



**Universidad Autónoma de San Luis Potosí**

**Facultad de Ciencias**

**Posgrado en Ciencias Aplicadas**



**Subgrupos con la Casi Propiedad de Extensión Congruente.**

**TESIS**

**Para obtener el grado de  
Doctor en Ciencias Aplicadas**

**PRESENTA:**

**M.C. Saúl Nevarez Nieto.**

**Director de Tesis:**

**Lev Glebsky.**

**Septiembre de 2017**

# ACEP en Subgrupos de Grupos Libres

# Contenido

<b>1 Grafos de Stallings.</b>	<b>1</b>
1.1 Grafos etiquetados y empalmes. . . . .	1
1.2 Grafos etiquetados y subgrupos de un grupo libre. . . . .	5
1.3 Propiedades algorítmicas de los grafos. . . . .	12
1.4 Subgrupos de índice finito. . . . .	17
1.5 Intersección de subgrupos. . . . .	19
<b>2 Cancelación Pequeña.</b>	<b>25</b>
2.1 Diagramas. . . . .	25
2.2 La hipótesis de la cancelación pequeña. . . . .	29
2.3 Las formulas básicas. . . . .	32
2.4 Algoritmo de Dehn y Lema de Greendlinger. . . . .	36
<b>3 ACEP en Grupos Libres.</b>	<b>42</b>
3.1 Introduccion. . . . .	42
3.1.1 Subgrupos con y sin ACEP. . . . .	44
3.1.2 Teorema 7 y su generalización. . . . .	44
3.2 Grupos sin ACEP. . . . .	46
3.3 El caso 4. . . . .	48
3.3.1 Ejemplos. . . . .	48
3.3.2 S-Subgrupos. . . . .	48
3.4 Demostración del Teorema 9. . . . .	51
3.4.1 Diagramas de derivación para $u \in \langle\langle N \rangle\rangle_F$ . . . . .	52
3.4.2 Funciones de longitud. . . . .	55
3.4.3 Demostración de Teorema 9. . . . .	57

# Introducción

La estructura de los subgrupos de grupos libres es un tema clásico que se remonta a los orígenes de la teoría de grupos. El enfoque original desarrollado por Nielsen era tratar este tema por medio de la combinatoria, principalmente mediante la técnica de transformaciones Nielsen. De hecho, aún hoy en día este método sigue siendo uno de los más poderosos para trabajar con subgrupos de grupos libres. Un grupo libre  $F$  puede ser identificado con el grupo fundamental de un grafo topológico (en el cual podemos pensar como un 1-complejo). El punto de vista topológico fue estudiado a detalle por J.Stallings y en sus trabajos introdujo la noción de empalme de grafos, la cual utilizamos como una de las principales herramientas en nuestro trabajo.

La teoría de cancelación pequeña estudia a los grupos que tienen una presentación la cual satisface ciertas condiciones conocidas como condiciones de cancelación pequeña, esto es, las relaciones del grupo tienen “pequeñas coincidencias” entre sí. Las condiciones dan al grupo ciertas propiedades geométricas, algebraicas y algorítmicas.

Tartakovskii publicó un documento en 1949 con el cual se convertiría en el precursor de la cancelación pequeña, en este se da una solución al problema de la palabra para una clase de grupos que satisfacen un complicado conjunto de condiciones combinatorias. La versión de la cancelación pequeña que es utilizada actualmente fue desarrollada por Martin Greendlinger en una serie de documentos en 1960. En particular Greendlinger demostró que el problema de la palabra es soluble en grupos finitamente presentados que satisfacen la condición de cancelación  $C'(1/6)$ .

La teoría fue refinada y formalizada en un trabajo de Lyndon, Schupp y Lyndon-Schupp, quienes estudiaron el caso de las condiciones de cancelación pequeña no métricas y desarrollaron una versión de esta teoría para productos libres amalgamados y extensiones HNN.

En este documento estudiamos los subgrupos finitamente generados de

grupos libres los cuales poseen ACEP (Almost Congruence Extension Property), teniendo como objetivo formular criterios para determinar cuándo poseen o no esta propiedad. Las principales herramientas utilizadas son la teoría de cancelación pequeña y los grafos de Stallings.

En §1 vamos a trabajar con los grafos de Stallings, estos nos permitirán estudiar los subgrupos libres mediante el uso de grafos. En §2 estudiaremos la teoría de cancelación pequeña la cual nos será de utilidad para determinar cuando una palabra pertenece a un subgrupo normal. En §3 vamos a exponer algunos criterios para determinar si un subgrupo libre finitamente generado no tiene o no ACEP, esto en función de su grafo de Stallings asociado. Además mostramos que cualquier subgrupo finitamente generado de un grupo libre satisface una generalización de ACEP.

# Capítulo 1

## Grafos de Stallings.

### 1.1 Grafos etiquetados y empalmes.

**Definición 1** Sea  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$  un alfabeto finito. Diremos que  $\Gamma$  es un  $X$ -digrafo si cumple lo siguiente:

$\Gamma$  es un grafo donde toda arista  $e$  tiene una flecha (dirección), cada arista está etiquetada por una letra de  $X$ , la cual denotaremos por  $l(e)$ . (Nótese que  $\Gamma$  puede ser finito o infinito.)

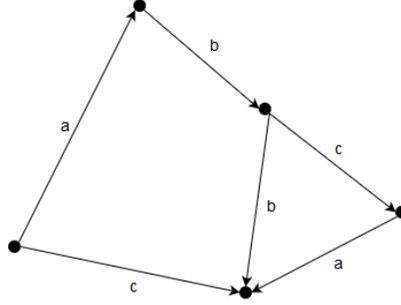
Para cada arista  $e$  de  $\Gamma$  denotamos el origen de  $e$  por  $o(e)$  y el final de  $e$  por  $t(e)$ . Si  $o(e) = t(e)$  entonces  $e$  es un lazo. Denotaremos por  $V.\Gamma$  a el conjunto de vértices de  $\Gamma$  y  $E.\Gamma$  a el conjunto de aristas de  $\Gamma$ .

Existe una noción obvia de un morfismo entre dos  $X$ -digrafos. Si  $\Gamma$  y  $\Delta$  son  $X$ -digrafos entonces una aplicación  $\pi : \Gamma \longrightarrow \Delta$  es llamado un morfismo de  $X$ -digrafos si  $\pi$  manda vértices a vértices, aristas dirigidas a aristas dirigidas, preserva etiquetas y tiene la propiedad de que

$$\begin{aligned}o(\pi(e)) &= \pi(o(e)) \\t(\pi(e)) &= \pi(t(e))\end{aligned}$$

para cualquier arista  $e$  de  $\Gamma$ .

Un ejemplo de  $X$ -digrafo, con  $X = \{a, b, c\}$  es el siguiente



Para el resto capítulo, a menos que se especifique lo contrario, tendremos que  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ .

**Convención.** Dado un  $X$ -digrafo  $\Gamma$ , podemos obtener a partir de  $\Gamma$  un grafo orientado y etiquetado por el alfabeto  $\Sigma = X \cup X^{-1}$ . Para cada arista  $e$  de  $\Gamma$  introducimos el elemento inverso  $e^{-1}$  de  $e$  con etiqueta  $l(e)^{-1}$  y los extremos definidos como  $o(e^{-1}) = t(e)$ ,  $t(e^{-1}) = o(e)$ . Para las nuevas aristas  $e^{-1}$  establecemos  $(e^{-1})^{-1} = e$ . El nuevo grafo dotado con esta estructura adicional lo denotaremos por  $\hat{\Gamma}$ . De hecho, en muchas ocasiones no vamos a distinguir el grafo  $\Gamma$  del grafo  $\hat{\Gamma}$ . El conjunto de aristas de  $\hat{\Gamma}$  esta naturalmente particionado en 2 conjuntos

$$E.\hat{\Gamma} = E.^+\Gamma \cup E.^-\Gamma.$$

Diremos que una arista  $e$  de  $\Gamma$  es positivamente orientada o positiva en  $\hat{\Gamma}$ , mientras que su inversa  $e^{-1}$  es negativamente orientada o negativa en  $\hat{\Gamma}$ . Denotaremos por  $E.^+\Gamma = E.\Gamma$  y  $E.^-\Gamma = (E.\Gamma)^{-1}$ .

El uso de  $\hat{\Gamma}$  nos permite introducir la noción de camino en  $\Gamma$ . Un camino  $p$  en  $\Gamma$  es una secuencia de aristas  $p = e_1, \dots, e_k$  donde cada  $e_i$  es una arista de  $\hat{\Gamma}$  y el origen de cada  $e_i$  (para  $i > 1$ ) es el final de  $e_{i-1}$ . Para un camino  $p$  diremos que  $o(p) = o(e_1)$  y  $t(p) = t(e_k)$ . La longitud del camino, denotado por  $|p|$ , será  $k$ , es decir, el número de aristas de  $p$ . También, para un camino  $p$  podemos definir su etiqueta como  $l(p) = l(e_1)l(e_2) \cdots l(e_k)$ . Así  $l(p)$  es una palabra en el alfabeto  $\Sigma = X \cup X^{-1}$ . Nótese que es posible que  $l(p)$  contenga subpalabras de la forma  $aa^{-1}$  o  $a^{-1}a$  para algún  $a \in X$ .

Si  $v$  es un vértice de  $\Gamma$  vamos a considerar la secuencia  $p = v$  como un camino tal que  $o(p) = t(p) = v$ ,  $|p| = 0$  y  $l(p) = 1$ , es decir, la palabra vacía.

**Definición 2** Sea  $\Gamma$  un  $X$ -digrafo. Decimos que  $\Gamma$  es empalmado si para

cada vértice  $v$  de  $\Gamma$  y cada letra  $a \in X$  existe a lo más una arista en  $\Gamma$  con origen  $v$  y etiqueta  $a$  y existe a lo más una arista con final  $v$  y etiqueta  $a$ .

Supongamos que  $\Gamma$  es un  $X$ -digrafo y  $e_1, e_2$  son aristas de  $\Gamma$  con origen común y la misma etiqueta  $x \in \Sigma$ . Entonces, hablando de manera informal, empalmamos  $\Gamma$  en  $e_1, e_2$  mediante la identificación de  $e_1$  y  $e_2$  en una nueva arista etiquetada por  $x$ . El grafo resultante lleva una estructura natural de un  $X$ -digrafo. Una definición más precisa se da a continuación.

**Empalme de grafos.** Sea  $\Gamma$  un  $X$ -digrafo. Suponga que  $v_0$  es un vértice de  $\Gamma$  y  $f_1, f_2$  son aristas distintas de  $\hat{\Gamma}$  con origen  $v_0$  tales que  $l(f_1) = l(f_2) = x \in \Sigma$ , es decir,  $\Gamma$  no es empalmado. Sea  $h_i$  la correspondiente arista positiva de  $\Gamma$  a la cual corresponde  $f_i$ . Sea  $\Delta$  un  $X$ -digrafo definido como sigue:

El conjunto de vértices de  $\Delta$  es el conjunto de vértices de  $\Gamma$  sin los vértices  $t(f_1)$  y  $t(f_2)$  y un nuevo vértice  $t_f$  agregado (podemos pensar que el vértice  $t_f$  se obtiene al identificarse los vértices  $t(f_1)$  y  $t(f_2)$ ):

$$V.\Delta = (V.\Gamma - \{t(f_1), t(f_2)\}) \cup \{t_f\}$$

El conjunto de aristas de  $\Delta$  es el conjunto de aristas de  $\Gamma$  sin las aristas  $h_1, h_2$  y una nueva arista  $h$  agregada (podemos pensar que la arista  $h$  se obtiene al identificarse las aristas  $h_1$  y  $h_2$ ):

$$E.\Delta = (E.\Gamma - \{h_1, h_2\}) \cup \{h\}$$

Los puntos finales y flechas de las aristas de  $\Delta$  se definen de una manera natural. Digamos, si  $e \in E.\Delta$  y  $e \neq h$  (esto es  $e \in E.\Gamma$ ,  $e \neq h_i$ ) entonces

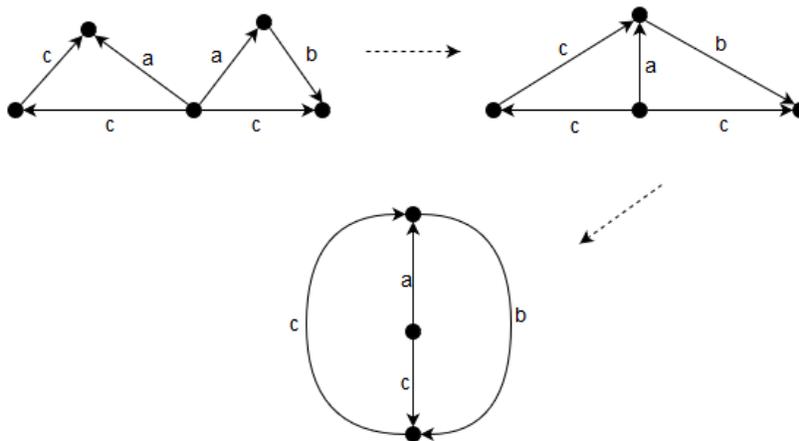
1.  $o_\Delta(e) = o_\Gamma(e)$  si  $o_\Gamma(e) \neq t(f_i)$  y  $o_\Delta(e) = t_f$  si  $o_\Gamma(e) = t(f_i)$  para algún  $i$ ;
2.  $t_\Delta(e) = t_\Gamma(e)$  si  $t_\Gamma(e) \neq t(f_i)$  y  $t_\Delta(e) = t_f$  si  $t_\Gamma(e) = t(f_i)$  para algún  $i$ .

Para la arista  $h$  tenemos  $o_\Delta(h) = o_\Gamma(h)$  si  $o_\Gamma(h) \neq t(f_1), t(f_2)$  y  $o_\Delta(h) = t_f$  si  $o_\Gamma(h) = t(f_i)$  para algún  $i$ . Similarmente,  $t_\Delta(h) = t_\Gamma(h)$  si  $t_\Gamma(h) \neq t(f_1), t(f_2)$  y  $t_\Delta(h) = t_f$  si  $t_\Gamma(h) = t(f_i)$  para algún  $i$ .

Definimos las etiquetas de las aristas de  $\Delta$  como sigue:  $l_\Delta(e) = l_\Gamma(e)$  si  $e \neq h$  y  $l_\Delta(h) = l_\Gamma(h_1) = l_\Gamma(h_2)$ .

Entonces  $\Delta$  es un  $X$ -digrafo. En esta situación decimos que  $\Delta$  se obtiene de  $\Gamma$  por un empalme (o de empalmar las aristas  $f_1$  y  $f_2$ ).

La noción de empalme se ilustra en la siguiente figura.



La siguiente afirmación obvia resume algunas de las propiedades básicas del empalme.

**Lema 1** Sea  $\Gamma_1$  un  $X$ -digrafo obtenido por un empalme de un grafo  $\Gamma$ . Sea  $v$  un vértice de  $\Gamma$  y sea  $v_1$  el vértice correspondiente de  $\Gamma_1$ .

Entonces se cumple lo siguiente:

1. Si  $\Gamma$  es conexo entonces  $\Gamma_1$  es conexo.
2. Sea  $p$  un camino de  $v$  a  $v$  en  $\Gamma$  con etiqueta  $w$ . Entonces la imagen de  $p$  en  $\Gamma_1$  es un camino de  $v_1$  a  $v_1$  con etiqueta  $w$ .
3. Si un  $X$ -digrafo  $\Gamma$  es finito, entonces un empalme siempre reduce el número de aristas de  $\Gamma$  en uno.

**Convención** Una palabra  $w$  en el alfabeto  $\Sigma = X \cup X^{-1}$  es libremente reducida si no contiene subpalabras de la forma  $aa^{-1}$  o  $a^{-1}a$  para  $a \in X$ . Un camino  $p$  en un  $X$ -digrafo  $\Gamma$  se dice que es reducido si  $p$  no contiene subcaminos de la forma  $e, e^{-1}$  para  $e \in E.\hat{\Gamma}$ . En un alfabeto  $B$  denotaremos por  $B^*$  a el conjunto de todas las palabras (incluyendo la palabra vacía 1) en el alfabeto  $B$ .

**Definición 3** Sean  $\Gamma$  un  $X$ -digrafo y  $v$  un vértice de  $\Gamma$ . Definimos el lenguaje de  $\Gamma$  con respecto a  $v$  como:

$$L(\Gamma, v) = \{l(p) \mid p \text{ es un camino reducido en } \Gamma \text{ de } v \text{ a } v\}.$$

Si una palabra  $w$  pertenece a  $L(\Gamma, v)$ , decimos que  $w$  es aceptada por  $(\Gamma, v)$  (o simplemente por  $\Gamma$  si la elección de  $v$  es fija).

Así  $L(\Gamma, v)$  es un subconjunto de  $\Sigma^*$  donde  $\Sigma = X \cup X^{-1}$ . Las palabras en  $L(\Gamma, v)$  no son necesariamente libremente reducidas, pero si el grafo  $\Gamma$  es empalmado entonces todas las palabras en  $L(\Gamma, v)$  son reducidas.

Formulamos esta obvia pero importante afirmación como un Lema.

**Lema 2** Sean  $\Gamma$  un  $X$ -digrafo empalmado y  $v$  un vértice de  $\Gamma$ . Entonces todas las palabras en el lenguaje  $L(\Gamma, v)$  son reducidas.

## 1.2 Grafos etiquetados y subgrupos de un grupo libre.

Ahora explicaremos como a todo subgrupo finitamente generado de un grupo libre puede asociarse un grafo etiquetado.

Sean  $X$  un alfabeto finito y  $\Sigma = X \cup X^{-1}$ . Si  $w$  es una palabra en  $\Sigma$ , denotaremos por  $\bar{w}$  a la palabra reducida obtenida de  $w$  al realizar todas las posibles reducciones (si las hay).

Recordemos que un grupo libre sobre  $X$ , denotado por  $F(X)$ , es la colección de todas las palabras libres reducidas en  $\Sigma$  (incluyendo la palabra vacía 1). La multiplicación en  $F(X)$  se define como

$$f \cdot g := \overline{fg}, \text{ para cualquier } f, g \in F(X)$$

(Se puede demostrar que esta multiplicación hace a  $F(X)$  un grupo).

El número de elementos en  $X$  es llamado *el rango* de  $F(X)$  y  $X$  es conocida como una *base libre* de  $F(X)$ .

Para cualquier elemento  $g \in F(X)$  denotaremos por  $|g|_X$  a la longitud de la única  $\Sigma$ -palabra libremente reducida que representa a  $g$ . Si  $w$  es una palabra en  $\Sigma$  (que puede o no puede ser libremente reducida), denotaremos por  $|w|$  a la longitud de  $w$ .

**Proposición 1** Sean  $\Gamma$  un  $X$ -grafo y  $v$  un vértice de  $\Gamma$ , el cual llamaremos vértice base. Entonces el conjunto

$$\bar{L} = \{\bar{w} \mid w \in L(\Gamma, v)\}$$

es un subgrupo de  $F(X)$ .

**Demostración.** Tomemos  $v_1, v_2 \in \bar{L}$ . Entonces existen caminos reducidos  $p_1$  y  $p_2$  de  $v$  a  $v$  en  $\Gamma$  tal que la etiqueta de  $p_i$  es  $w_i$  y  $\bar{w}_i = v_i$ .

La concatenación  $p_1 p_2$  es un camino en  $\Gamma$  que va  $v$  a  $v$ , el cual puede o no ser un camino reducido. Sea  $p$  el camino reducido obtenido de  $p_1 p_2$  al realizar todas las posibles reducciones de caminos. Esto significa que la etiqueta  $w = l(p)$  se obtiene de la palabra  $w_1 w_2$  al realizar varias reducciones libres. Por lo tanto  $\bar{w} = \overline{w_1 w_2} = v_1 \cdot v_2 \in F(X)$ . Por otro lado  $w$  es la etiqueta de un camino reducido de  $v$  a  $v$  y entonces  $w \in L(\Gamma, v) = L$  (por definición). Así  $v_1 \cdot v_2 \in \bar{L}$  y  $\bar{L}$  es cerrado bajo multiplicación.

Es fácil ver que el camino inverso  $(p_1)^{-1}$  de  $p_1$  tiene como etiqueta  $w_1^{-1}$ . Esto implica que  $L$  es cerrado bajo inversos. También es obvio que  $1 \in \bar{L}$ . Así  $\bar{L}$  es un subgrupo de  $F(X)$ . ■

**Lema 3** Supongamos que  $\Gamma$  es un  $X$ -digrafo empalmado. Entonces  $L(\Gamma, v) = L = \bar{L}$  es un subgrupo de  $F(X)$ .

**Demostración.** Por el Lema 2 las etiquetas de caminos reducidos en  $\Gamma$  ya son reducidas. Luego por la Proposición 1  $L(\Gamma, v) = L = \bar{L}$  es un subgrupo de  $F(X)$ . ■

El siguiente Lema muestra que los subgrupos correspondientes a grafos finitos y etiquetados son finitamente generados.

**Lema 4** Sean  $\Gamma$  un  $X$ -digrafo conexo y  $v$  un vértice de  $\Gamma$ . Para cada vértice  $u \neq v$  de  $\Gamma$  elegimos un camino reducido  $p_u$  en  $\Gamma$  que va de  $v$  a  $u$ . Denotamos por  $p_v = v$  al camino de longitud cero que consiste solo del vértice  $v$ . Para cada arista  $e$  de  $\widehat{\Gamma}$  (sea positiva o negativa) tenemos que  $p_e = p_{o(e)} e (p_{t(e)})^{-1}$  es el camino en  $\Gamma$  que va de  $v$  a  $v$ . Denotemos por  $[e] = \overline{l(p_e)}$ . Entonces el subgrupo  $H = L(\Gamma, v)$  de  $F(X)$  es generado por el conjunto

$$S = \{[e] \mid \text{donde } e \text{ es una arista positiva de } \Gamma\}$$

En particular, si  $\Gamma$  es finito, el subgrupo  $H$  es finitamente generado.

**Demostración.** El camino  $p_e$  (si no es reducido) puede transformarse en un camino reducido  $p'_e$  (de  $v$  a  $v$ ) mediante una serie de reducciones. Claramente  $l(p'_e) \in L(\Gamma, v)$ ,  $l(p'_e) = l(p_e)$  y por lo tanto  $[e] = \overline{l(p_e)} \in \overline{L(\Gamma, v)} = H$ . Así,  $S \subseteq H$  y  $\langle S \rangle \leq H$ .

Resta probar que cualquier elemento de  $H$  puede ser expresado como producto de elementos de  $S$  y sus inversos. Nótese que por definición  $p_{e^{-1}} = (p_e)^{-1}$  y por lo tanto  $[e^{-1}] = [e]^{-1}$ . Así que es suficiente probar que cualquier elemento de  $H$  puede ser expresado como un producto de elementos  $[e]$ , donde  $e$  es una arista de  $\widehat{\Gamma}$ .

Sea  $h \in H$ ,  $h \neq 1$ . Entonces existe un camino reducido  $p$  no trivial de  $v$  a  $v$  con etiqueta  $w$  tal que  $\bar{w} = h$ .

Sea  $p = e_1, \dots, e_k$ , donde los  $e_i$  son aristas de  $\widehat{\Gamma}$ . Además, sean  $v_1 = v$ ,  $v_{k+1} = v$  y sea  $v_i$  el vértice inicial de  $e_i$  (y por lo tanto el punto final de  $e_{i+1}$ ). Considere ahora el camino

$$p' = p_{e_1} \dots p_{e_k} = p_{v_1} e_1 p_{v_2}^{-1} p_{v_2} e_2 p_{v_3}^{-1} \dots p_{v_k} e_k p_{v_{k+1}}^{-1}$$

Es obvio que el camino  $p'$  puede ser transformado mediante reducciones a el camino  $p$ . Más aun,  $\overline{l(p')} = \overline{l(p)} = h$ . Por otro lado

$$\overline{l(p')} = \overline{p_{e_1}} \dots \overline{p_{e_k}} = [e_1] \dots [e_k] \in \langle S \rangle$$

Así  $H = \langle S \rangle$ . ■

**Lema 5** Sean  $\Gamma$  un  $X$ -digrafo y  $\Gamma'$  un  $X$ -digrafo obtenido de  $\Gamma$  mediante un empalme. Sean además  $v$  un vértice de  $\Gamma$  y  $v'$  el vértice correspondiente en  $\Gamma'$ . Entonces  $L(\Gamma, v) = L(\Gamma', v')$ .

**Demostración.** Supongamos que  $\Gamma'$  se obtiene de  $\Gamma$  mediante el empalme de 2 aristas  $e_1, e_2$  en  $\widehat{\Gamma}$  con el mismo vértice inicial  $u$  y la misma etiqueta  $x \in X$ . Las aristas  $e_1, e_2$  se empalman en una arista  $e$  de  $\Gamma'$  etiquetada por  $x$  y con origen  $u'$ .

Supongamos que  $p$  es un camino reducido en  $\Gamma$  que va de  $v$  a  $v$ , tal que  $l(p) \in L(\Gamma, v)$ . La imagen de  $p$  en  $\Gamma'$  es un camino  $p'$  que va de  $v'$  a  $v'$  con la misma etiqueta que  $p$ , esto es  $l(p) = l(p')$ . Sin embargo,  $p'$  no tiene que ser un camino reducido. Es decir,  $p'$  es un camino reducido si y solo si  $p$  no contiene subcaminos de la forma  $e_2^{-1}, e_1$  o  $e_1^{-1}, e_2$ . Sea  $p''$  el camino obtenido de  $p'$  por medio de todas las posibles reducciones de camino en  $\Gamma'$ . Entonces  $\overline{l(p)} = \overline{l(p')} = \overline{l(p'')}$  y  $l(p'') \in L(\Gamma, v')$ . Así tenemos que  $L(\Gamma, v) \subseteq L(\Gamma', v')$ .

Supongamos ahora que  $p'$  es un camino reducido arbitrario en  $\Gamma'$  que va de  $v'$  a  $v'$ . Veremos que existe un camino reducido en  $\Gamma$  que va de  $v$  a  $v$  con exactamente la misma etiqueta que  $p'$ . Vamos a construir explícitamente este camino.

La aparición de  $e^{\pm 1}$  (cualquiera) subdivide a  $p'$  en una concatenación de la forma:

$$p' = p_0 f_0 p_1 f_1 \dots f_k p_{k+1}$$

donde  $f_i = e^{\pm 1}$  y el camino  $p_i$  no involucra a  $e^{\pm 1}$ .

Supongamos que para algún  $i$  tenemos que  $f_i = e$ . Puesto que  $p_i$  y  $p_{i+1}$  no involucran a la arista  $e$ , pueden también ser considerados como caminos en  $\Gamma$ . Más aun, por la definición de empalme, en  $\Gamma$  el vértice final de  $p_i$  se une con el vértice inicial de  $p_{i+1}$  ya sea por la arista  $e_1$  o la arista  $e_2$ . Denotaremos esta arista por  $d_i$  (así que  $d_i \in \{e_1, e_2\}$ ). Nótese ahora que  $p_i d_i p_{i+1}$  es un camino reducido en  $\Gamma$  con la misma etiqueta que el camino  $p_i f_i p_{i+1}$  en  $\Gamma'$ .

De manera similar, si para algún  $i$  tenemos que  $f_i = e^{-1}$ , podemos encontrar un  $d_i \in \{e_1^{-1}, e_2^{-1}\}$  tal que  $p_i d_i p_{i+1}$  es un camino reducido en  $\Gamma$  con la misma etiqueta que el camino  $p_i f_i p_{i+1}$  en  $\Gamma'$ .

Entonces

$$p = p_0 d_0 p_1 \dots d_k p_{k+1}$$

es un camino reducido en  $\Gamma$  de  $v$  a  $v$  con la misma etiqueta que  $p'$ . Así  $l(p') \in L(\Gamma, v)$ ,  $\overline{l(p')} \in \overline{L(\Gamma, v)}$  y entonces  $\overline{L(\Gamma', v')} \subseteq \overline{L(\Gamma, v)}$ .

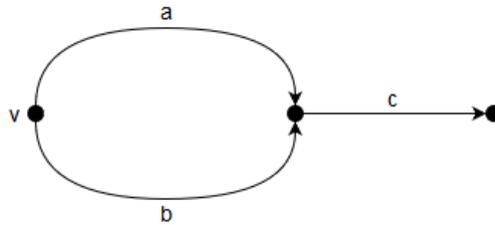
Por lo tanto  $\overline{L(\Gamma', v')} \subseteq \overline{L(\Gamma, v)}$ . ■

**Definición 4** Sean  $\Gamma$  un  $X$ -digrafo y  $v$  un vértice de  $\Gamma$ . Entonces el núcleo de  $\Gamma$  en  $v$  se define como:

$$\text{Core}(\Gamma, v) = \cup \{p \mid \text{donde } p \text{ es un camino reducido en } \Gamma \text{ de } v \text{ a } v\}$$

Es fácil ver que  $\text{Core}(\Gamma, v)$  es un subgrafo conexo de  $\Gamma$  que contiene a  $v$ . Si  $\text{Core}(\Gamma, v) = \Gamma$  decimos que  $\Gamma$  es un grafo núcleo con respecto a  $v$ .

En la siguiente figura se muestra un ejemplo de un grafo que no es núcleo con respecto al vértice  $v$ . Pero es un grafo núcleo con respecto al vértice final de la arista  $c$ .



El siguiente Lema enumera algunas propiedades obvias sobre grafos núcleo.

**Lema 6** *Sea  $\Gamma' = \text{Core}(\Gamma, v)$ . Entonces:*

1. *El subgrafo  $\Gamma'$  de  $\Gamma$  es conexo y contiene al vértice  $v$ .*
2. *El grafo  $\Gamma'$  no tiene vértices de grado uno, excepto posiblemente el vértice  $v$ .*
3. *Los lenguajes de  $\Gamma$  y  $\Gamma'$  en  $v$  coinciden, es decir  $L(\Gamma, v) = L(\Gamma', v)$ .*

Puesto que los lenguajes de grafos empalmados consisten de palabras reducidas, el Lema 5 implica que para un  $X$ -digrafo empalmado  $\Gamma$  el lenguaje  $L(\Gamma, v)$  es un subgrupo de  $F(X)$ . De hecho, por las propiedades de grafos núcleo, si  $\Gamma' = \text{Core}(\Gamma, v)$  entonces  $L(\Gamma, v) = L(\Gamma', v)$  es un subgrupo de  $F(X)$ .

**Proposición 2** *Sea  $H$  un subgrupo finitamente generado de  $F(X)$ . Entonces existe un  $X$ -digrafo finito  $\Gamma$  y un vértice  $v$  de  $\Gamma$  tal que:*

1. *El grafo  $\Gamma$  es empalmado y conexo.*
2. *Todos los vértices de  $\Gamma$ , excepto posiblemente el vértice  $v$ , tienen grado mayor que 1.*
3. *El grado de cada vértice en  $\Gamma$  es a lo más  $2\#(X)$ .*
4. *El grafo  $\Gamma$  es un grafo núcleo con respecto a  $v$ .*
5. *El lenguaje de  $\Gamma$  es igual a  $H$ , esto es  $L(\Gamma, v) = H$ .*

**Demostración.** Si  $H = 1$  entonces el grafo consiste de un solo vértice que obviamente satisface todos los requisitos de la proposición. Supongamos que  $H$  es un subgrupo de  $F(X)$  no trivial finitamente generado.

Sea  $H$  el grupo generado por los elementos  $h_1, \dots, h_m$  (donde cada  $h_i$  es una palabra libremente reducida en  $\Sigma = X \cup X^{-1}$ ).

Definimos un  $X$ -digrafo  $\Gamma_1$  como sigue. El grafo  $\Gamma_1$  es un ramillete de  $m$  círculos unidos por un vértice llamado  $v_1$ . El  $i$ -ésimo círculo está subdividido en  $|h_i|$  aristas las cuales están orientadas y etiquetadas por  $X$  de modo que la etiqueta del  $i$ -ésimo círculo (leída de  $v_1$  a  $v_1$ ) es precisamente la palabra

$h_i$ .

Entonces cualquier palabra reducida en  $h_1, \dots, h_m$  es la etiqueta de un camino reducido en  $\Gamma_1$  de  $v$  a  $v$ . El inverso es evidentemente cierto. Así  $L(\Gamma_1, v_1) = \langle h_1, \dots, h_m \rangle = H$ . Nótese también que  $\Gamma_1$  es conexo por construcción y no tiene vértices de grado 1.

Definimos una secuencia de grafos  $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots$  inductivamente como sigue. Supongamos que  $\Gamma_i$  ya está construido. Si es empalmado, terminamos la secuencia. Por otro lado, sea  $\Gamma_{i+1}$  lo obtenido de  $\Gamma_i$  por un empalme.

Puesto que  $\Gamma_1$  es finito y un empalme disminuye el número de aristas, esta secuencia termina después de un número finito de pasos con un grafo empalmado  $\Gamma_k$ . Más aun, puesto que un empalme de un grafo conexo es conexo, los grafos  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_k$  son conexos. Sea  $v_i$  la imagen de  $v_1$  en el grafo  $\Gamma_i$ . Por el Lema 5 tenemos que  $H = L(\Gamma_1, v_1) = L(\Gamma_k, v_k) = L(\Gamma_k, v_k)$ , la última igualdad se da por el hecho de que  $\Gamma_k$  es empalmado.

Denotemos por  $\Gamma = \Gamma_k$  y  $v = v_k$ . Ya hemos demostrado que  $L(\Gamma, v) = H$  y que  $\Gamma$  es un grafo empalmado conexo y finito. Puesto que  $\Gamma$  es empalmado, el grado de sus vértices es a lo más  $2\#(X) = \#(X)$ . Veamos que  $\Gamma$  es de hecho un grafo núcleo con respecto a  $v$ . Supongamos que no lo es y que existe un vértice  $u$  de  $\Gamma$  de grado 1 el cual es diferente de  $v$ . Sea  $e$  la única arista de  $\widehat{\Gamma}$  que termina en  $u$  y sea  $x \in \Sigma$  la etiqueta de  $e$ . Existe una arista  $e_1$  del grafo  $\Gamma_1$  tal que la imagen de  $e_1$  en  $\Gamma = \Gamma_k$  es  $e$  (por lo tanto la etiqueta de  $e_1$  es también  $x$ ). Sea  $u_1$  el vértice final de  $e_1$ . Dado que  $u \neq v = v_k$ , tenemos que  $u_1 \neq v_1$ . Recordemos que la construcción explícita de  $\Gamma_1$  fue un ramillete de círculos etiquetados  $h_1, \dots, h_m$ . Se sigue de esta construcción que hay un camino  $p_1$  en  $\Gamma_1$  de  $v_1$  a  $v_1$  que pasa a través de la arista  $e_1$  y tiene una etiqueta reducida  $w$  (es decir, podemos tomar  $w = h_i^{\pm 1}$  para algún  $i$ ). Sea  $p$  la imagen del camino  $p_1$  en  $\Gamma_k$  después de realizar todos los  $k - 1$  empalmes. Entonces  $p$  es un camino de  $v$  a  $v$  que pasa a través de  $e$  y con una etiqueta reducida  $w$ . Sin embargo, el vértice  $u$  (diferente de  $v$ ) es de grado 1. Entonces, cualquier camino de  $v$  a  $v$  que pasa por  $e$  contiene un subcamino  $e, e^{-1}$  y por lo tanto no puede tener una etiqueta reducida. Esto nos da una contradicción. Así,  $\text{Core}(\Gamma, v) = \Gamma$  y el par  $(\Gamma, v)$  satisface todos los requisitos de la Proposición. ■

En adelante denotaremos por  $\Gamma(H)$  a el  $X$ -digrafo asociado a el subgrupo finitamente generado  $H$  de  $F(X)$ .

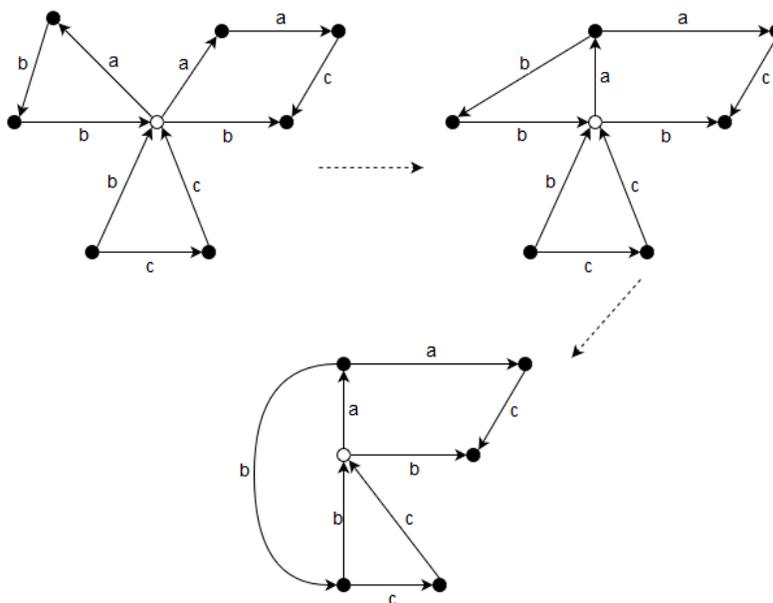
**Lema 7** *Sea  $\Gamma$  un  $X$ -digrafo empalmado y conexo el cual es un grafo núcleo con respecto a algún vértice  $v$ . Sea  $H = L(\Gamma, v)$ . Entonces:*

1. Para cualquier segmento inicial  $w$  de una palabra reducida  $h \in H$  existe un único camino reducido  $p$  en  $\Gamma$  con origen en  $v$  y etiqueta  $w$ .
2. Para cualquier camino reducido  $p$  en  $\Gamma$  con origen en  $v$  y etiqueta  $w$ , la palabra  $w$  es una subpalabra de alguna palabra reducida  $h \in H$ .

**Demostración.** (1) La unicidad de  $p$  se sigue por el hecho de que  $\Gamma$  es empalmado. La existencia de  $p$  es también obvia. De hecho, podemos tomar a  $p$  como el segmento inicial de longitud  $|w|$  del camino en  $\Gamma$  que va de  $v$  a  $v$  con etiqueta  $h$ .

(2) Sea  $p$  un camino en  $\Gamma$  con origen en  $v$  y etiqueta  $w$ . Si el vértice final de  $p$  es  $v$  entonces  $w \in H$  y el enunciado del lema es obvio. Supongamos ahora que el vértice final  $u$  de  $p$  es diferente de  $v$ . Puesto que  $\Gamma$  es un grafo núcleo con respecto a  $v$ , el grado de  $u$  es al menos 2. Sea  $e$  una arista con origen en  $u$  tal que  $e^{-1}$  es diferente a la última arista en  $p$ . Sea  $p'$  un camino reducido que va de  $t(e)$  a  $v$  en  $\Gamma$ . Entonces  $\alpha = pep'$  es un camino reducido que va de  $v$  a  $v$ . Por lo tanto  $l(\alpha) = h \in H$ . Es claro por construcción que  $w$  es un segmento inicial de  $h$ . ■

En la siguiente figura se muestra la construcción del grafo asociado al grupo  $H = \langle a^2cb^{-1}, ab^2, b^{-1}c^2 \rangle \leq F(a, b)$ . El vértice de color blanco representa la imagen del vértice base original  $v_1$  en los grafos.



### 1.3 Propiedades algorítmicas de los grafos.

El Lema 4 nos proporciona un conjunto generador del subgrupo correspondiente al  $X$ -digrafo. Pero nos gustaría encontrar una base libre para este subgrupo. Mostraremos que esto fácilmente se puede realizar utilizando el  $X$ -digrafo correspondiente.

En un grafo conexo diremos que un subgrafo es un árbol generador si este subgrafo es un árbol y además contiene todos los vértices del grafo original. Si un grafo  $T$  es un árbol, entonces para cualesquiera dos vértices  $u$  y  $u'$  de  $T$  existe un único camino reducido en  $T$  de  $u$  a  $u'$  el cual denotaremos por  $[u, u']_T$ .

**Lema 8** *Sea  $\Gamma$  un  $X$ -digrafo empalmado y sea  $v$  un vértice de  $\Gamma$ . Sea  $T$  el árbol generador de  $\Gamma$ . Sea  $T^+$  el conjunto de aristas positivas de  $\Gamma$  las cuales no están en  $T$ . Para cada arista  $e \in T^+$  sea  $p_e = [v, o(e)]_T e [t(e), v]$  ( $p_e$  es un camino reducido que va de  $v$  a  $v$  cuya etiqueta es una palabra reducida en  $\Sigma$ ). Para cada  $e \in T^+$  denotamos por  $[e] = l(p_e) = \overline{l(p_e)}$ . Denotemos por*

$$Y_T = \{[e] \mid e \in T^+\}.$$

*Entonces  $Y_T$  es una base libre del subgrupo  $H = L(\Gamma, v)$  de  $F(X)$ .*

**Demostración.** Podemos extender la definición de  $p_e$  y  $[e]$  para las aristas de  $\hat{\Gamma}$  tomando  $p_e = [v, o(e)]_T e [t(e), v]$  y  $[e] = \overline{l(p_e)}$ , por lo tanto  $p_{e^{-1}} = (p_e)^{-1}$  y  $[e^{-1}] = [e]^{-1}$ .

Es fácil ver que si  $e \in E.^+T$  entonces  $p_e = [v, o(e)]_T e [t(e), v]$  es un camino el cual puede ser transformado mediante reducciones en un camino trivial y entonces  $[e] = 1$ . Sabemos por el Lema 4 que el subgrupo  $H$  es generado por el conjunto  $\{[e] \mid e \in E.^+(\Gamma)\}$ . Por lo tanto  $H$  es generado por el conjunto  $Y_T = \{[e] \mid e \in E.^+T\}$ , entonces solo falta mostrar que  $Y_T$  es una base libre de  $H$ .

Para ver esto es suficiente mostrar que cualquier palabra reducida no trivial en  $Y_T^{\pm 1}$  define un elemento no trivial en  $F(X)$ . Supóngase que  $h = [e_1] \cdots [e_k]$  con  $k \geq 1$ ,  $e_i \in Y^+ \cup (Y^+)^{-1} = E.(\hat{\Gamma} - T)$  y  $e_i \neq e_{i+1}^{-1}$ . Debemos mostrar que  $h \neq 1$ . Como  $T$  es un árbol, para cualesquiera vértices  $u, u'$  de  $\Gamma$  el camino reducido de  $[u, v]_T [v, u']_T$  es el camino  $[u, u']_T$ . Por definición de  $h$  y de  $[e_i]$  tenemos que  $h = \bar{p}$  donde  $p$  es el siguiente camino de  $u$  a  $u$  en  $\Gamma$ :

$$p = [v, o(e_1)]_T e_1 [t(e_1), v]_T [v, o(e_2)]_T e_2 \cdots [v, o(e_k)]_T e_k [t(e_k), v].$$

También por la observación anterior  $p$  puede ser transformado por reducciones en el camino

$$p' = [v, o(e_1)]_T e_1 [t(e_1), o(e_2)]_T e_2 \dots e_i [t(e_i), o(e_{i+1})]_T e_{i+1} \dots e_k [t(e_k), v]_T.$$

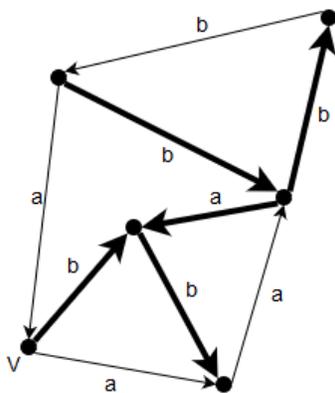
Veamos que  $p'$  ya es un camino reducido. Los segmentos  $[t(e_i), o(e_{i+1})]_T$ ,  $[v, o(e_1)]_T$  y  $[t(e_k), v]_T$  están contenidos en el árbol  $T$  y las aristas  $e_i$  estan fuera de  $T$ . Si  $p'$  no fuera reducido, entonces para algún  $i$  tendríamos que  $t(e_i) = o(e_{i+1})$  y  $e_i = e_{i+1}^{-1}$ . Pero esto es imposible por la suposición que hicimos de  $h$ .

Por lo tanto  $p'$  es un camino reducido no trivial en  $\Gamma$ . Como  $\Gamma$  es empalmado, esto implica que la etiqueta de  $p'$  es una palabra reducida no trivial en  $X$ , por lo cual representa un elemento no trivial de  $F(X)$ . Pero

$$1 \neq l(p') = \overline{l(p')} = \overline{l(p)} = h.$$

Luego  $h \neq 1$ . ■

En la siguiente figura el árbol generador  $T$  aparece resaltado y una base libre  $Y_T$  para el subgrupo  $H = L(\Gamma, v)$  es  $\{a^{-1}bab^{-1}, ba^{-1}b^3ab^{-1}, b^2a^2b^{-1}, ab^{-2}\}$ .



En adelante denotaremos a el vértice base de un grafo asociado a un grupo  $H$  por  $1_H$ .

**Proposición 3** *Existe un algoritmo en el que, dado un número finito de  $X$ -palabras reducidas  $h_1, \dots, h_k$ , se construye el grafo  $\Gamma(H)$ , donde  $H = \langle h_1, \dots, h_k \rangle$ .*

**Demostración.** Esto se sigue inmediatamente de la demostración de la Proposición 2. De hecho, si tomamos un ramillete de  $k$  círculos con las palabras  $h_1, \dots, h_k$  escritas en ellos y luego realizamos todos los posibles empalmes, el  $X$ -digrafo resultante será  $\Gamma(H)$ . Nótese que el grafo original de ramilletes de círculos tiene  $M = |h_1|_X + \dots + |h_k|_X$  aristas. Dado que todo empalme reduce el número de aristas en uno, obtendremos el grafo  $\Gamma(H)$  en a lo más  $M$  pasos. ■

**Proposición 4** *El grupo  $F(X)$  tiene solución al problema generalizado de la palabra. Esto es, existe un algoritmo en el que dado un número finito de  $X$ -palabras reducidas  $h_1, \dots, h_k$  y una  $X$ -palabra reducida  $g$  decide si  $g$  pertenece o no al subgrupo  $H = \langle h_1, \dots, h_k \rangle$  de  $F$ .*

**Demostración.** Primero contruimos el grafo  $\Gamma(H)$  como se hace en la Proposición 3. Recordemos que  $L(\Gamma(H), 1_H) = H$  por definición de  $\Gamma(H)$ . Por lo tanto para decidir si  $g \in H$ , tenemos que checar si el grafo  $\Gamma(H)$  acepta o no la palabra  $g$ . Recuerde que  $\Gamma(H)$  es empalmado y que el lenguaje  $L(\Gamma(H), 1_H)$  consiste de todas las etiquetas de caminos reducidos en  $\Gamma(H)$  que van de  $1_H$  a  $1_H$ . Dada una palabra reducida  $g = x_1 \dots x_m$ , con  $x_i \in \Sigma$  podemos comprobar si  $g \in L(\Gamma(H), 1_H)$  como sigue.

En primer lugar, comprobaremos si existe una arista en  $\widehat{\Gamma}(H)$  con origen en  $1_H$  y etiqueta  $x_1$  (puesto que  $\Gamma$  es un empalmado, dicha arista es única, si es que existe). Si es así, nos movemos al vértice final de esta arista, que denotaremos por  $v_1$ . De lo contrario, terminamos el proceso. Luego checamos si existe una arista en  $\widehat{\Gamma}(H)$  con origen en  $v_1$  y etiqueta  $x_2$ . Si es así, nos movemos al vértice final de esta arista, y lo denotamos por  $v_2$ . De lo contrario, terminamos el proceso. Repitiendo este procedimiento a lo más  $k$  veces terminaremos el proceso, en cuyo caso concluimos que  $g \notin L(\Gamma(H), 1_H)$ , o encontramos un vértice  $v_k$  tal que la palabra  $g$  es la etiqueta de un camino reducido en  $\Gamma(H)$  de  $1_H$  a  $v_k$ . Si  $v_k \neq 1_H$ , concluimos que  $g \notin L(\Gamma(H), 1_H)$ , y si  $v_k = 1_H$ , concluimos que  $g \in L(\Gamma(H), 1_H)$ . ■

**Lema 9** *Sea  $\Gamma$  un grafo núcleo empalmado (con respecto de uno de sus vértices). Sean  $v$  y  $u$  dos vértices de  $\Gamma$  y  $q$  un camino reducido en  $\Gamma$  que va de  $v$  a  $u$  con etiqueta  $g \in F(X)$ . Sean también  $H = L(\Gamma, v)$  y  $K = L(\Gamma, u)$ . Entonces  $H = gKg^{-1}$ .*

**Demostración.** Sea  $p$  un camino reducido en  $\Gamma$  de  $u$  a  $u$  (por lo tanto  $l(p) = k \in K$ ). Entonces el camino  $p' = qpq^{-1}$  es un camino de  $v$  en  $v$  con

etiqueta  $l(p') = l(q)l(p)(l(q))^{-1}$ . Por lo tanto, la forma reducida de  $l(p')$  es igual al elemento  $g \cdot k \cdot g^{-1} \in F(X)$ . El camino  $p'$  puede ser transformado a un camino reducido  $p''$  de  $v$  a  $v$ . Por lo tanto,  $l(p'') \in L(\Gamma, v) = H$ . Por otro lado  $l(p'') = \overline{l(p')} = g \cdot k \cdot g^{-1}$ . Así, hemos mostrado que para cualquier  $k \in K$  tenemos que  $g \cdot k \cdot g^{-1} \in H$  de modo que  $gKg^{-1} \subseteq H$ . Un argumento similar muestra que  $g^{-1}Hg \subseteq K$  y por lo tanto  $H \subseteq gKg^{-1}$ . Por consiguiente  $H = gKg^{-1}$ . ■

**Lema 10** Sean  $H \leq F(X)$  y  $\Gamma = \Gamma(H)$ . Sea  $g \in F(X)$  una palabra reducida no trivial en  $X$ . Sea  $g = yz$  donde  $z$  es el segmento final más grande de la palabra  $g$  tal que existe un camino con etiqueta  $z^{-1}$  en  $\Gamma$  que comienza en  $1_H$  (dicho camino es único ya que  $\Gamma$  es un empalmado). Denotemos el vértice final de este camino por  $u$ . Sea  $\Delta'$  el grafo obtenido de  $\Gamma$  como sigue. Adjuntamos a  $\Gamma$  en  $u$  el segmento que consiste de  $|y|$  aristas con etiqueta  $y^{-1}$  leyéndolo a partir de  $u$ . Sea  $u'$  el otro extremo de este segmento. Denotemos por  $\Delta'' = \text{Core}(\Gamma', u')$ .

Entonces  $(\Delta'', u') = (\Gamma(K), 1_K)$  donde  $K = gHg^{-1}$ .

**Demostración.** Sea  $\Delta$  el grafo obtenido adjuntando a  $\Gamma$  en  $1_H$  un segmento de  $|g|_X$  aristas etiquetado por  $g$ , que tiene origen en  $v$  y final en  $1_H$ . Es fácil ver que  $(L(\Delta, v)) = gHg^{-1}$ . Sin embargo, el grafo no es necesariamente empalmado. Si empalmamos el segmento final  $z$  de  $g$  (como definimos en el enunciado del lema) sobre el camino en  $\Gamma$  con origen  $1_H$  y etiqueta  $z^{-1}$ , el grafo resultante  $\Delta'$  es obviamente empalmado. Por lo tanto,  $L(\Delta', u') = H$  (donde  $u'$  es la imagen de  $v$  en  $\Delta'$ ). Puede ocurrir que  $\Delta'$  no sea un grafo base con respecto a  $u'$ . Sin embargo, el grafo  $\Delta'' = \text{Core}(\Delta', u')$  es empalmado, es un grafo base con respecto a  $u'$  y tiene la propiedad  $L(\Delta'', u') = K$ . Por lo tanto  $(\Delta'', u') = (\Gamma(K), 1_K)$ . ■

**Proposición 5** Sean  $H, K \leq F(X)$  y  $g \in F(X)$ . Sea  $g = yz$  donde  $z$  es el segmento final más grande de  $g$  tal que  $z^{-1}$  es la etiqueta de un camino en  $\Gamma(H)$  con origen en  $1_H$ . Sea  $y = y'y''$  donde  $y'$  es el segmento inicial más grande de  $y$  que es la etiqueta de un camino en  $\Gamma(K)$  con origen en  $1_K$ . Supongamos que la palabra  $y''$  es no trivial. Entonces

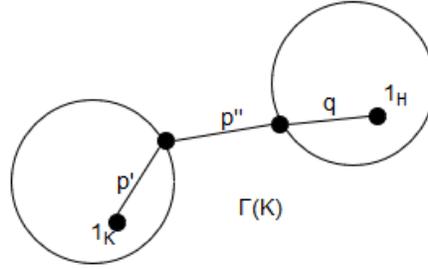
$$\langle gHg^{-1}, K \rangle = gHg^{-1} * K.$$

**Demostración.** Consideremos el grafo  $\Gamma$  obtenido de la siguiente manera. Tomemos primero un camino  $p_g$  de longitud  $|g|_X$  con etiqueta  $g$  y unimos su

origen a  $1_K$  y su vértice final a  $1_H$ . El camino  $p_g$  es una concatenación de la forma  $p_g = p'p''q$  donde  $l(p') = y'$ ,  $l(p'') = y''$  y  $l(q) = z$ .

Entonces empalmamos el segmento  $q$  de  $p_g$  sobre el camino (que inicia en  $1_H$ ) con etiqueta  $z^{-1}$  en  $\Gamma(H)$  y también el segmento  $y'$  de  $p_g$  sobre el camino (que inicia en  $1_K$ ) en  $\Gamma(K)$ . Denotamos el grafo resultante por  $\Gamma$ .

Por lo tanto  $\Gamma$  consiste de los grafos  $\Gamma(H)$  y  $\Gamma(K)$  unidos por un segmento con etiqueta  $y''$  como se muestra en la siguiente figura.



Abusando un poco de la notación, seguiremos llamando a este segmento  $p''$  y también nos referiremos a las imágenes de  $\Gamma(H)$  y  $\Gamma(K)$  en  $\Gamma$  como  $\Gamma(H)$  y  $\Gamma(K)$ . La construcción de  $\Gamma$  implica que es un  $X$ -digrafo empalmado.

Demostraremos que  $L(\Gamma, 1_K) = gHg^{-1} * K$ . Podemos elegir un árbol generador  $T_H$  en  $\Gamma(H)$  y un árbol generador  $T_K$  en  $\Gamma(K)$ . Entonces  $T = T_H \cup T_K \cup p''$  es un árbol generador en  $\Gamma$ . Podemos usarlo para producir las bases libres  $Y_T$  para  $L(\Gamma, 1_K)$  como es descrito en el Lema 8. Entonces  $Y_T$  es la unión disjunta de dos subconjuntos  $Y_T = Y_H \cup Y_K$  donde  $Y_H$  son los generadores correspondientes a las aristas en  $\Gamma(H) - T_H$  y  $Y_K$  son los generadores correspondientes a las aristas en  $\Gamma(K) - T_K$ .

Cada  $f \in Y_H$  es la etiqueta del camino

$$\alpha_f = [1_K, u]_{T_K} p'' [v, o(e)]_{T_H} e [t(e), v]_{T_H} (p'')^{-1} [u, 1_K]_{T_K}$$

donde  $e \in E^+(\Gamma(H) - T_H)$ . El camino  $p_f$  puede ser obtenido mediante reducciones de

$$\begin{aligned} \alpha'_f &= ([1_K, u]_{T_K} (p')^{-1}) p' p'' q (q^{-1} [v, 1_H]_{T_H}) \\ &\quad [1_H, o(e)]_{T_H} e [t(e), 1_H]_{T_H} ([1_H, v]_{T_H} q) q^{-1} (p'')^{-1} (p')^{-1} (p' [u, 1_K]_{T_K}) \end{aligned}$$

esto es

$$\alpha'_f = ([1_K, u]_{T_K} (p')^{-1}) p_g (q^{-1} [v, 1_H]_{T_H}) p_e ([1_H, v]_{T_H} q) p^{-1}$$

donde  $p_e = [1_H, o(e)]_{T_H} e [t(e), 1_H]_T$  es el camino que va de  $1_H$  a  $1_H$  en  $\Gamma(H)$  definiendo uno de los generadores libres de  $H$  con respecto del árbol  $T_H$ .

Como  $[1_K, u]_{T_K} (p')^{-1}$  es un camino en  $\Gamma(K)$  de  $1_K$  a  $1_K$ , la etiqueta de este camino determina un elemento  $k \in K$ . De forma similar, como  $q^{-1}[v, 1_H]_{T_H} = ([1_H, v]_{T_H} q)^{-1}$  es un camino en  $\Gamma(H)$  que va de  $1_H$  a  $1_H$  y que tiene como etiqueta reducida un elemento  $h \in H$ . Ya que el conjunto  $Y_{T_H} = \{l(p_e) | e \in E^+(\Gamma(H) - T_H)\}$  es una base libre de  $H$ , el conjunto  $Z_H = \overline{ghY_{T_H}h^{-1}g^{-1}}$  es una base libre de  $gHg^{-1}$ . Entonces  $Y_H = \overline{kZ_Hk^{-1}}$ .

Por otro lado el conjunto  $Y_K$  es una base libre de  $K$  con respecto al árbol generador  $T_K$  de  $\Gamma(K)$ .

Sabemos que  $Y_T = Y_H \cup Y_K$  es una base libre del subgrupo  $L(\Gamma(K), 1_K)$  y  $F(Y_K) = K$  ya que  $(k^{-1}Y_Hk) \cup Y_T = Z_H \cup Y_T$  es una base libre de  $L(\Gamma(K), 1_K)$ .

Por lo tanto

$$L(\Gamma(H), 1_K) = F(Z_H \cup Y_K) = F(Z_H) * F(Y_K) = gHg^{-1} * K$$

■

## 1.4 Subgrupos de índice finito.

**Definición 5** Diremos que un  $X$ -digrafo es  $X$ -regular si para todo vértice  $v$  de  $\Gamma$  y todo  $x \in \Sigma$  existe exactamente una arista en  $\hat{\Gamma}$  con origen en  $v$  y etiqueta  $x$ .

**Proposición 6** Sea  $H$  un subgrupo de  $F(X)$ . Entonces  $|F(X) : H| < \infty$  si y solo si  $\Gamma(H)$  es un grafo  $X$ -regular finito. En este caso  $|F(X) : H| = \#V.\Gamma(H)$ .

**Demostración.** Supongamos primero que  $|F(X) : H| = s < \infty$ . Entonces  $H$  es finitamente generado y por lo tanto  $\Gamma(H)$  es finito. Supongamos que  $\Gamma(H)$  no es  $X$ -regular. Entonces existe un vértice  $v$  de  $\Gamma(H)$  y una letra  $x \in \Sigma$  tal que no existe una arista con origen en  $v \in \hat{\Gamma}$  y etiqueta  $x$ . Tomamos un camino reducido  $p$  que va de  $1_H$  a  $v$  en  $\Gamma(H)$  y sea  $w = l(p)$ . Entonces la palabra  $wx$  es reducida y ninguna palabra con subpalabra inicial  $wx$  es aceptada por  $\Gamma(H)$ .

Luego para cualquier palabra reducida  $y$  que no comience con  $x^{-1}$  tenemos que  $wxy \notin H$ .

Como  $|F(X) : H| = s < \infty$ , existen  $s$  elementos  $g_1, g_2, \dots, g_s \in F(X)$  tal que

$$F(X) = Hg_1 \cup \dots \cup Hg_s$$

Sea  $M = \max \{|g_i|_X \mid i = 1, \dots, s\}$  y sea  $f = wx^{M+1}$ . Entonces para algún  $g_i$  tenemos que  $f \cdot g_i^{-1} \in H$ . Por la elección de  $M$  la forma reducida  $z$  de  $f \cdot g_i^{-1}$  tiene como palabra inicial a  $wx$  y por lo tanto  $z \notin L(\Gamma(H), 1_H) = H$ . Esto contradice la hipótesis  $f \cdot g_i^{-1} \in H$ .

Supongamos ahora que  $\Gamma(H)$  es un grafo  $X$ -regular finito. Queremos mostrar que el índice de  $H$  en  $F(X)$  es finito y es igual a el número de vértices de  $\Gamma(H)$ .

Para cada vértice  $v$  de  $\Gamma(H)$  elegimos un camino reducido  $p_v$  que va de  $1_H$  a  $v$  en  $\Gamma(H)$  y denotamos  $g_v = l(p_v)$ . Veamos que

$$F(X) = \cup \{H \cdot g_v \mid v \in V.\Gamma(H)\}.$$

Sea  $f \in F(X)$  una palabra reducida. Como  $\Gamma(H)$  es  $X$ -regular, existe un camino  $\alpha$  en  $\Gamma(H)$  con origen  $1_H$  y etiqueta  $f$ . Sea  $u$  el vértice final de este camino. Entonces  $\alpha p_u^{-1}$ , con  $p_u \neq \alpha$ , es un camino en  $\Gamma(H)$  que va de  $1_H$  a  $1_H$  con etiqueta  $f g_u^{-1}$ . Por lo tanto la forma reducida de la palabra  $f g_u^{-1}$  es aceptada por  $\Gamma(H)$  y entonces  $f g_u^{-1} \in H$ ,  $f \in H g_u$ . Como  $f$  fue elegida de forma arbitraria tenemos que  $F(X) = \cup \{H \cdot g_v \mid v \in V.\Gamma(H)\}$ .

Lo anterior implica que  $H$  tiene índice finito en  $F(X)$ . Para demostrar la proposición debemos verificar que si  $v$  y  $u$  son vértices distintos de  $\Gamma(H)$  entonces  $H_{g_v} \neq H_{g_u}$ . Suponga que esto no se cumple, por lo tanto para algún  $u \neq v$  tenemos que  $H_{g_v} = H_{g_u}$ . Entonces  $g_u g_v^{-1} = h \in H$ . El camino  $p = p_v p_u^{-1}$  tiene etiqueta  $g_v g_u^{-1}$  y por lo tanto la forma reducida  $p'$  del camino  $p$  tiene etiqueta  $h$ . Como  $p'$  es un camino reducido que comienza en  $1_H$  y tiene etiqueta  $h$  entonces el vértice final de  $p'$  es  $1_H$ . Como las reducciones en un camino no cambian el vértice final, tenemos que el vértice final de  $p$  es  $1_H$ , el cual también es su vértice inicial. Por lo tanto esto implica que los caminos  $p_v$  y  $p_u$  tienen los mismos vértices finales y  $u = v$ , lo cual es una contradicción. ■

**Corolario 1** *Existe un algoritmo el cual, dado un conjunto finito de palabras reducidas  $h_1, \dots, h_s \in F(X)$ , calcula el índice del subgrupo  $\langle h_1, \dots, h_s \rangle = H$  en  $F(X)$ .*

**Demostración.** Primero construimos el grafo finito  $\Gamma(H)$  y luego verificamos si este es  $X$ -regular. Si no lo es, el subgrupo  $H$  tiene índice infinito en  $F(X)$  (por Proposición 6). Si lo es, entonces el índice de  $H$  en  $F(X)$  es igual a el número de vértices de  $\Gamma(H)$  (por Proposición 6). ■

**Teorema 1** *Sea  $H$  un subgrupo no trivial de  $F(X)$ . Entonces  $H$  es normal en  $F(X)$  si y solo si las siguientes condiciones se satisfacen:*

1. *El grafo  $\Gamma(H)$  es  $X$ -regular.*
2. *Para cualquier vértice  $v$  de  $\Gamma(H)$  los  $X$ -digrafos  $(\Gamma(H), 1_H)$  y  $(\Gamma(H), v)$  son isomorfos, es decir,  $L(\Gamma(H), v) = H$ .*

**Demostración.** Supongamos primero que las condiciones (1) y (2) se satisfacen. Sea  $g \in F(X)$  una palabra reducida. Como  $\Gamma(H)$  es empalmado y  $X$ -regular, existe un único camino  $p$  en  $\Gamma(H)$  con origen  $1_H$  y etiqueta  $g$ . Sea  $v$  el vértice final de  $p$ . Por Lema 9  $L(\Gamma(H), v) = gHg^{-1}$ . Además por (2) tenemos que  $L(\Gamma(H), v) = H$ . Entonces  $gHg^{-1} = H$ . Como  $g$  fue elegida de forma arbitraria tenemos que  $H$  es normal en  $F(X)$ .

Ahora supongamos que  $H \neq 1$  es normal en  $F(X)$ . Primero veamos que el grado de  $1_H$  en  $\Gamma(H)$  es al menos 2. Supongamos que solo existe una arista con origen en  $1_H$  y sea  $x$  la etiqueta de tal arista. Entonces cualquier elemento de  $H$  tiene la forma  $xwx^{-1}$ . Sea  $h = xwx^{-1} \in H$  un elemento no trivial. La forma cíclica reducida  $q$  de  $h$  es conjugado a  $h$  y por lo tanto pertenece a  $H$  (por ser  $H$  normal). Luego hay una palabra cíclicamente reducida que no tiene la forma  $x \cdots x^{-1}$ , lo cual implica que  $1_H$  tienen al menos grado 2.

Sea  $g \in F(X)$  una palabra reducida. Veremos que existe un camino  $p_g$  en  $\Gamma(H)$  con vértice inicial  $1_H$  y etiqueta  $g$ . Si esto no ocurre entonces por Lema 10 el grafo del subgrupo  $gHg^{-1}$  tiene el vértice  $1_{gHg^{-1}}$  de grado 1. Pero  $H = gHg^{-1}$  por ser  $H$  un subgrupo normal, obteniendo así una contradicción.

Por lo tanto el camino  $p_g$  existe. Como  $g \in F(X)$  a sido elegido de forma arbitraria y el grafo  $\Gamma(H)$  es empalmado y conexo implica que  $\Gamma(H)$  es  $X$ -regular. Más aun, si  $v_g$  es el vértice final de  $p_g$  entonces por el Lema 9  $L(\Gamma(H), v_g) = gHg^{-1} = H$ , entonces  $(\Gamma(H), v_g)$  es isomorfo a  $(\Gamma(H), 1_H)$ . Claramente cualquier vértice  $v$  de  $\Gamma(H)$  puede ser obtenido como  $v_g$  para algún  $g \in F(X)$  y por lo tanto todas las condiciones del teorema se satisfacen. ■

## 1.5 Intersección de subgrupos.

Una de las aplicaciones más interesantes de los grafos empalmados es un algoritmo para calcular la intersección de dos subgrupos de un grupo libre.

**Definición 6** Sean  $\Gamma$  y  $\Delta$   $X$ -digrafos. Definimos el producto de grafos  $\Gamma \times \Delta$  de la siguiente manera.

El conjunto de vértices de  $\Gamma \times \Delta$  es el conjunto  $V.\Gamma \times V.\Delta$ .

Para un par de vértices  $(u, v), (u', v') \in V.(\Gamma \times \Delta)$  tendremos una arista con origen en  $(u, v)$  y final en  $(u', v')$  con etiqueta  $x$  si hay una arista con etiqueta  $x$  de  $u$  a  $u'$  en  $\Gamma$  y una arista con etiqueta de  $v$  a  $v'$  con etiqueta  $x$  en  $\Delta$ .

Por lo tanto  $\Gamma \times \Delta$  es un  $X$ -digrafo. En algunas ocasiones denotaremos el vértice  $(u, v)$  de  $\Gamma \times \Delta$  por  $u \times v$ .

La siguiente observación se sigue inmediatamente de la definición.

**Lema 11** Supongamos que  $\Gamma$  y  $\Delta$  son  $X$ -digrafos empalmados. Entonces  $\Gamma \times \Delta$  también es un  $X$ -digrafo empalmado. Más aun, si  $v \times u$  es un vértice de  $\Gamma \times \Delta$ , entonces el grado de  $v \times u$  es menor o igual que el mínimo del grado de  $v$  en  $\Gamma$  o el grado de  $u$  en  $\Delta$ .

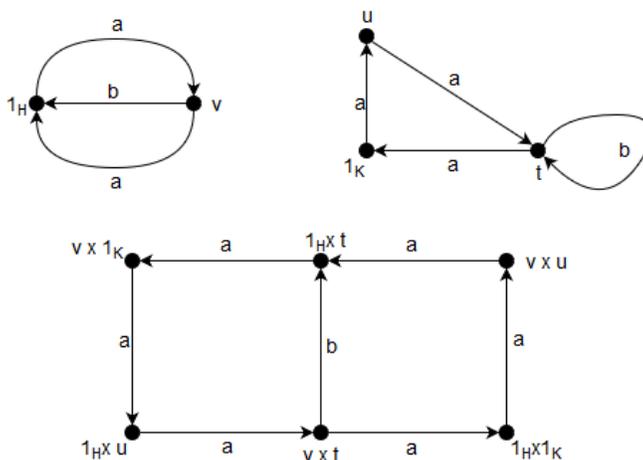
Ahora estableceremos una importante relación entre el producto de grafos y la intersección de subgrupos.

**Lema 12** Supongamos que  $\Gamma$  y  $\Delta$  son  $X$ -digrafos empalmados. Sea  $H = L(\Gamma, v)$  y  $K = L(\Delta, u)$  con  $v \in V.\Gamma$ ,  $u \in V.\Delta$ . Sea  $y = (v, u) \in V.(\Gamma \times \Delta)$ . Entonces  $\Gamma \times \Delta$  es empalmado y  $L(\Gamma \times \Delta, y) = H \cap K$ .

**Demostración.** Sea  $w$  una palabra reducida de  $F(X)$ .

Por definición de  $\Gamma \times \Delta$  existe un camino en  $\Gamma \times \Delta$  que va de  $y$  a  $y$  con etiqueta  $w$  si y solo si existe un camino reducido en  $\Gamma$  que va de  $v$  a  $v$  con etiqueta  $w$  y además existe un camino reducido en  $\Delta$  que va de  $u$  a  $u$  con etiqueta  $w$ . Esto implica que  $L(\Gamma \times \Delta, y) = L(\Gamma, v) \cap L(\Delta, u)$ . ■

En la siguiente figura se muestra el producto  $\Gamma(H) \times \Gamma(K)$  donde  $H = \langle ab, b^{-1}a \rangle < F(a, b)$  y  $K = \langle a^3, a^{-1}ba \rangle < F(a, b)$ .



**Proposición 7** Sean  $H, K < F(X)$ . Sea  $g \in F(X)$  tal que el doble cociente  $KgH$  y  $KH$  son distintos. Supongamos que  $gHg^{-1} \cap K \neq 1$ .

Entonces existe un vértice  $v \times u$  en  $\Gamma(H) \times \Gamma(K)$  el cual no pertenece a la componente conexa de  $1_H \times 1_K$  tal que el subgrupo  $L(\Gamma(H) \times \Gamma(K), v \times v)$  es conjugado a  $gHg^{-1} \cap K$  en  $F(X)$ .

**Demostración.** Sea  $g = yz$  donde  $z$  es el segmento terminal más largo de  $g$  tal que  $z^{-1}$  es la etiqueta de un camino en  $\Gamma(H)$  con origen  $1_H$ . Denotemos a este camino por  $\sigma$  y el vértice final de  $\sigma$  por  $v$ . Si la palabra  $y$  no es la etiqueta de un camino en  $\Gamma(H)$  con origen  $1_K$ , entonces por la Proposición 5  $\langle gHg^{-1}, K \rangle = gHg^{-1} * K$ . Esto implica que  $gHg^{-1} \cap K = 1$ , lo cual es una contradicción.

Por lo tanto  $y$  es la etiqueta de un camino  $\tau$  en  $\Gamma(K)$  que va de  $1_K$  a algún vértice  $u$ .

Por Lema 9  $L(\Gamma(H), v) = zHz^{-1}$  y  $L(\Gamma(K), u) = yKy^{-1}$ . Nótese también que

$$y(zHz^{-1} \cap y^{-1}Ky)y^{-1} = yzHz^{-1}y^{-1} \cap K = gHg^{-1} \cap K$$

y por lo tanto los subgrupos  $gHg^{-1} \cap K$  y  $zHz^{-1} \cap y^{-1}Ky$  son conjugados en  $F(X)$ .

Por Lema 12 tenemos

$$L(\Gamma(H) \times \Gamma(K), v \times u) = zHz^{-1} \cap y^{-1}Ky \simeq gHg^{-1} \cap K,$$

como es deseado.

Ahora veamos que  $v \times u$  no pertenece a la componente conexa de  $1_H \times 1_K$  en

$\Gamma(H) \times \Gamma(K)$ . Supongamos que esto no ocurre, entonces existe un camino reducido  $p_v$  en  $\Gamma(H)$  que va de  $1_H$  a  $v$  y un camino reducido  $p_u$  en  $\Gamma(K)$  que va de  $1_K$  a  $u$  tal que sus etiquetas son la misma, esto es  $l(p_v) = l(p_u) = \alpha$ . Nótese que  $p_v\sigma^{-1}$  es un camino en  $\Gamma(H)$  que va de  $1_H$  a  $1_H$  y por lo tanto  $l(p_v\sigma^{-1}) = \overline{\alpha z} = \alpha z = h \in H$ . De forma similar  $\tau p_u^{-1}$  es un camino en  $\Gamma(K)$  que va de  $1_K$  a  $1_K$  y por lo tanto tenemos que

$$g = yz = y\alpha^{-1}\alpha z = kh \in KH,$$

lo cual es una contradicción ya que  $KgH \neq KH$ . ■

Lo contrario de la afirmación anterior también se lleva a cabo:

**Proposición 8** Sean  $H, K < F(X)$ . Sea  $v \times u$  cualquier vértice de  $\Gamma(H) \times \Gamma(K)$  entonces el subgrupo  $L(\Gamma(H) \times \Gamma(K), v \times u)$  es conjugado a algún subgrupo de la forma  $gHg^{-1} \cap K$  para algún  $g \in F(X)$ . Más aun, si  $v \times u$  no pertenece a la componente conexa de  $1_H \times 1_K$ , entonces el elemento  $g$  puede ser elegido de tal forma tal que  $KgH \neq KH$ .

**Demostración.** Sea  $p_v$  un camino reducido en  $\Gamma(H)$  el cual va de  $1_H$  a  $v$  y tiene etiqueta  $\sigma$ . Similarmente sea  $p_u$  un camino reducido en  $\Gamma(K)$  el cual va de  $1_K$  a  $u$  con etiqueta  $\tau$ . Por el Lema 9  $L(\Gamma(H), v) = \sigma^{-1}H\sigma$  y  $L(\Gamma(K), u) = \tau^{-1}K\tau$ . Por el Lema 12

$$L(\Gamma(H) \times \Gamma(K), v \times u) = \sigma^{-1}H\sigma \cap \tau^{-1}K\tau$$

es conjugado a

$$\tau\sigma^{-1}H\sigma\tau^{-1} \cap K,$$

luego  $g = \tau\sigma^{-1}$  satisface la propiedad requerida.

Supongamos ahora que  $v \times u$  no pertenece a la componente conexa de  $1_H \times 1_K$  en  $\Gamma(H) \times \Gamma(K)$ , pero  $g = \tau\sigma^{-1} \in KH$ , pero  $\tau\sigma^{-1} = kh$  para algún  $k \in K$ ,  $h \in H$  y por lo tanto

$$k^{-1}\tau = h\sigma.$$

Sea  $\alpha$  la forma reducida de la palabra  $k^{-1}\tau = h\sigma$ . Como  $k^{-1} \in K$  entonces  $k^{-1}$  es la etiqueta de un camino reducido  $p_1$  en  $\Gamma(K)$  el cual va de  $1_K$  a  $1_K$ . Luego  $p_1p_u$  es un camino en  $\Gamma(K)$  con etiqueta reducida  $\alpha$ . Por lo tanto también existe un camino reducido  $p'_1$  en  $\Gamma(K)$  que va de  $1_K$  a  $u$  con etiqueta  $\alpha$ . Similarmente, como  $h \in H$ , existe un camino  $p_2$  en  $\Gamma(H)$  que va de  $1_H$  a  $1_H$  con etiqueta  $h$ . Entonces  $p_2p_v$  es un camino en  $\Gamma(H)$  el cual va de  $1_H$

a  $v$  con etiqueta  $\alpha$ . Por definición de  $\Gamma(H) \times \Gamma(K)$ , existe un camino en  $\Gamma(H) \times \Gamma(K)$  que va de  $1_H \times 1_K$  a  $v \times u$  con etiqueta  $\alpha$ . Pero esto contradice la suposición de que  $v \times u$  no pertenece a la componente conexa de  $1_H \times 1_K$ , luego  $g \notin KH$  y  $KgH \neq KH$ . ■

Las proposiciones anteriores nos permiten utilizar el producto de grafos para determinar cuando un subgrupo finitamente generado de un grupo libre es o no malnormal.

**Definición 7** Sean  $H$  un subgrupo de un grupo  $G$ . Decimos que  $H$  es malnormal en  $G$  si  $\forall g \in G \setminus H$

$$gHg^{-1} \cap H = 1.$$

Diremos que  $H$  es ciclo normal en  $G$  si  $\forall g \in G \setminus H$

$$gHg^{-1} \cap H \text{ es cíclico.}$$

**Proposición 9** Sea  $H < F(X)$ . Entonces  $H$  es malnormal en  $F(X)$  si y solo si toda componente de  $\Gamma(H) \times \Gamma(H)$  que no contenga a  $1_H \times 1_H$  es un árbol.

**Demostración.** Supongamos que  $H$  es malnormal en  $F(X)$ . Supongamos que existe una componente conexa  $C$  de  $\Gamma(H) \times \Gamma(H)$  la cual no contiene a  $1_H \times 1_H$  y no es un árbol. Sea  $v \times u$  un vértice de  $C$ . Como  $C$  no es un árbol, existe un camino reducido no trivial de  $v \times u$  a  $v \times u$  en  $C$  y por lo tanto  $A = L(C, v \times u) \neq 1$ . Por la Proposición 8 existe un  $g \in F(X)$  tal que  $HgH \neq HH = H$  (entonces  $g \notin H$ ) y  $gHg^{-1} \cap H$  es conjugado a  $A$  y entonces  $gHg^{-1} \cap H \neq 1$ , lo cual es una contradicción ya que supusimos que  $H$  es malnormal.

Ya que para cualquier árbol  $T$  y cualquier vértice  $v$  de  $T$   $L(T, v) = 1$ , la implicación opuesta del Teorema se sigue inmediatamente de la Proposición 7. ■

**Proposición 10** Existe un algoritmo el cual, dado un conjunto finito de palabras reducidas  $h_1, \dots, h_s$  en  $F(X)$  decide si el subgrupo  $H = \langle h_1, \dots, h_s \rangle$  es malnormal o no en  $F(X)$ . Si  $H$  no es malnormal, este algoritmo produce un elemento no trivial  $g \in F(X) \setminus H$  tal que  $gHg^{-1} \cap H \neq 1$ .

**Demostración.** Primero construimos el grafo finito  $\Gamma(H)$  como se describe en la Proposición 3, luego construimos el grafo  $\Gamma(H) \times \Gamma(H)$ . Solo nos queda revisar si las componentes conexas de  $\Gamma(H) \times \Gamma(H)$  que no contienen a  $1_H \times 1_H$  son árboles.

Si todas las componentes son árboles, entonces  $H$  es malnormal en  $F(X)$ . Si alguna componente  $\Omega$  que no contiene a  $1_H \times 1_H$  no es un árbol, entonces  $H$  no es malnormal en  $F(X)$ . En este caso tomamos el vértice  $v \times u \in \Omega$  y caminos con etiquetas  $\sigma, \tau$  en  $\Gamma(H)$  los cuales van de  $1_H$  a  $v, u$  respectivamente. Tomemos  $g = \tau\sigma^{-1}$ . Luego por la demostración de la Proposición 8 tenemos que  $gHg^{-1} \cap H \neq 1$  y  $HgH \neq HH$ , con lo cual  $g \notin H$ . ■

**Proposición 11** *Existe un algoritmo el cual, dado un conjunto finito de palabras reducidas*

$$h_1, \dots, h_s \in F(X),$$

*determina cuando el subgrupo  $H = \langle h_1, \dots, h_s \rangle \leq F(X)$  es o no ciclo normal.*

**Demostración.** Por la Proposición 8 tenemos que si  $g \notin H$  entonces  $gHg^{-1} \cap H$  es trivial o isomorfo a  $L(C, v \times u)$  donde  $C$  es una componente conexa de  $\Gamma(H) \times \Gamma(H)$  la cual no contiene el vértice  $1_H \times 1_H$  y  $v \times u$  es un vértice de  $C$ .

Para verificar si  $H$  es ciclo normal construimos  $\Gamma(H)$ ,  $\Gamma(H) \times \Gamma(H)$  y para toda componente conexa  $C$  de  $\Gamma(H) \times \Gamma(H)$  que no contenga a  $1_H \times 1_H$  encontramos su árbol generador  $T_C$  en  $C$  y contamos el número  $n_C$  de aristas en  $C - T_C$  (este número es igual al rango del grupo libre  $L(C, v \times u)$ ). Si para cada  $C$   $n_C \leq 1$ , el subgrupo  $H$  es ciclo normal. Si para algún  $C$  tenemos que  $n_C \geq 2$ , el subgrupo  $H$  no es ciclo normal. ■

# Capítulo 2

## Cancelación Pequeña.

### 2.1 Diagramas.

Supóngase que un grupo  $G$  tiene presentación  $G = \langle X \mid R \rangle$ . Sea  $F$  un grupo libre en  $X$  y sea  $N$  la cerradura normal de  $R$  en  $F$ . Entonces  $G = F/N$ . Un elemento  $w$  de  $F$  representa la identidad en  $G$  si y solo si  $w \in N$ . Ahora,  $w \in N$  si y solo si en el grupo libre  $F$ ,  $w$  es el producto de conjugados de elementos de  $R^{\pm 1}$ ; diremos que  $w = c_1 \cdots c_n$  donde  $c_i = u_i r_i u_i^{-1}$  con  $r_i$  o  $r_i^{-1}$  en  $R$ .

A cada producto  $c_1 \cdots c_n$  vamos a asociar un diagrama en el plano euclidiano el cual contiene toda la información esencial del producto  $c_1 \cdots c_n$ . Con esto entonces veremos que los diagramas son una herramienta adecuada para estudiar la pertenencia al subgrupo normal  $N$  de  $F$ , y por lo tanto, para estudiar la igualdad en el grupo cociente  $G$ .

Sea  $E^2$  el plano euclidiano. Si  $S \subset E^2$ , entonces  $\delta S$  denotara la frontera de  $S$ , la cerradura topológica de  $S$  será denotada por  $\bar{S}$  y denotaremos a  $E^2 - S$  por  $-S$ . Un vértice es un punto de  $E^2$ . Una arista es un subconjunto acotado de  $E^2$  homeomorfo al intervalo unitario abierto. Una región es un conjunto acotado homeomorfo al disco unitario abierto. Un mapa  $M$  es una colección finita de vértices, aristas y regiones las cuales son disjuntas a pares y satisfacen lo siguiente:

1. Si  $e$  es una arista de  $M$ , existen vértices  $v_1$  y  $v_2$  (no necesariamente distintos) en  $M$  tal que  $\bar{e} = e \cup \{v_1\} \cup \{v_2\}$ .

2. La frontera  $\delta D$  de cada región  $D$  en  $M$  es conexa y existe un conjunto de aristas  $e_1, \dots, e_n$  en  $M$  tal que  $\delta D = \bar{e}_1 \cup \dots \cup \bar{e}_n$ .

Denotaremos la frontera de  $M$  por  $\delta M$ . Si  $e$  es una arista donde  $\bar{e} = e \cup \{v_1\} \cup \{v_2\}$  entonces a los vértices  $v_1$  y  $v_2$  los llamaremos puntos finales de  $e$ . Una arista cerrada es una arista  $e$  junto con sus puntos finales.

Vamos a considerar mapas dirigidos. Si  $e$  es una arista dirigida que va del punto  $v_1$  al punto  $v_2$ , el vértice  $v_1$  lo llamaremos vértice inicial de  $e$  y a  $v_2$  lo llamaremos vértice final de  $e$ . La arista dirigida de forma opuesta, o inversa de  $e$ , será denotada por  $e^{-1}$  y va de  $v_2$  a  $v_1$ . Un camino es una secuencia de aristas dirigidas  $e_1, \dots, e_n$  tal que el vértice inicial de  $e_{i+1}$  es el vértice final de  $e_i$ ,  $1 \leq i \leq n-1$ .

Los puntos finales de un camino son el vértice inicial de  $e_1$  y el vértice final de  $e_n$ . Un camino cerrado o ciclo es un camino en el cual el vértice inicial de  $e_1$  es el vértice final de  $e_n$ . Un camino es reducido si no contiene un par sucesivo de aristas de la forma  $ee^{-1}$ . Un camino reducido  $e_1, \dots, e_n$  es simple si, para  $i \neq j$ ,  $e_i$  y  $e_j$  tienen diferentes puntos iniciales.

Como  $M$  pertenece al plano es posible orientar las regiones de  $M$  y las componentes de  $-M$ , cada arista de  $M$  podrá ser recorrida de dos formas, una por cada una de sus posibles orientaciones. Si  $D$  es una región de  $M$  con orientación dada, cualquier ciclo de longitud minimal el cual incluya todas las aristas de  $\delta D$  y en el cual las aristas estén orientadas de acuerdo a la orientación de  $D$  será llamado ciclo frontera de  $D$ . Si  $M$  es conexo y simplemente conexo, el ciclo frontera de  $M$  es un ciclo  $\alpha$  de longitud minimal el cual contiene todas las aristas de la frontera de  $M$  y que no se cortan así mismos, en este sentido, si  $e_i$  y  $e_{i+1}$  son aristas consecutivas de  $\alpha$  con  $v$  el vértice final de  $e_i$ , entonces  $e_i^{-1}$  y  $e_{i+1}$  son adyacentes en el conjunto cíclicamente ordenado de todas las aristas de  $M$  que comienzan en  $v$ .

Un diagrama sobre un grupo  $F$  es un mapa orientado  $M$  y una función  $l$  que asigna a cada arista orientada  $e$  de  $M$  una etiqueta  $l(e)$  de  $F$ , tal que si  $e$  es una arista orientada de  $M$  y  $e^{-1}$  es la arista orientada opuesta, entonces  $l(e^{-1}) = l(e)^{-1}$ . Si  $\alpha = e_1 \cdots e_k$  es un camino en  $M$ , definimos  $l(\alpha) = l(e_1) \cdots l(e_k)$ . Si  $D$  es una región de  $M$ , la etiqueta de  $D$  es un elemento  $l(\alpha)$  con  $\alpha$  el ciclo frontera de  $D$ .

Sea  $F$  un grupo libre con una base dada. A cada secuencia finita  $(c_1, \dots, c_n)$  de elementos no triviales del grupo libre  $F$ , podemos asignar un diagrama  $M(c_1, \dots, c_n)$  el cual será un mapa orientado y etiquetado por la función  $l$  en  $F$  la cual satisface las siguientes condiciones:

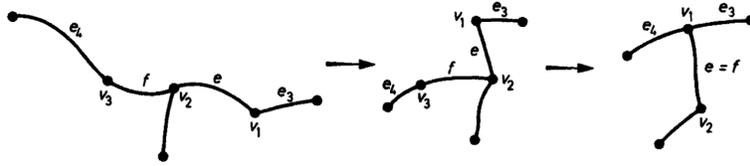
1. Si  $e$  es una aristas de  $M$ ,  $l(e_1) \neq 1$ .
2.  $M$  es conexo y simplemente conexo con un vértice distinguible  $O$  en la frontera de  $M$ . Entonces hay un ciclo frontera  $e_1, \dots, e_t$  de  $M$  que comienza en  $O$  tal que el producto  $l(e_1) \cdots l(e_t)$  es reducido sin cancelación y  $l(e_1) \cdots l(e_t) = c_1 \cdots c_n$ .
3. Si  $D$  es cualquier región de  $M$  y  $e_1, \dots, e_j$  es cualquier ciclo frontera de  $D$ , entonces  $l(e_1) \cdots l(e_j)$  es reducido sin cancelación, cíclicamente reducido y conjugado de algún  $c_i$ .

**Teorema 2** *Si  $F$  es un grupo libre y  $c_1, \dots, c_n$ ,  $n \geq 0$ , es una secuencia de elementos no triviales de  $F$ , entonces existe un diagrama  $M(c_1, \dots, c_n)$  el cual satisface 1-3.*

**Demostración.** Cada elemento  $c$  de un grupo libre puede ser escrito de forma única como  $uru^{-1}$ , donde  $uru^{-1}$  es reducido sin cancelación y  $r$  es cíclicamente reducido. Entonces escribiremos cada  $c_i$  de la forma  $u_i r_i u_i^{-1}$ . La demostración es por inducción sobre  $n$ . Si  $n = 0$ ,  $M$  consiste de solo del vértice  $O$ . Si  $n = 1$ ,  $c_1 = uru^{-1}$ , tomemos el vértice  $v_1$  y un lazo  $e$  en  $v_1$  con etiqueta  $r$ . Si  $u = 1$ , tomemos  $O = v_1$  y terminaríamos la construcción de  $M$ . Si  $u \neq 1$ , tomemos el vértice  $O$  ajeno al lazo y formamos un arco que va de  $O$  a  $v_1$  con etiqueta  $u$ .

Para  $n \geq 1$  procederemos como sigue. Formamos  $M'$  tomando los diagramas  $M_1, \dots, M_n$ , los cuales son los diagramas correspondientes a cada uno de los elementos  $c_1, \dots, c_n$ , luego los unimos todos en orden al rededor del punto base  $O$ . Si el producto  $(u_1 r_1 u_1^{-1}) \cdots (u_n r_n u_n^{-1})$  es reducido sin cancelación, entonces  $M'$  satisface 1-3 y tendríamos el diagrama deseado. Supóngase que  $M'$  no satisface 2, es decir, el producto no es reducido sin cancelación. Si una arista  $e$  tiene etiqueta  $s = x_1 \cdots x_j$  (cada  $x_i$  es un generador o su inversa), podemos subdividir  $e$  en  $e_1, \dots, e_j$  donde cada  $e_i$  tiene etiqueta  $x_i$ . Luego podemos suponer que cada arista tiene como etiqueta un generador o el inverso de un generador.

La idea es identificar aristas sucesivas que tengan etiquetas inversas. Sea  $\alpha$  el ciclo frontera de  $M'$  el cual comienza en  $O$ . Entonces  $l(\alpha) = c_1 \cdots c_n$ . Por suposición  $\alpha$  contiene dos aristas sucesivas  $e$  y  $f$  tal que  $l(e)$  y  $l(f)$  son inversos. Sean  $v_1$  y  $v_2$  los vértices inicial y final de  $e$ , y sean  $v_2$  y  $v_3$  los vértices inicial y final de  $f$ . Entonces podemos empalmar la arista  $e$  sobre la arista  $f$  (aun cuando  $v_2 = v_3$ ) sin alterar la estructura de  $M'$ .



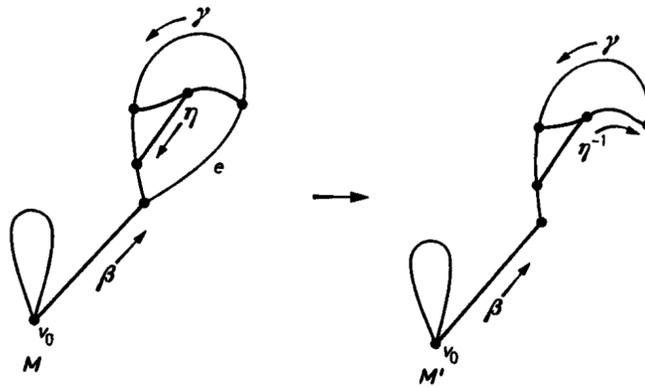
Nótese que en  $M''$ ,  $\delta M''$  tiene menos aristas que  $\alpha$ . Al repetir este proceso un número finito de veces nos lleva a obtener el diagrama  $M$ , el cual cumple las propiedades 1-3. ■

**Lema 13** *Sea  $M$  un diagrama conexo y simplemente conexo con regiones  $D_1, \dots, D_m$ . Sea  $\alpha$  el ciclo frontera de  $M$  que comienza en un vértice  $v_0 \in \delta M$  y sea  $w = l(\alpha)$ . Entonces existen etiquetas  $r_i$  de  $D_i$  y elementos  $u_i$  de  $F$ ,  $1 \leq i \leq m$  tal que*

$$w = (u_1 r_1 u_1^{-1}) \cdots (u_m r_m u_m^{-1}).$$

**Demostración.** La demostración es por inducción sobre  $m$ . Si  $m = 0$  no hay nada que demostrar, pero nótese que  $M$  es un árbol y entonces  $l(\alpha) = 1$ . Ahora supongamos que el Teorema es cierto para mapas con  $k$  regiones, y sea  $M$  un mapa con  $k + 1$  regiones.

En  $M$  debe existir al menos una región  $D$  tal que  $\delta D \cap \delta M$  contiene una arista. Construimos el mapa  $M'$  a partir de  $M$  borrando una arista  $e$  en  $\delta D \cap \delta M$ , este nuevo mapa aun es conexo y simplemente conexo.



Sea  $\alpha = \beta e \gamma$  y tomemos un ciclo frontera  $e \eta$  de  $D$  el cual comienza en  $e$ . Sea  $l(\beta) = b$ ,  $l(e) = z$ ,  $l(\gamma) = c$  y  $l(\eta) = d$ . Luego  $w = l(\alpha) = b z c$ . El ciclo frontera  $\mu$  de  $M'$  que comienza en  $v_0$  es  $\beta \eta^{-1} \gamma$  y por lo tanto  $l(\mu) = b d^{-1} c$ . Por hipótesis de inducción las regiones de  $M'$  (es decir, las regiones de  $M$

distintas a  $D$ ) pueden ser numeradas de la forma  $D_1, \dots, D_k$  de tal manera que  $bd^{-1}c = (u_1r_1u_1^{-1}) \cdots (u_kr_ku_k^{-1})$ , donde  $r_i$  es la etiqueta de  $D_i$ . Luego  $w = bzc = (bd^{-1}c)(c^{-1}dzc)$  y  $dz$  es la etiqueta de  $D$ . Tomemos  $D$  como  $D_{k+1}$ ,  $dz$  como  $r_{k+1}$  y  $c^{-1}$  como  $u_{k+1}$ . ■

**Definición 8** *Un subconjunto  $R$  de un grupo libre  $F$  es simetrizado si todos los elementos de  $R$  son cíclicamente reducidos y  $r \in R$  implica que todos los conjugados cíclicamente reducidos de  $r^{\pm 1}$  también pertenecen a  $R$ .*

**Definición 9** *Sea  $R$  un subconjunto simetrizado de un grupo libre  $F$ . Un  $R$ -diagrama es un diagrama  $M$  tal que si  $\delta$  es cualquier ciclo frontera de una región  $D$  en  $M$ , entonces  $l(\delta) \in R$ .*

Sea  $R$  un subconjunto simetrizado de un grupo libre  $F$  y sea  $N$  el subgrupo normal generado por  $R$ . Como consecuencia del Teorema 2 y el Lema 13, tenemos lo siguiente. Para cualquier elemento  $w$  de  $F$ ,  $w \in N$  si y solo si existe un  $R$  diagrama  $M$  el cual es conexo y simplemente conexo tal que la etiqueta del ciclo frontera de  $M$  es  $w$ . Con esto, los diagramas conexos y simplemente conexos son una herramienta adecuada para estudiar la pertenencia a subgrupos normales.

## 2.2 La hipótesis de la cancelación pequeña.

Comencemos primero fijando la notación y terminología que se utilizara. Sea  $F$  un grupo libre en un conjunto  $X$  de generadores, una letra es un elemento del conjunto de generadores y los inversos de los generadores. Una palabra  $w$  es una cadena finita de letras,  $w = y_1 \cdots y_m$ . Denotaremos la identidad en  $F$  con 1. Cada elemento de  $F$  distinto de la identidad tiene una representación única como palabra reducida  $w = y_1 \cdots y_m$  en la cual ninguna pareja de letras sucesivas  $y_j y_{j+1}$  forman un par de inversos  $x_i x_i^{-1}$  o  $x_i^{-1} x_i$ . El entero  $n$  es la longitud de  $w$  el cual denotamos por  $|w|$ . A una palabra reducida  $w$  la llamaremos cíclicamente reducida si  $y_n$  no es el inverso de  $y_1$ . Si no hay cancelaciones al momento de formar el producto  $z = u_1 \cdots u_n$ , escribiremos  $z \equiv u_1 \cdots u_n$ .

Suponga que  $r_1$  y  $r_2$  son elementos distintos de  $R$  con  $r_1 \equiv bc_1$  y  $r_2 \equiv bc_2$ . Entonces diremos que  $b$  es una pieza. Como  $b$  se cancela al momento de realizar el producto  $r_1^{-1}r_2$ , y dado que  $R$  es simetrizado, una pieza es

simplemente una subpalabra de un elemento de  $R$  la cual puede ser cancelada por la multiplicación de dos elementos de  $R$  que no son mutuamente inversos.

La hipótesis de la cancelación pequeña asegura que las piezas son partes relativamente pequeñas de los elementos de  $R$ . La condición más común es conocida como  $C'(\lambda)$ , donde  $\lambda$  es un número real positivo.

**Condición  $C'(\lambda)$  :**

Si  $r \in R$ ,  $r \equiv bc$  donde  $b$  es una pieza, entonces  $|b| < \lambda|r|$ .

Una condición relacionada es  $C(p)$ , donde  $p$  es un número natural.

**Condición  $C(p)$  :**

Ningún elemento de  $R$  es el producto de menos de  $p$  piezas.

Observe que  $C'(\lambda)$  implica  $C(p)$  para  $\lambda \leq \frac{1}{p-1}$ .

En ocasiones utilizaremos la condición  $T(q)$ , con  $q$  un número natural.

**Condición  $T(q)$  :** Sea  $3 \leq h < q$ . Supóngase que  $r_1, \dots, r_h$  son elementos de  $R$  en el cual ninguna pareja de elementos sucesivos  $r_i, r_{i+1}$  son inversos. Entonces al menos uno de los productos  $r_1r_2, \dots, r_{h-1}r_h, r_hr_1$  es reducido sin cancelación.

**Definición 10** Sea  $R$  un subconjunto simetrizado de un grupo libre  $F$ . Una secuencia  $c_1, \dots, c_n$  de elementos conjugados de  $R$  será llamada secuencia  $R$ -minimal si el producto  $w = c_1, \dots, c_n$  no puede ser escrito como el producto de menos de  $n$  elementos conjugados con elementos de  $R$ .

**Definición 11** Sea  $M$  un diagrama arbitrario sobre  $F$ . Sean  $D_1, D_2$ , regiones arbitrarias de  $M$  con una arista  $e \in \delta D_1 \cap \delta D_2$ . Sean  $e\delta_1$  y  $e\delta_2$  los ciclos frontera de  $D_1$  y  $D_2$  respectivamente. Sea  $l(\delta_1) = f_1$ , y  $l(\delta_2) = f_2$ . Diremos que  $M$  es reducido si nunca ocurre  $f_2 = f_1^{-1}$ .

**Lema 14** Si  $M$  es un diagrama de una secuencia  $R$ -minimal entonces  $M$  es reducido.

**Demostración.** Supóngase que  $w = c_1 \cdots c_n$  donde  $c_1 \cdots c_n$  es una secuencia  $R$ -minimal, y sea  $M$  el diagrama para  $c_1 \cdots c_n$ . Supongamos que  $M$  no es reducido. Usando la notación de la definición anterior, supongamos que hay 2 regiones distintas  $D_1$  y  $D_2$  las cuales hacen que  $M$  no sea reducida. Si borramos el vértice  $e$  y combinamos  $D_1$  y  $D_2$  en una sola región, obtenemos una

región  $D$  que tiene un ciclo frontera con etiqueta 1. Llamemos al diagrama resultante  $M'$ . Como  $D_1$  y  $D_2$  son distintas,  $M'$  es conexo y simplemente conexo. Ahora,  $M'$  tiene la misma etiqueta  $w$  en su ciclo frontera, pero tiene una región menos. Por el Lema 13  $w$  es el producto de conjugados de las etiquetas de las regiones de  $M'$ , además todas las regiones de  $M'$  excepto  $D$  están etiquetadas por elementos de  $R$ . Sabemos que la etiqueta de  $D$  es 1 y por lo tanto puede ser borrada del producto. Así  $w$  es el producto de  $q_1 \cdots q_{n-2}$  elementos conjugados de  $R$ , lo cual contradice que la secuencia original  $c_1 \cdots c_n$  sea minimal. ■

Sea  $M$  un mapa. Un vértice frontera o una arista frontera de  $M$  es un vértice o arista en  $\delta M$ . Una región frontera de  $M$  es una región  $D$  tal que  $\delta D \cap \delta M \neq \emptyset$ . Entonces si  $D$  es una región frontera de  $M$ ,  $\delta D \cap \delta M$  no necesariamente contiene una arista. Un vértice, arista o región de  $M$  que no sea frontera, será llamada interior.

Si  $v$  es un vértice de un mapa  $M$ ,  $d(v)$ , el grado de  $v$ , denotará el número de aristas dirigidas que tienen a  $v$  como vértice inicial. Entonces, si una arista tiene ambos puntos finales en  $v$ , se contará dos veces. Si  $D$  es una región de  $M$ ,  $d(D)$ , el grado de  $D$ , es el número de aristas en el ciclo frontera de  $D$ . El símbolo  $i(D)$  denotará el número de aristas interiores de  $\delta D$ .

Supongamos que en un  $R$ -diagrama tenemos dos aristas interiores  $e_1$  y  $e_2$  las cuales comparten un vértice  $v$  de grado dos. Entonces podemos eliminar el vértice  $v$  y unir  $e_1$  y  $e_2$  para obtener una sola arista  $e$  con etiqueta  $l(e) = l(e_1)l(e_2)$ . Por lo tanto vamos a asumir que si  $M$  es un  $R$ -diagrama, todos los vértices interiores de  $M$  tienen al menos grado 3.

**Lema 15** *Sea  $R$  un un conjunto de elementos simetrizados de un grupo libre  $F$  y sea  $M$  un  $R$ -diagrama reducido.*

1. *Si  $R$  satisface  $C(k)$ , entonces cada región  $D$  de  $M$  tal que  $\delta D \cap \delta M$  no contiene una arista, cumple  $d(D) \geq k$ .*
2. *Si  $R$  satisface  $T(m)$ , entonces cada vértice interior  $v$  de  $M$  tiene  $d(v) \geq m$ .*

**Demostración.** Primero mostraremos que si  $e$  es una arista interior de  $M$ , entonces la etiqueta  $c = l(e)$  es una pieza. Como  $e$  es una arista interior,  $e$  se encuentra tanto en el ciclo frontera de una región  $D_1$  y una región  $D_2$  de

$M$ . Entonces  $D_1$  y  $D_2$  tienen etiquetas  $r_1$  y  $r_2$  en  $R$  con  $r_1 = ca$  y  $r_2 = c^{-1}b$ . Como  $R$  es simetrizado,  $cb^{-1} \in R$ . Como  $M$  es reducido,  $a \neq b^{-1}$ . Entonces, por definición  $c$  es una pieza. Si  $D$  es una región de  $R$  y todas las aristas de  $\delta D$  son interiores, digamos  $\delta D = e_1 \cdots e_{d(D)}$  con  $l(e_i) = c_i$ , entonces  $D$  tiene etiqueta  $r = c_1 \cdots c_{d(D)} \in R$ , y  $r$  es el producto de  $d(D)$  piezas. Por lo tanto  $C(k)$  implica que  $d(D) \geq k$  para todas las regiones  $D$  de  $M$  tal que  $\delta D \cap \delta M$  no contiene una arista.

Esto muestra en particular que cada región interior de  $M$  tiene grado al menos  $k$ . Sea  $v$  un vértice interior de grado  $h$  y sea  $e_1, \dots, e_h$  las aristas dirigidas incidentes a  $v$ . Entonces para cada  $i$  (modulo  $h$ ),  $e_{i+1}$  y  $e_i$  son aristas consecutivas en la frontera de una región  $D_i$  de  $M$ . Existe caminos  $\alpha_i$  tal que la frontera de  $D_i$  se expresa como un ciclo en  $v$  de la forma  $e_i^{-1} \alpha_i e_{i+1}$ . Si  $f_i$  es la etiqueta de  $e_i$  y  $a_i$  es la etiqueta de  $\alpha_i$ , entonces  $D_i$  tiene etiqueta  $r_i = f_i^{-1} a_i f_{i+1}$ .

Como  $M$  es reducido, ningún  $r_i = r_{i+1}^{-1}$ , y como  $f_i \neq 1$ , hay cancelación en cada uno de los productos  $r_1 r_2, \dots, r_{h-1} r_h, r_h r_1$  y la condición  $T(m)$  falla cuando  $m > h$ . Entonces la condición  $T(m)$  implica que  $d(v) \geq m$  para cada vértice interior  $v$  de  $M$ . ■

## 2.3 Las formulas básicas.

Sea  $p$  y  $q$  número reales positivos tal que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{2}$ . Es bien conocido que las únicas soluciones enteras positivas son  $(3, 6), (4, 4)$  y  $(6, 3)$ . Con esto consideraremos dos tipos de mapas. Si  $M$  es un mapa no vacío tal que cada vértice interior de  $M$  tiene grado al menos  $p$  y todas las regiones de  $M$  tienen grado al menos  $q$ , diremos que  $M$  es un  $[p, q]$  mapa. Si  $M$  es un mapa no vacío tal que cada vértice interior de  $M$  tiene grado al menos  $p$  y cada región interior de  $M$  tienen grado al menos  $q$ , diremos que  $M$  es un  $(p, q)$  mapa. Los signos de sumatoria  $\sum$  denotaran sumatorias sobre vértices o regiones de  $M$ . Entonces  $\sum d(v)$  será la suma de los grados de todos los vértices de  $M$  y  $\sum d(D)$  será la suma de los grados de todas las regiones de  $M$ . La notación  $\sum^*$  denotara la la sumatoria restringida a los vértices o regiones frontera, y  $\sum^\circ$  será la sumatoria sobre vértices o regiones interiores de  $M$ .

Sea  $M$  un mapa arbitrario. Entonces  $V$  denotara el número de vértices de  $M$ .  $E$  denotara el número de aristas de  $M$  y  $T$  el número de regiones

de  $M$ .  $V^*$  será el número de vértices frontera de  $M$ ,  $T^*$  será el número de regiones frontera de  $M$  y  $E^*$  será el número de aristas frontera de  $M$ .

Sean  $Q$  el número de componentes de  $M$ ,  $h$  el número de hoyos,  $p$  y  $q$  dos números enteros positivos tales que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{2}$ .

**Teorema 3** *Sea  $M$  un mapa arbitrario. Entonces*

$$(1) \quad p(Q - h) = \sum^* (p - d(v)) + \sum^\circ (p - d(v)) + \frac{p}{q} \sum (q - d(D)) - \frac{p}{q} E^*.$$

$$(2) \quad p(Q - h) = \sum^* \left( \frac{p}{q} + 2 - d(v) \right) + \sum^\circ (p - d(v)) + \frac{p}{q} \sum (q - d(D)) + \frac{p}{q} (V^* - E^*).$$

**Demostración.** La fórmula de Euler para un grafo conexo  $\Gamma$  es  $1 = V - E + T$  si no contamos la región no acotada. Ahora sea  $\Gamma$  el 1-esqueleto de  $M$ . Sumando sobre cada componente de un posible grafo desconexo tenemos  $Q = V - E + T$ . Debido a que estamos permitiendo hoyos en el mapa vamos a restar uno por cada hoyo. Por lo tanto  $(Q - h) = V - E + T$ .

Tenemos las siguientes ecuaciones

1.  $(Q - h) = V - E + T$ .
2.  $2E = \sum d(v)$ .
3.  $2E = \sum d(D) + E^*$ .

Sea  $n$  un número real positivo. Eliminemos  $E$  de las ecuaciones anteriores para obtener

4.  $2(n + 1)(Q - h) = 2(n + 1)V - 2(n + 1)E + 2(n + 1)T$ .
5.  $2E = \sum d(v)$ .
6.  $2nE = n \sum d(D) + nE^*$ .

Usando 5 y 6 en 4 tenemos

$$7. 2(n+1)(Q-h) = 2(n+1)V - \sum d(v) + 2(n+1)T - n \sum d(D) - nE^*.$$

Como  $V$  es el número de vértices y  $T$  es el número de regiones,

$$8. 2(n+1)(Q-h) = \sum (2(n+1) - d(v)) + n \sum \left(\frac{2(n+1)}{n} - d(D)\right) - nE^*.$$

Separando la primera suma sobre vértices interiores y frontera,

$$9. 2(n+1)(Q-h) = \sum^* (2(n+1) - d(v)) + \sum^\circ (2(n+1) - d(v)) + n \sum \left(\frac{2(n+1)}{n} - d(D)\right) - nE^*.$$

Sea  $p = 2(n+1)$  y  $q = \frac{2(n+1)}{n}$ . Entonces  $n = \frac{p}{q}$ ,  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{2}$ , y  $\frac{(p+2)}{2} = \frac{p}{q} + 2$ .

Entonces podemos reescribir 9 de la forma

$$10. p(Q-h) = \sum^* (p - d(v)) + \sum^\circ (p - d(v)) + \frac{p}{q} \sum (q - d(D)) - \frac{p}{q} E^*.$$

Esta es la fórmula (1). Ahora vamos a separar la primera sumatoria

de 10. Si sumamos  $n$  sobre los vértices frontera,  $\sum^* n = nV^* = \frac{p}{q}V^*$ .

Por lo tanto

$$11. p(Q-h) = \sum^* (n+2 - d(v)) + \sum^* n + \sum^\circ (p - d(v)) + \frac{p}{q} \sum (q - d(D)) - \frac{p}{q} E^*.$$

$$12. p(Q-h) = \sum^* \left(\frac{p}{q} + 2 - d(v)\right) + \sum^\circ (p - d(v)) + \frac{p}{q} \sum (q - d(D)) + \frac{p}{q}(V^* - E^*).$$

Y obtenemos la fórmula (2). ■

Dado un mapa  $M$ , denotaremos por  $M^*$  a el mapa dual de  $M$ .  $M^*$  tiene las siguientes propiedades.

1. Los vértices  $v^*$  de  $M^*$  están en correspondencia uno a uno con las regiones  $D$  de  $M$ . Si  $v^*$  corresponde a  $D$ , por la construcción del grafo dual  $M^*$  una arista es dibujada hacia  $v^*$  por cada arista interior de  $\delta D$ , luego tenemos que  $d(v^*) = i(D)$ .
2. Las aristas  $e^*$  de  $M^*$  están en correspondencia uno a uno con las aristas interiores  $e$  de  $M$ .

3. Las regiones  $D^*$  de  $M^*$  están en correspondencia uno a uno con los vértices interiores  $v$  de  $M$ . Si  $v$  es un vértice interior de  $M$ , hay  $d(v)$  aristas en  $v$ . Cada una de estas aristas es cortada por una arista de  $M^*$ , formando una región  $D^*$  de  $M^*$  con  $d(D^*) = d(v)$ .
4. Los vértices frontera  $v^*$  de  $M^*$  están en correspondencia uno a uno con las regiones frontera  $D$  de  $M$ .
5. Si  $M$  tiene  $h$  hoyos,  $M^*$  tiene  $h$  o menos hoyos.
6. Si  $M$  es  $(p, q)$ , entonces  $M^*$  es  $[q, p]$ .

**Lema 16** *Si  $M$  es un mapa sin vértice aislados, entonces  $V^* \leq E^*$ .*

**Corolario 2** *Sea  $M$  un mapa  $[p, q]$  simplemente conexo el cual contiene más de un vértice. Entonces*

$$\sum_M^* \left( \frac{p}{q} + 2 - d(v) \right) \geq p.$$

**Demostración.** Supóngase primero que  $M$  no consiste solamente de vértices aislados. Sea  $M_1$  el submapa obtenido de  $M$  al borrar todos los vértices aislados. Sea  $Q_1$  el número de componentes de  $M_1$ . Por Lema 16  $V_{M_1}^* \leq E_{M_1}^*$ . Como  $M$  es un  $[p, q]$  mapa y no tiene hoyos, de la fórmula (2) tenemos que  $pQ_1 \leq \sum_{M_1}^* \left( \frac{p}{q} + 2 - d(v) \right)$ , esto debido a que el primer término es el único que puede ser positivo.

Si hay  $Q_0$  vértices aislados y  $M_0$  consiste de estos vértices,  $\sum_{M_0}^* \left( \frac{p}{q} + 2 - d(v) \right) = Q_0 \left( \frac{p}{q} + 2 \right)$ . Si  $M$  consiste solamente de vértices aislados,  $Q_0 \geq 2$ . En cualquier caso  $\sum_M^* \left( \frac{p}{q} + 2 - d(v) \right) \geq p$ . ■

**Corolario 3** *Sea  $M$  un mapa  $(q, p)$  simplemente conexo el cual contiene más de una región. Entonces*

$$\sum_M^* \left( \frac{p}{q} + 2 - i(D) \right) \geq p.$$

**Demostración.** Sea  $M^*$  el mapa dual de  $M$ . Entonces  $M^*$  es un mapa  $[p, q]$  que satisface la hipótesis del Corolario 2. Si  $v^*$  es un vértice de  $M^*$  correspondiente a una región  $D$  de  $M$ , entonces  $d(v^*) = i(D)$ , luego la conclusión se sigue del Corolario 2. ■

## 2.4 Algoritmo de Dehn y Lema de Greendlinger.

**Lema 17** *Sea  $M$  un mapa  $(q, p)$  simplemente conexo, donde  $(q, p)$  es  $(3, 6)$ ,  $(4, 4)$  o  $(6, 3)$ . Supongamos que si  $D$  es una región de  $M$  tal que  $\delta D$  no contiene una arista en  $\delta M$ , entonces  $d(D) \geq p$ . Por lo tanto la frontera de cualquier región de  $M$  es un camino cerrado simple.*

**Demostración.** Sea  $D$  una región de  $M$  y supóngase que hay un lazo  $\eta$  en  $\delta D$  tal que  $\eta$  no es todo  $\delta D$ . Entonces  $\eta$  y todos los elementos de  $M$  interiores a  $\eta$  forman un submapa  $K$  de  $M$  el cual es simplemente conexo. De todos los lazos posibles  $\eta$ , tomemos uno en el cual  $K$  tenga un número mínimo de regiones. Debido a la elección de  $\eta$ , existe a lo más un vértice, digamos  $v_0$ , contenido en  $\eta \cap \delta M$ .

Con la excepción de  $v_0$ , todos los vértices de  $K$  son vértices interiores de  $M$  y por lo tanto tienen grado al menos  $q$ . Como  $\eta$  no contiene ninguna arista frontera de  $M$ , ninguna región de  $K$  puede contener aristas frontera de  $M$ , por lo que todas las regiones de  $K$  tienen grado al menos  $p$ . Por lo tanto  $K$  es un mapa  $[q, p]$ . Si  $K$  tiene solamente un vértice, entonces  $K$  debe consistir de una o más regiones acotadas por lazos en  $v_0$ , contradiciendo la hipótesis de que  $M$  es un mapa  $(q, p)$ . Por lo tanto podemos asumir que  $K$  tiene más de un vértice.

Por Corolario 2,

$$\sum_K^* \left( \frac{q}{p} + 2 - d(v) \right) \geq q.$$

Pero como solo  $v_0$  puede hacer una contribución positiva a la suma,

$$\sum_M^* \left( \frac{q}{p} + 2 - d(v) \right) < \frac{q}{p} + 2 < q,$$

lo cual es una contradicción. ■

**Definición 12** *Sea  $M$  un mapa. Un disco extremo de  $M$  es un submapa  $K$  el cual es topológicamente un disco y además  $K$  tiene un ciclo frontera  $e_1, \dots, e_n$  tal que las aristas  $e_1, \dots, e_n$  aparecen en ese mismo orden en el ciclo frontera de  $M$ .*

**Lema 18** *Sea  $M$  un mapa conexo y simplemente conexo sin vértices de grado 1. Si la frontera de  $M$  no es un camino cerrado simple, entonces  $M$  tiene al menos dos discos extremos.*

**Demostración.** Vamos a proceder por inducción sobre el número de regiones  $m$  de  $M$ . Si  $m = 1$  entonces el ciclo frontera de  $M$  es un camino cerrado simple. Supongamos que  $m > 1$  y sea  $\delta = e_1 \cdots e_n$  un ciclo frontera de  $M$ . Sea  $\alpha = e_{i_1} \cdots e_{i_k}$  el subcamino cerrado más pequeño de  $\delta$ . Como  $M$  no contiene ningún vértice de grado 1,  $\alpha$  no tiene aristas consecutivas de la forma  $e, e^{-1}$ . Entonces  $\alpha$  es un camino cerrado simple el cual encierra un disco extremo de  $M$ .

Sea  $J'$  el submapa de  $M$  el cual esta acotado por  $\delta - \alpha$ . Como  $J'$  puede tener vértices de grado 1, los eliminamos uno a uno junto con sus aristas incidentes. Este proceso nos genera un submapa  $J$  de  $M$  al cual podemos aplicar la hipótesis de inducción. Si  $\delta J$  es un camino cerrado simple,  $J$  es un disco extremo de  $M$ . Si  $\delta J$  no es un camino cerrado simple, entonces  $J$  contiene al menos dos discos extremos, y al menos uno de ellos es un disco extremo de  $M$ . ■

**Definición 13** Sea  $D$  una región de un mapa  $M$ . Diremos que  $\delta D \cap \delta M$  es una parte consecutiva de  $M$  si  $\delta D \cap \delta M$  es la unión de una secuencia  $e_1, \dots, e_n$  de aristas cerradas, y las aristas  $e_1, \dots, e_n$  aparecen consecutivamente en el ciclo frontera de  $D$  y en algún ciclo frontera de  $M$ .

Si  $M$  es un mapa, usaremos la notación  $\sum_M^{\times} (\frac{p}{q} + 2 - i(D))$  para denotar la sumatoria solo sobre las regiones frontera  $D$  de  $M$  tales que  $\delta D \cap \delta M$  es una parte consecutiva de  $\delta M$ . Si  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{2}$ , entonces  $\frac{p}{q} + 2 = \frac{p}{2} + 1$ .

**Teorema 4** Sea  $M$  un  $(q, p)$  mapa conexo y simplemente conexo. Suponga que  $M$  no contiene vértices de grado 1 y que  $M$  tiene más de una región. Supóngase también que si  $D$  es una región de  $M$ ,  $d(D) \geq p$  a menos que  $\delta D \cap \delta M$  contenga una arista. Entonces

$$\sum_M^{\times} (\frac{p}{q} + 2 - i(D)) \geq p.$$

**Demostración.** Primero demostraremos el Teorema para los mapas  $M$  tal que  $\delta M$  es un camino cerrado simple. La demostración es por inducción sobre el número  $m$  de regiones de  $M$ .

Supóngase que  $m = 2$ . La única posibilidad es que  $M$  conste de dos regiones,

$D_1$  y  $D_2$  las cuales solo tienen un vértice en común. Como  $i(D_j) = 1$ ,  $j = 1, 2$ , el Teorema se cumple.

Ahora supongamos que el Teorema es cierto para todos los mapas que satisfacen la hipótesis y que tienen  $t$  regiones,  $2 \leq t$ . Como las únicas regiones de  $M$  con  $d(D) < p$  son las regiones  $D$  tal que  $\delta D \cap \delta M$  contiene una arista, estas regiones son las únicas que pueden hacer contribuciones positivas a la

suma  $\sum_M^{\times} (\frac{p}{q} + 2 - i(D))$ . Por el Corolario 3 tenemos que

$$\sum_M^* (\frac{p}{2} + 1 - i(D)) \geq p.$$

Entonces, si todas las regiones  $D$  de  $M$  tales que  $\delta D \cap \delta M$  contiene al menos una arista y estas aristas aparecen como partes consecutivas de  $\delta M$ , entonces

$$p \leq \sum_M^* (\frac{p}{2} + 1 - i(D)) = \sum_M^{\times} (\frac{p}{2} + 1 - i(D))$$

con lo cual hemos terminado.

Ahora, supóngase que  $M$  contiene una región  $E$  tal que  $\delta E \cap \delta M$  contiene una arista, pero  $\delta E \cap \delta M$  no es una parte consecutiva de  $M$ . Entonces  $M - \bar{E}$  tiene al menos dos componentes, digamos  $C_1$  y  $C_2$ , cada una de las cuales contiene una región. Sean  $M_1 = C_1 \cup \bar{E}$  y  $M_2 = C_2 \cup \bar{E}$ .

Si  $D$  es una región de  $M_j$ ,  $j = 1, 2$ , entonces  $\delta D \cap \delta M_j = \delta D \cap \delta M$  a menos que  $D = E$ . La única región común entre  $M_1$  y  $M_2$  es  $E$ , y  $i(E)$  es al menos 1 en  $M_1$  y  $M_2$ .

Aplicando la hipótesis de inducción a  $M_1$  y  $M_2$  tenemos

$$\sum_{M_1}^{\times} (\frac{p}{2} + 1 - i(D)) + \sum_{M_2}^{\times} (\frac{p}{2} + 1 - i(D)) \geq 2p,$$

en el peor caso  $E$  aparecería en ambas sumas con el valor de  $i(E) = 1$ . Entonces

$$\sum_{M_1}^{\times} (\frac{p}{2} + 1 - i(D)) + \sum_{M_2}^{\times} (\frac{p}{2} + 1 - i(D)) \geq p$$

con  $D \neq E$  en ambas sumatorias. Esto concluye la demostración en el caso de que  $\delta M$  es un camino cerrado simple.

Si la frontera de  $M$  no es un camino cerrado simple, entonces, por Lema 18,  $M$  tiene al menos dos discos extremos, digamos  $K_1$  y  $K_2$ . Si  $K_i$  consiste de una sola región  $D_0$  entonces  $\delta D_0 \cap \delta M$  es una parte consecutiva de  $\delta M$  y  $\sum_{M_2}^\times (\frac{p}{2} + 1 - i(D)) = \frac{p}{2} + 1$ . Si  $K_i$  contiene más de una región entonces  $\sum_{K_i}^\times (\frac{p}{2} + 1 - i(D)) \geq p$  por la primera parte de la demostración. Como un disco extremo esta conectado a  $M$  por solo un vértice, debemos tener a lo más una región en  $K_i$  tal que  $\delta E \cap \delta K_i$  es una parte consecutiva de  $\delta K_i$ , pero  $\delta E \cap \delta M$  no es una parte consecutiva de  $\delta M$ . Poniendo juntas las contribuciones de  $K_1$  y  $K_2$  tenemos  $\sum_M^\times (\frac{p}{q} + 2 - i(D)) \geq p$ . ■

**Definición 14** Una palabra  $s$  es llamada  $j$ -residuo si algún  $r \in R$  tiene la forma  $r \equiv sb_1 \cdots b_j$  donde  $b_1, \dots, b_j$  son piezas.

**Teorema 5** Sea  $F$  un grupo libre. Sea  $R$  un subconjunto simetrizado de  $F$  con  $N$  la cerradura normal de  $R$ . Supongamos que  $R$  satisface la hipótesis  $C(p)$  y  $T(q)$  donde  $(q, p)$  es uno de los pares  $(6, 3)$ ,  $(4, 4)$  o  $(3, 6)$ .

Si  $w \in N$ ,  $w \neq 1$ , entonces para algún conjugado cíclicamente reducido  $w^*$  de  $w$ ,  $w^* \in R$  o es de la forma  $w^* \equiv u_1 s_1 \cdots u_n s_n$  donde cada  $s_k$  es un  $i(s_k)$ -residuo. El número  $n$  de  $s_k$  y los número  $i(s_k)$  satisfacen la relación

$$\sum_{k=1}^n (\frac{p}{q} + 2 - i(s_k)) \geq p.$$

En particular, si  $R$  satisface

1.  $C'(\lambda)$  para  $\lambda \leq \frac{1}{6}$ , o
2.  $C'(\lambda)$  y  $T(4)$  para  $\lambda \leq \frac{1}{4}$ ,

Entonces todo elemento no trivial  $w \in N$  contiene una subpalabra  $s$  de algún  $r \in R$  con

1.  $|s| > (1 - 3\lambda) |r| > \frac{1}{2} |r|$  o
2.  $|s| > (1 - 2\lambda) |r| > \frac{1}{2} |r|$ .

**Demostración.** Sea  $w$  un elemento no trivial de  $N$  con  $w'$  un elemento cíclicamente reducido conjugado de  $w$ . Sea  $M$  el diagrama de una secuencia  $R$ -minimal de  $w'$ . Si  $M$  consiste solo de una sola región, entonces  $w' \in R$  o

$M$  satisface la hipótesis del Teorema 4.

Si  $M$  tiene más de una región, sea  $D$  una región de  $M$  tal que  $\sigma = \delta D \cap \delta M$  es una parte consecutiva de  $\delta M$ . Supóngase que  $\sigma$  comienza en el vértice  $v_1$  y termina en el vértice  $v_2$ . Como  $\delta D$  es un camino cerrado simple, por Lema 17 existe un ciclo frontera  $\sigma\tau$  de  $D$ . Sea  $s = l(\sigma)$  y  $t = l(\tau)$ . Ahora  $st \in R$  ya que es la etiqueta de  $D$ . Por lo tanto  $s$  es una subpalabra de un elemento de  $R$ .

Si  $\alpha$  es cualquier ciclo frontera de  $M$ , entonces  $l(\alpha)$  es cíclicamente reducido conjugado  $w^*$  de  $w'$ . Supóngase que  $\alpha$  comienza en un vértice  $v_0$  el cual no es interior en el camino  $\sigma$ . Como  $\sigma$  es una parte consecutiva de  $\delta M$  podemos escribir  $\alpha = \alpha_1\sigma\alpha_2$ . Entonces  $s$  es también una subpalabra de  $w^*$ .

Sabemos que la etiqueta de una arista interior es una pieza. Si  $i(D) = j$ , entonces  $t$  es el producto de  $j$  piezas y  $s$  es un  $j$ -residuo.

Tomemos un ciclo frontera  $\alpha$  el cual no comience en un vértice interior de algún camino de la forma  $\delta D \cap \delta M$ . Entonces para todo  $D$  tal que  $\delta D \cap \delta M$  es una parte consecutiva de  $M$ ,  $l(\delta D \cap \delta M)$  es una subpalabra de  $w^* = l(\alpha)$  y es un  $j$ -residuo donde  $j = i(D)$ . La fórmula  $\sum_M (\frac{p}{q} + 2 - i(s_k)) \geq p$  nos da la primera parte del Teorema.

En  $C'(\lambda)$ , con  $\lambda \leq \frac{1}{6}$  tenemos  $(q, p) = (6, 3)$  y la fórmula es

$$\sum_M^{\times} (4 - i(D)) \geq 6.$$

Para que la desigualdad se mantenga deben existir al menos dos regiones  $D_k$  con  $i(D_k) \leq 3$ , con lo cual las correspondientes subpalabras  $s_k$  tienen longitud mayor que  $(1 - 3\lambda)|r_k|$ . En el caso  $C'(4)$ ,  $\lambda \leq \frac{1}{4}$  y  $T(4)$  tenemos  $\sum_M^{\times} (3 - i(D)) \geq 4$ . Esto nos da al menos dos regiones con  $i(D) \leq 2$ . ■

Si  $s$  es una palabra de  $F$ , vamos a usar la notación  $s > cR$ , con  $c$  un número racional, para referirnos a que existe  $r \in R$  con  $r \equiv st$  en su forma reducida y  $|s| > c|r|$ .

**Teorema 6** *Sea  $R$  el cual satisface  $C'(\frac{1}{6})$ . Sea  $w \in N$  un elemento no trivial, cíclicamente reducido, entonces*

1.  $w \in R$

*o algún conjugado  $w^*$  de  $w$  cíclicamente reducido contiene una de las siguientes subpalabras:*

2. *Dos subpalabras disjuntas, cada una  $> \frac{5}{6}R$ .*
3. *Tres subpalabras disjuntas, cada una  $> \frac{4}{6}R$ .*
4. *Cuatro subpalabras disjuntas, dos  $> \frac{4}{6}R$  y dos  $> \frac{3}{6}R$ .*
5. *Cinco palabras disjuntas, cuatro mayores que  $\frac{3}{6}R$  y una  $> \frac{4}{6}R$*
6. *Seis palabras disjuntas, cada una  $> \frac{3}{6}R$ .*

**Demostración.** Vamos a esquematizar la demostración. Sea  $w'$  un conju-  
gado cíclicamente reducido de  $w$  y sea  $M$  el diagrama de una  $R$ -secuencia  
minimal de  $w'$ . Ahora, una subpalabra  $s$  de  $w'$  con  $s > \frac{1}{6}R$  proviene de una  
región  $D$  con  $i(D) = 6 - j$ . El punto crucial es que si  $M$  no contiene ninguna  
región de grado interior 0 o 1, el resultado se sigue del Teorema 5 mediante  
conteo. Por ejemplo, si todas las regiones  $D$  las cuales hacen contribuciones  
positivas a la suma  $\sum_M^\times (4 - i(D))$  tienen grado interior 3, se deben tener al  
menos seis de esas regiones.

Por lo tanto la conclusión de este Teorema radica en pensar en cada una de  
las posibilidades con las cuales las regiones hacen contribuciones positivas a  
la suma  $\sum_M^\times (4 - i(D))$ .

Con esto entendido, vamos a demostrar por inducción sobre el número de  
regiones  $m$  de  $M$ . Si  $m = 1$  entonces  $w' \in R$ . Si  $m = 2$  entonces  $M$  tiene dos  
regiones, ambas de grado interior 0 o 1, con lo cual se cumple la condición  
2. Ahora suponga que  $m \geq 3$ , como vimos anteriormente, si  $M$  no contiene  
ninguna región con grado interior 0 o 1, la conclusión se sigue del Teorema  
5. Supongamos que  $M$  contiene una región  $D_1$  con  $i(D_1) = 1$ . Obtenemos el  
mapa  $M'$  removiendo  $D_1$  y  $\delta D_1 \cap \delta M$  de  $M$ . Por la hipótesis de inducción  
el Teorema se cumple para  $M'$ . Luego es fácil ver que el mapa obtenido  
agregando una región con la cual se tenga en común una arista, cumple las  
condiciones 1-6.

Finalmente, suponga que  $M$  contiene una región de grado interior 0. En-  
tonces  $\delta M$  no es un camino cerrado simple, entonces  $M$  tiene al menos dos  
discos extremos. Por la hipótesis de inducción, cada uno de estos discos sat-  
isface una de las conclusiones 1-6. Como un disco extremo esta unido al resto  
de  $M$  mediante un vértice, es fácil ver que  $M$  satisface las condiciones 1-6.

■

# Capítulo 3

## ACEP en Grupos Libres.

### 3.1 Introducción.

**Definición 15** Sea  $F$  un grupo, un subgrupo  $H$  de  $F$  tiene la Propiedad de Extensión Congruente (CEP por sus siglas en inglés) si para todo subgrupo normal  $N$  de  $H$ ,  $N \triangleleft H$ , tenemos que  $H \cap \langle\langle N \rangle\rangle_F = N$ , donde  $\langle\langle N \rangle\rangle_F$  es la cerradura normal de  $N$  en  $F$ .

La CEP se conoce también con otros nombres, Ol'shanskii [1] la llamo propiedad  $F(n)$ , B. H. Neumann [2] utilizó el nombre E-subgrupo, Stallings [3] los llamo subgrupos normalmente convexos y finalmente Osin [4] uso el nombre CEP. Vale la pena mencionar que el termino CEP fue utilizado antes para álgebras y semigrupos. Una pregunta natural es, ¿Cuándo un subgrupo  $H$  de un grupo  $F$  tiene CEP? La pregunta resulta ser difícil aun en el caso de ser  $H$  un subgrupo finitamente generado de un grupo libre  $F$ . Particularmente, el algoritmo para decidirlo es, hasta donde sabemos, una pregunta abierta. Un ejemplo obvio de un subgrupo con CEP es cualquier factor libre de  $F$ , mientras que un ejemplo no trivial puede ser encontrado en [5]. En [4] Osin introduce la siguiente definición

**Definición 16** Sea  $F$  un grupo, decimos que un subgrupo  $H$  de  $F$  casi tiene CEP (ACEP) si existe un conjunto finito de elementos no triviales  $F \subset H$ ,  $1 \notin F$ , tal que para cualquier  $N \triangleleft H$  tenemos que  $H \cap \langle\langle N \rangle\rangle_F = N$  siempre que  $N \cap F = \emptyset$ .

Una definición equivalente de ACEP es:

**Definición 17** *Un subgrupo  $H$  de un grupo  $F$  tiene ACEP si existe un conjunto finito de elementos no triviales  $F \in H$ ,  $1 \notin F$ , tal que para todo epimorfismo  $\theta$  que va de  $H$  a cualquier grupo  $G$  puede ser extendido a un epimorfismo  $\theta^* : F \longrightarrow G^*$ , siempre que  $\theta(\alpha) \neq 1$ ,  $\forall \alpha \in F$ , donde  $G^*$  es un grupo que contiene a  $G$ .*

La ACEP es una propiedad natural e interesante, mas aun, es mas fácil de trabajar al momento de intentar encontrar algun criterio para determinar cuándo un subgrupo tiene ACEP. Nuestro punto de inicio es la siguiente condición dada por D. Osin en [4].

**Definición 18** *Sea  $H$  un subgrupo de un grupo  $F$ ,  $H^a = \{aha^{-1} \mid h \in H\}$  con  $a \in F$ . Decimos que  $H$  es un subgrupo malnormal de  $F$  si  $\forall a \in F \setminus H$*

$$H \cap H^a = \{1\}.$$

*Decimos que  $H$  es ciclonormal si  $\forall a \in F \setminus H$*

$$H \cap H^a$$

*es un subgrupo cíclico.*

**Teorema 7** *Cualquier subgrupo malnormal  $H$  finitamente generado de un grupo libre  $F$  tiene ACEP.*

Este Teorema aparece como Corolario 1.5 en [4] y es, de hecho, un corolario del resultado principal en [4]. Los principales resultados de este trabajo son:

- Proporcionar condiciones para determinar cuando un subgrupo de un grupo libre no tiene ACEP. Esta condición junto con el Teorema anterior nos permite "casi decidir" cuando un subgrupo finitamente generado (s.f.g.) de un grupo libre tiene ACEP. Aunque, no podemos proporcionar un algoritmo para determinar cuando un s.f.g. de un grupo libre tiene ACEP.
- Proporcionar otra demostración de el Teorema 7, distinta a la dada en [4]. Nuestra demostración utiliza la teoría de la cancelación pequeña, la cual nos permite dar un resultado mas general, el Teorema 9. El

Teorema 9 no es una consecuencia directa de los resultados mostrados en [4] pero puede ser considerado como un caso particular del Teorema 7.15 en [6]. Aun así presentamos una demostración del Teorema 7 así como una estimación de  $\gamma_H(N)$  (Esta estimación no se deduce del Teorema 7.15 en [6]). También mostramos como el Teorema 7 se obtiene de los resultados obtenidos en [6].

### 3.1.1 Subgrupos con y sin ACEP.

$H$  pertenece a unas de las siguientes categorías:

1.  $H$  es malnormal.
2.  $H$  no es ciclonormal, es decir,  $\exists a \in F \setminus H$  tal que el rango de  $H \cap H^a$  es mayor o igual a 2.
3.  $H$  es ciclonormal y  $\exists a \in F \setminus H$  tal que  $H \cap H^a$  es generado por  $u$ , donde  $u$  no es una potencia propia en  $F$ .
4.  $H$  es ciclonormal, no es malnormal y  $\forall a \in F \setminus H$ ,  $H \cap H^a$  es trivial o generado por una potencia propia.

**Teorema 8** *En el primer caso,  $H$  tiene ACEP, en el segundo y tercer caso  $H$  no tiene ACEP, en el cuarto caso existen subgrupos con ACEP y sin ACEP.*

Nuestra demotración no es difícil y utiliza el hecho de que en el segundo y tercer caso  $H$  satisface la propiedad

**(S)** Existe  $w \in H$  tal que  $w^H \neq w^F \cap H$ . (Donde  $w^X$  denota la clase de conjugación de  $w$  en  $X$ )

En secciones posteriores veremos que los subgrupos con la propiedad **S** no tiene ACEP. En el cuarto caso  $H$  puede o no tener la propiedad **S**. Finalmente daremos un algoritmo para decidir si un subgrupo tiene o no la propiedad **S**.

### 3.1.2 Teorema 7 y su generalización.

Para  $N \triangleleft H$  sea  $\gamma(N) = \min\{|w| \mid w \in N \setminus \{1\}\}$ . Donde  $|w|$  denota la longitud de la palabra reducida que representa  $w \in F$ . Es claro que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- $H$  tiene ACEP.
- Existe  $C_H > 0$  tal que  $N = \langle\langle N \rangle\rangle_F \cap H$  siempre que  $\gamma(N) > C_H$ .

Ahora, vamos a definir otra función de longitud  $|\cdot|_H$  en un grupo libre  $F$ . Definiremos  $\gamma_H(N)$  y formularemos una generalización del Teorema 7.

**Definición 19** Sea  $F(X)$  un grupo libre sobre un conjunto  $X$  y  $\Omega = \{H_i \mid H_i < F, i = 1, \dots, n\}$ . Sea  $w \in F$ , definimos  $|w|_\Omega = \min\{k \mid w = w_1 w_2 \cdots w_k, w_i \in H_j \text{ o } w_i \in X \cup X^{-1}\}$ , es decir,  $|w|_\Omega$  es la métrica de palabras con respecto a el conjunto generador  $\Omega \cup X \cup X^{-1}$ .

Vamos a asociar una función de longitud especial a un grupo finitamente generado  $H < F$ . Definimos  $\Omega(H) \subseteq \{H^a \cap H^b \mid Ha \neq Hb\}$ , sea  $|w|_H = |w|_{\Omega(H)}$  y  $\gamma_H(N) = \min\{|w|_H \mid w \in N \setminus \{1\}\}$ . Por ahora pospondremos la definición exacta de  $\Omega(H)$  pero mencionaremos dos importantes propiedades:

1.  $\Omega(H)$  es finito.
2. Para cada conjunto no trivial  $X \in \{H^a \cap H^b \mid Ha \neq Hb\}$  existe  $Y \in \Omega(H)$  el cual es conjugado con  $X$  en  $F$ .

**Teorema 9** Sea  $H$  un s.f.g de  $F$ . Entonces existe  $C_H$  tal que  $N = \langle\langle N \rangle\rangle_F \cap H$  siempre que  $N \triangleleft H$  y  $\gamma_H(N) > C_H$ .

**Observación.** Diremos que las funciones de longitud  $|\cdot|_1$  y  $|\cdot|_2$  son Lipschitz equivalentes ( $|\cdot|_1 \sim |\cdot|_2$ ) si existen  $\alpha$  y  $\beta > 0$  tales que  $\alpha |w|_1 \leq |w|_2 \leq \beta |w|_1$  para cualquier  $w \in F$ . Sean  $\Omega_1$  y  $\Omega_2$  conjuntos finitos de subgrupos, los cuales contienen los mismos grupos salvo conjugación. Es fácil verificar que  $|\cdot|_{\Omega_1} \sim |\cdot|_{\Omega_2}$  y que el Teorema 9 se cumple para cualquier función de longitud equivalente a  $|\cdot|_H$ . Entonces para nuestro Teorema lo único que importa son las propiedades 1) y 2), por lo cual no es necesaria la definición exacta de  $\Omega(H)$ . Aun así,  $\Omega(H)$  es importante si queremos encontrar  $C_H$ . Claramente,  $\Omega(H) = \{1\}$  cuando  $H$  es malnormal. Por lo tanto el Teorema 7 es un corolario del Teorema 9. Nótese que la condición " $N = \langle\langle N \rangle\rangle_F \cap H$  cuando  $N \triangleleft H$  y  $\gamma_H(N) > C_H$ " puede ser considerada como una generalización de ACEP. Vale la pena mencionar que si el normalizador de  $H$  no es trivial (es decir  $Norm(H) \neq H$ ) entonces  $H \in \Omega(H)$ . Por lo tanto el Teorema 9 es inútil en este caso. Pero esta no es una debilidad del Teorema. Ya que si  $N = \langle\langle N \rangle\rangle_F \cap H$  entonces  $N \triangleleft Norm(H)$ .

## 3.2 Grupos sin ACEP.

**Lema 19** Sea  $F$  un grupo libre y  $u \in F$ ,  $u \neq 1$ . Entonces  $\gamma(\langle\langle u^n \rangle\rangle_F) \geq (n-1)$ .

**Demostración.** Por Teorema 3 de [7] si  $w \in \langle\langle u^n \rangle\rangle_F$  entonces  $w$  contiene una subpalabra la cual es idéntica a una subpalabra de  $u^n$  de longitud mayor que  $\frac{(n-1)}{n}$  veces la longitud de  $u^n$ . Entonces,  $\gamma(\langle\langle u^n \rangle\rangle_F) \geq (n-1)|u^*|$  donde  $u^*$  es la reducción cíclica de  $u$ . ■

Usaremos los siguientes resultados.

### Teorema 10

1. Dos elementos  $u_1$  y  $u_2$  de un grupo libre  $F$  tienen la misma cerradura normal en  $F$  si y solo si  $u_1$  es conjugado a  $u_2$  o a  $u_2^{-1}$ . (Magnus [8]).
2. En un grupo libre  $F$ , un conmutador no trivial no puede ser una potencia propia. (Schutzenberge [9]).
3. Las soluciones de la ecuación  $x^n x^m = z^p$ ,  $n, m, p > 1$  en  $F$  son potencias del mismo elemento. ((Lyndon and Schutzenberger [10]).

Sea  $H$  un grupo,  $w, a \in H$ . Usaremos la notación  $w^H = \{hwh^{-1} \mid h \in H\}$  en otras palabras,  $w^H$  es la clase de conjugación de  $w$  en  $H$ .

**Definición 20** Sea  $H < F$ . Diremos que  $H$  es un  $S$ -subgrupo de  $F$  ( $H <_S F$ ) si  $\exists w \in H$  tal que  $w^H \neq w^F \cap H$ .

**Proposición 12** Sea  $F$  un grupo libre. Si  $H <_S F$  entonces  $H$  no tiene ACEP en  $F$ .

**Observación.** Como veremos en una sección posterior el recíproco de la proposición anterior es falso.

**Demostración.** Sea  $w \in H$  tal que  $w^H \neq w^F \cap H$ . Esto implica que  $\exists a \in F \setminus H$  con  $u = awa^{-1} \in H$  tal que  $\forall b \in H$   $u \neq bwb^{-1}$ . Veamos que  $w$  no puede ser conjugado de  $w^{-1}$  en  $H$ . Supongamos que  $\exists b \in H$  tal que  $u = bw^{-1}b^{-1}$ , entonces tenemos

$$\begin{aligned} awa^{-1} &= u = bw^{-1}b^{-1} \\ (a^{-1}b)w^{-1}(a^{-1}b)^{-1} &= w \\ w(a^{-1}b)w^{-1}(a^{-1}b)^{-1} &= w^2 \\ [w, a^{-1}b] &= w^2 \end{aligned}$$

lo cual no es posible por el Teorema 10 (2).

Por Lema 19  $\gamma(\langle\langle u^n \rangle\rangle_H), \gamma(\langle\langle w^n \rangle\rangle_F) \geq n - 1$ . Ahora, como  $u = awa^{-1}$ , por el Teorema 10 (1) tenemos

$$\langle\langle u^n \rangle\rangle_F = \langle\langle w^n \rangle\rangle_F.$$

Además  $u \neq bwb^{-1}$  y  $u \neq bw^{-1}b$  para cualquier  $b \in H$ , entonces por ser  $F$  libre tenemos

$$u^n \neq bw^n b^{-1}, \quad u^n \neq bw^{-n}b.$$

Usando de nuevo el Teorema 10 (1) tenemos

$$\langle\langle u^n \rangle\rangle_H \neq \langle\langle w^n \rangle\rangle_H.$$

Por lo tanto, fácilmente podemos deducir que  $H$  no tiene ACEP. ■

**Lema 20** *Sea  $a \in F \setminus H$ . Si  $\exists u = awa^{-1} \in H \cap H^a$  tal que  $w$  no es una potencia propia en  $F$ , entonces  $H <_S F$ .*

**Demostración.** Supongamos que  $\exists b \in H$  tal que  $u = bwb^{-1}$ , entonces

$$\begin{aligned} bwb^{-1} &= u = awa^{-1} \\ w &= (b^{-1}a)w(b^{-1}a)^{-1} \end{aligned}$$

por lo tanto  $w$  conmuta con  $b^{-1}a$ , pero como  $F$  es libre esto solo puede ocurrir si  $w$  y  $b^{-1}a$  son potencias propias de el mismo elemento; por hipótesis  $w$  no es una potencia propia, entonces

$$\begin{aligned} b^{-1}a &= w^n \\ a &= bw^n \in H, \end{aligned}$$

pero  $a \notin H$ , lo cual es una contradicción.

De lo anterior tenemos que no existe  $b \in H$  tal que  $w = bwb^{-1}$ . Por lo tanto  $w^H \neq w^F \cap H$ , usando la Proposición 12 concluimos que  $H$  no tiene ACEP en  $F$ . ■

**Corolario 4** *Si  $\text{rank}(H \cap H^a) \geq 2$  para algún  $a \in F \setminus H$  entonces  $H <_S F$ .*

**Demostración.** Sean  $u, v$  elementos del conjunto de generadores libres de  $H \cap H^a$ . En el conjunto  $\{u, v, uv\}$  al menos algún elemento no debe ser una potencia propia en  $F$  luego la conclusión se sigue del Lema 20. En efecto si tomamos  $x^m = u, y^m = v, z^p = uv$  implica que  $\langle u, v \rangle$  es cíclico por Teorema 10 (3). ■

**Corolario 5** Sea  $H$  un subgrupo de  $F$  tal que  $H$  contiene un subgrupo normal de  $F$ , es decir,  $\exists N < H$  tal que  $N \triangleleft F$ , entonces  $H <_S F$ .

**Demostración.** Se sigue inmediatamente del corolario anterior. ■

*Demostración del Teorema 8.* El primer caso se sigue de el Teorema 7. El segundo y tercer caso se sigue del Lema 20, Corolario 4 y Proposición 12. El cuarto caso será estudiado en la siguiente sección.

### 3.3 El caso 4.

En esta sección daremos ejemplos de subgrupos ciclonormales  $H_{1,2}$  donde  $H_{1,2} \cap H_{1,2}^a$ ,  $a \notin H$ , es trivial o generado por una potencia propia tales que  $H_1$  no tiene ACEP y  $H_2$  tiene ACEP. Después investigaremos los  $S$ -subgrupos con mas detalle y daremos un ejemplo para demostrar que el reciproco de la Proposición 12 es falso.

#### 3.3.1 Ejemplos.

Usando la Proposición 11 podemos ver que los subgrupos  $H_1 = \langle x^n, yx^ny^{-1} \rangle$ ,  $H_2 = \langle x^n, y^n \rangle$  son ciclonormales y  $\forall a \in F \setminus H$ ,  $i = 1, 2$ ,  $H_i \cap H_i^a$  es generado por potencias propias. Mostraremos que  $H_1$  no tiene ACEP y  $H_2$  tiene ACEP.

Para demostrar que  $H_2 = \langle x^n, y^n \rangle$  tiene ACEP, tomemos cualquier grupo  $G$  y definimos un epimorfismo  $\theta : H_2 \longrightarrow G$  tal que  $\theta(x^n) = c$  y  $\theta(y^n) = d$ , con  $c, d \in G$ . Determinar si  $\theta$  se puede extender o no a un epimorfismo  $\theta^* : F \longrightarrow G^*$  se reduce a determinar si el sistema de ecuaciones  $x^n = c$ ,  $y^n = d$  tiene o no solución sobre  $G$ . Por un resultado de F. Levin [11] el sistema de ecuaciones tiene solución. Por lo tanto podemos concluir que  $H_2$  tiene CEP (y en consecuencia tiene ACEP). Por otro lado es facil ver que  $H_1$  es un  $S$ -subgrupo, luego por la Proposición 12  $H_1$  no tiene ACEP.

#### 3.3.2 S-Subgrupos.

**Definición 21** Sea  $H <_S F$ . Llamaremos al par  $(w, a)$   $S$ -testigo para  $H$  si  $w, w^a \in H$  y  $\forall b \in H$   $w^a \neq w^b$ .

En esta subsección veremos que:

- Para cualquier  $H < F$  finitamente generado podemos determinar si  $H$  es o no es un  $S$ -subgrupo.

- Daremos un ejemplo de un subgrupo finitamente generado  $H$  tal que no es un  $S$ -subgrupo y no tiene ACEP.

**Proposición 13** *Sea  $H < F$  y  $b \in F$ . Entonces*

- $H$  tiene ACEP si y solo si  $H^b$  tiene ACEP.
- Si  $H <_S F$  con  $(w, a)$  un  $S$ -testigo entonces  $H^b <_S F$  con  $(w^b, a^b)$  un  $S$ -testigo.

En la siguiente proposición utilizaremos los grafos empalmados de Stallings. Si  $\Gamma$  es un  $X$ -digrafo, denotaremos por  $P(v_1, v_2, w)$  a el camino que va del vértice  $v_1$  a  $v_2$  con etiqueta  $w$ . Recordemos algunas propiedades importantes del grafo empalmado de Stallings.

1.  $H$  coincide con las etiquetas de los caminos reducidos que van de  $1_H$  a  $1_H$ . Si  $\tilde{P}$  es una reducción de  $P$  entonces  $l(\tilde{P})$  es una reducción de  $l(P)$ .
2. Para cualquier vértice  $v$  y cualquier palabra  $w \in (X \cup X^{-1})^*$  puede existir un único camino  $P(v, \cdot, w)$ . Si  $w$  es reducido, entonces  $P(v, \cdot, w)$  es reducido.
3. Sea  $\tilde{w}$  la reducción de una palabra  $w$ . Si existe un camino  $P(u, v, w)$  entonces existe un camino  $P(u, v, \tilde{w})$ .

**Proposición 14** *Sea  $\Gamma(H)$  el grafo empalmado de Stallings correspondiente a  $H$ . Entonces  $H <_S F$  si y solo si existen caminos cíclicamente reducidos  $P(v, v, w)$ ,  $P(v'v', w)$  en  $\Gamma(H)$  tal que  $P(v, v, w)$  no es una permutación cíclica de  $P(v'v', w)$ .*

**Demostración.** Por la Proposición 13 podemos suponer que  $v' = 1_H$ . Supondremos que todas las palabras utilizadas en la demostración son reducidas, por lo tanto  $w_1w_2$  denotara el producto en el grupo libre, o, mas precisamente, la correspondiente palabra reducida.

$\Leftarrow$  Supongamos que existen caminos  $P_2 = (v, v, w)$ ,  $P_1 = (1_H, 1_H, w)$  en  $\Gamma(H)$  tal que  $P_2$  no es una permutación cíclica de  $P_1$ . Sea  $Q$  el camino reducido en  $\Gamma(H)$  que va de  $1_H$  a  $v$ . Sea  $a = l(Q)$ . Veamos que  $(w, a)$  es un  $S$ -testigo para  $H$ . Antes que nada,  $a \notin H$  y la reducción de  $QP_2Q^{-1}$  es

$P(1_H, 1_H, awa^{-1})$ . Por lo tanto  $w, awa^{-1} \in H$ . Procederemos por contradicción, supongamos que  $(w, a)$  no es un  $S$ -testigo. Entonces existe  $b \in H$  tal que  $awa^{-1} = bwb^{-1}$ . Por lo tanto existe un camino  $P(1_H, v, u)$  con  $u = b^{-1}a$ . Como  $[u, w] = 1$  tenemos que  $w = y^n$  y  $u = y^m$ . Debido a que  $w$  es cíclicamente reducido,  $y$  es cíclicamente reducido también. Por lo tanto, el producto  $yy$  es solo una concatenación (sin cancelación). Por la propiedad 2 del grafo de Stallings el camino  $P(1_H, v, u = y^m)$  es un subcamino de  $P(1_H, 1_H, w = y^n)$  o viceversa. En cualquier caso concluimos que  $P(1_H, 1_H, w) = P(1_H, v, y^k)P(v, 1_H, y^{n-k})$  y entonces  $P_2$  es una permutación cíclica de  $P_1$ .

$\implies$  Supongamos que  $H <_S F$  y  $(w, a)$  es un  $S$ -testigo. Sin pérdida de generalidad podemos asumir que  $w$  es cíclicamente reducido. Esto implica que  $aw$  o  $wa^{-1}$  es un producto sin cancelación, Cambiando, si es necesario,  $w \longrightarrow w^{-1}$  podemos suponer que  $aw$  es un producto sin cancelación. Además podemos suponer que en  $wa^{-1}$  no todas las letras de  $w$  se cancelan, (Si no, podemos cambiar  $a \longrightarrow aw^{-1}$ ). Como  $awa^{-1} \in H$  y el producto de  $a$  con  $wa^{-1}$  no tiene cancelación entonces existe un camino

$$P(1_H, 1_H, awa^{-1}) = P(1_H, v, a)P(v, 1_H, wa^{-1}).$$

Ademas existe el camino  $P(v, v, w)$  el cual es la reducción de

$$P(v, 1_H, wa^{-1})P(1_H, v, a).$$

Por lo tanto existen  $P_1 = P(1_H, 1_H, w)$  y  $P_2 = P(v, v, w)$ . Supongamos que  $P_2$  es una permutación cíclica de  $P_1$ . En otras palabras,  $P_1 = P(1_H, v, y)P(v, 1_H, z)$  y  $P_2 = P(v, 1_H, z)P(1_H, v, y)$ . Por lo tanto  $w = yz = zy$ . Esto implica que  $y^{-1}wy = w$ ,  $b = ay^{-1} \in H$  y  $bwb^{-1} = awa^{-1}$ , lo cual es una contradicción.

■

**Proposición 15** Sea  $H = \langle a^4, a^2ba, aca^2, bc^{-1} \rangle$ . Entonces  $H$  no es un  $S$ -subgrupo de  $F(a, b, c)$  y además no tiene ACEP.

**Demostración.** Utilizando el grafo de Stallings  $\Gamma(H)$  y el Lema 8 podemos ver que  $H$  es libremente generado por

$$w_1 = a^4, w_2 = a^2ba, w_3 = aca^2, w_4 = bc^{-1}.$$

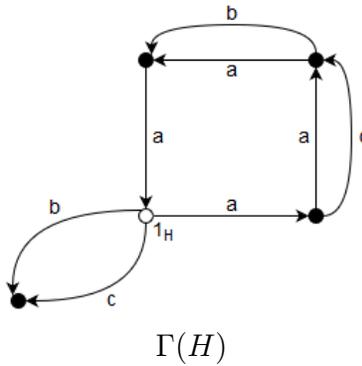
Sea  $N = \langle\langle [w_1^n, w_2], [w_1^n, w_3] \rangle\rangle_H$ ,  $n \in \mathbb{Z}$  donde  $[\cdot, \cdot]$  denota el conmutador. Podemos verificar que  $\gamma(N) \geq \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$  y  $[w_1^n, w_4] \notin N$ . En efecto,

$$H/N = (\langle u, w_2, w_3 \mid [u, w_2], [u, w_3] \rangle_{*_{u=w_1^n}} \langle w_1 \rangle) * \langle w_4 \rangle,$$

por lo tanto es suficiente considerar la imagen de  $\langle w_1, w_2, w_3 \rangle$  en  $H/N$ . Tales elementos tiene la siguiente forma normal:

$$w_1^{rn} p_1(w_2, w_3) w_1^{\alpha_1} \cdots,$$

donde  $p_i \in \langle w_2, w_3 \rangle$  y  $-\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor \leq \alpha \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ , ver [12]. Entonces cualquier palabra en  $w_1, \dots, w_4$  de longitud menor que  $\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$  esta en su forma normal. Además, es fácil ver que  $[w_1^n, w_4] = w_1^n w_4 w_1^{-n} w_4^{-1} \neq 1$ . Veamos ahora que  $[w_1^n, w_4] \in \langle\langle N \rangle\rangle_F$ . Esto se debe a que  $w_4 = a^{-2} w_2 a w_3^{-1}$  y  $[w_1, a] = 1$  en  $F$ .



Usando el grafo  $\Gamma(H)$  podemos ver que no hay caminos cíclicamente reducidos  $P(v, v, h), P(v', v', h) \in \Gamma(H)$  tal que  $P(v, v, h)$  no es una permutación cíclica de  $P(v', v', h)$ . Luego por la Proposición 14  $H$  no es un  $S$ -subgrupo. ■

### 3.4 Demostración del Teorema 9.

En esta sección demostraremos el Teorema 7 usando los conceptos de Teoría de cancelación pequeña (ver [8]) en combinación con los grafos empalmados de Stallings. Sean  $H$  un subgrupo finitamente generado de un grupo libre  $F$  y  $N \triangleleft H$ . Comenzaremos con la construcción de diagramas de derivación para  $u \in \langle\langle N \rangle\rangle_F$ .

### 3.4.1 Diagramas de derivación para $u \in \langle\langle N \rangle\rangle_F$ .

**Definición 22** Un morfismo de un grafo etiquetado  $\Gamma_1$  a un grafo etiquetado  $\Gamma_2$  es una aplicación  $\pi$  que va de el conjunto de vértices y aristas de  $\Gamma_1$  al conjunto de vértices y aristas de  $\Gamma_2$  enviando vértices a vértices, aristas a aristas, preservando etiquetas ( $l(e) = l(\pi(e))$ ) y extremos de aristas ( $o(\pi(e)) = \pi(o(e))$ ,  $t(\pi(e)) = \pi(t(e))$ ).

**Definición 23** Sea  $E.\Gamma$  el conjunto de aristas de  $\Gamma$ . La estrella terminal de un vértice  $v$  en un grafo  $\Gamma$  es el conjunto  $\text{in-star}(v) = \{e \in E.\Gamma \mid v = t(e)\}$ . La estrella inicial de un vértice  $v$  en un grafo  $\Gamma$  es el conjunto  $\text{out-star}(v) = \{e \in E.\Gamma \mid v = o(e)\}$ .

**Definición 24** Un grafo  $\Gamma_1$  es un grafo cubierta de una grafo  $\Gamma_2$  si existe una aplicación cubierta de  $\Gamma_1$  a  $\Gamma_2$ . Una aplicación cubierta  $f : \Gamma_1 \longrightarrow \Gamma_2$  es un epimorfismo de grafos etiquetados tal que la estrella terminal y la estrella inicial de cada vértice  $v$  de  $\Gamma_1$  es enviado biyectivamente a la respectiva estrella terminal y estrella inicial de su imagen  $f(v)$ .

**Proposición 16** Sean  $H < F$ ,  $N \triangleleft H$  y  $\Gamma(H)$ ,  $\Gamma(N)$  sus grafos empalmados de Stallng correspondientes. Entonces  $\Gamma(N)$  es un grafo cubierta de  $\Gamma(H)$ .

**Demostración.** Daremos una construcción de  $\Gamma(N)$ . Para  $\Gamma(H)$  fijemos un árbol generador  $T$ . Para  $v \in V.\Gamma(H)$  sea  $P(v)$  un camino reducido en  $T$  que va de  $1_H$  a  $v$ . Para cada arista  $e \notin E.T$  sea  $[e]$  la etiqueta del camino  $P(o(e))eP^{-1}(t(e))$ . Por Lema 8, el conjunto  $\{[e] \mid e \in E.\Gamma(H) \setminus E.T\}$  generan libremente a  $H$ . Sea  $G = H \setminus N$  y  $\bar{h}$  la imagen de  $h \in H$  en  $G$  mediante el morfismo  $H \longrightarrow H \setminus N$ . Definimos a  $\Gamma(N)$  de la siguiente manera.

- $V.\Gamma(N) = V.\Gamma(H) \times G$ ,
- $E.\Gamma(N) = E.\Gamma(H) \times G$ ,
- $l(e, g) = l(e)$ ,  $o(e, g) = (o(e), g)$ , y  $t(e, g) = \begin{cases} (t(e), g) & \text{si } e \in T \\ (t(e), g, g\overline{[e]}) & \text{si } e \notin T \end{cases}$

Es fácil ver que  $N$  coincide con las etiquetas de los ciclos reducidos en  $(1_H, 1)$  de  $\Gamma(N)$ . Obviamente, la aplicación  $f : \Gamma(N) \longrightarrow \Gamma(H)$ , definida como  $f(a, g) = a$  es un mapeo cubierta. ■

Sea  $f : \Gamma_1 \longrightarrow \Gamma_2$  un morfismo de grafos. De forma natural podemos extender  $f$  a los inversos de las aristas,  $f(e^{-1}) = (f(e))^{-1}$ . Para cualquier camino  $Q = e_1, e_2, \dots, e_k$  en  $\Gamma_1$  su imagen  $f(Q) = f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_k)$  es un camino en  $\Gamma_2$ . Es claro por definición que  $l(Q) = l(f(Q))$ . Si  $P$  es un camino en  $\Gamma_2$ , un levantamiento de  $P$  es un camino  $Q$  en  $\Gamma_1$  tal que  $f(Q) = P$ .

**Lema 21** Sean  $\Gamma_1, \Gamma_2$  grafos y  $f : \Gamma_1 \longrightarrow \Gamma_2$  una aplicación cubierta. Si  $P$  es un camino en  $\Gamma_2$  entonces para todo  $v \in f^{-1}(o(P))$ , existe un único levantamiento de  $P$  que comienza en  $v$ .

**Lema 22** Sea  $N \triangleleft H$  y  $f : \Gamma(N) \longrightarrow \Gamma(H)$  una aplicación cubierta. Entonces  $\forall v \in V.\Gamma(H)$  y  $\forall v_1, v_2 \in f^{-1}(v)$  existe un automorfismo  $\alpha : \Gamma(N) \longrightarrow \Gamma(N)$  tal que  $\alpha(v_1) = v_2$ .

**Demostración.** Tomando a  $f$  como la proyección en el primer elemento, es decir,  $f((a, h)) = a$ , tenemos que  $v_1 = (v, h_1)$ ,  $v_2 = (v, h_2)$  y  $\alpha(a, h) = (a, (h_2 h_1^{-1})h)$ . ■

Una presentación  $\langle X \mid R \rangle$  es llamada simetrizada si  $R$  consiste de palabras cíclicamente reducidas y para cualquier  $w \in R$  entonces todas las permutaciones de  $w$  así como de  $w^{-1}$  pertenecen a  $R$ . Un diagrama  $M$  sobre la presentación simetrizada  $\langle X \mid R \rangle$  es un complejo celular planar finito (que denotaremos, abusando de la notación, por  $M$ ) que además satisface las siguientes propiedades:

1. El complejo  $M$  es conexo y simplemente conexo.
2. Toda arista (1-celda) de  $M$  es etiquetada por una flecha y una letra  $x \in X$ .
3. Algun vértice(0-celdas) que pertenecen a la frontera topológica  $\delta M$  de  $M \subseteq \mathbb{R}^2$  se llamara vértice base.
4. Para cada región (2-celdas)  $D$  de  $M$  la etiqueta del ciclo frontera esta en  $R$ , (en nuestra notación  $l(\delta(D)) \in R$ ). (Notese que  $l(\delta(D))$  define una permutación cíclica, si no especificamos un vértice base de  $\delta(D)$ ).

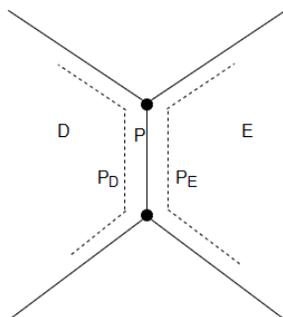
Entonces el 1-esqueleto de  $M$  es un grafo planar conexo y finito  $M^1$  encajado en  $\mathbb{R}^2$  y las 2-celdas de  $M$  son precisamente las regiones complementarias delimitadas por este grafo.

El Lema de Van Kampen nos dice que  $w \in \langle\langle R \rangle\rangle_F$  si y solo si existe un diagrama de derivación para  $w$ . Ya que estamos interesados en  $\langle\langle N \rangle\rangle_F$  para  $N \triangleleft H < F$  elegimos a  $R$  como el conjunto de etiquetas de todos los ciclos cíclicamente reducidos en  $\Gamma(N)$ . Esto implica que para cualquier región  $D \in M$  existe un ciclo  $C_D = P(v, v, w)$  en  $\Gamma(N)$  con  $w = l(\delta(D))$ . Una región  $D$  puede tener frontera consigo misma. En este caso existen aristas y vértices que aparecen dos veces en  $\delta(D)$ , a estos los llamaremos aristas y vértices dobles. Sea  $\delta(D) = e_1v_2e_2v_2, \dots, e_kv_kv_k$  con  $e_i$  aristas y  $v_i$  vértices. Cambiando  $\delta(D)$  por  $\delta'(D) = (1, e_1)(1, v_1)(2, e_2)(2, v_2), \dots, (k, e_k)(k, v_k)$ , definimos un morfismo de grafos etiquetados  $\phi_D : \delta'(D) \longrightarrow \Gamma(N)$ .

**Definición 25** Sea  $w \in \langle\langle N \rangle\rangle_F$ . Un  $N$ -diagrama de derivación para  $w$  es un diagrama  $M$  con las siguientes propiedades:

- $l(\delta(M)) = w$ , donde  $\delta(M)$  denota la frontera de  $M$ .
- Para cada región  $D$  de  $M$  asociamos un morfismo de grafos etiquetados  $\phi_D : \delta'(D) \longrightarrow \Gamma(N)$ .

La discusión anterior muestra que  $w \in \langle\langle N \rangle\rangle_F$  si y solo si existe un  $N$ -diagrama de derivación para  $w$ . Sean  $D$  y  $E$  regiones de un  $N$ -diagrama  $M$  con  $\delta(D) \cap \delta(E) \neq \emptyset$ . Sea el camino  $P$  una componente conexa de  $\delta(D) \cap \delta(E)$ . Decimos que  $P$  es una pieza no esencial si existen morfismos  $\phi_D : \delta'(D) \longrightarrow \Gamma(N)$  y  $\phi_E : \delta'(E) \longrightarrow \Gamma(N)$  tales que  $f(\phi_D(P)) = f(\phi_E(P))$  (Recuerde que  $f : \Gamma(N) \longrightarrow \Gamma(H)$  es una aplicación cubierta). Diremos que  $P$  es una pieza esencial si no es no esencial. Para un  $N$ -diagrama  $M$  sea  $r(M)$  el numero de regiones. Si  $u \in \langle\langle N \rangle\rangle_F$  sea  $r(u) = \min\{r(M) \mid M \text{ es un } N\text{-diagrama de derivación para } u\}$ . Un  $N$ -diagrama de derivación  $M$  para  $u$  es llamado óptimo si  $r(M) = r(u)$ .



La pieza  $P$  en las regiones  $D$  y  $E$

**Lema 23** *Sea  $M$  un  $N$ -diagrama óptimo y  $P$  una pieza de  $M$ . Si  $P$  es una pieza no esencial entonces  $P$  es un camino en una region  $D$  que tiene frontera consigo misma.*

**Demostración.** Sea  $M$  un  $N$ -diagrama óptimo de derivación para  $u$ . Supóngase que una pieza  $P$  de  $\delta(D) \cap \delta(E)$  no es esencial,  $D \neq E$ . Entonces tenemos que  $\delta(D) = Q_1P$  y  $\delta(E) = P^{-1}Q_2$ . Sea  $D'$  la región obtenida pegando  $D$  y  $E$  a lo largo de  $P$ . Construimos  $M'$  eliminando  $D \cup E$  y pegando  $D'$  a lo largo de  $Q_1Q_2$ . Si  $Q_1Q_2$  no es cíclicamente reducido podemos aplicar empalmes a  $M'$ . Claramente el diagrama resultante tiene  $r(M) - 1$  regiones. Para obtener una contradicción es suficiente mostrar que el diagrama resultante es un  $N$ -diagrama. Para esto es suficiente checar que en  $\Gamma(N)$  existe un ciclo con etiqueta  $l(Q_1Q_2)$ . Pero  $f(\phi_D(P_{DE})) = f(\phi_E(P_{DE}))$ . Por Lema 22 existe un automorfismo  $\alpha : \Gamma(N) \rightarrow \Gamma(N)$  tal que  $\alpha(\phi_D(P_{DE})) = \phi_E(P_{DE})$ . Así  $\alpha(\phi_D(Q_1))\phi_E(Q_2)$  es el ciclo deseado. ■

Considere ahora el caso  $D = E$ , es decir, una región que tiene frontera consigo misma. Sea  $P$  una pieza no esencial en  $D$ , es decir  $\delta(D) = Q_1PQ_2P^{-1}$ .  $P$  aparece dos veces en  $\delta'(D)$ , digamos  $P_1$  y  $P_2$ . Puede suceder que  $\phi_D(P_1) \neq \phi_D(P_2)$  con  $\phi_D : \delta'(D) \rightarrow \Gamma(N)$ . Por la definición de pieza no esencial tenemos que  $f(\phi_D(P_1)) = f(\phi_D(P_2))$ . (Particularmente esto implica que  $f(\phi_D(Q_i))$  son ciclos en  $\Gamma(H)$ ).

### 3.4.2 Funciones de longitud.

En esta sección daremos una definición detallada de  $|\cdot|_H$ . Recuérdese la definición de  $|\cdot|_\Omega$  en la sección 3.1.2. Recuérdese también que  $|\cdot|_H = |\cdot|_{\Omega(H)}$ . Por lo tanto lo único que necesitamos es dar una definición detallada de  $\Omega(H)$ . Comenzaremos con algunas propiedades de  $\Gamma(H)$ . Sean  $v_i \in \Gamma(H)$  y  $P(1_H, v_i, w_i)$  caminos reducidos en  $\Gamma(H)$  con  $w_i \in F$ ,  $i = 1, 2$ .

**Proposición 17** *Sean  $v_1, v_2 \in \Gamma(H)$  y  $P(1_H, v_1, w_1)$ ,  $P(1_H, v_2, w_2)$  caminos reducidos en  $\Gamma(H)$  con  $w_1, w_2 \in F$ . Entonces  $w_1w_2^{-2} \in H$  si y solo si  $v_1 = v_2$ .*

**Demostración.** La demostración utiliza la unicidad de caminos en  $\Gamma(H)$  dado un origen y una etiqueta.

$\implies$  Sea  $w_1 = w'_1\alpha$  y  $w_2 = w'_2\alpha$  tales que  $w'_1(w'_2)^{-1}$  y  $w'_i\alpha$  son productos sin cancelación. Como  $w'_1(w'_2)^{-1} = w_1w_2^{-2} \in H$ , existe un ciclo  $P(1_H, 1_H, w'_1(w'_2)^{-1}) =$

$P(1_H, v', w'_1)P(v', 1_H, (w'_2)^{-1})$ . Luego

$$\begin{aligned} P(1_H, v_1, w_1) &= P(1_H, v', w'_1)P(v', v_1, \alpha) \text{ y} \\ P(1_H, v_2, w_2) &= P(1_H, v', w'_2)P(v', v_2, \alpha). \end{aligned}$$

Entonces,  $v_1 = v_2$  por la unicidad de caminos.

$\Leftarrow$  Similar. ■

Considere el camino  $P(1_H, v, w)$  en  $\Gamma(H)$ . Por la Proposición 17  $H^w$  depende solamente de  $v$ . Entonces, para  $v \in V.\Gamma(H)$  definimos  $H^v = H^w$  para algun  $w \in F$  con  $P(1_H, v, w)$ . Actualmente,  $H^v$  consiste de las etiquetas de los ciclos reducidos que van de  $v$  a  $v$  en  $\Gamma(H)$ . Sea  $\Omega(H) = \{H^a \cap H^b \mid a, b \in V.\Gamma(H) \wedge a \neq b\}$ . Definimos  $|\cdot|_H = |\cdot|_{\Omega(H)}$ .

**Definición 26** Definimos  $\text{diam}(\Gamma) = \max\{d(u, v) \mid u, v \in V.\Gamma\}$ , donde  $d(u, v)$  es la distancia en grafos, esto es, la longitud de el camino mas corto entre  $u$  y  $v$ . Si  $P$  es un camino en  $\Gamma$ , denotaremos por  $|P|$  a la longitud de  $P$ .

**Proposición 18** Supongamos que existe una arista en  $\Gamma(H) \times \Gamma(H)$  que va de  $(u, v)$  a  $(u', v')$ . Entonces  $u = v$  si y solo si  $u' = v'$ .

$\Gamma(H) \times \Gamma(H)$  contiene una componente diagonal la cual es isomorfa a  $\Gamma(H)$ . Sea  $\Gamma(H) \dot{\times} \Gamma(H)$  el grafo  $\Gamma(H) \times \Gamma(H)$  eliminando la componente diagonal y sea  $C = \text{diam}(\Gamma(H) \dot{\times} \Gamma(H)) + 1$ .

**Lema 24** Sea  $w \in F$  y supongamos que existe un camino  $P(v_1, v_2, w)$  en  $\Gamma(H) \dot{\times} \Gamma(H)$ . Entonces  $|w|_H \leq C$ .

**Demostración.** Tomemos  $a \in F$ ,  $|a| < C$ , tal que existe un camino  $P(v_2, v_1, a)$  en  $\Gamma(H) \dot{\times} \Gamma(H)$ . Por lo tanto tenemos que existe el ciclo  $P(v_1, v_1, wa)$ . Es decir,  $wa \in H^{v_1} \cap H^{v_2} \in \Omega(H)$  con  $v(v_1, v_2)$ ,  $v_1 \neq v_2$ . Luego  $|w|_H = |waa^{-1}|_H \leq 1 + a \leq C$ . ■

**Corolario 6** Sea  $w \in F$  tal que  $|w|_H > C$ . Entonces existe a lo mas un camino con etiqueta  $w$  en  $\Gamma(H)$ .

**Corolario 7** Sea  $N \triangleleft H$  y  $M$  un  $N$ -diagrama de derivación óptimo. Sean  $D, E$  regiones diferentes en  $M$ . Sea  $P_{DE}$  una pieza en la intersección  $\delta(D) \cap \delta(E)$ . Entonces  $|l(P_{DE})|_H \leq C$ .

**Lema 25** Sea  $H$  un s.f.g. de  $F$  y  $N \triangleleft H$ . Si  $P_w = P(v, v, w) \in \Gamma(N)$  es cíclicamente reducido, entonces  $|w|_H \geq \gamma_H(N) - 2\text{diam}(\Gamma(H))$ .

**Demostración.** Sea  $f : \Gamma(N) \longrightarrow \Gamma(H)$  una aplicación cubierta,  $u = f(v)$ . Existe un camino  $P(1_H, u, b)$  en  $\Gamma(H)$  con  $|b|_H \leq \text{diam}(\Gamma(H))$ . Sea  $Q$  un levantamiento de  $P(1_H, u, b)$  con  $t(Q) = v$ . El ciclo  $QP_wQ^{-1} = P(1_N, 1_N, bwb^{-1})$ , por lo tanto  $bwb^{-1} \in N$ , pero  $\gamma_H(N) \leq |bwb^{-1}|_H \leq |w|_H + 2|b|$ . ■

### 3.4.3 Demostración de Teorema 9.

**Teorema.** Sea  $H$  un s.f.g. de  $F$ ,  $N \triangleleft H$ ,  $C = \text{diam}(\Gamma(H) \dot{\times} \Gamma(H)) + 1$  y  $\gamma_H(N) > 6C + 2\text{diam}(\Gamma(H))$ . Entonces  $N = \langle\langle N \rangle\rangle_F \cap H$ .

Sea  $\Sigma = (\langle\langle N \rangle\rangle_F \cap H) \setminus N$ . Con el fin de demostrar el teorema es suficiente mostrar que  $\Sigma = \emptyset$ .

**Lema 26** Sea  $N \triangleleft H$  y  $\Sigma = (\langle\langle N \rangle\rangle_F \cap H) \setminus N$ . Si  $w \in \Sigma$ ,  $\tau \in N$  y  $h \in H$  entonces  $\tau w \in \Sigma$  y  $w^h \in \Sigma$ .

**Demostración.** Como  $N < \langle\langle N \rangle\rangle_F$  y  $N \triangleleft H$ ,  $\tau w \in \langle\langle N \rangle\rangle_F$  y  $\tau w \in H$ . Supongamos que  $\tau w \in N$ , entonces  $w \in \tau^{-1}N = N$ , pero  $w \notin N$ , entonces tenemos una contradicción. Para la segunda parte es claro que  $w^h \in \langle\langle N \rangle\rangle_F \cap H$ . Supongamos que  $w^h \in N$ , entonces  $w \in h^{-1}Nh = N$ , pero  $w \notin N$  y tenemos una contradicción. ■

**Lema 27** Sea  $aw^*a^{-1} \in H$  con  $w^*$  cíclicamente reducido. Entonces existe un camino  $P(1_H, v, a)$  y un ciclo  $P(v, v, w^*)$  en  $\Gamma(H)$ .

**Demostración.** Si el producto  $aw^*a^{-1}$  no se tienen cancelaciones entonces la conclusión del lema es válida por la definición de  $\Gamma(H)$ . En caso de que no sea así, existe una presentación  $w^* = \alpha_1\alpha_2$  y  $aw^*a^{-1} = a'\alpha_2\alpha_1a'^{-1}$  tal que no hay cancelación en los productos  $\alpha_1\alpha_2$  y  $a'\alpha_2\alpha_1a'^{-1}$ . Luego existen los siguientes caminos en  $\Gamma(H)$ :

$$P(1_H, 1_H, a'\alpha_2\alpha_1a'^{-1}) = P(1_H, v', a')P(v', v, \alpha_2)P(v, v', \alpha_1)P^{-1}(1_H, v', a')$$

Entonces el camino  $P(1_H, v, a)$  es una reducción de  $P(1_H, v', a')P^{-1}(v, v', \alpha_1)$  y  $P(v, v, w^*) = P(v, v', \alpha_1)P(v', v, \alpha_2)$ . ■

Supongamos que  $\Sigma \neq \emptyset$ . Tomemos  $u \in \Sigma$  tal que  $M$  es un  $N$ -diagrama de derivación óptimo para  $u$  y  $r(u) = \min\{r(w) \mid w \in \Sigma\}$ . Si  $r(u) = 1$

tenemos que  $u = awa^{-1} \in H$ , con  $u \in H$ ,  $w \in N$  y  $a \in F \setminus H$ . Podemos escribir  $w = xw^*x^{-1}$  y  $u = yw^*y^{-1}$  donde  $w^*$  es cíclicamente reducido. Por Lema 27, existen caminos  $P(1_H, v_x, x)$ ,  $P(1_H, v_y, y)$  y ciclos  $P(v_x, v_x, w^*)$ ,  $P(v_y, v_y, w^*)$ . Mas aun,  $v_x \neq v_y$  por la Proposición 17. Luego tendríamos que  $w^* \in H^{v_x} \cap H^{v_y}$  y  $|w^*|_H = 1$ . Sea  $z \in F$ , con  $|z| \leq \text{diam}(\Gamma(H))$  tal que existe un camino  $P(1_H, v_x, z)$  en  $\Gamma(H)$ . Entonces  $zx^{-1} \in H$  y  $w' = zw^*z^{-1} \in N$ . Pero  $|w'|_H \leq 1 + 2|z| < \gamma(N)$ , esto es una contradicción.

Supongamos pues que  $r(u) \geq 2$ , es decir,  $M$  tiene mas de una región. Tenemos dos posibilidades:

1. Todas las piezas son esenciales.
2. Existe una pieza no esencial.

En el primer caso, por Lema 25 y Corolario 7 el grado de cualquier región  $D$  es al menos 6 si  $\delta(D) \cap \delta(M)$  no contiene una arista. Asi que  $M$  es un  $(3, 6)$ -diagrama. Entonces podemos aplicar el Teorema 5. Esto implica que existe una región  $D$  de  $M$  tal que  $\delta(D) \cap \delta(M)$  contiene un subcamino  $Q$  de  $\delta(D)$  tal que

$$|l(Q)|_H \geq 3C \geq C.$$

Sea  $v_0 \in \delta(M)$  un vértice base de  $\delta(M)$  para  $u$ . Sean  $v_1 = o(Q)$ ,  $v_2 = t(Q)$ . Sea  $P_D$  un camino en  $\delta(D)$ , tal que  $QP_D$  es el ciclo  $\delta(D)$ . Sean  $P_1$  y  $P_2$  caminos en  $\delta(M)$  tales que  $o(P_1) = v_0$ ,  $t(P_1) = v_1$ ,  $o(P_2) = v_2$ ,  $t(P_2) = v_0$  y  $u = l(P_1)l(Q)l(P_2)$ . Denotemos por  $l(P_1) = x_1$ ,  $l(P_2) = x_2$ ,  $l(Q) = y$ ,  $l(P_D) = z$ . En  $\Gamma(N)$  existe un ciclo  $A$  con etiqueta  $yz$ , su imagen  $f(A)$  es un ciclo en  $\Gamma(H)$  con la misma etiqueta. Además en  $\Gamma(H)$  existen caminos  $P(1_H, \tilde{v}_1, x_1)$ ,  $P(\tilde{v}_1, \tilde{v}_2, y)$  y  $P(\tilde{v}_2, 1_H, x_2)$ , véase Figura 3.1.

Un camino en  $\Gamma(H)$  con etiqueta  $y$  es único por el Corolario 6. Entonces,  $P(\tilde{v}_1, \tilde{v}_2, y)$  es un subcamino de  $f(A)$ . Se sigue que el camino  $P(1_H, \tilde{v}_1, x_1)$  tiene un levantamiento  $B$  en  $\Gamma(N)$  tal que  $BAB^{-1}$  es un ciclo en  $\Gamma(N)$ . Se sigue de la Proposición 16 que  $x_1yzx_1^{-1} \in N$  y  $u' = x_1z^{-1}x_2 = (x_1z^{-1}y^{-1}x_1^{-1})(x_1yx_2) \in \Sigma$  por el Lema 26. Pero  $u'$  tiene un  $N$ -diagrama de derivación con  $r(u) - 1$  regiones. Esto es una contradicción con la minimalidad de  $r(u)$ .

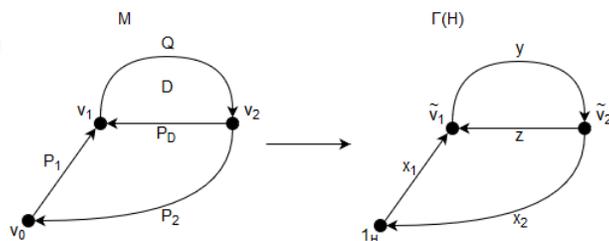


Figura 3.1:  $M$  y  $\Gamma(H)$

Consideremos el segundo caso. Por Lema 23 una pieza no esencial  $P$  es un camino en una region  $D$  que tiene frontera consigo misma. Entonces  $\delta(D) = Q_1 P Q_2 P^{-1}$ , donde  $Q_1$  y  $Q_2$  definen curvas cerradas en  $M$ . Sean  $R_1$  y  $R_2$  subconjuntos compactos del plano, acotados por  $Q_1$  y  $Q_2$  respectivamente. Podemos tener que  $R_1 \subseteq R_2$  o  $R_2 \subseteq R_1$ . Sin pérdida de generalidad sea  $R_1 \subseteq R_2$ , ver Figura 3.2. Sea  $M_1 = R_1 \cap M$ . Nótese que  $M_1$  es un  $N$ -diagrama de derivación para  $l(Q_1)$ . Consideremos el morfismo  $\phi_D : \delta'(D) \rightarrow \Gamma(N)$  de la Definición 25. La pieza  $P$  se divide en  $P_1$  y  $P_2$  en  $\delta'(D)$ , ver Figura 3.2.  $f(\phi_D(P_1)) = f(\phi_D(P_2))$  por ser  $P$  no esencial. Sea  $v = f(\phi_D(o(P))) \in V.\Gamma(H)$ . Tomemos un camino  $\Upsilon$  que va de  $1_H$  a  $v$  en  $\Gamma(H)$ . Agreguemos un camino  $T$  con  $l(T) = l(\Upsilon)$  a el diagrama  $M_1$ . El diagrama resultante  $M'_1$  es un  $N$ -diagrama de derivación para  $l(TQ_1T^{-1}) = u' \in H$ . Tenemos dos posibilidades:

1.  $u' \in \Sigma$
2.  $u' \notin \Sigma$

En el caso 1  $r(u') < r(u)$  y tendríamos una contradicción con la minimalidad de  $r(u)$ . considere el caso 2. Note que  $l(TQ_1PQ_2P^{-1}T^{-1}) \in N$  y en consecuencia  $l(TPQ_2P^{-1}T^{-1}) \in N$ . Por lo tanto existe un ciclo en  $\Gamma(N)$  con etiqueta  $l(Q_2)$ . Por lo tanto podemos remover  $D$  y  $R_1$ , pegando una región  $D'$  a lo largo de  $Q_2$ . El nuevo diagrama  $M'$  es un  $N$ -diagrama para  $u$  con  $r(M') \leq r(M) - 1$ , lo cual es una contradicción.

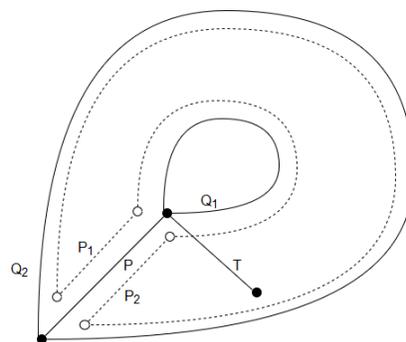


Figura 3.2: Region con autofrontera

# Bibliografia

- [1] A. Y. Ol’shanskii, “The sq-universality of hyperbolic groups,” *Sbornik: Mathematics*, vol. 186, no. 8, pp. 1199–1211, 1995.
- [2] B. H. Neumann, M. P. Murthy, B. H. Neumann, and B. H. Neumann, *Lectures on topics in the theory of infinite groups*, vol. 21. Tata Institute of Fundamental Research, 1968.
- [3] J. R. Stallings, “Surfaces in three-manifolds and non-singular equations in groups,” *Mathematische Zeitschrift*, vol. 184, no. 1, pp. 1–17, 1983.
- [4] D. V. Osin, “Peripheral fillings of relatively hyperbolic groups,” *Invent. Math.*, vol. 167, no. 2, pp. 295–326, 2007.
- [5] G. Higman, B. H. Neumann, and H. Neumann, “Embedding theorems for groups,” *J. London Math. Soc.*, vol. 24, pp. 247–254, 1949.
- [6] F. Dahmani, V. Guirardel, and D. Osin, “Hyperbolically embedded subgroups and rotating families in groups acting on hyperbolic spaces,” *ArXiv e-prints*, Nov. 2011.
- [7] B. B. Newman, “Some results on one-relator groups,” *Bull. Amer. Math. Soc.*, vol. 74, pp. 568–571, 1968.
- [8] R. C. Lyndon and P. E. Schupp, *Combinatorial group theory*. Classics in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 2001. Reprint of the 1977 edition.
- [9] M.-P. Schützenberger, “Sur l’équation  $a^{2+n} = b^{2+m}c^{2+p}$  dans un groupe libre,” *C. R. Acad. Sci. Paris*, vol. 248, pp. 2435–2436, 1959.
- [10] R. C. Lyndon and M. P. Schützenberger, “The equation  $a^M = b^N c^P$  in a free group,” *Michigan Math. J.*, vol. 9, pp. 289–298, 1962.

- [11] F. Levin, “Solutions of equations over groups,” *Bull. Amer. Math. Soc.*, vol. 68, pp. 603–604, 1962.
- [12] O. Bogopolski, *Introduction to group theory*. EMS Textbooks in Mathematics, European Mathematical Society (EMS), Zürich, 2008. Translated, revised and expanded from the 2002 Russian original.
- [13] I. Kapovich and A. Myasnikov, “Stallings foldings and subgroups of free groups,” *J. Algebra*, vol. 248, no. 2, pp. 608–668, 2002.