y encontrar los eigenvalores del operador de Casimir de  $SO(4)$ , primero se definen un nuevo conjunto de generadores de  $SO(4)$ <sup>3</sup>

$$\mathbf{I} = \frac{1}{2}(\mathbf{L} + \mathbf{M}') \quad \text{y} \quad \mathbf{K} = \frac{1}{2}(\mathbf{L} - \mathbf{M}'), \quad (\text{A.21})$$

---

<sup>3</sup>El desarrollo de esta sección, sigue la presentación en [10]

que satisfacen

$$[I_i, I_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}I_k, \quad (\text{A.22})$$

$$[K_i, K_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}K_k, \quad (\text{A.23})$$

$$[I_i, K_j] = 0, \quad (\text{A.24})$$

$$[\mathbf{I}, H] = [\mathbf{K}, H] = 0. \quad (\text{A.25})$$

Los generadores  $\mathbf{I}$  y  $\mathbf{K}$  generan cada uno un álgebra  $so(3)$  y debido a que conmutan entre ellos, estas álgebras están desacopladas.

Los dos Casimires respectivos  $\mathbf{I}^2$  y  $\mathbf{K}^2$  tienen los eigenvalores típicos para  $SU(2) \cong SO(3)$

$$\mathbf{I}^2 = s(s+1)\hbar^2, \quad s = 0, \frac{1}{2}, 1, \dots, \quad (\text{A.26})$$

$$\mathbf{K}^2 = k(k+1)\hbar^2, \quad k = 0, \frac{1}{2}, 1, \dots. \quad (\text{A.27})$$

Entonces éstos se pueden escribir como

$$\mathbf{I}^2 = \frac{1}{4}(\mathbf{L} + \mathbf{M}')^2 \quad (\text{A.28})$$

y

$$\mathbf{K}^2 = \frac{1}{4}(\mathbf{L} - \mathbf{M}')^2. \quad (\text{A.29})$$

A partir de  $\mathbf{I}^2$  y  $\mathbf{K}^2$  se construyen los dos operadores de Casimir del álgebra  $so(4)$  como

$$C_1 = \mathbf{I}^2 + \mathbf{K}^2 = \frac{1}{2}(\mathbf{L}^2 + \mathbf{M}'^2) \quad (\text{A.30})$$

y

---

<sup>4</sup>En términos de  $s$  y  $k$ , el valor del cuadrimomento angular vale  $K = 2k$ ,  $\ell = 0, \dots, k$  y  $m = -\ell, \dots, \ell$ .

$$C_2 = \mathbf{I}^2 - \mathbf{K}^2 = \mathbf{L} \cdot \mathbf{M}'. \quad (\text{A.31})$$

El espectro de átomo de hidrógeno tan solo necesita representaciones de  $SO(4)$  “diagonales”, es decir, con  $s = k$  y con esto los eigenvalores de  $C_1$  son

$$C_1 = 2k(k+1)\hbar^2, \quad k = 0, \frac{1}{2}, 1, \dots \quad (\text{A.32})$$

Tomando en cuenta la ecuación (A.11) y que  $\mathbf{M}^2 = 2H/\mu(\mathbf{L}^2 + \hbar^2) + \kappa^2$  a consecuencia de (A.9), se puede mostrar que la ecuación (A.30) se transforma en

$$C_1 = \frac{1}{2}(\mathbf{L}^2 - \frac{\mu}{2E}\mathbf{M}^2) = -\frac{\mu\kappa^2}{4E} - \frac{1}{2}\hbar^2. \quad (\text{A.33})$$

Ahora usando el eigenvalor de  $C_1$ , se encuentran finalmente los eigenvalores de energía

$$E_k = -\frac{\mu\kappa^2}{2\hbar^2(2k+1)^2}, \quad k = 0, \frac{1}{2}, 1, \dots \quad (\text{A.34})$$

Identificando  $2k+1 = N$ , se puede ver que (A.34) es justo el valor de la energía del átomo de hidrógeno, lo cual muestra que éste tiene una simetría  $SO(4)$ .

Mientras que los niveles del átomo de hidrógeno se comportan como bases de representaciones del grupo  $SO(4)$ , el espectro en su totalidad se comporta como base de una representación unitaria de dimensionalidad infinita del grupo conforme  $SO(4, 2)$ . Nótese que  $SO(4)$  es el grupo compacto máximo del grupo conforme. En el siguiente capítulo se esbozan los rasgos principales de  $so(4, 2)$ .

## A.4. Grupo conforme $SO(4, 2)$

En el texto se mencionó que el espectro del átomo de hidrógeno de niveles ligados infinitos en su totalidad, se puede ver como base de una representación unitaria e infinita del grupo conforme  $SO(4, 2)$ . En lo siguiente se presenta una idea intuitiva de como sucede esto, sin llegar a formalizar. Específicamente se mostrará que se pueden definir operadores de escalera que conectan los niveles de  $SO(4)$ . Como tales operadores de escalera salen de  $SO(4)$ , éstos indican una simetría más grande.

Se elige la siguiente representación de los generadores  $I_i$  y  $K_i$ <sup>5</sup>

$$I_i = \frac{1}{2}\mathbf{a}^\dagger \sigma_i \mathbf{a} \text{ y } K_i = \frac{1}{2}\mathbf{b}^\dagger \sigma_i \mathbf{b}, \quad i = 0, 1, 2, 3, \quad (\text{A.35})$$

---

<sup>5</sup>El desarrollo de esta sección, sigue la presentación en [25]



donde  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  y  $\mathbf{a}^\dagger$ ,  $\mathbf{b}^\dagger$  son los operadores de generación y aniquilación de bosones con espín diferente de cero y  $\sigma$  para  $i = 1, 2, 3$  son las matrices de Pauli y para  $i = 0$  es la matriz unitaria de  $2 \times 2$ . Con las siguientes relaciones de conmutación

$$[a_i, a_j^\dagger] = \delta_{ij}, [b_i, b_j^\dagger] = \delta_{ij}, [a_i^\dagger, b_j^\dagger] = [a_i, b_j] = [a_i^\dagger, b_j] = [a_i, b_j^\dagger] = 0. \quad (\text{A.36})$$

Los operadores  $\mathbf{L}$  y  $\mathbf{M}'$  se expresan en términos de (A.35) como

$$L_i = I_i + K_i = \frac{1}{2}(\mathbf{a}^\dagger \sigma_i \mathbf{a} + \mathbf{b}^\dagger \sigma_i \mathbf{b}) \quad (\text{A.37})$$

y

$$M'_i = I_i - K_i = \frac{1}{2}(\mathbf{a}^\dagger \sigma_i \mathbf{a} - \mathbf{b}^\dagger \sigma_i \mathbf{b}), \quad i = 1, 2, 3. \quad (\text{A.38})$$

Recordando que

$$L_{ij} = -L_{ji}, \quad (\text{A.39})$$

e introduciendo

$$L_k = L_{ij} = \frac{1}{2}(\mathbf{a}^\dagger \sigma_k \mathbf{a} + \mathbf{b}^\dagger \sigma_k \mathbf{b}), \quad i, j, k = 1, 2, 3 \text{ y permutaciones cíclicas}, \quad (\text{A.40})$$

y

$$-M'_i = L_{i4} = -\frac{1}{2}(\mathbf{a}^\dagger \sigma_i \mathbf{a} - \mathbf{b}^\dagger \sigma_i \mathbf{b}), \quad (\text{A.41})$$

se llega a la siguiente relación de conmutación

$$[L_{ij}, L_{kl}] = i(\delta_{ik}L_{jl} + \delta_{il}L_{kj} + \delta_{jk}L_{li} + \delta_{jl}L_{ik}). \quad (\text{A.42})$$

Ahora se puede considerar el operador

$$L_{56} = \frac{1}{2}(\mathbf{a}^\dagger \mathbf{a} + \mathbf{b}^\dagger \mathbf{b} + 2), \quad (\text{A.43})$$

que conmuta con todos los operadores de  $SO(4)$ . Sus eigenvalores son el número cuántico principal  $N$ . Ahora se consideran dos más operadores escalares

$$L_{45} = \frac{1}{2}(\mathbf{a}^\dagger \sigma_2 \mathbf{b}^\dagger - \mathbf{a} \sigma_2 \mathbf{b}) \quad (\text{A.44})$$

y

$$L_{46} = \frac{i}{2}(\mathbf{a}^\dagger \sigma_2 \mathbf{b}^\dagger + \mathbf{a} \sigma_2 \mathbf{b}), \quad (\text{A.45})$$

con la relación de conmutación

$$[L_{45}, L_{46}] = iL_{56}. \quad (\text{A.46})$$

A partir de estos se construyen

$$N_\pm = L_{45} \mp iL_{46}, \quad (\text{A.47})$$

y se puede mostrar que

$$[L_{56}, N_\pm] = \pm N_\pm. \quad (\text{A.48})$$

**Los operadores  $N_\pm$  suben o bajan  $n$  por 1, o sea que  $L_{45}$  y  $L_{46}$  actúan como operadores escalera sobre  $n$ .**

Para completar el álgebra  $so(4, 2)$ , se deben construir los operadores  $L_{i5}$  y  $L_{i6}$ , llegando a un total de quince generadores (para ver un desarrollo más exhaustivo, véase [25]).

# Bibliografía

- [1] Takahashi T. T., Suganuma R., Nemoto Y. y Matsafuru H. En: *Phys. Rev. D* 65.114509 (2002).
- [2] Kirchbach M. En: *Mod. Phys. Lett. A* 15.2373 (1997).
- [3] Compean C. B. y Kirchbach M. En: *J. Phys. A:Math.Gen.* 39.347 (2006).
- [4] Compean C. B. y Kirchbach M. En: *Eur. Phys. J. A* 33.1 (2007).
- [5] Deur A., Burkert V., Chen J. P. y Korsch W. En: *Phys. Lett.* 665.349 (2008).
- [6] Kirchbach M. y Compean C. B. En: *Eur. Phys. J. A* 52.210 (2016).
- [7] Cooper F., Khare A. y Sukhatme U. P. *Supersymmetry in Quantum Mechanics*. World Scientific, Singapore, 2001.
- [8] Kirchbach M. y Compean C. B. En: *Eur. Phys. J. A* 53.65 (2017).
- [9] Baez John. *The Kepler Problem Revisited: The Laplace–Runge–Lenz Vector*. 2008. URL: <http://math.ucr.edu/home/baez/classical/runge.pdf>.
- [10] Greiner W. y Müller B. *Quantum Mechanics: Symmetries*. Springer Science y Business Media, 2013.
- [11] Kellogg O. D. *Foundations of Potential Theory*. Dover, New York, 1953.
- [12] Aldrovandi R., Beltrán Almeida J. P. y Pereira J. G. En: *Class. Quant. Grav.* 24.1385 (2007).
- [13] Pressley Andrew. *Elementary Differential Geometry*. Springer, London Dordrecht Heidelberg New York, 2012.
- [14] Landau L. D. y Lifschitz E. M. *The Classical Theory of Fields*. Vol. 2. Pergamon Press, 1971, pág. 335.
- [15] Alertz B. En: *Ann.Inst.Henri Poincaré* 53.319 (1990).
- [16] Sukumar C. V. En: *J. Phys. A:Math.Gen.* 18.L697 (1985).
- [17] Raposo A. P., Weber H. J., Alvarez Castillo D. E. y Kirchbach M. En: *Centr. Eur. J. Phys.* 5.253 (2007).
- [18] Kelley J. «Nucleon charge and magnetization densities from Sachs form factors». En: *Phys. Rev. C* (2002). DOI: [arXiv:hep-ph/0204239](https://arxiv.org/abs/hep-ph/0204239).
- [19] Lu D. H., Thomas A. W. y Williams A. G. En: *Phys. Rev. C* 57.2628 (1998).
- [20] Perdrisat C. F., Punjabi V. y Vanderhaeghen M. En: *Progr. Part. Nucl. Phys.* 59.694 (2007).

- 
- [21] Alonso M. A., Pogosyan G. S. y Wolf K. B. En: *Review J. Math. Phys.* 44.1472 (2003).
- [22] Smith P. F. y Lewin J. D. En: *Phys. Lett. B* 94.484 (1980).
- [23] Arrington J. En: *Phys. Rev. C* 76.035205 (2007).
- [24] Lu D. H., Yang S. N. y Thomas A. W. En: *J. Phys. G:Nucl.Part.Phys.* 6.L75 (2000).
- [25] Wybourne Brian G. *Classical Groups for Physicists*. Wiley Interscience Publication, 1974.