

Universidad Autónoma de San Luis Potosí



**Instituto de Física
"Manuel Sandoval Vallarta"**



**Las correlaciones cuánticas multipartitas en el
marco teórico de la no-señalización.**

Tesis que para obtener el grado de
Doctor en Ciencias (Física)

Presenta:

M. C. José Manuel Méndez Martínez

Asesor: Dr. Jesús Urías Hermosillo

19 de Agosto del 2016

Abstract

En esta tesis se construye un marco teórico de correlaciones que permite exponer y cuantificar el grado de no-localidad inherente a un escenario correlacional cuántico finito por medio de su conjunto completo de correlaciones causales elementales. Dicho conjunto se obtiene mediante el uso de un algoritmo de conversión que nos permite resolver la descripción de no-señalización de entrada al lidiar de manera eficiente con su alta degeneración. Los resultados obtenidos nos permiten reproducir las correlaciones producidas por el estado singlete en un escenario de Bell particular usando únicamente instancias ordinarias (no-cuánticas).

Para mis papás Fernando y Rosita, por todo el apoyo incondicional que me han brindado a lo largo de mi vida.

Mi más sincero agradecimiento para mi asesor, Jesús, por inculcarme la pasión por el aprendizaje y por escribir.

En la vastedad del espacio y en la inmensidad del tiempo es para mí un placer haber compartido un lugar y una época con ellos.

Índice general

Introducción	6
1. El marco teórico de la no-señalización para la no-localidad	16
2. El algoritmo de conversión	21
2.1. Corte incremental de conos	23
2.2. Obteniendo los puntos extremos vecinos	28
2.3. Ensamblando el grafo esquelético	29
2.4. Práctica computacional	30
3. Geometría del politopo de correlaciones para el escenario de Bell	40
3.1. Concretización de las cajas-PR	46
4. Construcción de máquinas binarias aleatorias	48
4.1. Descripción del escenario correlacional de Bell	48
4.2. Descripción geométrica de la órbita de Q	50
4.3. Construcción de las máquinas binarias aleatorias	53
4.3.1. La caja local L	54
4.3.2. La caja no-local R_{101}	56

4.3.3. Mezclando la cajas L y R_{101}	57
Conclusiones y persepectivas	62
Bibliografía	66

Introducción

Las correlaciones de pares medidas en un experimento bipartita del tipo descrito en [1], donde dos partes distantes comparten un par de partículas de spin-1/2 en estado singlete, violan las desigualdades de Clauser, Horne, Shimony y Holt (CHSH) [1], que son condiciones necesarias y suficientes para que las correlaciones permitan un modelo realista local [2, 3]. Aunque las correlaciones observadas en este escenario son no-locales, estas no violan las desigualdades CHSH lo máximo permitido algebraicamente, lo que significa que la hipótesis de causalidad local en el Teorema de Bell es más fuerte que lo físicamente necesaria [4]. La violación máxima es producida por las llamadas correlaciones Popescu-Rohrlich (PR) [5], cuyo grado de no-localidad es el máximo admitido por las correlaciones causales para este escenario (Bell).

Dada la existencia de correlaciones causales con un mayor contenido no-local que el admitido por las correlaciones cuánticas, surge la pregunta de por qué ni la Naturaleza ni la teoría cuántica exhiben ese grado de no-localidad [5]. De igual forma, aunque la no-localidad causal aparece como una característica esencial de los fenómenos cuánticos, la teoría cuántica por sí misma no proporciona una comprensión física sobre las correlaciones no-locales observadas [5]. Para ello requerimos de un marco teórico más amplio que nos brinde una mejor comprensión y perspectiva sobre las correlaciones cuánticas observadas.

Un enfoque que se presenta como una forma de localidad más débil y que resulta ser el

marco teórico más simple a partir del cual se pueden reproducir todos los resultados medidos es el de la no-señalización. Dicho brevemente, la no-señalización es la imposibilidad de usar correlaciones para intercambiar mensajes entre dos partes distantes separadas espacialmente, de modo que los resultados obtenidos por una de las partes no permitan inferir algo sobre las salidas de la otra parte. El principio de la no-señalización impone restricciones sobre las probabilidades adjuntas a las salidas físicas en sistemas multipartitos de modo que las probabilidades de las salidas en una región de espacio-tiempo A queden inalteradas por las interacciones locales llevadas a cabo sobre otra parte del sistema localizada en una región separada espacialmente B , y viceversa. De este modo, el marco teórico de la no-señalización admite solamente correlaciones no-locales que no implican comunicación entre las partes. Estas correlaciones pueden ser tanto locales (separables) como no-locales (no-separables), permitiéndonos trabajar en un solo marco teórico todas aquellas correlaciones que preservan la causalidad, entre ellas las correlaciones cuánticas.

Una motivación para usar el enfoque de la no-señalización es que este nos permite modelar escenarios correlacionales como el de Bell por medio de hipotéticas cajas negras (o simplemente cajas) con múltiples entradas-salidas aleatorias sin comunicación entre ellas [6]. En esta descripción, las partes ajustan individualmente sus propios valores de entrada mediante las perillas (opciones de medición) del aparato. El rol de las mediciones de salida es jugado por las salidas aleatorias, producidas de acuerdo a la probabilidad adjunta que se distribuye sobre el conjunto de valores de entrada/salida combinados. En este formalismo las nociones de causa y efecto se reducen a las nociones precisas de "entradas" y "salidas", las cuales no pueden ser usadas por las partes para ejercer acción a distancia. La colección de salidas de todas las partes constituye los datos para construir e identificar la cantidad y tipos de correlaciones.

Otro atractivo del enfoque de la no-señalización es que este determina un conjunto completo de correlaciones causales elementales que permite reproducir las correlaciones de cualquier

escenario causal particular con un número finito de entradas y salidas por parte, entre ellos los escenarios correlacionales cuánticos finitos. Un hecho particularmente importante es que cada una de estas unidades o instancias de correlación elementales constituye una caja de no-señalización pura. Estas cajas permiten (i) medir y caracterizar el grado de no-localidad presente en las correlaciones cuánticas en escenarios del tipo Bell; (ii) comparar este grado de no-localidad con el de otras teorías causales; y (iii) concretizar modelos para llevar a cabo las simulaciones cuánticas para el escenario de Bell. Los componentes de estos modelos serán precisamente estas unidades elementales de correlación (cajas). Así, el enfoque de la no-señalización se presenta como el escenario adecuado para desarrollar un entendimiento más agudo y profundo sobre la no-localidad cuántica [7].

El enfoque de la no-señalización a escenarios correlacionales multipartitas ha sido estudiado en múltiples referencias [6, 8, 9, 10]. Aspectos importantes sobre la estructura de los estados de probabilidad de los escenarios de Bell con cualquier número de partes y dos observables binarias por parte son conocidos [11, 12]. En [11] se probó por medio de una biyección lineal que en este escenario el politopo de estados de no-señalización corresponde al poliedro dual de el politopo de Bell de correlaciones locales. También se han estudiado desigualdades de Bell distintas a las CHSH en las referencias [13, 14, 15, 16, 17], mientras que en [18, 6, 19] se han estudiado algunos intereses aplicados. Sin embargo, a pesar de todos estos avances se requiere aún de un mejor entendimiento de la estructura de los conjuntos de estados de probabilidad sin señalización.

Así, el primer objetivo de este trabajo consiste en obtener y estudiar el conjunto de correlaciones elementales que proporciona el marco teórico de la no-señalización.

El conjunto de correlaciones elementales para un escenario de Bell dado corresponde al conjunto de vértices que describen el politopo $\mathcal{P}$ de estados de no-señalización definido por el sistema de desigualdades lineales que resulta de combinar la condición de no-señalización sobre

las probabilidades adjuntas a las salidas (marginales) para ese escenario con las restricciones que siguen de la interpretación de probabilidad (normalización y no-negatividad). Este politopo $\mathcal{P}$ ocupa en el espacio de probabilidad la región correspondiente al conjunto $\mathcal{P}$ de distribuciones de probabilidad sin-señalización. Todo punto en $\mathcal{P}$ corresponde a la distribución de probabilidad de una caja de correlaciones causales sin-señalización. Como la descripción de entrada de este politopo resulta altamente degenerada, requerimos de una herramienta de conversión que no solo nos proporcione el conjunto de vértices a partir del sistema de desigualdades lineales, sino que además nos permita lidiar con la degeneración presente en el sistema de entrada. Este problema de transformación fue considerado en el marco teórico limitado de correlaciones separables [20, 21].

La literatura sobre politopos contiene varios métodos de conversión, divididos en dos grandes grupos. Los primeros son los basados en el método símplex de Dantzig [22] y Balinski [23]. Estas implementaciones resultan muy efectivas en sistemas de desigualdades lineales no-degenerados y para resolver problemas en el área de programación lineal y optimización [24]. Sin embargo, resultan poco eficientes cuando la descripción de entrada es degenerada, pues la explosión combinatorial que se produce al aumentar el número de bases para un punto vuelve larga y difícil la enumeración de los vértices vecinos mediante sólo operaciones de pivoteo [25, 26]. Además, estos métodos suelen quedar atrapados en ciclos sin fin o simplemente atascarse [26]. El segundo grupo lo conforman los llamados algoritmos incrementales, basados en el método de la doble descripción propuesto por Motzkin [27] y desarrollado posteriormente por Fukuda [28]. Estos métodos consisten en ir rebanando el politopo, empezando con un politopo más amplio (un símplex) que el politopo objetivo. Los semi-espacios que no son parte de el conjunto base se insertan uno por uno, quitando y añadiendo vértices en cada corte hasta que los semi-espacios por insertar se han agotado y el politopo objetivo ha sido modelado. Aunque este procedimiento ha probado tener un manejo eficiente de la degeneración, la falta

de un orden de inserción adecuado de los semi-espacios puede llevar a un mal rendimiento en la construcción de esqueletos de polítopos de gran tamaño, principalmente debido al gran número de puntos (vértices) tentativos que se producen en etapas intermedias del procedimiento, la mayoría de los cuales son descartados al final. Lo que requerimos entonces es una herramienta computacional que nos permita lidiar con el problema de conversión de descripciones degeneradas en tiempos accesibles.

Para sobreponernos a esta situación, hemos desarrollado un nuevo método para construir el esqueleto de descripciones sin-señalización altamente degeneradas. Nuestra propuesta es una estrategia combinada que reúne lo mejor de ambos métodos. Por un lado, hemos adaptado el método de la doble descripción para enumeración de rayos extremos [28] para vencer la degeneración y generar los rayos extremos de el cono poliédrico más pequeño que soporta a $\mathcal{P}$ desde un vértice. Estos rayos soportan las aristas de $\mathcal{P}$ que parten de este vértice, proporcionándonos las direcciones de exploración para encontrar los puntos vecinos de este vértice. Estas direcciones son utilizadas por una estrategia de pivoteo para obtener estos puntos vecinos y llevar a cabo el recorrido por el esqueleto de $\mathcal{P}$. Como este recorrido se lleva a cabo a través de aristas reales únicamente, el procedimiento resulta muy efectivo tanto para resolver la degeneración de los vértices como para completar el recorrido por el grafo.

Usando esta herramienta de conversión, hemos caracterizado los polítopos de no-señalización de un gran número de escenarios de Bell bipartitas (e incluso el escenario tripartita más simple [9]) por el tamaño de su entrada y la conectividad de su grafo de salida. Estos atributos son mostrados como funciones de los parámetros de los escenarios de Bell. Como característica sobresaliente, nuestro estudio revela que las descripciones de no-señalización bipartitas pueden constituir una nueva clase de complejidad para la degeneración.

Un punto a remarcar es que nuestra implementación para la enumeración de vértices resulta útil no sólo en el campo de la cuántica y la no-señalización, sino también en otras áreas como

la biología [29, 30, 31], donde recientemente han aparecido modelos sobre redes regulatorias genéticas [32] y la dinámica de poblaciones y mecanismos de evolución [33] que involucran sistemas de desigualdades lineales. Una implementación como la nuestra permitiría obtener información adicional sobre las predicciones cuantitativas de dichos modelos que no se tienen con la pura descripción- H .

Como resultado de la implementación de este programa, se publicó el artículo *On the no-signaling approach to quantum-nonlocality* [34], donde se detalla el estudio de las correlaciones causales sin-señalización y se presenta de manera rigurosa nuestra implementación como una herramienta computacional adecuada para construir el esqueleto de descripciones sin-señalización altamente degeneradas. A su vez, se envió a publicación en el *International Journal of Modern Physics C* el artículo *An algorithm for the skeleton of the extreme points of degenerate systems of linear inequalities* [35], el cual detalla el funcionamiento del algoritmo, presentando una caracterización del programa usando distintas clases de politopos.

Nuestro algoritmo permitirá explotar las potencialidades de el marco teórico de la no-señalización. Nombraremos dos de ellas.

(i) El disponer de el conjunto de vértices de un politopo de no-señalización permite identificar nuevas formas de correlación no-locales junto con su grado de no-localidad así como obtener desigualdades del tipo Bell-CHSH generalizadas junto otros criterios que establezcan los límites entre las distintas formas de correlación. En la literatura se tienen reportes de este tipo de estudios [16, 7], pero en ellos se remarca la limitación que se tiene en el poder de cómputo para resolver sistemas de mayor tamaño (el politopo de correlaciones causales más grande reportado es el del caso tripartita más simple, estudiado en [9]). Dada su capacidad para resolver descripciones altamente degeneradas, una implementación como la nuestra permitirá llevar a cabo esta clase de estudios en escenarios diferentes y de mayor tamaño a los de Bell, como lo es el caso tripartita [9]. Esta clase de información nos brindará un mayor

entendimiento sobre el significado físico de las correlaciones cuánticas.

(ii) Mientras que los politopos de no-señalización se describen mediante la intersección de semi-espacios, los politopos de Bell son fácilmente descritos por sus conjuntos de vértices. El problema con los politopos de Bell es entonces enumerar sus caretas partiendo de su descripción por vértices. La dualidad caretas/vértices hace de nuestro algoritmo una herramienta apropiada para resolver este problema también ya que la descripción por vértices de un politopo se puede mapear a la descripción por semi-espacios de su poliedro dual, y viceversa [11].

Una vez que se ha obtenido el conjunto de correlaciones elementales sin señalización para un escenario de Bell particular por medio del conjunto de vértices del politopo $\mathcal{P}$, podemos construir cajas de no-señalización que hagan factible el diseño de modelos que reproduzcan las correlaciones cuánticas usando únicamente correlaciones causales elementales.

Una caja o instancia PR es aquella que produce las correlaciones-PR elementales proporcionadas por el enfoque de la no-señalización [5]. Estas cajas presentan las correlaciones causales más no-locales, lo que las convierte en las unidades naturales de las correlaciones no-locales causales en los escenarios correlacionales cuánticos donde dos partes comparten un e -bit [8]. La unidad ha sido denotada en [8] como un nl -bit. Artículos posteriores [36] revelan que una única instancia de las máquinas-PR basta para reproducir las correlaciones predichas por la mecánica cuántica para el escenario correlacional no-finito de Bohm [37], proporcionando una cota superior para el grado de no-localidad inherente en un e -bit en ese arreglo de 1 e -bit $|_{\text{Bohm}} \leq 1 \text{ } nl\text{-bit}$.

Un segundo objetivo de este trabajo es desarrollar un modelo de correlaciones cuánticas que reproduce exactamente el valor de expectación predicho para el estado singlete en el arreglo finito de Bell. En este modelo una única instancia PR es necesaria y suficiente para expresar cualquier no-localidad causal, sin necesidad de utilizar canales de comunicación clásicos entre las partes para simular un e -bit en un escenario finito. Además de la instancia PR, este modelo

utiliza algunas instancias de correlaciones locales y unos cuantos bits aleatorios compartidos.

Nuestra simulación requiere a lo más de $\sqrt{2} - 1$ bits de una instancia de las máquinas PR para reproducir exactamente los valores de expectación para las correlaciones cuánticas en el estado singlete para el montaje de Bell utilizado, estableciendo una cota superior para el grado de no-localidad promedio para un e -bit en el arreglo de Bell de

$$1 \text{ } e\text{-bit} \big|_{\text{Bell}} \leq (\sqrt{2} - 1) \text{ } nl\text{-bit} . \quad (1)$$

Esta cota superior corresponde a la probabilidad de los eventos que exponen directamente como bits de salida los bits de salida de la máquina-PR en el arreglo simulado.

Esta clase de modelos son útiles para medir y caracterizar el grado de no-localidad de las correlaciones cuánticas, lo que nos brinda un mejor entendimiento sobre estas y nos permite adquirir una perspectiva operacional de la no-localidad cuántica.

Con el fin de presentar un marco teórico de correlaciones en el que queden incluidas las correlaciones cuánticas, en esta tesis se lleva a cabo la formulación matemática precisa de el enfoque sin-señalización de la no-localidad que nos lleva a la descripción geométrica general de los politopos de estados de probabilidad sin-señalización. Empezamos en el Capítulo 1 con la definición formal de los escenarios de Bell, estableciendo el conjunto de configuraciones básicas (combinaciones de entradas y salidas) que son accesibles a las partes. Toda distribución de probabilidad sobre el conjunto de configuraciones básicas define una caja, la cual es de no-señalización si su distribución de probabilidad cumple con la condición de no-señalización (además de las restricciones usuales de no-negatividad y normalización).

La primera parte del Capítulo 2 contiene la formulación, desarrollo y diseño de un algoritmo de conversión que construye el grafo esquelético compuesto por el conjunto de puntos extremos del politopo $\mathcal{P}$ a partir de un sistema de desigualdades lineales. La estrategia consiste

en un rápido y compacto método de pivoteo para determinar los vecinos de los puntos extremos, tomando como entrada los rayos extremos de un cono. El resultado es un procedimiento muy efectivo para obtener el esqueleto de politopos altamente degenerados, los cuales se describen por un gran número de semi-espacios pero tienen un número pequeño de vértices.

Los efectos de la degeneración sobre el rendimiento de el algoritmo son estudiados en la segunda parte del capítulo 2 para una gran variedad de sistemas de entrada, organizados en cuatro familias de acuerdo al grado de degeneración presente en la descripción de entrada y a la conectividad de los grafos de salida, lo que nos brinda un muestreo controlado y distribuido del espectro de complejidad de el problema de conversión. Estas cuatro familias son, en orden creciente de complejidad, las siguientes: (i) los politopos regulares simples (no degenerados), con descripciones generadas aleatoriamente; (ii) dos familias correspondientes a a politopos de no-señalización para escenarios de Bell específicos; y (iii) los politopos de Birkhoff [38, 39]. Como dato destacado, nuestra herramienta de conversión fue capaz de construir el esqueleto del politopo correspondiente al escenario tripartita más simple. Como aspecto sobresaliente, las pruebas revelaron dos comportamientos diferentes del algoritmo dependiendo de la conectividad de los grafos de salida. También se presenta una comparación de nuestro algoritmo con la implementación del símplex de Balinski [23], la cual reveló la enorme eficiencia de nuestra estrategia para construir el esqueleto de politopos degenerados con alta conectividad comparado con implementaciones basadas únicamente en el método símplex.

Como caso de estudio de las correlaciones causales elementales obtenidas usando nuestra herramienta de conversión, el Capítulo 3 presenta la geometría de el politopo correspondiente al escenario bipartita de Bell con dos opciones binarias de medición por parte. Este politopo vive en un espacio euclidiano de dimensión 8 y resulta tener 24 vértices, 16 de estos correspondientes a correlaciones separables (vértices locales) y los otros 8 a correlaciones no-separables del tipo

PR (vértices no-locales). Este politopo presenta dos partes. La primera, conocida como el politopo de Bell, es la cubierta convexa de los 16 vértices locales y corresponde a la región de correlaciones separables. La otra parte la forman 8 símlices de dimensión 4 formados por un vértice no-local en el pico y 8 vértices locales formando la base. Las regiones ocupadas por estos 8-símlices corresponden a correlaciones no-separables. La base de los 8-símlices constituye el borde entre las correlaciones separables y las no-separables, lo que corresponde a las desigualdades de Bell-CHSH [1].

La construcción de los modelos que reproducen las correlaciones cuánticas para un escenario de Bell particular se trata en el Capítulo 4. La primera parte consiste en describir las correlaciones predichas por la mecánica cuántica para el estado singlete en el arreglo de Bell como los puntos de una órbita circular en el espacio de las correlaciones causales usando las coordenadas baricéntricas proporcionadas por el politopo de correlaciones causales binarias. A continuación se consideran las coordenadas de un vector en el espacio de probabilidad como las entradas de la matriz de transición de una máquina binaria aleatoria. Posteriormente, se construyen las máquinas aleatorias que reproducen en promedio los puntos de la órbita circular de correlaciones cuánticas. Probamos que el arreglo de máquinas aleatorias reproduce, en promedio, las mediciones proyectivas sobre el estado singlete en el escenario correlacional de Bell.

Capítulo 1

El marco teórico de la no-señalización para la no-localidad

En un escenario correlacional, un grupo de n partes participantes comparte una caja aleatoria mediante el acceso a perillas de entrada individuales y lecturas de salida. Un índice $i \in \mathcal{P} := \{1, 2, \dots, n\}$ es usado para designar a cada una de las partes. Cada parte i puede fijar un valor de entrada x_i a partir de su propio conjunto de opciones de entrada $X_i = \{0, 1, \dots, m_i - 1\}$, $m_i \geq 2$. La decisión de las n partes sobre sus valores de entrada se registra en la palabra $x = (x_1, \dots, x_n)$. La colección de todas estas palabras constituye el conjunto $X := \prod_i X_i$.

Una vez que cada parte ha escogido un valor de entrada x_i , esta obtiene una salida ω_i a partir de su propio conjunto de salidas $[x_i, i] := \{0, 1, \dots, r_{x_i, i} - 1\}$, $r_{x_i, i} \geq 2$. El conjunto de salidas disponibles depende de el valor de entrada x_i . La colección de todas las lecturas de salida individuales se registra como la palabra $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$. Para una palabra de entrada dada $x = (x_1, \dots, x_n)$, la colección de todas estas palabras constituye el conjunto $[x] := \prod_i [x_i, i]$. Esto es, $[x]$ es el conjunto de palabras de salida que son accesibles a la caja cuando la palabra

de entrada es x . La colección de todas las palabra de salida que son accesibles a la caja son

$$\Omega := \bigcup_{x \in X} [x].$$

Los elementos que hemos descrito constituyen el escenario correlacional $\mathcal{S}_{\mathcal{P}} := (\mathcal{P}, X, \Omega)$.

Una configuración básica de una caja en el escenario $\mathcal{S}_{\mathcal{P}}$ consiste de la palabra de salida ω que la caja presenta a las partes cuando estas han seleccionado la palabra de entrada x . Esta configuración básica se denota como $(\omega|x) \equiv (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n|x_1, x_2, \dots, x_n)$. Las configuraciones básicas de cualquier caja en $\mathcal{S}_{\mathcal{P}}$ son $|\mathcal{S}_{\mathcal{P}}| := \sum_{x \in X} \prod_i r_{x_i, i}$ en número. Este número es el tamaño $|\mathcal{S}_{\mathcal{P}}|$ de el escenario $\mathcal{S}_{\mathcal{P}}$.

En teoría de probabilidad, el conjunto de configuraciones básicas es extendido a un álgebra de eventos. Un punto central de la condición de no-señalización son los eventos que involucran a un subconjunto $\pi \subseteq \mathcal{P}$ de partes e ignoran todas las otras en el conjunto complemento $\pi^{\mathcal{P}} := \mathcal{P} \setminus \pi$. Con el fin de describir estos eventos, sea $x_{\pi} = (x_i)_{i \in \pi}$ la palabra de entrada para las partes en π y para el conjunto completo de entradas usamos la palabra compuesta $x = (x_{\pi}, x_{\pi^{\mathcal{P}}})$. Análogamente, ω_{π} denota la palabra $(\omega_i)_{i \in \pi}$ y $\omega = (\omega_{\pi}, \omega_{\pi^{\mathcal{P}}})$.

El evento donde las partes en el conjunto π obtienen las salidas $\omega_{\pi} \in [x_{\pi}] := \prod_{i \in \pi} [x_i, i]$ dado que sus entradas fueron fijadas a $x_{\pi} \in X_{\pi} := \prod_{i \in \pi} X_i$ se denota como

$$(\omega_{\pi}|x_{\pi}) := \bigcup_{x' \in X_{\pi^{\mathcal{P}}}} \{(\omega_{\pi}, \omega'|x_{\pi}, x') : \omega' \in [x']\}, \quad (1.1)$$

el cual incluye todos los escenarios que pueden suceder en la parte complementaria $\pi^{\mathcal{P}}$. La colección de todas las palabras de salida ω_{π} para el subconjunto π de partes queda $\Omega_{\pi} := \bigcup_{x_{\pi} \in X_{\pi}} [x_{\pi}]$. Los eventos compuestos $(\omega_{\pi}|x_{\pi})$ constituyen las configuraciones básicas de una caja en el escenario restringido $\mathcal{S}_{\pi} = (\pi, X_{\pi}, \Omega_{\pi})$. Este escenario restringido no toma en cuenta nada sobre el complemento $\pi^{\mathcal{P}}$ de $\mathcal{S}_{\mathcal{P}}$. Debido a la aditividad de la función de probabilidad P ,

tenemos que

$$P(\omega_\pi | x_\pi) = \sum_{x' \in X_{\pi^{\mathcal{P}}}} \sum_{\omega' \in [x']} P(\omega_\pi, \omega' | x_\pi, x'). \quad (1.2)$$

Nuestro interés está en las cajas soportadas por $\mathcal{S}_{\mathcal{P}}$ que son compatibles con la condición de no-señalización impuesta por la relatividad especial, con el fin de modelar correlaciones permitidas físicamente entre un conjunto $\mathcal{P}$ de partes separadas espacialmente. Así, las probabilidades adjuntas a las salidas ω_π de cualquier subconjunto de partes π , las cuales han seleccionado las entradas x_π , quedan inalteradas por cualquier elección $x_{\pi^{\mathcal{P}}}$ de entradas en el complemento $\pi^{\mathcal{P}}$.

Una caja en el escenario correlacional $\mathcal{S}_{\mathcal{P}}$ se caracteriza por una distribución de probabilidad sobre el conjunto de configuraciones básicas, $(\omega|x)$, que asigna la probabilidad adjunta $P(\omega|x)$ de obtener la salida $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$, dado que las entradas fueron escogidas como $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Tal caja es referida mediante el par $(\mathcal{S}_{\mathcal{P}}, P)$. La condición de no-señalización se cumple si a los eventos $\{(\omega_\pi, \omega' | x_\pi, x_{\pi^{\mathcal{P}}}) : \omega' \in [x_{\pi^{\mathcal{P}}}] \}$, para cualquier entrada $x_{\pi^{\mathcal{P}}}$ seleccionada por $\pi^{\mathcal{P}}$, se les asigna la misma probabilidad. Por la aditividad de P , para una caja de no-señalización tenemos que

$$\sum_{\omega_{\pi^{\mathcal{P}}} \in [x_{\pi^{\mathcal{P}}}] } P(\omega_\pi, \omega_{\pi^{\mathcal{P}}} | x_\pi, x_{\pi^{\mathcal{P}}}) = \sum_{\omega_{\pi^{\mathcal{P}}} \in [x'_{\pi^{\mathcal{P}}}] } P(\omega_\pi, \omega_{\pi^{\mathcal{P}}} | x_\pi, x'_{\pi^{\mathcal{P}}}) \quad (1.3)$$

para cualquier subconjunto de partes $\pi \subset \mathcal{P}$ y para toda elección de entrada x_π , $x_{\pi^{\mathcal{P}}}$ y $x'_{\pi^{\mathcal{P}}}$.

Además de la condición (1.3), las probabilidades (adjuntas) (distribución de probabilidad) de las cajas de no-señalización están sujetas a las restricciones de normalización y no-negatividad propias de la interpretación de probabilidad. De este modo, una caja $(\mathcal{S}_{\mathcal{P}}, P)$ es

de no-señalización si satisface las siguientes condiciones:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{A.- No-negatividad: } P(\omega|x) \geq 0 . \\ \text{B.- Normalización: } \sum_{\omega \in [x]} P(\omega|x) = 1, \text{ para todo } x \in X . \\ \text{C.- No-señalización: La condición en (1.3).} \end{array} \right. \quad (1.4)$$

Como todas las restricciones impuestas sobre la función de probabilidad P son lineales, el conjunto de cajas de no-señalización $(\mathcal{S}_{\mathcal{P}}, P)$ que es descrito por (1.4) es un politopo. Este politopo corresponde a el conjunto $\mathcal{P}$ de distribuciones de probabilidad sin-señalización. De este modo, todo punto en $\mathcal{P}$ corresponde a una caja de no-señalización.

Al determinar el kernel de el sistema de ecuaciones lineales (1.4)-B y -C, se identifica un conjunto de $n < |\mathcal{S}_{\mathcal{P}}|$ probabilidades adjuntas independientes $P(\omega|x)$. Tomamos estas como las n coordenadas independientes p_k , $k = 1, \dots, n$, de un punto $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)$ en un n -espacio Euclidiano. Al poner las condiciones de no-negatividad (1.4)-A en función de las ν probabilidades independientes, estas especifican un conjunto de *semi-espacios positivos* $H_i^+ := \{\mathbf{p} : \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{p} \leq b_i\}$, donde cada $\mathbf{a}_i$, $i = 1, \dots, |\mathcal{S}_{\mathcal{P}}|$, es un vector de coeficientes, $\mathbf{a}_i = (a_{1,i}, \dots, a_{n,i})$ y $\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{p} = a_{1,i} p_1 + \dots + a_{n,i} p_n$ es el producto punto en el n -espacio. Por lo tanto, el conjunto de distribuciones de probabilidad definidas por (1.4) es el politopo

$$\mathcal{P} = \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{p} \leq b_i, i \in I\}, \quad (1.5)$$

donde $I := \{1, \dots, |\mathcal{S}_{\mathcal{P}}|\}$. La descripción de no-señalización (1.5) representa $\mathcal{P}$ como la intersección de $|\mathcal{S}_{\mathcal{P}}|$ semi-espacios positivos de un espacio Euclidiano de dimensión n .

Sin embargo, esta descripción del politopo de no-señalización no proporciona un conjunto de elementos estándar para representar la distribución de probabilidad de las cajas de no-señali-

zación. Lo que necesitamos es el conjunto de vértices que lo describen pues estos corresponden a el conjunto de correlaciones causales elementales (cajas de no-señalización puras) a partir de las cuales se puede obtener el resto de las correlaciones.

El formalismo de la no-señalización requiere entonces de una herramienta computacional que permita obtener el conjunto de vértices de $\mathcal{P}$ a partir de la descripción (1.5). Esta herramienta de conversión debe también lidiar con la degeneración pues la descripción de no-señalización de $\mathcal{P}$ (1.5), proveniente del sistema de desigualdades lineales definido por (1.4), resulta altamente degenerada. La formulación y desarrollo de esta herramienta se hace en el siguiente capítulo.

Capítulo 2

El algoritmo de conversión

Considere el sistema de m desigualdades lineales

$$Ax \leq b. \quad (2.1)$$

Las desigualdades determinan las entradas de una matriz A , la cual es real y de tamaño $m \times n$, así como las componentes del vector $b \in \mathbb{R}^m$. Cada una de las m restricciones lineales en (2.1) define un semi-espacio de el espacio euclidiano de dimensión n , $\mathbb{E}_n$. Cada fila de la matriz A constituye el vector $a_i \in \mathbb{R}^n$, con índice $i \in \mathcal{I} = \{0, \dots, m-1\}$. Este vector a_i define el semi-espacio $H_i = \{x \in \mathbb{R}^n : a_i \cdot x \leq b_i\}$. La intersección de todos los semi-espacios $i \in \mathcal{I}$ conforma el politopo convexo $\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$, el cual constituye el conjunto de todos los valores de $x \in \mathbb{R}^n$ que cumplen con (2.1). Aquí asumiremos que $\mathcal{P}$ está acotado y que tiene dimensión afín completa n , por lo que $m > n$. La descripción de $\mathcal{P}$ provista por (2.1) se conoce como la descripción por semi-espacios o descripción- H .

Sin embargo, lo que tiene significado físico es la estructura combinatorial envuelta en el grafo esquelético $G(\mathcal{P})$ de $\mathcal{P}$, conocida como la descripción- V de $\mathcal{P}$. Para construir el grafo

$G(\mathcal{P})$ a partir de la descripción H (2.1) se requiere determinar el conjunto de valores extremos (vértices) $V = \{p \in P : p \text{ es extremo}\}$ y su conjunto de aristas E , el cual es un subconjunto de $V \times V$. El grafo esquelético $G(P)$ revela la estructura organizacional implícita en el conjunto de desigualdades lineales (2.1).

Empezaremos por dar las condiciones para que un punto p sea un vértice del politopo $\mathcal{P}$, lo cual depende de la no-negatividad del slack vector $s(p) := b - Ap$ y del rango de su conjunto de planos activos $\mathcal{Z}(p) := \{i \in \mathcal{I} : a_i \cdot p = b_i\}$. Un punto p está en la región accesible $\mathcal{P}$ si el vector $s(p)$ es no-negativo. Luego, $p \in \mathcal{P}$ es un vértice o punto extremo si, y sólo si, $\text{rank}(\mathcal{Z}(p)) = \dim(\text{span}\{a_i : i \in \mathcal{Z}(p)\}) = n$. Un punto extremo p es regular (o no degenerado) si su conjunto activo $\mathcal{Z}(p)$ tiene cardinalidad $|\mathcal{Z}(p)| = n$. El conjunto activo $\mathcal{Z}(p)$ de un punto extremo regular p constituye una base. De otro modo, $|\mathcal{Z}(p)| = n + \sigma$, con $\sigma \geq 1$, y el punto extremo p es σ -degenerado.

El cono descrito por el conjunto activo $\mathcal{Z}(p)$ del vértice p es el conjunto $K_{\mathcal{Z}(p)} := \{x \in \mathbb{R}^n : a_i \cdot x \leq b_i, i \in \mathcal{Z}(p)\}$. El cono $D_{\mathcal{Z}(p)} := \{x \in \mathbb{R}^n : a_i \cdot x \leq 0, i \in \mathcal{Z}(p)\}$ es la traslación del cono $K_{\mathcal{Z}(p)}$ al origen,

$$K_{\mathcal{Z}(p)} = p + D_{\mathcal{Z}(p)} . \quad (2.2)$$

Cuando $\text{rank}(\mathcal{Z}(p)) = n$, ambos conos $K_{\mathcal{Z}(p)}$ y $D_{\mathcal{Z}(p)}$ son picudos, con vértices ubicados en p y el origen, respectivamente. El cono poliédrico $K_{\mathcal{Z}(p)}$ ajusta a el politopo $\mathcal{P}$, mientras que las 1-caras de $K_{\mathcal{Z}(p)}$ proveen las direcciones para explorar los vértices vecinos de p . En base a esto y a (2.2), el primer paso hacia la construcción del grafo $G(\mathcal{P})$ consiste en convertir la descripción por semi-espacios del cono $D_{\mathcal{Z}(p)}$ en su descripción de 1-caras, representada por el conjunto de rayos extremos $X_{\mathcal{Z}(p)}$, tales que $D_{\mathcal{Z}(p)} = \{r = \sum_{\rho \in X_{\mathcal{Z}(p)}} c_\rho \rho : c_\rho \geq 0\}$.

Empezaremos con la determinación de el conjunto de rayos extremos de un cono con regular (es decir, su pico está sobre un vértice regular) y posteriormente haremos lo propio

para conos degenerados. Los rayos extremos de un cono regular pueden obtenerse a partir de su descripción- H usando métodos de álgebra lineal. Un cono regular $D_{\mathcal{B}}$ es la intersección de los semi-espacios correspondientes a la base $\mathcal{B} \subset \mathcal{Z}(\mathbf{p})$. El siguiente lema proporciona el conjunto de rayos extremos $X_{\mathcal{B}}$ del cono $D_{\mathcal{B}}$.

Lema 2.0.1 (Conos regulares). *Sea $\mathbf{p}$ un vértice de P . Sea $\mathcal{B} \subset \mathcal{Z}(\mathbf{p})$ una base. El conjunto de rayos extremos de el cono $\mathcal{D}_{\mathcal{B}}$ viene dado por*

$$X_{\mathcal{B}} = \{\rho_j \in \mathbb{R}^n : \mathbf{a}_i \cdot \rho_j = -\delta_{ij}, i, j \in \mathcal{B}\} . \quad (2.3)$$

Dado que $\mathcal{B} \subset \mathcal{Z}(\mathbf{p})$ tenemos que $D_{\mathcal{B}} \supset D_{\mathcal{Z}(\mathbf{p})}$. El conjunto de rayos extremos del cono $K_{\mathcal{B}}$ es el conjunto $X_{\mathcal{B}} + \mathbf{p}$.

El conjunto de rayos para una base $\mathcal{B} \subset \mathcal{Z}(\mathbf{p})$ proporcionados por el Lema 2.0.1 es el punto de partida para producir el conjunto de rayos extremos $X_{\mathcal{Z}(\mathbf{p})}$ de el cono $D_{\mathcal{Z}(\mathbf{p})} \subset D_{\mathcal{B}}$ correspondiente a un vértice degenerado $\mathbf{p}$ con conjunto activo $\mathcal{Z}(\mathbf{p})$. Esto se lleva a cabo mediante un procedimiento incremental que va rebanando el cono regular al insertar uno por uno los semi-espacios de $\mathcal{Z}(\mathbf{p})$ que no forman parte de el conjunto base $\mathcal{B}$, produciendo conos cada vez más pequeños, hasta que todos los semi-espacios han sido introducidos y el cono objetivo ha sido modelado. Este mecanismo, conocido como el método de la doble descripción [27, 28], es el tema de estudio de la siguiente sección.

2.1. Corte incremental de conos

Supóngase que el mecanismo de inserción ha añadido tantos semi-espacios de $\mathcal{B}' := \mathcal{Z}(\mathbf{p}) \setminus \mathcal{B}$ como para generar el cono $\mathcal{D}_{\mathcal{J}'} \subset D_{\mathcal{B}}$, para algún $\mathcal{J}' \subsetneq \mathcal{Z}(\mathbf{p})$. También supóngase que el procedimiento va a avanzar un paso más añadiendo el semi-espacio H_k , para algún

k que aún continúa en $\mathcal{Z}(\mathfrak{p}) \setminus \mathcal{J}'$. La inserción de el semi-espacio H_k generará el cono $\mathcal{D}_{\mathcal{J}}$, $\mathcal{J} = \mathcal{J}' \cup k$, cuyo conjunto de rayos extremos $X_{\mathcal{J}}$ puede obtenerse a partir de el conjunto de rayos $X_{\mathcal{J}'}$ del cono anterior y de el vector $\mathbf{a}_k$ asociado al semi-espacio H_k . Esta inserción de un solo plano define la función $(X_{\mathcal{J}'}, \mathbf{a}_k) \mapsto X_{\mathcal{J}} = \mathbf{F}(X_{\mathcal{J}'}, \mathbf{a}_k)$.

El procedimiento que implementa la función $\mathbf{F}$ empieza con la partición del conjunto de rayos $X_{\mathcal{J}'}$ en tres grupos. El primer conjunto es $X^+ := \{\rho \in X_{\mathcal{J}'} : \mathbf{a}_k \cdot \rho < 0\}$, el cual contiene los rayos que quedan dentro de la región permitida por el semi-espacio H_k . El segundo conjunto, $X^- := \{\rho \in X_{\mathcal{J}'} : \mathbf{a}_k \cdot \rho > 0\}$, comprende los rayos que quedan fuera de la región accesible del semi-espacio H_k . Finalmente, el tercer conjunto $X^0 := \{\rho \in X_{\mathcal{J}'} : \mathbf{a}_k \cdot \rho = 0\}$ reúne los rayos que se encuentran sobre el hiperplano ∂H_k . Los rayos en $X^+ \cup X^0$ siguen siendo extremos para el cono $\mathcal{D}_{\mathcal{J}}$, por lo que $X_{\mathcal{J}} \supseteq X^+ \cup X^0$. Por el contrario, los rayos en X^- se vuelven no permitidos, pero son necesarios para completar el conjunto de rayos extremos de el cono $\mathcal{D}_{\mathcal{J}}$.

La inserción del semi-espacio H_k genera nuevos rayos extremos para el cono $\mathcal{D}_{\mathcal{J}}$ en las intersecciones de el hiperplano δH_k con las 2-caras de el cono $\mathcal{D}_{\mathcal{J}'}$. Un punto medular de el procedimiento de rebanado incremental [34, 28] son los criterios para determinar si dos rayos extremos ρ y ρ' son coliminales, es decir, se encuentran sobre la misma 2-cara de el cono $\mathcal{D}_{\mathcal{J}'}$. Antes de enunciar estos criterios, definamos $\mathcal{J}'|_{\rho} = \{i \in \mathcal{J}' : \mathbf{a}_i \cdot \rho = 0\}$ y $\mathcal{J}'|(\rho, \rho') = (\mathcal{J}'|_{\rho}) \cap (\mathcal{J}'|_{\rho'})$. Este último es el subconjunto activo adjunto al par (ρ, ρ') en $\mathcal{D}_{\mathcal{J}'}$. Ahora procedemos a dar los criterios de colinearidad.

Lema 2.1.1 (Criterios de colinearidad). *Para algún $\mathcal{J} \subsetneq \mathcal{Z}(\mathfrak{p})$ con $\text{rank}(\mathcal{J}) = n$, sean ρ y ρ' rayos extremos de $\mathcal{D}_{\mathcal{J}}$. Los siguientes enunciados acerca de los pares (ρ, ρ') son equivalentes.*

- (a) *El par (ρ, ρ') constituye una 2-cara de $\mathcal{D}_{\mathcal{J}}$.*
- (b) *$\text{rank}(\mathcal{J}|(\rho, \rho')) = n - 2$.*

(c) Sea φ un rayo extremo de $D_{\mathcal{J}}$. Si $\mathcal{J}|\varphi \supseteq \mathcal{J}|(\rho, \rho')$, entonces $\varphi = \rho$ o $\varphi = \rho'$.

Cuando el enunciado (a) se cumple decimos que el par de rayos extremos (ρ, ρ') es coliminar en $D_{\mathcal{J}}$ y denotamos la relación por $\rho \sim \rho'$.

Si $(\rho', \rho) \in X^- \times X^+$ y además $\rho \sim \rho'$, entonces la 2-cara que contiene ambos rayos intersecta con el hiperplano ∂H_k , produciendo el rayo [34, 28]

$$\varphi_k(\rho', \rho) = (\mathbf{a}_k \cdot \rho')\rho - (\mathbf{a}_k \cdot \rho)\rho', \quad (2.4)$$

el cual es extremo para el cono rebanado $D_{\mathcal{J}} = D_{\mathcal{J}'} \cap H_k$.

La finalización de $X_{\mathcal{J}}$ se logra incorporando todas las intersecciones que el hiperplano ∂H_k hace con las 2-caras de $D_{\mathcal{J}'}$ definidas por los pares de rayos $(\rho', \rho) \in X^- \times X^+$. La colección de todos estos rayos,

$$Y_k = \{\varphi_k(\rho', \rho) : (\rho', \rho) \in X^- \times X^+ \text{ y } \rho \sim \rho'\}, \quad (2.5)$$

completa el conjunto de rayos extremos de $D_{\mathcal{J}}$, $X_{\mathcal{J}} = X^+ \cup X^0 \cup Y_k$. El par $(\mathcal{J}, X_{\mathcal{J}})$ constituye una doble descripción de el cono $D_{\mathcal{J}}$. El procedimiento anterior se resume en el pseudo-código mostrado en el Algoritmo 1.

La prueba de colaminaridad en (2.5), correspondiente a la línea 7 de el pseudo-código para la función **F** en el Algoritmo 1, puede proceder de dos maneras: ya sea aplicando la prueba algebraica, inciso (b) en el Lema 2.1.1, la cual aplica métodos de álgebra lineal, o bien la prueba combinatoria, inciso (c) del Lema 2.1.1, la cual corre sobre el conjunto $X_{\mathcal{J}'} \setminus \{\rho, \rho'\}$ [40]. Un hecho a resaltar es que para los cono regulares el test de colaminaridad para los pares en $X^- \times X^+$ puede omitirse, pues en tal caso todo par de rayos extremos es coliminar (Lema 2.1.2).

Algoritmo 1 Método de inserción estándar.

```
def F ( $X_{\mathcal{J}'}$ ,  $\mathbf{a}_k$ ) :  
1    $X^+ := \{\rho \in X_{\mathcal{J}'} : \rho \cdot \mathbf{a}_k < 0\}$   
2    $X^- := \{\rho \in X_{\mathcal{J}'} : \rho \cdot \mathbf{a}_k > 0\}$   
3    $X^0 := \{\rho \in X_{\mathcal{J}'} : \rho \cdot \mathbf{a}_k = 0\}$   
4    $X = X^+ \cup X^0$   
5   for  $\rho' \in X^-$  :  
6       for  $\rho \in X^+$  :  
7           if  $\rho \sim \rho'$  :                // Lema 2.1.1  
8                $X = X \cup \{\varphi_k(\rho', \rho)\}$  // Fórmula (2.4)  
9   return X
```

El conjunto de rayos extremos $X_{\mathcal{Z}(\mathbf{p})}$ del cono degenerado $D_{\mathcal{Z}(\mathbf{p})}$ se produce usando como recurrencia la función de inserción **F** en el Algoritmo 1. Los semi-espacios en el conjunto $\mathcal{B}' = \mathcal{Z}(\mathbf{p}) \setminus \mathcal{B}$ son introducidos uno por uno hasta agotarse. Este rebanado incremental de conos constituye la función **X** del Algoritmo 2. El caso base para empezar con la recurrencia, línea 1 del Algoritmo 2, es el conjunto de rayos extremos $X_{\mathcal{B}}$ de una base $\mathcal{B} \subset \mathcal{Z}(\mathbf{p})$, como se muestra en el Lema 2.0.1.

A pesar de que una gran cantidad de rayos intermedios calculados por la función **X** en el Algoritmo 2 no sobreviven como rayos extremos del cono objetivo $D_{\mathcal{Z}(\mathbf{p})}$, la función de inserción estándar **F** tiene que aplicar la prueba de colinearidad (ya sea (b) o (c) del Lema 2.1.1) a *cada par* del conjunto $X^- \times X^+$ en *cada paso* de la cadena que conduce a $X_{\mathcal{Z}(\mathbf{p})}$. El procedimiento de rebanado incremental estándar, Algoritmos 1 y 2, se extiende considerablemente al aplicar

Algoritmo 2 Rebanado incremental usando la función de inserción estándar **F**.

```
def X( $\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{B}'$ ) :  
1    $X = X_{\mathcal{B}}$                 // Lema 2.0.1  
2   for  $k \in \mathcal{B}'$  :  
3        $X = \mathbf{F}(X, \mathbf{a}_k)$     // Algoritmo 1  
4   return X
```

Algoritmo 3 Rebanado incremental con registro de 2-caras y prueba de descarte.

```
def  $\mathbf{X}'(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$  :  
1    $X = X_{\mathcal{B}}$  // Lema 2.0.1  
2    $L = X \times X$  // Lema 2.1.2  
3   for  $H \in \mathcal{B}'$  :  
4       producir los conjuntos  $X^+, X^0, X^-$   
5        $X = X^0 \cup X^+$   
6       for  $(\rho', \rho) \in X^- \times X^+ :$   
7           if  $|\mathcal{J}(\rho', \rho)| < n - 2 :$  // Lema 2.1.3  
8               continue  
9           if  $(\rho', \rho) \in L :$   
10               $X = X \cup \{\varphi_H(\rho', \rho)\}$  // fórmula (2.4)  
11              reemplazar  $(\rho, \rho')$  en  $L$  por  $(\rho, \varphi_H)$   
12              continue  
13          else if  $\rho' \sim \rho :$  // Lema 2.1.1  
14               $X = X \cup \{\varphi_H(\rho', \rho)\}$  // fórmula (2.4)  
15               $L = L \cup \{(\rho, \varphi_H)\}$   
16   return  $X$ 
```

un exceso de pruebas de colaminaridad. Desafortunadamente, no tenemos un mecanismo para evitar esos exámenes de colaminaridad durante el proceso de rebanado. Lo que sí tenemos es un método para reducir el número de veces que se aplica la prueba. El método es simple pero mejora considerablemente el tiempo del CPU invertido en el proceso de rebanado. La idea se compone de dos partes: (i) mantener un registro de los pares de rayos que sabemos son coliminales para así evitar una doble examinación, y (ii) usar como filtro una condición necesaria de colaminaridad. Si la condición necesaria no se cumple, el par es rechazado y se acabó. Si el par en cuestión no es rechazado entonces se busca en el registro. Si no se encuentra, entonces se realiza la prueba de colaminaridad al par. Si la prueba resulta positiva, se produce un nuevo rayo y el par de rayos es incluido en el registro de pares de rayos coliminales. Esta estrategia para mejorar el procedimiento de rebanado es implementada en el Algoritmo 3.

Ya que el caso base de la regla de recurrencia es el conjunto de rayos extremos $X_{\mathcal{B}}$ de

una base $\mathcal{B} \subset \mathcal{Z}(\mathbf{p})$, el registro de pares de rayos colaminares se inicializa en la línea 2 del Algoritmo 3 de acuerdo a lo siguiente.

Lema 2.1.2 (Para una base todos los pares de rayos son colaminares). *Sea $\mathcal{B} \subset \mathcal{Z}(\mathbf{p})$ una base. El conjunto de 2-caras del cono $D_{\mathcal{B}}$ es $X_{\mathcal{B}} \times X_{\mathcal{B}}$.*

El mejorado Algoritmo 3 rechaza un par como colaminar -y no hace nada- cuando la siguiente condición, plasmada en sus líneas 7 y 8, no se cumple.

Lema 2.1.3 (Se requiere de un mínimo). *Para algún $\mathcal{J} \subset \mathcal{Z}(\mathbf{p})$ con $\text{rank}(\mathcal{J}) = n$, sea (ρ, ρ') un par de rayos extremos del cono $D_{\mathcal{J}}$. Si $\rho \sim \rho'$, entonces $|\mathcal{J}(\rho, \rho')| > n - 3$.*

El método incremental que hemos descrito para la enumeración de rayos extremos de conos muestra complicaciones al extenderse a enumeración de vértices de el politopo completo [24]. Una debilidad de el método es que el número de vértices intermedios puede crecer exponencialmente comparado con el número de vértices verdaderos. Es por eso que seguimos un método de pivoteo en su lugar.

2.2. Obteniendo los puntos extremos vecinos

Los rayos en el conjunto $X_{\mathcal{Z}(\mathbf{p})}$ (calculados por el Algoritmo 3) definen las direcciones de búsqueda de los puntos extremos adyacentes al vértice $\mathbf{p}$. Asumiendo que el politopo $\mathcal{P}$ es compacto, el span lineal positivo de todo $\rho \in X_{\mathcal{Z}(\mathbf{p})}$ necesariamente intersecta uno de los hiperplanos en $\mathcal{I} \setminus \mathcal{Z}(\mathbf{p})$, por lo que el conjunto de hiperplanos $\mathcal{N}_{\mathbf{p}}(\rho) = \{t \in \mathcal{I} \setminus \mathcal{Z}(\mathbf{p}) : \mathbf{a}_t \cdot \rho \neq 0\}$ es no vacío. Entonces, para $t \in \mathcal{N}_{\mathbf{p}}(\rho)$ el hiperplano ∂H_t es perforado por ρ en el punto $\mathbf{q}_t = \mathbf{p} + \rho \lambda_t$, con

$$\lambda_t = (b_t - \mathbf{p} \cdot \mathbf{a}_t) / (\rho \cdot \mathbf{a}_t) > 0. \quad (2.6)$$

El punto $\mathbf{q}_t$ con el λ_t más pequeño (positivo) es el punto extremo vecino de $\mathbf{p}$ a lo largo de ρ .

Algoritmo 4 Regla de pivoteo para obtener los puntos extremos vecinos.

```
def P( $\mathcal{B}$  ,  $\mathcal{B}'$ ) :  
1    $V_p = \emptyset$  ;  $E_p = \emptyset$   
2    $X = \mathbf{X}'(\mathcal{B} , \mathcal{B}')$  // Algoritmo 3  
3   for  $\rho \in X$  :  
4        $\mathcal{N} := \{t \in \mathcal{I} \setminus \mathcal{Z}(p) : \rho \cdot \mathbf{a}_t > 0\}$   
5        $\lambda = \min_{t \in \mathcal{N}} \{(b_t - p \cdot \mathbf{a}_t) / (\rho \cdot \mathbf{a}_t)\}$  // Lema 2.2.1  
6        $q = p + \lambda \rho$   
7        $V_p = V_p \cup \{q\}$  ;  $E_p = E_p \cup \{(p, q)\}$   
8   return  $V_p$  ,  $E_p$ 
```

Lema 2.2.1 (Pivotear alrededor de p [34]). *Para todo $\rho \in X_{\mathcal{Z}(p)}$ sea $\mathcal{N}_p(\rho)$ como se definió anteriormente. El conjunto de puntos extremos vecinos de p viene dado por*

$$V_p = \{q = p + \lambda \rho : \rho \in X_{\mathcal{Z}(p)}, \lambda = \min_{t \in \mathcal{N}_p(\rho)} \{\lambda_t\}\}. \quad (2.7)$$

El par no-ordenado $\{p, q\}$, para todo $q \in V_p$, es un elemento del conjunto de aristas de p , denotado por E_p . El Lema 2.2.1 es el corazón de la función pivote **P** que regresa el conjunto de vecinos V_p y el conjunto de aristas E_p de el vértice p . La función **P** se define por el pseudo-código mostrado en el Algoritmo 4.

2.3. Ensamblando el grafo esquelético

El recorrido por el esqueleto empieza a partir de un punto extremo conocido p de $\mathcal{P}$, el cual es un vértice de el grafo $G(\mathcal{P})$. El conjunto de vértices V se inicializa como $\{p\}$. La conectividad de p en $G(\mathcal{P})$ se determina por la función **P** del Algoritmo 4 al proporcionarnos dos conjuntos: el conjunto de vértices vecinos V_p y el conjunto de aristas adyacentes E_p . El conjunto de aristas E de el esqueleto se inicializa como E_p . Todos los vértices vecinos de p quedan en espera de ser explorados. Estos toman un lugar en la cola Q , que se inicializa con

Algoritmo 5 Ensamblaje del grafo $G(\mathcal{P})$.

```
def G( $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ ) :  
1    $V_p, E_p = \mathbf{P}(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$                                      // Algoritmo 4  
2    $Q = V_p$  ;  $E = E_p$  ;  $V = \{p\}$   
3   while  $Q \neq \emptyset$  :  
4       Tomar el siguiente  $v \in Q$  y actualizar  $Q = Q \setminus \{v\}$   
5       Escoger una base  $\mathcal{B}_v$  y fijar  $\mathcal{B}'_v = \mathcal{Z}(v) \setminus \mathcal{B}_v$   
6        $V_v, E_v = \mathbf{P}(\mathcal{B}_v, \mathcal{B}'_v)$                                      // Algoritmo 4  
7        $E = E \cup E_v$  ;  $V = V \cup \{v\}$  ;  $Q = Q \cup \{V_v \setminus V\}$   
8   return  $V, E$ 
```

el conjunto V_p . Con este abastecimiento, una búsqueda exhaustiva se lleva a cabo al aplicar repetidamente los siguientes tres pasos, terminando cuando ya no queda ningún vértice en la cola Q .

1. Tomar el siguiente vértice v disponible en la cola Q y sacarlo de esta.
2. Aplicar la función $\mathbf{P}$ al vértice v con el fin de generar los conjuntos V_v y E_v .
3. Actualizar los conjuntos de aristas $E = E \cup E_v$ y vértices explorados $V = V \cup \{p\}$, así como la cola de vértices por explorar $Q = Q \cup (V_v \setminus V)$.

Cuando el proceso termina, el par (V, E) es el grafo $G(\mathcal{P})$. La función $\mathbf{G}$ se muestra en el Algoritmo 5.

2.4. Práctica computacional

En esta sección se presentan los resultados de varias pruebas de rendimiento llevadas a cabo con el Algoritmo 5 que además de medir el funcionamiento del programa frente a las complicaciones introducidas por la degeneración nos han permitido estudiar la naturaleza de los politopos correspondientes a escenarios correlacionales sin-señalización.

Para llevar a cabo estas pruebas se emplearon una gran cantidad de sistemas de desigualdades lineales organizados en cuatro familias de acuerdo a la degeneración de sus sistemas de entrada y a la conectividad de sus grafos de salida.

El tamaño de entrada de los sistemas es medido por la variable $\zeta = nm\langle Z \rangle$, la cual incluye (a) la dimensión n , (b) el número m de semi-espacios (o restricciones) y (c) el número promedio $\langle Z \rangle = n + \langle \sigma \rangle$ de hiperplanos activos de los puntos extremos del politopo $\mathcal{P}$. El tamaño de el grafo de salida $G(\mathcal{P})$ es medido por (a) el número de vértices $|V|$ de el grafo y (b) su conectividad $\kappa = \langle X \rangle / |V|$, donde $\langle X \rangle$ es el número promedio de aristas adyacentes a cada vértice de $G(\mathcal{P})$. El número de vértices $|V|$ mide el volumen del grafo y la conectividad $\kappa < 1$ es una medida simple de la complejidad de la topología del grafo. Las dos variables de salida, κ y $|V|$, junto con el tamaño de la entrada ζ proporcionan una caracterización práctica de la complejidad del problema de conversión, incluyendo la degeneración y sus consecuencias. Además, permiten organizar la gran variedad de sistemas de desigualdades lineales usados en cuatro familias con distinto grado de complejidad.

Los grafos estudiados más simples corresponden a la familia de descripciones de semi-espacio no-degeneradas. Estos sistemas se construyeron usando hiperplanos tangentes a la $(n-1)$ -esfera en el espacio Euclidiano $\mathbb{E}_n$. Los puntos de tangencia fueron generados aleatoriamente y distribuidos uniformemente sobre el ortante positivo de la $(n-1)$ -esfera. Los sistemas aleatorios así producidos son regulares con probabilidad 1. La familia de sistemas regulares etiquetada como k_0 en la figura 2.1-A (representada por diamantes huecos) cubre los rangos $7 \leq n \leq 20$ y $16 \leq m \leq 64$. Para cualquier valor de el tamaño de entrada ζ , los sistemas de desigualdades lineales no-degenerados producen los grafos de salida más voluminosos (figura 2.1-B) y menos conectados (figura 2.1-A). La tendencia seguida por la familia no-degenerada k_0 en la figura 2.1-A implica que las descripciones de semi-espacio degeneradas presentan valores combinados de entrada-salida $\kappa\zeta^2 > 2 \times 10^4$.

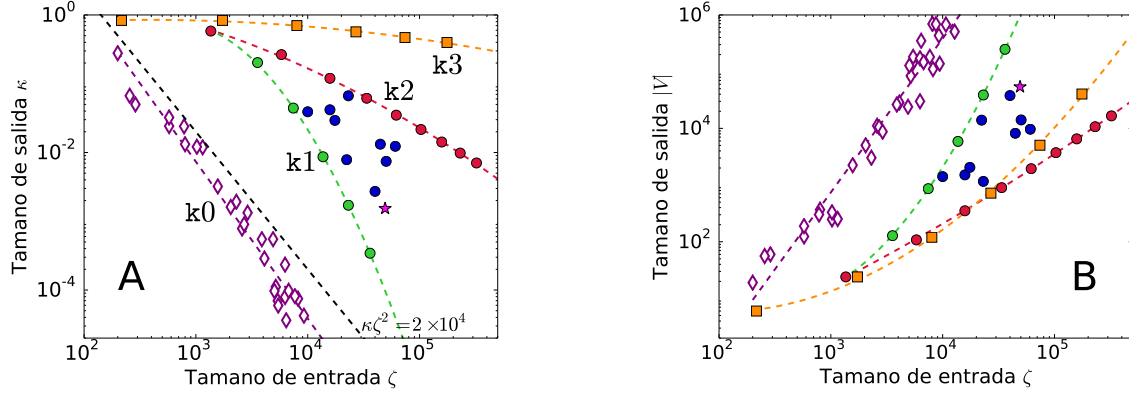


Figura 2.1: Características de entrada-salida de los sistemas de desigualdades lineales usados en la práctica computacional. La variable κ es la conectividad promedio de el grafo de salida, $|V|$ es el número de vértices y ζ es el tamaño de la entrada, el cual incluye la cantidad de degeneración.

Las zonas de complejidad intermedia en las figuras 2.1-A y 2.1-B están pobladas por sistemas de no-señalización bipartitas [34], representados por puntos circulares. Estos politopos corresponden a escenarios bipartitas con m_i entradas para la parte i ($= 1, 2$) y con conjuntos de salida de tamaño r_i que pueden ser diferentes para cada una de las partes, pero están restringidos a ser independientes del valor de entrada x_i . Los valores de m_i que hemos considerado van de 2 a 7 mientras que los de r_i van de 2 a 10.

La dimensión afín de los politopos de no-señalización de estos escenarios viene dada por [41]

$$n = (m_1(r_1 - 1) + 1)(m_2(r_2 - 1) + 1) - 1, \quad (2.8)$$

y se determina mediante el kernel de el sistema de ecuaciones lineales (1.4)-B y -C. El tamaño de sus descripciones sin-señalización (1.4) es $|\mathcal{S}_P| = m = m_1 m_2 r_1 r_2$.

El sistema bipartito con menor valor para ζ corresponde al arreglo experimental de Bell [4], en el cual $m_i = r_i = 2$. A partir de este escenario emergen dos secuencias de sistemas de no-señalización. La secuencia superior en la figura 2.1-A (línea roja) -referida como la familia

k2-, pertenece a los a escenarios bipartitas dicotómicos con $m_1 = m_2 = r_2 = 2$ (fijos) y r_1 corriendo, los cuales son equivalentes a los escenarios con $m_1 = m_2 = r_1 = 2$ (fijos) y r_2 corriendo. Su dimensión es $n = 6r_i - 4$ y su número de semi-espacios queda $|\mathcal{S}_P| = m = 8r_i$. El grafo de salida tiene $|V| = 2r_i^2 (2 + (r_i - 1)^2)$ vértices [34]. Los sistemas estudiados de esta familia alcanzan los tamaños de entrada más grandes $\zeta \sim 10^6$.

La secuencia inferior de sistemas de no-señalización en la figura 2.1-A (línea verde) -referida como la familia k1- emerge a partir del montaje de Bell incrementando el número de opciones de entrada disponibles para una de las partes, es decir, corresponde a los escenarios bipartitas con $m_2 = r_1 = r_2 = 2$ y m_1 corriendo, equivalente a $m_1 = r_1 = r_2 = 2$ y m_2 corriendo. Su dimensión es $n = 3m_i + 2$ y su número de semi-espacios queda $|\mathcal{S}_P| = m = 8m_i$. Los sistemas degenerados de la familia k1 producen los grafos de la clase de no-señalización más voluminosos pero también más pobremente conectados.

Ambas secuencias de sistemas de no-señalización en la figura 2.1 (líneas roja y verde) constituyen familias de un solo parámetro. Los puntos azules dispersos ente ambas secuencias corresponden a sistemas binarios que difieren del arreglo de Bell en al menos dos parámetros. La figura 2.1-B nos muestra como el número de vértices de los grafos de no-señalización se encuentra varios órdenes de magnitud por debajo de la secuencia de los grafos regulares. En conjunto, la figura 2.1 confirma que los politopos de no-señalización constituyen un buen ejemplo de descripciones de semi-espacio altamente degeneradas que producen grafos de salida con volumen $|V|$ y conectividad κ moderados.

El último sistema de no-señalización estudiado corresponde al sistema binario de no-señalización tripartita [9], el cual es representado como una estrella.

La cuarta y última de sistemas estudiados corresponde a los sistemas de semi-espacios de Birkhoff. Estos sistemas producen grafos esqueléticos densamente conectados, apareciendo en la parte superior del mapa de entrada-salida de la figura 2.1-A. Estos son referidos como la

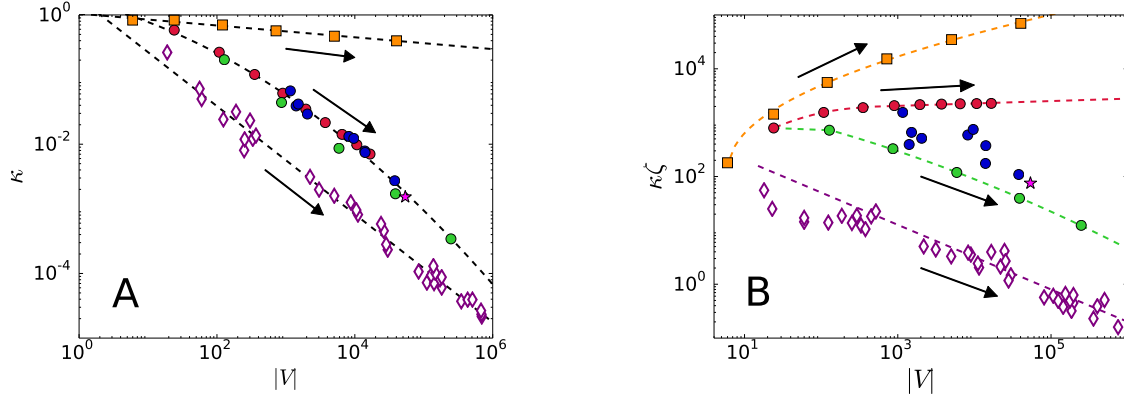


Figura 2.2: A.- Complejidad de los grafos de salida por tamaño de volumen $|V|$ y complejidad κ . B.- Complejidad por tamaño de volumen $|V|$ y tamaño de entrada-salida combinado $\kappa\zeta$. En ambas figuras las flechas apuntan en la dirección de crecimiento de ζ .

familia $\mathbf{k}3$ de matrices $[p_{ij}]$ doblemente estocásticas $\ell \times \ell$ y son representados por puntos cuadrados en la figura 2.1 (línea naranja). La región poliédrica $\mathcal{P}_\ell$ de las matrices doblemente estocásticas es conocida como el politopo de Birkhoff. Este politopo es notable en varias ramas de las matemáticas [38, 39]. Un politopo $\mathcal{P}_\ell$ es la región accesible, en el espacio Euclidiano de dimensión $n = (\ell - 1)^2$, de las restricciones de no-negatividad $p_{ij} \geq 0$, sujetas a las condiciones de normalización $\sum_{i=1}^{\ell} p_{ij} = \sum_{i=1}^{\ell} p_{ji} = 1$. El grafo $G(\mathcal{P}_\ell)$ tiene $|V| = \ell!$ vértices [38]. Los mapas de entrada-salida en la figura 2.1 muestran que los politopos de Birkhoff presentan descripciones de semi-espacio con muy alta degeneración y para valores grandes de ζ sus grafos de salida se vuelven voluminosos pero manteniendo una densa conectividad (el diámetro de $G(\mathcal{P}_\ell)$ es 2 para todo ℓ [38]). La familia de un solo parámetro $\mathbf{k}3$ de politopos de Birkhoff constituye nuestro ejemplo más complejo.

La figura 2.2-A muestra el estimado práctico de la complejidad de el grafo de salida $G(\mathcal{P})$ dados por el volumen $|V|$ y la conectividad κ . Cada familia sigue un "camino de complejidad" bien definido. Las flechas en la figuras indican la dirección de crecimiento del tamaño de entrada ζ . La tendencia general al crecer el tamaño de la entrada es un aumento en el volumen $|V|$

a expensas de una pérdida de conectividad κ : la degeneración en la descripciones de entrada es convertida en un distinto grado de conectividad por familia. Este hecho se aprecia mejor en la figura 2.2-B al usar el tamaño combinado de entrada-salida $\kappa\zeta$ en vez de sólo κ . Los grafos de salida de la familia k1 exhiben que la degeneración se manifiesta con un incremento considerable en el volumen pero produciendo una baja conectividad. La figura 2.2-B muestra que la familia k2 exhibe la tasa de crecimiento de volumen más lenta mientras que el tamaño de entrada-salida combinado $\kappa\zeta$ se mantiene alrededor del valor $\kappa\zeta \sim 2.1 \times 10^3$. Este valor constante de $\kappa\zeta$ se presenta a sí mismo como una frontera entre las familias con grafos de alta y baja conectividad.

En la figura 2.3-A vemos que el Algoritmo 5 muestra su mejor rendimiento para la familia k2 de sistemas de no-señalización. El tiempo del CPU que tarda el Algoritmo 5 para construir los grafos de estos sistemas ajusta exactamente la ley $\mathcal{O}(\zeta^3)$. Por el contrario, el algoritmo se muestra más tardado para construir el grafo de salida de los sistemas regulares, en cuyo caso el tiempo del CPU empleado sigue un comportamiento que va como $\mathcal{O}(\zeta^{9.6})$ para valores grandes de ζ , mostrado como un segmento sólido en la figura 2.3-A. Como referencia, el tiempo que el Algoritmo 5 requiere para producir el grafo de un sistema degenerado de la familia k2 con $\zeta \sim 10^4$ es cinco órdenes de magnitud menor que el tiempo empleado en construir el grafo de un sistema regular con el mismo tamaño de entrada. Los tiempos de CPU para las familias k1 y k3 para valores grandes de ζ van como $\mathcal{O}(\zeta^{7.2})$ y $\mathcal{O}(\zeta^5)$, respectivamente.

Las diferencias en el rendimiento del Algoritmo 5 se aprecian mejor en términos de la variable de entrada-salida combinada $\kappa\zeta$. La figura 2.3-B muestra una clara distinción entre las cuatro familias de sistemas. Las familias k0 y k1, las cuales producen los grafos menos conectados, presentan una tasa de crecimiento del tiempo de ejecución similar cuando la variable combinada $\kappa\zeta$ se vuelve más chica. El Algoritmo 5 muestra un comportamiento opuesto en los sistemas degenerados con grafos altamente conectados de la familia k3 pues los tiempos

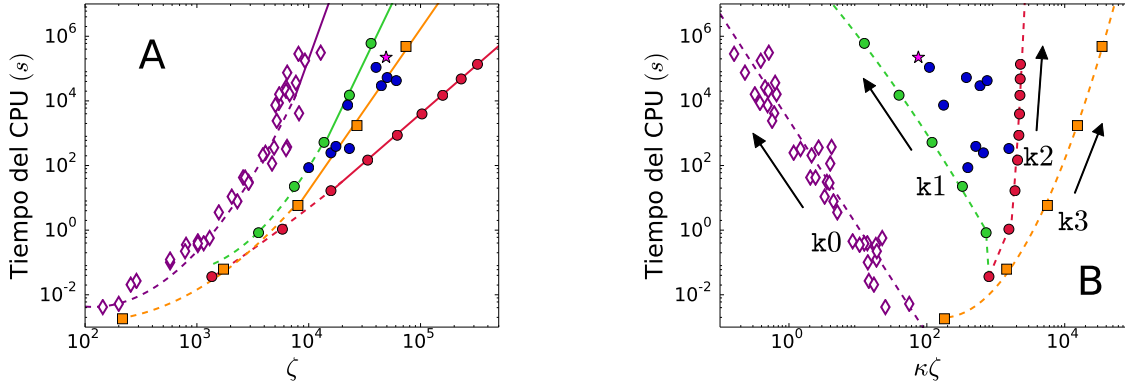


Figura 2.3: A.- Tiempo del CPU empleado por el Algoritmo 5 para producir el grafo de salida, como función del tamaño de entrada ζ . B.- Como función de la variable de entrada-salida combinada $\kappa\zeta$

de ejecución crecen con $\kappa\zeta$. Así, concluimos que el Algoritmo 5 presenta su mejor rendimiento en familias degeneradas con grafos densamente conectados, como las familias k_2 y k_3 .

El Algoritmo 5 consta de dos procedimientos fundamentales. El primero es la línea 6 del Algoritmo 5, que resuelve la degeneración para determinar (a) los rayos extremos de los conos y (b) los puntos extremos vecinos. El otro procedimiento es un recorrido exhaustivo a través de los puntos extremos. El procedimiento del recorrido es el Algoritmo 5 en si, excluyendo el tiempo empleado por la línea 6. La siguiente prueba determina en cuál de los dos procedimientos el Algoritmo 5 consume la mayor parte de tiempo.

La fracción del tiempo del CPU empleada para recorrer el conjunto de puntos extremos se muestra en la figura 2.4-A como función del tamaño de entrada ζ . Los sistemas degenerados con grafos densamente conectados son los puntos que siguen la línea punteada inferior en la figura 2.4-A, mientras que los sistemas que siguen la línea punteada superior son aquellos que presentan una enorme cantidad de vértices pobremente conectados. En estos últimos el recorrido a través de los puntos extremos se torna más largo que resolver la degeneración conforme crece el valor de ζ .

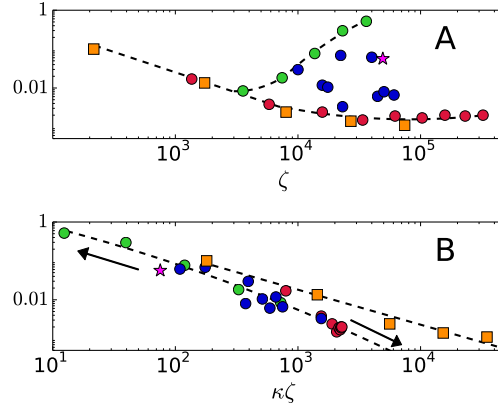


Figura 2.4: Fracción del tiempo del CPU consumida por el Algoritmo 5 para recorrer el conjunto de puntos extremos. A.- Como función del tamaño de la entrada ζ . B.- Como función de la variable combinada $\kappa\zeta$.

Considerando la variable combinada $\kappa\zeta$, la fracción de tiempo empleada en el recorrido decrece monótonicamente, como se muestra en la figura 2.4-B, donde las flechas apuntan en la dirección de crecimiento de ζ . El tiempo del recorrido nunca es mayor al 10 % del tiempo del CPU para sistemas con valores de $\kappa\zeta \gtrsim 100$. Para los sistemas de la familia k2 el Algoritmo 5 toma sólo el 0.17 % del tiempo para completar el recorrido: 99.83 % del tiempo es usado para resolver la degeneración. Como conclusión de esta prueba tenemos que la complejidad recae enteramente sobre la degeneración de el problema de conversión cuando $\kappa\zeta > 100$, sin importar el número de vértices $|V|$.

La última prueba que presentamos es una comparación entre los tiempos de ejecución de el Algoritmo 5 contra los tiempos empleados por nuestra propia implementación de el algoritmo de Balinski [23] basado meramente en el símplex. La figura 2.5 nos muestra esta comparación para los sistemas que fueron resueltos por el algoritmo de Balinski en menos de 50 horas. El Algoritmo 5 exhibe un rendimiento varios órdenes de magnitud mejor que el de Balinski. Por ejemplo el sistema de no-señalización representado por el punto azul en la figura 2.5 se obtuvo

la capacidad de los modos de comunicación y de la cantidad de aleatoriedad compartida entre las partes. Este es el tema de estudio del siguiente capítulo.

Capítulo 3

Geometría del politopo de correlaciones para el escenario de Bell

En este capítulo daremos una descripción detallada de la geometría del politopo de correlaciones para el escenario de Bell. Esta descripción, que se obtiene a partir de la información brindada por el Algoritmo 5, es la base para concretizar las máquinas binarias aleatorias que reproducen las correlaciones cuánticas para el montaje de Bell, las cuales se diseñarán en el siguiente capítulo.

Empezaremos por resolver la descripción de no-señalización del politopo de correlaciones correspondiente al escenario de Bell, en el cual dos observadores tienen dos opciones binarias, $x_1, x_2 \in \{0, 1\}$, $\omega_1, \omega_2 \in \{0, 1\}$, para realizar sus mediciones. Este caso corresponde a la medición de correlaciones cuánticas por parte de dos observadores que comparten un par de partículas de spin-1/2 en estado singlete, con cada observador contando con dos direcciones de cuantización arbitrarias como opciones de medición.

Este escenario puede adoptar una de dieciséis configuraciones $(\omega_1\omega_2|x_1x_2)$, cada una con probabilidad $P(\omega_1\omega_2|x_1x_2)$. No todas estas probabilidades son independientes pues están rela-

cionadas por medio de las condiciones de normalización -ecuación (1.4)-B-, $\sum_{\omega_1\omega_2} P(\omega_1\omega_2|x_1x_2) = 1$, una para cada $x_1x_2 \in \{0,1\}^2$, y mediante las condiciones de no-señalización impuestas sobre las probabilidades marginales -ecuación (1.4)-C-,

$$P(\omega_1|x_1) := \sum_{\omega_2} P(\omega_1\omega_2|x_10) = \sum_{\omega_2} P(\omega_1\omega_2|x_11),$$

$$P(\omega_2|x_2) := \sum_{\omega_1} P(\omega_1\omega_2|0x_2) = \sum_{\omega_1} P(\omega_1\omega_2|1x_2).$$

El conjunto de estas restricciones sobre las probabilidades conforma un sistema lineal de ecuaciones que deja un conjunto de 8 probabilidades independientes. Las 16 condiciones de no-negatividad $P(\omega_1\omega_2|x_1x_2) \geq 0$ -ecuación (1.4)-A-, al ser escritas en términos de las 8 probabilidades independientes constituyen la descripción de no-señalización de el politopo binario bipartita [7].

La solución a esta descripción, que se obtiene mediante la aplicación de el Algoritmo 5, resulta ser un politopo de dimensión afín 8 incrustado en un espacio Euclidiano de dimensión 16, donde cada coordenada corresponde a el valor de una probabilidad $P(\omega_1\omega_2|x_1x_2)$. El esqueleto de este politopo se compone de 24 vértices interconectados por 168 aristas. A cada vértice corresponde una caja de no-señalización pura que se caracteriza por una distribución de probabilidad sobre su conjunto de entradas y salidas. Así, las coordenadas de los vértices representan valores específicos de las probabilidades $P(\omega_1\omega_2|x_1x_2)$ para cada configuración $(\omega_1\omega_2|x_1x_2)$. Algunas de las características más notables de este politopo son dibujadas en la figura 3.1.

Dieciséis de estos vértices corresponden a correlaciones locales deterministas (no aleatorias) pues sus coordenadas sólo toman los valores de 0 o 1 (coordenadas deterministas). Estos vértices son denotados como $B_{\alpha a \beta b}$, indexados con la palabra binaria $\alpha a \beta b \in \{0,1\}^4$. Las

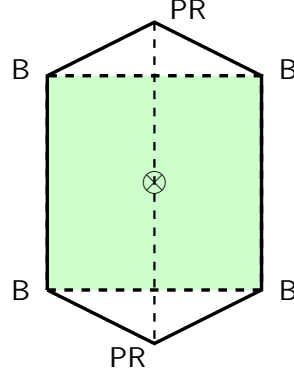


Figura 3.1: Representación esquemática de el politopo de correlaciones de no-señalización para el escenario de Bell. Los vértices locales son etiquetados con la letra B mientras que los vértices no-locales PR son etiquetados como PR.

coordenadas del 16-vector $B_{\alpha a \beta b}$ son las probabilidades dadas por

$$P_{\beta b}^{\alpha a}(\omega_1 \omega_2 | x_1 x_2) = (\omega_1 + \alpha x_1 + a + 1) (\omega_2 + \beta x_2 + b + 1) . \quad (3.1)$$

La suma de variables binarias en (3.1) y en adelante es modulo 2. Las probabilidades marginales $P_{\beta b}^{\alpha a}(\omega_i | x_i)$ para los vértices locales $B_{\alpha a \beta b}$, derivadas a partir de (3.1), son 1 cuando la condición

$$\omega_1 = \alpha x_1 + a , \quad \omega_2 = \beta x_2 + b \quad (3.2)$$

correspondiente a la parte i se cumple y 0 en caso contrario. Nótese que las relaciones de e/s en (3.2) no entremezclan partes distantes, lo que concuerda con la hipótesis de realismo local [4]. Así, cada vértice $B_{\alpha a \beta b}$ representa una caja de no-señalización pura cuya distribución de probabilidad es local y determinista. En términos de las cajas de no-señalización la ecuación (3.2) nos dice que las cajas con $\alpha = 0$ ($\beta = 0$) tienen salidas ω_1 (ω_2) no son sensibles al parámetro de entrada x_1 (x_2), mientras que las cajas con $\alpha = 1$ ($\beta = 1$) presentan salidas ω_1 (ω_2) sensibles al parámetro de entrada x_1 (x_2). Los vértices locales $B_{\alpha a \beta b}$ son dibujados en la

figura 3.1 como puntos etiquetados con una 'B'.

La cubierta convexa de los 16 vértices locales $B_{\alpha a \beta b}$ es el politopo de correlaciones locales, conocido como el politopo de Bell, el cual es un sub-politopo de el politopo binario bipartita [2, 7]. Este politopo tiene dimensión afín completa 8 y es representado por el cuadrado verde en la figura 3.1. Todas las cajas de no-señalización con distribuciones de probabilidad deterministas-locales quedan dentro de este politopo.

Ocho de las caretas de el politopo de Bell corresponden a las desigualdades de CHSH [1], por lo que son la frontera entre las cajas con distribuciones de probabilidad deterministas-locales y las cajas con distribuciones aleatorias-no-locales. Las caretas CHSH del politopo de Bell son denotadas como $\mathcal{C}_{ijk}$ e indexadas por la palabra binaria $ijk \in \{0, 1\}^3$. La careta $\mathcal{C}_{ijk}$ es la cubierta convexa de ocho vértices locales $B_{\alpha a \beta b}$

$$\mathcal{C}_{ijk} = \text{conv}\{B_{\alpha a \beta b} : (\alpha + j)(\beta + i) + (a + b) + ij = k\}. \quad (3.3)$$

En la tabla de la figura 3.2 el renglón ijk constituye la función característica de la careta $\mathcal{C}_{ijk}$ sobre el conjunto de vértices $B_{\alpha a \beta b}$: si la entrada en la columna $\alpha a \beta b$ es un 1, entonces el vértice $B_{\alpha a \beta b}$ es uno de los ocho vértices locales que conforman la careta $\mathcal{C}_{ijk}$. Las caretas $\mathcal{C}_{ijk}$ son representadas por los segmentos punteados que conectan los B-vértices en la figura 3.1.

Los otros ocho vértices de el politopo binario bipartita corresponden a correlaciones no-locales aleatorias. Estos se denotan como R_{ijk} , y son indexados por la palabra binaria $ijk \in \{0, 1\}^3$. Los ocho vértices R_{ijk} son los únicos vértices no-locales de el politopo binario bipartita. Cada vértice R_{ijk} constituye una caja pura de correlaciones PR no-locales, también conocidas como cajas-PR [5]. Las coordenadas de el 16-vector R_{ijk} son las probabilidades dadas por

$$P_{ijk}(\omega_1 \omega_2 | x_1 x_2) = \frac{1}{2} (\omega_1 + \omega_2 + (x_1 + i)(x_2 + j) + k + 1). \quad (3.4)$$

$\underbrace{ijk}_{\downarrow}$	00	00	01	01	00	00	01	01	10	10	11	11	10	10	11	11	$\leftarrow \alpha a$
	00	01	00	01	10	11	10	11	00	01	00	01	10	11	10	11	$\leftarrow \beta b$
000	1	0	0	1	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	
001	0	1	1	0	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	
010	1	0	0	1	0	1	1	0	1	0	0	1	1	0	0	1	
011	0	1	1	0	1	0	0	1	0	1	1	0	0	1	1	0	
100	1	0	0	1	1	0	0	1	0	1	1	0	1	0	0	1	
101	0	1	1	0	0	1	1	0	1	0	0	1	0	1	1	0	
110	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	0	1	1	0	
111	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	1	0	0	1	

Figura 3.2: Tabla de adyacencias de los ocho vértices no-locales R_{ijk} . Una arista que conecta el vértice no-local R_{ijk} con el vértice local $B_{\alpha a \beta b}$ es indicada con un 1.

Estas probabilidades no son cero si, y sólo si

$$\omega_1 + \omega_2 = (x_1 + i)(x_2 + j) + k . \quad (3.5)$$

A diferencia de los vértices locales, las probabilidades marginales para los vértices no-locales R_{ijk} , derivadas a partir de (3.4), son máximamente aleatorias: $P_{ijk}(\omega_1|x_1) = P_{ijk}(\omega_2|x_2) = 1/2$. Las ocho relaciones referidas por (3.5) constituyen una caracterización de las correlaciones-PR causales elementales asociadas a cualquier escenario binario bipartita. Estas ocho relaciones difieren por transformaciones binarias locales que mantienen a las partes totalmente correlacionadas.

En términos de cajas de no-señalización, las relaciones en (3.5) nos brindan la parametrización

$$\omega_1 = r , \quad \omega_2 = r + k + (x_1 + i)(x_2 + j) , \quad (3.6)$$

donde r es una variable aleatoria que toma su valor en $\{0, 1\}$ con $1/2$ de probabilidad cada

una. Con esta parametrización es posible ver que en aislamiento la salida ω_1 leída por la parte 1 es máximamente incierta para ella. Sin embargo, tomada como parte de la palabra de salida $\omega_1\omega_2 \in \{0, 1\}^2$, las salidas de las cajas-PR en (3.6) están perfectamente correlacionadas ($\omega_1 + \omega_2 = 0$) o bien perfectamente anti-correlacionadas ($\omega_1 + \omega_2 = 1$) de acuerdo con (3.5). La no-localidad de las cajas-PR se vuelve evidente en la representación adoptada por la relación de e/s (3.6) en el hecho de que los dos extremos de la caja están inter-conectados: la salida ω_2 en la parte 2 depende del valor x_1 asignado a la entrada en la parte 1. Los vértices no-locales R_{ijk} son representados en la figura 3.1 como puntos con la etiqueta 'PR'.

Cada vértice no-local R_{ijk} tiene aristas que lo conectan con los ocho vértices $B_{\alpha\alpha\beta b}$ ubicados sobre la careta $\mathcal{C}_{ijk}$ del politopo de Bell identificada con la misma palabra binaria ijk . Las adyacencias entre los vértices R_{ijk} y los vértices $B_{\alpha\alpha\beta b}$ son dados por (3.3) y mostrados en la tabla de la figura 3.2. Los vértices R_{ijk} no tienen ninguna arista entre ellos en el esqueleto. Cada vértice no-local R_{ijk} junto con sus ocho vértices locales $B_{\alpha\alpha\beta b}$ adyacentes conforman un 8-símplex, también identificado por la palabra binaria ijk . Este 8-símplex tiene su punta en el vértice R_{ijk} y su base en la careta $\mathcal{C}_{ijk}$, por lo que es exterior al politopo de Bell. Todas las cajas de no-señalización con distribuciones de probabilidad no-locales están contenidas dentro de estos 8-símplices. El politopo binario bipartita es entonces la unión de los ocho 8-símplices no-locales y el politopo de Bell. Los 8-símplices son representados como triángulos sin colorear en la figura 3.1.

Los cuatro pares de vértices no-locales R_{ij0} y R_{ij1} , $ij \in \{0, 1\}^2$, aparecen como pares de vértices antípodos relativos al baricentro G del politopo binario bipartita, el cual se encuentra en $(1, \dots, 1)/4$. La cubierta convexa de los vértices no-locales R_{ijk} tiene dimensión afín 4 solamente, pero contiene al baricentro G del politopo. Esta situación es representada en la figura 3.1 por el segmento punteado que conecta los vértices PR. El símbolo " $\otimes$ " señala el baricentro del politopo.

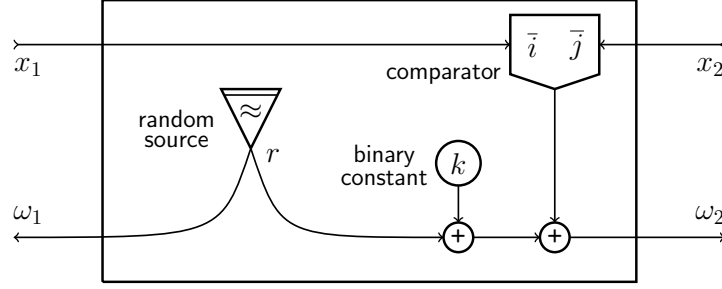


Figura 3.3: Representación esquemática de las cajas-PR parametrizadas por la palabra binaria $ijk \in \{0, 1\}^3$. La fuente aleatoria produce un valor de 0 o 1, con $1/2$ de probabilidad cada uno. Si $x_1 x_2 = \bar{i} \bar{j}$ el comparador alimenta al sumador con un 1, de modo que la caja entrega la salida $\omega_2 = r + k + 1$. En caso contrario, la salida será $\omega_2 = r + k$.

Todos los vértices locales $B_{\alpha\alpha\beta b}$ se encuentran a una distancia $\sqrt{3}$ del baricentro G , mientras que todos los vértices no-locales R_{ijk} se encuentran a una distancia 1 del baricentro G . Así, la esfera que soporta a los vértices locales $B_{\alpha\alpha\beta b}$ es de radio mayor que la esfera que soporta a los vértices no-locales R_{ijk} . Sin embargo, los vértices R_{ijk} son exteriores al politopo de Bell. Ambas esferas son concéntricas al baricentro.

3.1. Concretización de las cajas-PR

Las relaciones de e/s adoptadas en (3.6) nos permiten diseñar modelos de las cajas-PR en términos de instancias ordinarias (no cuánticas), como se muestra esquemáticamente en la figura 3.3.

Las ocho cajas-PR son parametrizadas en un único esquema que distingue entre cajas por medio de la palabra binaria $ijk \in \{0, 1\}^3$. La variable aleatoria r que aparece en las relaciones e/s (3.6) es suministrado por la fuente aleatoria en el esquema, con la misma probabilidad asignada al 0 y al 1. El bit producido por la fuente aleatoria es compartido por los dos extremos de la caja-PR. Luego, siempre que los valores de entrada x_1 y x_2 , fijados por las partes 1 y 2 respectivamente, cumplen con $x_1 x_2 = \bar{i} \bar{j}$, el comparador alimenta al sumador con un 1 y

la caja entrega la salida $\omega_2 = r + k + 1$. De otra manera, la salida será $\omega_2 = r + k$. Esta es la no-localidad más fuerte alcanzable con las cajas de no-señalización en el escenario de Bell: cualquier mezcla diluye la no-localidad PR.

La concretización de las cajas PR en términos de instancias ordinarias y una fuente aleatoria es la base para diseñar una máquina binaria que reproduzca las correlaciones cuánticas en el escenario de Bell. El diseño y construcción de estas máquinas es el tema de estudio del siguiente capítulo.

Capítulo 4

Construcción de máquinas binarias aleatorias

En este capítulo diseñaremos una máquina binaria aleatoria que reproduce, en promedio, las correlaciones cuánticas generadas por el estado singlete para el escenario de Bell en un montaje particular. Los componentes de esta máquina se basan en las cajas puras correspondientes a los vértices del politopo binario bipartita, obtenidos mediante la aplicación de el Algoritmo 5 y descritos en el capítulo anterior.

4.1. Descripción del escenario correlacional de Bell

El escenario de Bell es un escenario binario con dieciséis configuraciones $(\omega_1\omega_2|x_1x_2)$, donde x_i y ω_j , $i = 1, 2$, toman un valor binario. Este escenario corresponde al caso donde dos observadores, que llamaremos Alice y Bob, acuerdan compartir un par de partículas en estado singlete $|s\rangle = 2^{-1/2}(|0\rangle|1\rangle - |1\rangle|0\rangle)$ para llevar a cabo la medición de correlaciones entre estas. En el montaje Alice es la parte $i = 1$ y Bob es la parte $i = 2$. Para ajustarse al escenario

de Bell, tanto Alice como Bob sólo cuentan con dos opciones o parámetros de medición cada uno. Las dos opciones de medición de Alice, $x_1 \in \{0, 1\}$, son asociadas a los dos 3-vectores $\vec{a}_{x_1}$ sobre la esfera unitaria para proceder con una de las dos mediciones binarias $\sigma_{\vec{a}_{x_1}} \equiv \vec{a}_{x_1} \cdot \vec{\sigma}$. De la misma manera, las dos opciones de medición de Bob, $x_2 \in \{0, 1\}$, son asociadas a los dos 3-vectores $\vec{b}_{x_2}$ sobre la esfera unitaria, lo cual le permite realizar las mediciones $\sigma_{\vec{b}_{x_2}}$. El escenario de Bell queda completamente establecido cuando Alice y Bob acuerdan restringir sus opciones de 3-vectores para formar dos marcos ortogonales 2-d coplanares, $\vec{a}_0 \cdot \vec{a}_1 = \vec{b}_0 \cdot \vec{b}_1 = 0$, rotados un ángulo θ tal que $\vec{a}_0 \cdot \vec{b}_0 = \vec{a}_1 \cdot \vec{b}_1 =: \cos \theta$. Las salidas del experimento son $\omega_1, \omega_2 \in \{0, 1\}$, con el bit de salida $\omega_i = 0$ ($\omega_i = 1$) asociado al estado de spin-arriba (spin-abajo).

Desde el comienzo, Alice y Bob conocen el estado $|s\rangle$ que comparten, el ángulo θ entre los marcos de sus vectores de entrada y sus dos opciones de medición para elegir. En cada corrida experimental Alice y Bob eligen una opción o parámetro de medición x_1 y x_2 y obtienen las salidas ω_1 y ω_2 , respectivamente.

El entrelazamiento contenido en el estado singlete $|s\rangle$ produce salidas adjuntas $\omega_1\omega_2$ que están correlacionadas no-localmente, incluso si los dos eventos de medición están separados espacialmente. Con el fin de cuantificar el grado de no-localidad generado por el estado singlete para este montaje, Alice y Bob deben medir la correlación entre las salidas por medio de la función de correlación $\langle x_1x_2 \rangle$, definida como [1]

$$\langle x_1x_2 \rangle = P(00|x_1x_2) + P(11|x_1x_2) - P(01|x_1x_2) - P(10|x_1x_2). \quad (4.1)$$

La función de correlación (4.1) es una medida de que tan correlacionadas ($\omega_1 + \omega_2 = 0$) o tan anti-correlacionadas ($\omega_1 + \omega_2 = 1$) están las salidas ω_1 y ω_2 . Por lo tanto, el valor que toma esta función para este montaje es lo que Alice y Bob deben determinar.

La expresión (4.1) requiere del conocimiento de las 16 probabilidades $P(\omega_1\omega_2|x_1x_2)$ aso-

ciadas a los eventos $(\omega_1\omega_2|x_1x_2)$. La teoría cuántica asigna a estas 16 configuraciones las probabilidades

$$Q(\omega_1\omega_2|x_1x_2) = \langle s|T(\omega_1|x_1) \otimes T(\omega_2|x_2)|s\rangle = \frac{1}{4} \left(1 - (-1)^{\omega_1+\omega_2} \vec{a}_{x_1} \cdot \vec{b}_{x_2} \right), \quad (4.2)$$

donde $T(\omega_i|x_i) = (1/2)(\mathbb{I} + (-1)^{\omega_i} \sigma_{\vec{v}_{x_i}})$ son las proyecciones ortogonales. Estas probabilidades son necesarias para obtener el valor de la función de correlación (4.1) que predice la teoría cuántica para el montaje de Bell.

Las probabilidades $Q(\omega_1\omega_2|x_1x_2)$ en (4.2) determinan las coordenadas de un 16-vector $Q = Q(\theta)$ en el mismo 16-espacio de probabilidad en el que vive el politopo binario bipartita de correlaciones sin señalización. Las coordenadas de este punto determinan la distribución de probabilidad sobre el conjunto de entradas y salidas de la caja de no-señalización correspondiente a este montaje del escenario de Bell, por lo que son la base de nuestro arreglo simulado (recordemos que θ es el ángulo entre los dos marcos ortogonales que forman los vectores elegidos por Alice y Bob).

4.2. Descripción geométrica de la órbita de Q

La órbita trazada en el 16-espacio por el punto cuántico $Q(\theta)$ para el montaje de Bell descrito anteriormente es el círculo

$$Q(\theta) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \theta \, \mathbf{x} + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \theta \, \mathbf{y}, \quad (4.3)$$

donde $\mathbf{x} = (\mathbf{R}_{101} - \mathbf{R}_{010})/\sqrt{2}$ y $\mathbf{y} = (\mathbf{R}_{101} - \mathbf{R}_{011})/\sqrt{2}$ son los vectores unitarios en el 16-espacio. Esta órbita $Q(\theta) \in [0, 2\pi] \ni \theta \mapsto Q(\theta)$ queda ubicada dentro del politopo binario

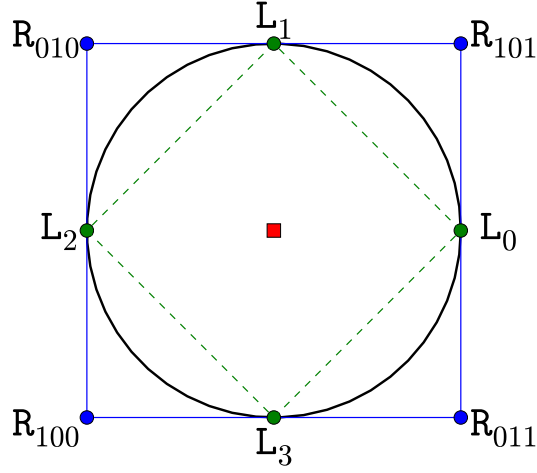


Figura 4.1: Probabilidades cuánticas $Q(\theta)$ para un e -bit en el escenario de Bell en el espacio de las correlaciones sin-señalización.

bipartita. El conocer su posición relativa a los vértices de este politopo es el punto de partida de la simulación.

La situación geométrica de la órbita cuántica $Q(\theta)$ descrita por (4.3) se retrata en la figura 4.1. La cubierta convexa de los cuatro vértices no-locales $\{R_{101}, R_{010}, R_{100}, R_{011}\}$ es una sección transversal 2-dimensional S de el politopo binario bipartita, correspondiente al cuadrado más grande en la figura 4.1. Esta sección transversal S soporta al círculo $Q(\theta)$. El baricentro de el politopo también es soportado por S y se muestra como un punto cuadrado rojo. La sección S intersecta el politopo de Bell en el cuadrado delimitado por los cuatro segmentos punteados en la figura 4.1, que conectan los puntos L_0, L_1, L_2 y L_3 . Los segmentos punteados representan los puntos de intersección de S con las caretas $\mathcal{C}_{ijk}$ del politopo de Bell correspondientes a los vértices $R_{101}, R_{010}, R_{100}$ y R_{011} .

La órbita $Q(\theta)$ se mueve por fuera del politopo de Bell atravesando los cuatro 8-símplices no-locales con punta en $R_{101}, R_{010}, R_{100}$ y R_{011} y cuyas bases son soportadas por las cuatro caretas $\mathcal{C}_{ijk}$ que intersectan S en los segmentos punteados. La intersección de los 8-símplices con S son los cuatro triángulos que tocan los puntos L_0, L_1, L_2 y L_3 . Todos los puntos en la

órbita cuántica circular (4.3) mostrados en la figura 4.1, excepto las esquinas de el B-cuadrado (L_0, L_1, L_2, L_3) , son no-locales.

Los vértices no-locales R_{101} , R_{010} , R_{100} y R_{011} y las esquinas de el B-cuadrado L_0 , L_1 , L_2 y L_3 son los puntos extremos que se requieren para escribir la órbita cuántica $Q(\theta)$ en coordenadas baricéntricas. Esto lo haremos a continuación para el primer cuadrante, $\theta \in [0, \pi/2]$, cuando $Q(\theta)$ se ubica en interior del 8-símplex 101.

Al expresar $Q(\theta)$ en términos de los nueve vértices del 8-símplex 101 (ver tabla de la figura 3.2), obtenemos las coordenadas baricéntricas de $Q(\theta)$

$$Q(\theta) = (\cos \theta + \sin \theta - 1)R_{101} + (1 - \sin \theta)L_0 + (1 - \cos \theta)L_1, \quad (4.4)$$

donde los 16-vectores locales $L_0 = (1/4)(B_{1110} + B_{0001} + B_{1011} + B_{0100})$ y $L_1 = (1/4)(B_{0011} + B_{1101} + B_{1000} + B_{0110})$ son los puntos extremos de la curva $\theta \mapsto Q(\theta)$, $\theta \in [0, \pi/2]$ en el primer cuadrante. Las coordenadas de los puntos L_0 y L_1 se calculan usando las coordenadas de los vértices $B_{\alpha\alpha\beta b}$, dadas por (3.1), ubicados sobre la careta $\mathcal{C}_{101}$ (ver tabla de la figura 3.2). Ambos puntos extremos se encuentran sobre esa careta. Los puntos L_0 y L_1 corresponden a cajas locales en el límite de la no-localidad. Dado que tanto L_0 como L_1 son puntos locales, podemos expresar su suma como un único punto local, denotado como $L(\theta)$, tal que

$$L(\theta) = s_0(\theta)L_0 + s_1(\theta)L_1, \quad (4.5)$$

con

$$s_0(\theta) = \frac{1 - \sin \theta}{2 - \cos \theta - \sin \theta}, \quad s_1(\theta) = 1 - s_0(\theta). \quad (4.6)$$

Así, en términos de un único vector local $L(\theta)$ y un único vector no-local R_{101} , la expresión

para el punto $Q(\theta)$ queda

$$Q(\theta) = (\cos \theta + \sin \theta - 1) R_{101} + (2 - \sin \theta - \cos \theta) L(\theta) , \quad (4.7)$$

Dentro del símplex, la representación baricéntrica (4.7) de el punto $Q(\theta)$ es  nica. Esta representación es la base de el montaje binario aleatorio para la simulación de las correlaciones cuánticas de nuestro escenario de Bell.

4.3. Construcción de las máquinas binarias aleatorias

Ahora procederemos con la construcción de una máquina aleatoria causal (MAC) que reproduzca en promedio las correlaciones cuánticas propias de el vector de probabilidad $Q(\theta)$ dado por (4.2) para el estado singlete. Las relaciones aleatorias de e/s que describen esta MAC est n condicionadas por el hecho de que el punto cuántico Q puede expresarse como la combinación de el punto local L (el cual es una mezcla de vértices locales) y del vértice no-local R_{101} . Por lo tanto, la MAC que reproduce las correlaciones del punto Q consta de dos partes, de acuerdo con la representación baricéntrica en (4.7): la primera, correspondiente al punto L , produce correlaciones locales mientras que la segunda, correspondiente al punto R_{101} , produce correlaciones PR no-locales.

Las máquinas que dise naremos para reproducir las correlaciones de el escenario descrito anteriormente tienen dos bits de entrada, x_1 y x_2 , y reaccionan produciendo dos bits aleatorias, digamos w_1 y w_2 , los cuales son función de los valores escogidos en las entradas y de alguna aleatoriedad "generada internamente". El comportamiento promedio de una máquina aleatoria en este escenario es descrito por una matriz de transición 4×4 cuyas entradas son las probabilidades de los eventos $(w_1, w_2 | x_1 x_2)$, $w_1 w_2 \in \{0, 1\}^2$.

Para la matriz de transición correspondiente al punto p, la entrada localizada en el cruce de la fila indexada por la palabra binaria x_1x_2 y la columna indexada por la palabra binaria $\omega_1\omega_2$ (las palabras binarias son ordenadas lexicográficamente) corresponde a la coordenada $P(\omega_1\omega_2|x_1x_2)$ de ese punto p. Así, la entrada en la fila x_1x_2 y la columna $\omega_1\omega_2$ se toma como la probabilidad de el evento $(w_1 = \omega_1, w_2 = \omega_2|x_1x_2)$. La matriz de transición define la acción promedio de una máquina aleatoria, y es lo que se ha de encontrar.

Empezaremos por construir la máquina que reproduzca las correlaciones para el vector local L y posteriormente ensamblaremos esta con la máquina R_{101} para formar la MAC que reproduce las correlaciones cuánticas del vector Q para nuestro montaje de Bell.

4.3.1. La caja local L

Las matrices de transición correspondientes a los vectores de probabilidad locales L_0 y L_1 , vienen dadas por

$$L_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} \quad y \quad L_1 = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}. \quad (4.8)$$

Las relaciones de e/s para estas cajas L_0 y L_1 son modeladas por

$$\begin{aligned} \omega_1 &= x_1 r_1 + r_2, & \omega_2 &= x_2 r_1 + r_2 + 1, & \text{para } L_0; \\ \omega_1 &= (x_1 + 1) r_1 + r_2, & \omega_2 &= x_2 (r_1 + 1) + r_2 + 1, & \text{para } L_1; \end{aligned} \quad (4.9)$$

donde r_1 y r_2 son variables aleatorias binarias con iguales probabilidades para 0 y 1. Se necesitan

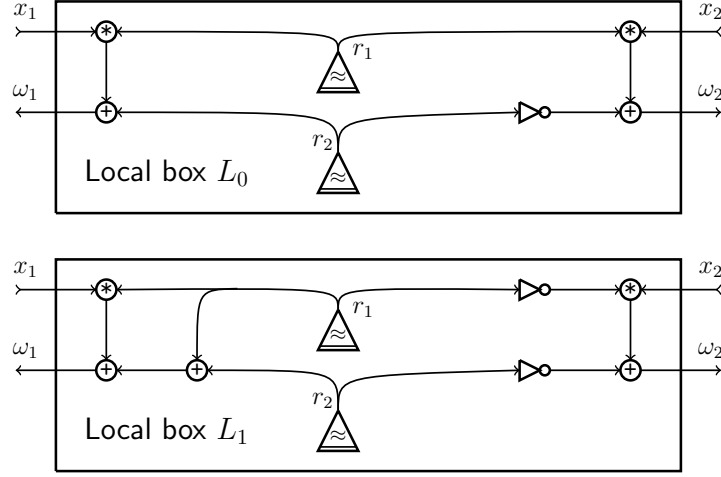


Figura 4.2: Representación esquemática de las cajas de no-señalización L_0 y L_1 que se juntan para replicar las correlaciones locales de la caja L . Dentro de la caja L una misma fuente produce los bits aleatorios r_1 y r_2 para ambas máquinas. Las probabiidades de transición de ambas cajas están dadas por (4.8).

dos bits aleatorios compartidos r_1 y r_2 para reproducir las filas de las matrices de transición L_0 y L_1 en (4.8) sin entradas con 0. Las relaciones en (4.9) se obtienen a partir de relaciones de e/s para las cajas locales puras que adoptamos en (3.2). La figura 4.2 nos muestra una representación esquemática de las cajas para L_0 y L_1 .

Nuestra conjetura, probada en el Lema 4.3.1, es que la matriz de transición obtenida a partir de la mezcla local $L = s_0 L_0 + s_1 L_1$ (4.5) es reproducida en promedio por la MAC con las relaciones de e/s

$$u_1 = (x_1 + s)r_1 + r_2, \quad u_2 = x_2(r_1 + s) + r_2 + 1, \quad (4.10)$$

donde r_1 y r_2 son bits aleatorios igualmente distribuídos. Usaremos la notación u_1 y u_2 para referirnos a los bits de salida de la máquina local L . Con el fin de reproducir las correlaciones locales de el vector L (4.5), el bit aleatorio s en (4.10) compartido por ambas partes debe adoptar las probabilidades $P(s = 0) = s_0(\theta)$ y $P(s = 1) = s_1(\theta)$ dadas por los coeficientes

en (4.6). De esta manera, cuando $s = 0$ la máquina L arroja la salida de la caja L_0 , y cuando $s = 1$ arroja la salida de la caja L_1 , de acuerdo con (4.9) y (4.10). El rendimiento deseado de los bits de salida aleatorios u_1 y u_2 en (4.10) se prueba a continuación.

Lema 4.3.1 (Caja local L). *Las probabilidades de transición $P(\omega_1 = u_1, \omega_2 = u_2 | x_1, x_2)$ de la máquina aleatoria definida por (4.10) reproducen las entradas de $L = s_0 L_0 + s_1 L_1$.*

Demostración. La prueba procede por cálculo de las deciséis probabilidades de transición $P(\omega_1 = u_1, \omega_2 = u_2 | x_1, x_2)$, cada una de las cuales es la suma de las probabilidades de todos los tripletes (s, r_1, r_2) de bits aleatorios independientes que producen el evento $(\omega_1 = u_1, \omega_2 = u_2 | x_1, x_2)$ al ser insertadas en (4.10). Este cálculo reproduce las entradas de la matriz $L = s_0 L_0 + s_1 L_1$ cuando r_1 y r_2 están igualmente distribuídas y s tiene probabilidades s_0 y $s_1 = 1 - s_0$ dadas por (4.6). $\square$

Los bits aleatorios r_1 , r_2 y s que comparten las cajas L_0 y L_1 son producidos por una fuente común y comunicados a los extremos de la caja L. Sin embargo, no hay ninguna clase de comunicación entre los extremos de la caja, como se aprecia en la figura 4.2, lo que concuerda con la separabilidad de las correlaciones locales.

4.3.2. La caja no-local R_{101}

Además de la máquina L, la otra caja necesaria para reproducir las correlaciones de pares cuánticas generadas por el estado singlete en el escenario de Bell es la caja R_{101} de correlaciones PR no-locales, modelada por la relación

$$z_1 = r, \quad z_2 = r + (x_1 + 1)x_2 + 1. \quad (4.11)$$

Esta relación fue tomada de (3.6) con $ijk = 101$. La representación esquemática de esta caja

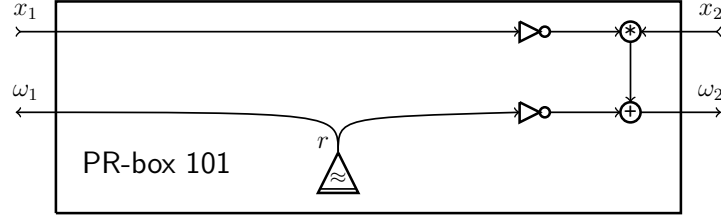


Figura 4.3: Representación esquemática de la caja R_{101} en términos de una fuente de aleatoriedad compartida y componentes ordinarios. Las salidas están correlacionadas por medio de la relación $\omega_1 + \omega_2 = (x_1 + 1)x_2 + 1$.

en términos de constituyentes ordinarios se muestra en la figura 4.3.

Dentro del arreglo global los bits de salida de la caja R_{101} son denotados como z_1 y z_2 . Estos bits están perfectamente correlacionados por medio de la condición $z_1 + z_2 = (x_1 + 1)x_2 + 1$, aún cuando el bit z_1 es máximamente aleatorio, como se muestra en (4.11).

4.3.3. Mezclando la cajas L y R_{101}

Una vez diseñadas las MAC para L y R_{101} , ahora procederemos con el ensamble de la máquina binaria aleatoria que reproduzca las correlaciones cuánticas del punto Q.

Las unidades por ensamblar son tres. Dos de ellas son bloques locales, denotados como A y B , que contienen los extremos de la caja L. Estos bloques comparten el cuarteto de bits aleatorios independientes $\lambda = (t, s, r_1, r_2)$, los cuales son producidos por una fuente común. El tercer elemento por ensamblar es la caja PR R_{101} , la cual provee una unidad (1 *nl*-bit) de correlaciones no-locales causales entre los bits distantes z_1 y z_2 , los cuales obedecen la relación $z_1 + z_2 = (x_1 + 1)x_2 + 1$ (4.11). Estos bits son utilizados como entrada de los bloques A y B , como se muestra en la esquematización de la figura 4.4. Así, la única conexión entre los extremos es a través de la caja R_{101} (recordemos que las correlaciones de la caja L son locales, y por tanto no requieren comunicación entre los extremos de la caja). Con este ensamble, los

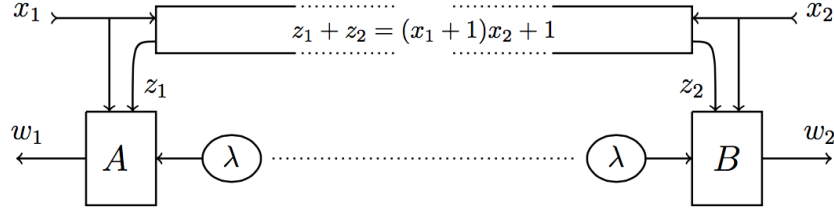


Figura 4.4: Máquina binaria aleatoria compartida por Alice y Bob para simular las correlaciones cuánticas no-locales causales de un e -bit en el escenario de Bell. La máquina-PR es la fuente de las correlaciones elementales que son completamente no-locales pero que preservan la causalidad.

bloques locales A y B producen los bits de salida

$$\begin{aligned} w_1 &= z_1 + t(u_1 + z_1) , & \text{para el bloque } A , \\ w_2 &= z_2 + t(u_2 + z_2) , & \text{para el bloque } B , \end{aligned} \quad (4.12)$$

donde los bits u_i y z_i son producidos por la caja L (4.10) y la caja R_{101} (4.11), respectivamente.

Nuestra conjetura, probada en el Teorema 4.3.1, es que el vector de probabilidad cuántico Q en (4.7) es reproducido por la combinación (4.12) cuando la variable aleatoria binaria t adopta las probabilidades

$$t_0 \equiv P(t = 0) = \cos \theta + \sin \theta - 1 \quad , \quad t_1 \equiv P(t = 1) = 2 - \cos \theta - \sin \theta \quad , \quad (4.13)$$

las cuales corresponden a los coeficientes de los puntos R_{101} y L en (4.7). Así, cuando $t = 0$ los bloques A y B arrojarán las salidas de la caja no-local R_{101} , $w_i = z_i$, mientras que cuando $t = 1$ estos bloques arrojarán las salidas de la caja local L , $w_i = u_i$. De esta modo, la lista de bits aleatorios independientes λ es generada asumiendo las probabilidades (4.13) para el bit t y las probabilidades (4.6) para el bit s , mientras que los dos bits r_1 y r_2 se asumen como igualmente distribuídos.

El ensamble binario global para simular las correlaciones cuánticas no-locales causales de

un e -bit en el escenario de Bell, esquematizado en la figura 4.4, tiene como entrada los bits x_1 y x_2 y como salida los bits de salida w_1 y w_2 . La estadística producida por este montaje reproduce exactamente los valores de expectación cuánticos dados por (4.2), como se muestra en el siguiente teorema.

Theorem 4.3.1. (i) *El arreglo de simulación antes descrito reacciona con probabilidades de transición $P(\omega_1 = w_1, \omega_2 = w_2 | x_1 x_2) = \langle s | T(\omega_1 | x_1) \otimes T(\omega_2 | x_2) | s \rangle$, dadas por (4.2).*
(ii) *La probabilidad de que los bits de salida de el arreglo simulado estén correlacionados no-localmente es $P(w_1 = z_1, w_2 = z_2 | x_1 x_2) = \cos \theta + \sin \theta - 1$.*

Demostración. Parte (i). La probabilidad de cada uno de los eventos de la máquina ($w_1 = \omega_1, w_2 = \omega_2 | x_1 x_2$) es la suma de las probabilidades de los vectores binarios aleatorios (s, t, r_1, r_2, z_1) que comprenden, de acuerdo a las especificaciones de (4.12), ese evento. Un cálculo exhaustivo de los cálculos produce

$$P(w_1 = \omega_1, w_2 = \omega_2 | x_1 x_2) = \begin{cases} \frac{1}{4} (1 - (-1)^{\omega_1 + \omega_2} \cos \theta), & x_1 x_2 = 00, 11 \\ \frac{1}{4} (1 + (-1)^{\omega_1 + \omega_2} \sin \theta), & x_1 x_2 = 01, 10 \end{cases}, \quad (4.14)$$

lo cual coincide con los valores de expectación para las mediciones proyectivas en (4.2).

Parte (ii). Fijemos primero $t = 1$ en las relaciones de entrada-salida (4.12). Luego, las dos salidas w_1 y w_2 son independientes de z_i y el evento ($w_1 = z_1, w_2 = z_2 | x_1 x_2$) resulta imposible. Por otro lado, el valor $t = 0$ hace $w_i = z_i$ para cualesquier valores que tome el vector aleatorio (s, r_1, r_2) y la palabra de entrada $x_1 x_2$. Hemos probado así que $P(w_1 = z_1, w_2 = z_2 | x_1 x_2) = P(t = 0) = \cos \theta + \sin \theta - 1$. $\square$

El Teorema 4.3.1 nos proporciona la probabilidad de que los bits de salida de la máquina PR queden expuestos directamente como los bits de salida del montaje de simulación dibujado

en la figura 4.4. La probabilidad es la misma para cualquier elección de la palabra de entrada x_1x_2 . De otra manera los bits de salida están localmente correlacionados por medio de los bits aleatorios compartidos.

En el esquema que acabamos de describir la caja no-local R_{101} es usada una fracción t_0 de las veces, fracción que nunca es mayor a $\sqrt{2} - 1 \approx 0.41$. Por lo tanto, la cota superior proporcionada por nuestro modelo para el grado de no-localidad causal promedio de un e -bit en el escenario de Bell es de $\sqrt{2} - 1 \approx 0.41$ nl -bits, como se estableció en (1). Este grado máximo de no-localidad inherente al estado singlete en el escenario de Bell se alcanza cuando $\theta = \pi/4$. Dado que la representación baricéntrica (4.7) es única, el arreglo de simulación de la figura 4.4 es el más económico y la cota superior que establece para este montaje es exacta.

Así, nuestro arreglo muestra que unos cuantos bits aleatorios compartidos entre los extremos de las cajas y una caja-PR son ingredientes necesarios y suficientes para replicar las correlaciones de pares producidas por el entrelazamiento del estado singlete en el montaje de Bell.

La figura 4.5 muestra las funciones de correlación obtenidas en las corridas experimentales realizadas usando la máquina binaria aleatoria descrita por el Teorema 4.3.1. Cada punto en la gráfica representa 100,000 corridas experimentales para esa configuración. Para el ángulo θ se adoptaron valores que van desde 0 hasta $\pi/2$ en intervalos de $\pi/40$. Los resultados obtenidos para $\langle 00 \rangle$ y $\langle 11 \rangle$ se muestran como puntos rojos; para $\langle 01 \rangle$ como puntos verdes; y para $\langle 10 \rangle$ como puntos azules. Las líneas punteadas representan las funciones de correlación predichas por la teoría cuántica, las cuales adoptan los valores de

$$\langle x_1x_2 \rangle_Q = \begin{cases} -\cos \theta, & x_1x_2 = 00, 11 \\ (-1)^{x_1} \sin \theta, & x_1x_2 = 01, 10 \end{cases} \quad (4.15)$$

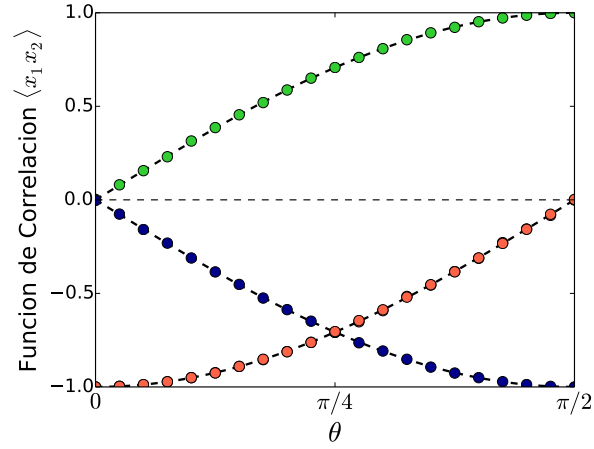


Figura 4.5: Funciones de correlación $\langle x_1 x_2 \rangle$ entregadas por la máquina binaria aleatoria simulada con componentes ordinarios. Las líneas punteadas indican las predicciones cuánticas de las funciones de correlación $\langle x_1 x_2 \rangle$ para el arreglo (4.15), en tanto que los puntos indican los resultados de nuestra simulación: los puntos rojos para $\langle 00 \rangle$ y $\langle 11 \rangle$; los puntos verdes para $\langle 01 \rangle$ y los puntos azules para $\langle 10 \rangle$.

para nuestro montaje. Estas funciones se calculan al sustituir los valores de (4.2) en la ecuación (4.1). Como se aprecia en la figura, las salidas de nuestro arreglo simulado coinciden con las funciones de correlación cuánticas para este escenario de Bell.

Conclusiones y persepectivas

En esta tesis hemos mostrado mediante un ejemplo cómo exponer y cuantificar el grado de no-localidad causal inherente a escenarios correlacionales cuánticos finitos en términos de el conjunto completo de correlaciones causales elementales que es establecido por el enfoque de la no-señalización.

Para desplegar el poder del enfoque de la no-señalización hemos desarrollado una herramienta computacional que nos permite obtener el conjunto completo de correlaciones causales elementales aportadas por un escenario correlacional, representadas en forma de cajas puras, a partir de la descripción de no-señalización para ese escenario. Este algoritmo es una combinación de técnicas de la literatura con una nueva estrategia. Las pruebas realizadas mostraron que este procedimiento resulta muy eficiente para construir los esqueletos de politopos altamente degenerados de las correlaciones sin-señalización. Prueba de ello es el gran número de escenarios correlacionales que hemos caracterizado usando esta herramienta. Esta caracterización reveló que la degeneración mostrada por las familias de politopos de no-señalización constituye una nueva clase de degeneración, la cual puede ser usada como patrón de referencia en estos problemas de conversión. Por esta razón merece ser estudiada.

Una observación sobre las pruebas realizadas utilizando el Algoritmo 5 en descripciones sin-señalización es que la mayor parte del tiempo de ejecución del programa (porcentajes mayores al 60 %) es usada en resolver la degeneración presente en los vértices de máxima degeneración,

los cuales corresponden en todos los casos a cajas locales. De aquí concluimos dos cosas: (i) Si pudiéramos calcular los puntos extremos vecinos de los vértices locales sin recurrir a algoritmos de conversión (por ejemplo con una fórmula), obtendríamos una mejora considerable en los tiempos de conversión de las descripciones sin señalización. (ii) Existe una relación entre la degeneración de los vértices y el grado de no-localidad que sus correspondientes correlaciones causales presentan. Este último punto es de gran interés pues permitiría medir el grado de no-localidad desde el momento de la conversión, sin necesidad de recurrir a condiciones como las desigualdades CHSH. Además, la degeneración nos brindaría un criterio sencillo para identificar y clasificar el grado de no-localidad de las correlaciones causales extremas.

La utilidad de conocer el conjunto de correlaciones elementales proporcionado por el marco teórico de la no-señalización se ilustró mediante el estudio del escenario de correlacional de Bell. Entre las cosas que este estudio nos permitió se encuentran: (a) una clasificación de las cajas puras para ser locales o no-locales; (b) escribir fórmulas para las relaciones de entrada/salida de las cajas puras; (c) identificar nuevas formas de no-localidad y sus correspondientes zonas en el conjunto de estados de probabilidad, zonas que son delimitadas desigualdades de Bell generalizadas; (d) concretizar cajas puras usando componentes ordinarios (no-cuánticos), tales como modos de comunicación y aleatoriedad compartida entre las partes; (e) modelar cualquier caja cuántica como una mezcla de cajas de no-señalización puras; (f) cuantificar la intensidad de la no-localidad cuántica por medio de la capacidad de los modos de comunicación y *la cantidad de aleatoriedad compartida* por las distintas partes en el modelo más económico.

Para la clase de escenarios binarios bipartitas la única correlación no-local en el conjunto de correlaciones elementales es la correlación-PR. Por lo tanto, la no-localidad inherente a cualquier escenario correlacional bipartita cuántico se puede expresar en términos de una única correlación no-local PR, sin requerir ningún canal de comunicación clásico. Sin embargo, nuestro estudio de una gran variedad de politopos de no-señalización reveló que, salvo los politopos de

la familia k_2 , el resto de los politopos de no-señalización estudiados presentan correlaciones no-locales distintas a las PR. Aunque algunas de estas correlaciones ya son conocidas [7], aún falta una mejor caracterización y entendimiento de muchas otras. El uso de una herramienta de conversión como la aquí desarrollada hace factible caracterizar y concretizar los distintos tipos de correlaciones extremas de acuerdo a su grado de no-localidad en escenarios correlacionales de mayor tamaño, de manera análoga a lo hecho aquí para el escenario de Bell. Por otra parte, la introducción de nuevos tipos de correlaciones no-locales implican la aparición de nuevos tipos de desigualdades tipo-Bell. Esta clase de desigualdades se puede obtener a partir de la adyacencia de las cajas extremas puras, misma que también es proporcionada por nuestra herramienta de conversión.

Un caso de interés es la clase de escenarios tripartitas [9] pues hace falta una mejor comprensión sobre las correlaciones que se presentan en estos escenarios. Un ejemplo de esto es el argumento de la monogamia [42, 43, 36], el cual nos dice que en estos escenarios deben aparecer nuevas formas de correlaciones no-locales tripartitas, además de las correlaciones PR, con el fin de impedir que dos partes conspiren para aprender algo sobre la tercera.

El arreglo de simulación para un e -bit que diseñamos estableció una cota superior de no-localidad $\sqrt{2} - 1$ nl -bits para el estado singlete en un montaje de Bell. El siguiente paso en la construcción de estos modelos iría en la dirección opuesta: a partir de la configuración propuesta por Gisin [44], la cual maximiza la violación de las desigualdades CHSH, buscaríamos (i) cuantificar el grado de no-localidad para el estado $|\psi\rangle = \sin \beta |01\rangle + e^{i\alpha} \cos \beta |10\rangle$, donde β mide el grado de entrelazamiento y α es una fase adicional; y (ii) determinar el estado que maximiza la no-localidad para ese montaje. Nuestra conjetura es que la cota superior de no-localidad para este arreglo es la misma que la obtenida para nuestro montaje actual. Una conjetura aún mayor es que esta cota de no-localidad es la máxima para cualquier escenario de Bell, sin importar el montaje o estado cuántico del par entrelazado. Esperamos que el diseño

de estos montajes junto con la determinación de su cota superior de no-localidad nos ayuden a entender por qué la mecánica cuántica presenta ese grado de no-localidad y no uno mayor.

Bibliografía

- [1] J.F. Clauser, M.A. Horne, A. Shimony and R.A. Holt, "Proposed experiment to test local hidden-variable theories", Phys. Rev. Lett. **23**, 880–884 (1969).
- [2] A. Fine, "Hidden variables, joint probability, and the Bell inequalities", Phys. Rev. Lett. **48**, 291-295 (1982).
- [3] A. Fine, "Joint distributions, quantum correlations, and commuting observables", J. Math. Phys. **23**, 1306 (1982).
- [4] J.S. Bell, "On the Einstein Podolsky Rosen paradox", Physics (Long Island City, NY) **1** 195–200 (1964).
- [5] S. Popescu and D. Rohrlich, "Quantum nonlocality as an axiom", Found. Phys. **24**, 379–385 (1994).
- [6] J. Barrett *et al.*, "Nonlocal correlations as an information-theoretic resource", Phys. Rev. A **71** 022101 (2005).
- [7] W. Brunner *et al.*, "Bell nonlocality", Rev. Mod. Phys. **86**, 419-478 (2014).
- [8] J. Barrett and S. Pironio, "Popescu-Rohrlich correlations as a unit of nonlocality", Phys. Rev. Lett. **95**, 140401 (2005).

- [9] S. Pironio, J.-D. Bancal and V. Scarani, "Extremal correlations of the tripartite no-signaling polytope", *J. Phys. A: Math. Theor.* **44**, 065303 (2011).
- [10] L. A. Khalfi and B. S. Tsirelson, in *Symposium on the Foundations of Modern Physics*, edited by P. Lahti and P. Mittelstaedt (World Scientific, Singapore, 1985), pp. 441-460.
- [11] T. Fritz, "Polyhedral duality in Bell scenarios with two binary observables", *J. Math. Phys.* **53**, 072202 (2012).
- [12] R. F. Werner and M. M. Wolf, "Bell inequalities and entanglement", *Quant. Inf. Comp.* **1**, 1 (2001).
- [13] M. Froissard, "Constructive generalization of Bell's inequalities", *Nuovo Cimento B* **64**, 241-251 (1981).
- [14] C. Sliwa, "Symmetries of the Bell correlation inequalities", *Phys. Lett. A* **317**, 165-168 (2003).
- [15] D. Collins *et al.*, "Bell inequalities for arbitrarily high-dimensional systems", *Phys. Rev. Lett.* **88**, 040404 (2002).
- [16] D. Collins and N. Gisin, "A relevant two qubit Bell inequality inequivalent to the CHSH inequality", *J. Phys. A: Math. Gen.* **37**, 1775-1787 (2004).
- [17] J. Barrett, A. Kent and S. Pironio, "Maximally nonlocal and monogamous quantum correlations", *Phys. Rev. Lett.* **97**, 170409 (2006).
- [18] M. L. Almeida, J.-D. Bancal, N. Brunner, A. Acín, N. Gisin and S. Pironio, "Guess your neighbor's input: A multipartite nonlocal game with no quantum advantage", *Phys. Rev. Lett.* **104**, 230404 (2010).

- [19] H. Buhrman *et al.*, "Nonlocality and communication complexity", *Rev. Mod. Phys.* **82**, 665-698 (2010).
- [20] A. Garg and N. D. Mermin, "Farkas lemma and the nature of reality, statistical implications of quantum correlations", *Found. Phys.* **14**, 1-39 (1984).
- [21] I. Pitowski, "The range of quantum probability", *J. Math. Phys.* **27**, 1556-1565 (1986).
- [22] G.B. Dantzig, A. Orden and P. Wolfe, "The generalized simplex method for minimizing a linear form under linear inequality restraints", *Pacific J. Math.* **5** 183-195 (1955).
- [23] M. L. Balinski, "An algorithm for finding all vertices of convex polyhedral sets." *J. SIAM* **9**, 72-88 (1961).
- [24] D. Avis, D. Bremner, and R. Seidel, "How good are convex hull algorithms?", *Comput. Geom.* **7**, 265-301 (1997).
- [25] T. Gal, "On the structure of the set bases of a degenerate point." *J. Optimiz. Theory Appl.* **45**, 577-589 (1985).
- [26] T. Gal and F. Geue, "A new pivoting rule for solving various degeneracy problems", *Ops. Res. Lett.* **11**, 23-32 (1992).
- [27] T. S. Motzkin, H. Raiffa, G. L. Thompson, and R. M. Thrall, "The double description method", in *Contributions to the Theory of Games* Vol. 2, edited by H. W. Kuhn and A. W. Tucker (Princeton University Press, 1971).
- [28] K. Fukuda and A. Prodon, "Double description method revisited", *Combinatorics Comp. Sci.* **1120**, 91-111 (1996).

- [29] J. Stelling, S. Klamt, K. Bettenbrock, S. Schuster and E.D. Gilles, "Metabolic network structure determines key aspects of functionality and regulation", *Nature* **420**, 190–193 (2002).
- [30] J. Gagneur and S. Klamt, "Computation of elementary modes: A unifying framework and the new binary approach", *BMC Bioinformatics* **5** 175 (2004).
- [31] Yuval Hart *et al.*, "Inferring biological tasks using Pareto analysis of high-dimensional data", *Nature Methods*, Vol. **12**, No. 3, pp. 233–235, March 2015.
- [32] Zidong Wang *et al.*, "On delayed genetic regulatory networks with polytopic uncertainties: robust stability analysis", *IEEE Transactions on nanobioscience*, Vol. **7**, No. 2, June 2008.
- [33] Armando J. R. Amaris and Murray P. Cox, "A flexible theoretical representation for the temporal dynamics of structured populations as paths on polytope complexes", *J. Math. Biol.* **71**, 735–766 (2015)
- [34] J.M. Méndez and J. Urías, "On the no-signaling approach to quantum non-locality", *J. Math. Phys.* **56**, 032101 (2015).
- [35] J. M. Méndez and Jesús Urías, "An algorithm for the skeleton graph of extreme points of degenerate systems of linear inequalities", submitted for publication in *International Journal of Modern Physics C*.
- [36] N. J. Cerf, N. Gisin, S. Massar and S. Popescu, "Simulating maximal quantum entanglement without communication", *Phys. Rev. Lett.* **94**, 220403 (2005).
- [37] D. Bohm and Y. Aharonov, "Discussion of Experimental Proof for the Paradox of Einstein, Rosen and Podolsky", *Phys. Rev.* **108**, 1070 (1957).

- [38] Richard A. Brualdi, "Combinatorial matrix theory" in *Handbook of linear algebra*, Second Edition (Discrete Mathematics and Its Applications), edited by Leslie Hogben. Chapman & Hall / CRC (2014).
- [39] Igor Pak, "Four Questions on Birkhoff Polytope", *Annals of Combinatorics* **4**, 83–90 (2000).
- [40] N. Yu. Zolotykh, "New modification of the double description method for constructing the skeleton of a polyhedral cone", *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2012, Vol. 52, No. 1, pp. 146-156.
- [41] S. Pironio, "Lifting Bell inequalities", *J. Math. Phys.* **46**, 062112 (2005).
- [42] D. Dieks, "Communication by EPR devices", *Phys. Lett.* **92A**, 271 (1982).
- [43] V. Scarani and N. Gisin, "Quantum communication between N partners and Bell's inequalities", *Phys. Rev. Lett.* **87**, 117901 (2001).
- [44] N. Gisin, "Bell's inequality holds for all non-product states", *Phys. Lett. A*, Volume 154, number 5,6, April 1991.