

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE SAN LUIS POTOSÍ



**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA
DE SAN LUIS POTOSÍ**



**UASLP
Instituto de Física**

CRÍTICA DE LA COHERENCIA CUÁNTICA MACROSCÓPICA
O LA VIOLACIÓN DEL REALISMO A ESCALA MACROSCÓPICA

T E S I S

PARA OBTENER EL GRADO DE:

Maestro en Ciencias (Física)

Presenta: **Ángel Adrián Bravo Gutiérrez**

Asesor: Dr. Jesús Urías Herosillo

Agosto, 2017

INSTITUTO DE FÍSICA



Instituto de Física "Manuel Sandoval Vallarta"
Universidad Autónoma de San Luis Potosí

**EXAMEN DE GRADO
MAESTRÍA EN CIENCIAS (FÍSICA)**

SUSTENTANTE:

L.F. ÁNGEL ADRIÁN BRAVO GUTIÉRREZ

TÍTULO:

**“Crítica de la coherencia cuántica macroscópica,
o la violación del realismo a escala macroscópica”**

DIRECTORES DE TESIS:

Dr. Jesús Urías Hermosillo

JURADO QUE ACEPTA LA TESIS:

Dr. Jesús Urías Hermosillo

Dr. Eduardo Gómez García

Dr. Edgardo Ugalde Saldaña

Dr. Ricardo Alberto Guirado López

Dr. Martín Chávez Páez

Coordinador del Posgrado en Ciencias (Física)



FECHA: 30 de agosto, 2017.

*Salió fuera y miró el cielo. Llovían estrellas.
Lamentó aquello porque hubiera querido ver un cielo quieto.
- Juan Rulfo*

Resumen

La idea de preparar objetos macroscópicos en una superposición coherente de estados macro motivó a Leggett y a Garg (LG) proponer un protocolo experimental para poner a prueba un sistema de tres hipótesis de macro-realismo [1]. Su expectativa fue que, un resultado positivo de la prueba LG equivaldría a una violación del realismo (la hipótesis R1) a escala macroscópica.

En nuestro análisis del planteamiento LG exponemos dos cosas.

(1) Para que la prueba LG aporte un testimonio de no-realismo es necesario que las mediciones empleadas no perturben al sistema bajo prueba.

(2) Es imposible sacar información de un sistema cuántico sin perturbarlo.

La contradicción entre (1) y (2) nos lleva a la conclusión de abandonar el discurso del macro-realismo y extraer lo sustancialmente sano en la prueba LG, que son los correlatores temporales.

Abandonando el discurso del macro-realismo, obtenemos dos fórmulas para los correlatores LG cuánticos: una con amplitudes de probabilidad y otra con observables dicotómicos. Nuestras derivaciones son rigurosas en el caso de mediciones proyectivas simples, demostrando así la salud de los correlatores temporales en mecánica cuántica, lo que nos permitió dar a la prueba LG una perspectiva meramente cuántica.

Estudiamos dos experimentos reportados en la literatura. Uno es el proceso de decoherencia cuántica de la precesión de espines en resonancia magnética nuclear [2] y en el otro demostramos la acción perturbadora de las mediciones negativas en un caminante aleatorio atómico (un átomo de Cesio en una retícula óptica) [3].

Los ejemplos nos permitieron concluir que la prueba LG es una buena sonda de la interacción de los sistemas micro con el entorno macro. Como un “certificado de coherencia” el correlator LG tendría valor en aplicaciones de la teoría de información cuántica. Otra aplicación es como medida de la pérdida de coherencia hacia el entorno macro.

Índice general

Resumen	III
Capítulo 1. Introducción	1
1-1. Los niveles micro y macro del mundo físico	1
1-1.1. La tesis	2
1-2. Los dos lados de la brecha	2
1-2.1. La fenomenología macro	2
1-2.2. La fenomenología micro	3
1-3. Cuatro actitudes ante la brecha micro/macro	4
1-3.1. Universalidad cuántica	4
1-3.2. Realismo	4
1-3.3. La Escuela de Copenhage	5
1-3.4. Sincretismo cuántico-realista	5
1-4. Explorando la brecha micro/macro	5
1-4.1. El método “micro versus macro”	5
1-4.2. El enfoque macro-realista de Leggett y Garg (LG)	6
1-5. Resultados obtenidos y plan de ruta	9
Capítulo 2. La prueba LG versus las hipótesis de macro-realismo	13
2-1. El protocolo experimental de la prueba LG	14
2-1.1. La necesidad de mediciones no-invasivas	14
2-1.2. Las dos etapas de la prueba LG	14
2-2. ¿Qué pone a prueba la prueba LG?	15
2-2.1. El correlator LG y la desigualdad LG	17
2-2.2. Protocolo LG mínimo.	18
2-3. Interpretación para los sistemas macro	18
2-4. Sistemas macro deterministas	20
2-4.1. Variables y trayectorias dicotómicas	20
2-5. El caminante aleatorio unidimensional	23
2-5.1. La desigualdad LG	24

Capítulo 3. El correlator LG en sistemas cuánticos	27
3-1. Correlatores a dos tiempos para un sistema cuántico	27
3-1.1. Los correlatores cuánticos C_{12} y C_{13}	28
3-1.2. El correlator cuántico C_{23}	29
3-2. Forma operacional de los correlatores	31
3-3. Los correlatores a dos tiempos y la coherencia cuántica	32
3-4. El protocolo LG como medida de coherencia	33
3-5. El correlator K_3 y la coherencia cuántica	34
Capítulo 4. El acto de medir sistemas cuánticos	37
4-1. ¿Cuál coherencia cuántica macro?	38
4-2. Las mediciones negativas y la preparación de estados cuánticos	40
4-3. Las mediciones libres de interacción	41
4-4. La prueba LG y las mediciones no-invasivas	41
Capítulo 5. La prueba LG para espines nucleares en precesión	43
5-1. Cálculo de los correlatores C_{lm} y K_3	43
5-1.1. Cálculo con amplitudes	44
5-1.2. Cálculo con operadores	45
5-2. Teoría y experimento	45
5-3. ANEXO: Anticonmutadores en la representación de Heisenberg	48
5-3.1. La representación de Heisenberg de σ_3	48
5-3.2. Los anticonmutadores	49
Capítulo 6. La prueba LG para un caminante aleatorio atómico	51
6-1. Evolución unitaria a tiempo discreto	52
6-2. Los observables dicotómicos	53
6-3. La medición negativa de \hat{Q}_2 al tiempo t_2	53
6-4. La secuencia temporal de la prueba LG	54
6-4.1. La evolución de t_2 a t_3	54
6-4.2. La evolución libre de t_1 a t_3	54
6-5. Distribuciones de la probabilidad sobre la retícula al tiempo final	55
6-6. Invalidación del lema 2-2.1	55
6-7. Los correlatores LG cuánticos: teoría y experimento	57
6-8. La desigualdad LG y conclusiones	59
Capítulo 7. Comentarios finales	61
7-1. Conclusiones	61

	Índice general	vii
7-2.	Perspectivas	61
	Bibliografía	63

Capítulo 1

Introducción

1-1. Los niveles micro y macro del mundo físico

El *mundo físico* lo percibimos dividido en dos niveles: un nivel “realista” al que llamaremos “macro” y un nivel “cuántico” al que llamaremos “micro”. La diferencia exhibida por los comportamientos de los sistemas micro y macro es sustancial. No se trata de una diferencia de aproximación, hay una “ruptura” entre lo micro y lo macro y no es una exageración decir que están separados por una brecha. La mecánica clásica aporta las leyes para describir la dinámica de los cuerpos macro cuando se ven sometidos a un sistema de fuerzas. Los fenómenos al nivel micro los describe la mecánica cuántica. Las dos teorías son complementarias.

En cuanto a la terminología “micro-macro”, esta nos llega de los orígenes de la mecánica cuántica [4] —a principios del siglo pasado— y seguimos haciendo un uso ambiguo de ella, ya que no es el tamaño lo que distingue a un sistema cuántico (micro) de uno no-cuántico (macro).

La distinción entre lo micro y lo macro radica en nuestra capacidad de mantener al sistema micro (cuántico) en un ambiente perfectamente controlado (un montaje experimental, por ejemplo, proporciona un medio ambiente controlado por nosotros) y aislado del otro medio ambiente “térmico” (ruidoso y sin control). La situación de control debemos sostenerla por el tiempo que dure un experimento sobre el sistema micro. Ejemplos de sistemas micro de gran tamaño lo constituyen los pares de fotones enlazados cuánticamente y separados a distancias de decenas de kilómetros [5, 6, 7] y las oscilaciones de neutrinos que persisten (al menos) a distancias interplanetarias [8]. Más difícil en la práctica es mantener y detectar la coherencia de objetos constituidos de un gran número de elementos (partículas). Se han obtenido patrones de interferencia con objetos tan masivos como los fullerenos C_{60} [9] y otras moléculas orgánicas [10, 11]. En principio, el tamaño no es el criterio para ser “micro”.

Haremos en la tesis uso de los términos micro y macro, por su conveniencia taquigráfica (nos sentimos más cómodos con ellos que con “cuántico” y “no-cuántico”), pero para evitar las ambigüedades no olviden que cuando digamos que un

sistema es micro —*independientemente de su tamaño*— estaremos diciendo que su disipación (perdida de coherencia, o simplemente decoherencia) es imperceptible en el lapso de tiempo que dura un experimento.

1-1.1. La tesis. Ofrece una revisión crítica del enfoque del macro-realismo según es caracterizado y promovido por Leggett y Garg (LG) [1], utilizando correlatores temporales de los sistemas (macro o micro) en evolución para poner a prueba la llamada “coherencia cuántica macroscópica”. Este concepto lo aclaramos en la Sección 4-1.

Nuestra crítica también la dirigimos a las posibles aplicaciones de los correlatores temporales como instrumento que pudiera arrojar alguna luz sobre la fenomenología en y naturaleza de la zona de la brecha micro-macro. Para ello, en la Sección 5 y en el Capítulo 6 presentamos la teoría y analizamos con esta perspectiva dos realizaciones experimentales de la prueba LG. Una de resonancia magnética nuclear [2] y la otra sobre un átomo de Cesio como un caminante aleatorio cuántico [3].

Al designar la tesis como una “crítica” estamos incluyendo en la palabra los siguientes asuntos: entender la fundamentación, exponer las ventajas y las limitaciones del enfoque LG, llegar a una conclusión y plantear una perspectiva. En este sentido, los resultados principales a los que hemos llegado los enumeramos en la Sección 1-5, junto con una exposición de la ruta que seguimos en la tesis para conseguirlos y discutirlos.

1-2. Los dos lados de la brecha

1-2.1. La fenomenología macro. Según la percibimos es consistente con nuestra predisposición a pensar que nuestras sensaciones (observaciones) son “estimuladas” por las propiedades físicas en los objetos (bien definidas a cada instante). El supuesto asigna a las propiedades físicas una “existencia real”, independiente de quien las mire (mida) o no las mire (no mida). Así que al conjunto de todas sus propiedades podríamos llamarlo su “esencia óptica”, que solo a él pertenece. A este supuesto se le llama objetividad o realismo.

Que las propiedades de un objeto constituyan una realidad ligada íntimamente al objeto es consistente (e inseparable) con el hecho de que al observar (mirar) un objeto no alteramos sus propiedades. Esto nos permite distanciarnos de los objetos —yo soy yo y eso es eso— lo que traducimos en el principio de que podemos experimentar con los objetos, observando cómo se comportan *sin perturbar*

su propia dinámica. De manera similar a cuando miramos en su intimidad a los peces nadando en su pecera. A esta posibilidad se le llama mensurabilidad inocua.

El tiempo en la fenomenología macro está asociado a la relación asimétrica causa-efecto, según la cual un evento presente no influye en un evento pasado. Este es el principio de *causalidad* según el cual el pasado ya está escrito. Para ser consistentes con el supuesto de que no existe un origen del tiempo (invariancia bajo traslaciones en el tiempo), es necesario admitir que eventos futuros no tienen influencia sobre los eventos presentes.

En la Sección 1-4.2 presentamos y discutimos cómo estos tres principios —realismo, mensurabilidad inocua y causalidad— presentes en la fenomenología macro son adaptados como hipótesis de trabajo por Leggett y Garg [1, 12] para, a partir de ellas, proponer una prueba de no-realismo para los sistemas físicos. La prueba LG la presentamos en el Capítulo 2.

1-2.2. La fenomenología micro. Es en todo diferente a la macro. Para empezar, la fenomenología micro solo emerge de las mediciones (los registros) hechas por los instrumentos necesarios para estudiar a los objetos del nivel micro. A diferencia de los objetos macro, los objetos micro no tienen propiedades que se manifiesten espontáneamente ante nuestros ojos. Es el experimentador quien decide qué propiedad del objeto y en qué circunstancias (alternativas diversas) medir. Con base en esas dos cosas el experimentador prepara un montaje ad hoc para recolectar datos.

Otra diferencia es que algunos pares de propiedades medibles a un objeto micro no pueden ser medidas simultáneamente en un mismo montaje experimental y se dice que son incompatibles: se observa una o la otra, pero no las dos a la vez. El carácter incompatible de algunas propiedades y el hecho de que el experimentador decide lo que habrá de “verse” hace ya imposible la identificación de un conjunto de propiedades (en un sentido per se) del objeto micro. Tal presunción no es consistente con los hechos.

En cuanto a las alternativas que un montaje experimental ofrece a una propiedad de interés del objeto micro, estas alternativas solo pueden ser tratadas en probabilidad, en tanto que situaciones factibles y no como un hechos consumados. Esa diferencia se refleja en que las probabilidades no son las tradicionales, sino que son amplitudes de probabilidad complejas (o simplemente amplitudes), que

son responsables de (se manifiestan en) el fenómeno de interferencia¹ en el acto de medir.

En el acto de medir se decide por (se concretiza) una de las alternativas, con probabilidad el cuadrado de la amplitud que el montaje experimental le asigna. Inmediatamente después de la medición (si esta no fue demoledora de lo micro), el objeto se encuentra, con probabilidad uno, en la alternativa que fue concretada: la distribución de amplitudes se concentra (se colapsa) en una sola de las alternativas.

En el Capítulo 3 veremos cómo todos los elementos que hemos mencionado de la fenomenología micro intervienen en el cálculo del correlator cuántico para la prueba LG de macro-realismo.

1-3. Cuatro actitudes ante la brecha micro/macro

Múltiples posturas se han tomado en relación a la brecha entre los niveles micro y macro del mundo físico. Destacamos solo las siguientes cuatro.

1-3.1. Universalidad cuántica. Es vox populi que a Schrödinger le parecía absurda la dicotomía micro-macro y argumentaba que el mundo es uno y es cuántico [14, 4]. Era un convencido de que la dicotomía debe ser una apariencia y que el “realismo” del nivel macro debe emerger a partir del carácter cuántico del mundo. La decoherencia cuántica² [15, 16] va en la perspectiva de la universalidad cuántica. Aunque también se encuentra en la literatura [17] el punto de vista contrario, que plantea la posibilidad de que la mecánica cuántica no sea la teoría correcta para describir el mundo macro y que es la creciente complejidad de los sistemas la causa de los cambios en las leyes de la física.

1-3.2. Realismo. Se dice que Einstein estaba convencido de que el avance del conocimiento llegaría a convertir a la mecánica cuántica en una teoría real-local con una dinámica determinista, similar “en espíritu óptico” a las teorías clásicas. Son famosas sus controversias con Bohr al respecto [18, 19]. Experimentos que violan las cotas establecidas por Bell han descartado al realismo como una posibilidad para los sistemas enlazados cuánticamente [5, 6] y han hecho lucir aún más como algo esencial a la brecha micro-macro. La actitud del realismo es contraria a la universalidad cuántica y los resultados experimentales nos advierten que seguir al realismo podría meternos a un callejón sin salida.

¹ Un hermoso experimento de interferencia con electrones es el de Tonomura.[13].

²Premio Nobel de Haroche y Wineland en 2012.

1-3.3. La Escuela de Copenhage. El pensamiento de Bohr y Heisenberg (calificado de pragmático) es que lo clásico y lo cuántico son dos mundos totalmente distintos y que los aparatos de medición constituyen el puente ambivalente que los conecta. En un extremo se acoplan a un sistema micro y del otro extremo aportan un “registro” de naturaleza macro: son entes ambivalentes.

Reconocía Bohr que, en un acto de medición proyectiva simple sobre un sistema micro interviene un proceso de amplificación que es seguido de una decantación micro→macro: una asimilación de lo micro al entorno macro, la cual es aleatoria e irreversible (por su carácter demoledor de lo micro).

La Escuela de Copenhage ofrece una perspectiva muy focalizada (una invitación muy concreta) a investigar en las mediciones proyectivas cómo es que manejamos los procesos de amplificación y cuál es la causa del carácter irreversible de la creación de los registros macro (la asimilación demoledora de lo micro al entorno macro).

Grandes avances han ocurrido en el estudio experimental de lo cuántico. “Nuevas” tecnologías para el manejo de átomos individuales [20, 21] y los circuitos superconductores [22], por ejemplo, están permitiendo realizar las mediciones cuánticas de una manera muy apegada a como se discuten en los libros de texto. Cuando se llegue a descifrar experimentalmente el proceso de medición, entonces se habrá zanjado la brecha micro/macro. La actitud de la Escuela de Copenhage no se contrapone conceptualmente a la universalidad cuántica.

1-3.4. Sincretismo cuántico-realista. Bohm y de-Broglie proponen una explicación no-local de lo micro, donde la posición de las partículas micro está bien determinada a todo tiempo (como en la mecánica clásica), pero su movimiento es guiado por una onda piloto que es solución de la ecuación de Schrödinger.

1-4. Explorando la brecha micro/macro

La brecha entre la fenomenología cuántica del nivel micro y el “realismo” del nivel macro es una región de la naturaleza que el avance de las técnicas experimentales está permitiendo estudiar. El campo incluye los procesos en sistemas mesoscópicos como la fotosíntesis [23], los procesos en los nano-dispositivos [24] y en los dispositivos opto-mecánicos [25] y el transporte cuántico [26].

1-4.1. El método “micro versus macro”. Una metodología de estudio, iniciada por Bell, es confrontar *cuantitativamente* nociones del lado del “realismo” con su contraparte cuántica, al otro lado de la brecha. Bell convirtió en hipótesis

de trabajo las nociones de causalidad y localidad del “realismo” de Einstein, lo que le condujo a una desigualdad que impone “cotas de conducta” a los sistemas macro.

La confrontación de las correlaciones cuánticas de sistemas enlazados cuánticamente con las nociones “realistas” de causalidad y de localidad fue la motivación que llevó a demostrar la existencia de situaciones (ejemplos) en el mundo micro que rebasan los límites impuestos por el realismo de Bell-Einstein, corroborando experimentalmente que la fenomenología cuántica es causal en promedio, siendo esencialmente no-local [5] [6].

Siguiendo el ejemplo de Bell, Leggett y Garg intentan convertir nociones intuitivas de “realismo” que son válidas al nivel macro en hipótesis de trabajo. Su primera intención fue proponer una prueba experimental (la prueba LG) que exponga (demuestre) la presencia de coherencia cuántica al nivel macro. Para ello introdujeron un *correlator*, K_3 , a tres tiempos que les daría *un criterio cuantitativo de no-realismo en pruebas experimentales*. Sin embargo, es necesario poner en claro en qué incide la prueba LG y cuales son sus implicaciones.

En el Capítulo 2 introducimos la prueba LG y su discusión nos llevará a la conclusión de que la prueba LG no pone directamente en tela de juicio la identificación de lo fenomenológico y lo óptico, que es una de las “nociones intuitivas” del mundo macro, donde la proposición “lo veo rojo si, y solo si, es rojo” es verdadera. Son nuestros Lemas 2-2.1 y 2-2.2.

1-4.2. El enfoque macro-realista de Leggett y Garg (LG). La identidad óptico-fenomenológica del “macro-realismo” la contrastan Leggett y Garg con la fenomenología del mundo micro que es descrita en la teoría cuántica mediante la superposición en el “vector de estado” de múltiples propiedades observables, pero solo una de ellas se “concreta” aleatoriamente en el acto de medir (que constituye un acto de creación, decía Juan Archibaldo Wheeler).

La fenomenología “cuántica” del mundo micro se nos aparece siendo más cautelosa que el “realismo” del mundo macro. Tratándose de un ente micro, lo más que podemos tomar como verdadero es que “si lo veo rojo, entonces es rojo”. Argumentar con base en que “lo rojo existía en el ente micro antes de ser visto” lleva a contradicciones insalvables.³

³En la literatura se llama “counterfactual reasoning” al mal hábito de llegar a “conclusiones” en asuntos cuánticos, basándose en especulaciones de lo que pudiera ser o de lo que pudiera haber ocurrido. [27] Debe tenerse en cuenta que lo único macro-realístico es lo registrado en los instrumentos. El máximo tolerable de “counterfactual reasoning” lo introduce Stapp en [28],

Para intentar llevar la confrontación a buen término, Leggett y Garg adoptan para su trabajo las nociones de “*realismo al nivel macro*” que se compendian en las siguientes tres hipótesis.

R 1. Macro-realismo: *Un sistema macroscópico con dos o más estados macroscópicamente diferenciados disponibles, estará en todo momento en uno de esos estados.*

R 2. Mensurabilidad inocua (noinvasiva): *Es posible, en principio, determinar experimentalmente el estado del sistema con una perturbación arbitrariamente pequeña de su dinámica subsecuente.*

R 3. Causalidad [12]: *El resultado de una medición sobre el sistema no está influido por lo que pudiera ser o no ser medido posteriormente.*

No consideramos a las hipótesis R como la definición de un concepto metafísico de “realismo”⁴. Solo tomamos a R1-3 como las hipótesis de trabajo de Leggett y Garg, que establecen un marco (una referencia) definido en el cual discutir una posible prueba experimental del “no-realismo” de un sistema físico: decidir en el laboratorio cuándo un ente es micro y no macro.

La hipótesis R1 suele ser referida como “objetividad”, ya que se está suponiendo que por el hecho de existir, un ente macro adopta un estado, para nosotros macroscópicamente diferenciado de otros que le son asequibles, en cada instante de tiempo; considerándose innecesario que alguien realice mediciones para corroborar que así ocurre (leer de nuevo la nota 3 al pie de la página 6). Por esto R1 también suele ser llamada “existencia *per se*”.

El elemento a priori (indefinible, como lo es un *punto* en geometría) que aparece en R1 es el de *estados macroscópicamente diferenciados*. Para que este no sea un concepto vacuo, se requiere de la hipótesis R2, que se refiere a observar sin perturbar la posterior “*evolución del sistema*”, la cual es una noción que está bien definida (solo) para sistemas macro.

adoptando para la mecánica cuántica el punto de vista pragmático de la matriz S (de la Escuela de Berkeley, distinguiendo a Geoffrey Chew quien se cuestionaba “Why should a quantum universe evolving toward a semiclassical limit be consistent?”, que podría traducirse como “¿porqué sería necesaria una teoría cuántica de la gravitación?”).

⁴ El cual, en tanto que metafísico, puede tener una multitud de otras definiciones. Tantas como autores hay, dice Peres [29]. Pensar mucho en estas cosas nos pone en el muy alto riesgo de ser tragados por la cloaca de la metafísica, algo así era la advertencia que Feynman hacía. La metafísica hay que tomarla en dosis de homeopatía.

La hipótesis R2 lleva implícita una definición que destacamos, pues será, en el Capítulo 4, motivo de inspección y discusión.

Definición implícita en R2. Una *medición no-invasiva* es la que revela el estado físico de un sistema causando una perturbación nula o arbitrariamente pequeña en la posterior “evolución del sistema”.

Ahora sí, la hipótesis R2 establece que las mediciones no-invasivas sobre entes macro *son factibles*. Se nos es permitido, por decreto, reconocer fielmente y a todo momento el estado físico (las propiedades) de un sistema macro, *sin perturbar su conducta*. En la hipótesis R2 se usa el término no-invasivo como sinónimo de no-perturbar. Aprovechamos para advertir anticipadamente que no se confundan perturbación e interacción. No son términos intercambiables.

La definición R2 es un punto sensible al llevar la prueba LG a la práctica: ¿cómo estar seguros de que el acto de medir —*independientemente de la naturaleza del experimento*— no está perturbando al sistema medido?. Algunos autores [1] intentan legitimar la hipótesis R2 aludiendo a la categoría de “medición negativa ideal”. Argumentan que el prototipo de una “medición no-invasiva” sería aquella en la que ninguno de los detectores implicados en la medición hizo *click*. El argumento esgrimido convierte a la ausencia de *clicks* en una prueba de que el acto de medir ha sido inocuo y entonces *no provocará alteraciones en los resultados de mediciones subsecuentes*.

En el Capítulo 4 veremos que hablar de una “medición no-invasiva” que es capaz de revelar información (así lo requiere la hipótesis-R2) es un contra-sentido al nivel micro (cuántico), aún en los casos en los que la medición haya sido negativa:⁵ que los detectores no hagan *click* revela información y no implica la ausencia de perturbación. Una “medición negativa” sobre un sistema micro es generalmente una medición no-demoledora y se usa para la “preparación” de un estado cuántico. La subsecuente repetición de la misma medición —negativa por necesidad— es una confirmación del estado que fue preparado. Esta segunda medición confirma y no aporta nueva información y entonces no perturba.

No deja de sorprender que aún desde el mismo punto de vista macro, hay quienes blanden el argumento de las variables ocultas contra el uso de la medición negativa ideal para “legitimar” la hipótesis-R2. Existen variables ocultas,

⁵ Un contra-ejemplo lo aporta Dicke en [30]. Él demuestra que “... momentum is also transferred when the lack of a scattered photon is used to discover that the particle is absent from the field of view of the microscope (i.e., located outside the light beam)”.

argumentan, que pudieran estar siendo perturbadas sin que el experimentador sea consciente de su propia torpeza (le llaman el *clumsiness loophole*, ¡sic!) [31].

Veremos en el Capítulo 4 que el asunto de las *mediciones sin perturbación* es más delicado que lo admitido por el gremio [1, 12] que se mueve en torno al no-realismo “expuesto” por la prueba LG. Sin embargo, en el juego formal es correcto concluir, a partir de las hipótesis R1 y R2, que *en el mundo macro* la acción de una medición es revelar —noinvasivamente— una cierta propiedad que “existe” en el ente, aún desde antes de ser observado. Las hipótesis-R nos otorgan, en el juego formal, un acceso inocuo a la esencia óptica de los objetos macro.

La última de las hipótesis LG, la R3, se refiere estrictamente al acto de medir y no a las propiedades (o modalidad de existencia) del ente. Sin embargo, la identidad de lo óptico y lo fenomenológico (las hipótesis R1 y R2) nos lleva a concluir [32] que son las mismas propiedades del ente-macro las que están determinadas por las condiciones iniciales y por su evolución temporal, exclusivamente, y que aquellas nunca son influidas por las condiciones posteriores o finales. La hipótesis R3 es una versión tipo tiempo de causalidad (en el sentido causa \rightarrow efecto, sin salir del cono de luz). En cambio, la causalidad en Bell es del tipo espacio (no hay señales más rápidas que c , la velocidad de la luz). La hipótesis R3 interviene de manera esencial en los modelos deterministas de dinámica macro descritos en la Sección 2-4.

1-5. Resultados obtenidos y plan de ruta

La prueba LG fue propuesta como un intento de dar testimonio experimental de la violación de la hipótesis R1 [12], llamada de macro-realismo, y con ella lanzarse a la búsqueda de la violación del realismo en objetos “macro”. El primer punto que necesitábamos precisar es el significado de la prueba LG como un testimonio de no-realismo. Para ello, en el Capítulo 2 introducimos el protocolo experimental para la prueba LG y, para darle cuerpo, en las Secciones 2-4 y 2-5 consideramos los sistemas macro con evolución determinista y los sistemas con evolución aleatoria o procesos estocásticos (nuestro ejemplo de sistema macro es el caminante aleatorio unidimensional).

En el Capítulo 2, nuestros lemas 2-2.1 y 2-2.2 demuestran que por definición la prueba LG da testimonio de la violación de la combinación de hipótesis $R1 \wedge R2$. Para intentar convertir este resultado en un protocolo experimental que ponga a prueba la hipótesis de realismo R1, es necesario asegurar la validez de R2, lo que a su vez requiere que el experimentador, de acuerdo a la definición implícita

en la hipótesis R2, sea capaz de realizar mediciones no-invasivas. La “desgracia” es que cualquier medición cuántica que aporte información sobre un sistema micro es invasiva por necesidad: esta es una de las conclusiones del Capítulo 3, donde calculamos las fórmulas cuánticas para los correlatores involucrados en la prueba LG.

Al finalizar el Capítulo 3 llegamos a la conclusión de que la prueba LG no aporta un testimonio de la violación, en el sistema cuántico a prueba, de la hipótesis de realismo R1. Desde la perspectiva del macro-realismo una prueba LG negativa solo informa que el sistema no es macro (pero eso ya la sabíamos). Tampoco puede la prueba LG poner en evidencia la presencia de ninguna “coherencia cuántica macro” ya que el concepto en sí mismo es una contradicción.

Es natural pues que abandonemos el discurso del macro-realismo. A partir del Capítulo 3 estudiamos la prueba LG desde la perspectiva de la mecánica cuántica. Siguiendo las definiciones introducidas al exponer el protocolo experimental de la prueba LG, en la Sección 2-1, en la Sección 3-1 damos a las correlaciones a dos tiempos (o correlatores simplemente) un sentido preciso en términos de amplitudes de probabilidad en el caso de mediciones cuánticas proyectivas. Este resultado lo presentamos como el Lema 3-1.1. Es esencial en la derivación de los correlatores cuánticos la suposición del colapso del estado cuántico como consecuencia de la medición. Así que aún siendo negativa, el colapso hace a la medición invasiva. Este tema es analizado con cierto detalle en el Capítulo 4.

Los correlatores a dos tiempos $C_{\ell m} = \langle Q_\ell Q_m \rangle$ no tienen un análogo cuántico obvio en términos de operadores (que llamaremos observables \hat{Q}_k). Tomando como punto de partida los resultados en el Lema 3-1.1 de la Sección 3-1, derivamos en la Sección 3-2 las representaciones de los correlatores $C_{\ell m}$ y el correlator LG, K_3 , basadas en la versión Heisenberg de los observables dicotómicos \hat{Q}_k . Las representaciones obtenidas son rigurosas para el caso en que las mediciones cuánticas son proyectivas y el auto-valor $Q_k = 1$ de los operadores \hat{Q}_k no es degenerado. Los resultados los presentamos como el Lema 3-2.1. Para ampliar el panorama, el caminante aleatorio atómico es sometido en el Capítulo 6 a una prueba LG que usa observables \hat{Q}_k que si son degenerados.

El sentido físico de la prueba LG cuántica lo trabajamos en la Subsección 3-3. En el Lema 3-3.1 se usan los correlatores a dos tiempos para construir el término de interferencia, R_3 , entre la amplitud de probabilidad para la transición libre (sin medición intermedia) de $Q_1 = 1$ (al tiempo t_1) a $Q_3 = 1$ al (tiempo t_3) y la amplitud de probabilidad para la misma transición pero en evolución

intervenida con una medición intermedia y “pasando” por el “canal” $Q_2 = 1$ (al tiempo t_2). Explicamos que las cotas impuestas por la desigualdad LG tienen un sentido físico directo en términos de interferencia y que la cantidad R_3 propociona una manera experimental de cuantificar la persistencia en el sistema micro de la coherencia cuántica, o bien el ritmo al que va perdiendo la coherencia. Concluimos el Capítulo 3 con nuestro argumento de que toda medición cuántica que aporta información es invasiva.

De entre las diversas modalidades que existen para las mediciones cuánticas, en el Capítulo 4 discutimos las que son relevantes para la prueba LG. Para empezar revisamos la modalidad básica de medición proyectiva simple, detallando la etapa de amplificación y la etapa de generación de los datos. De la primera concluimos que el sentido físico correcto de “coherencia cuántica macroscópica” es el estado cuántico de un sistema micro que resulta de la etapa de amplificación (siguiendo los intereses del experimentador). De la segunda concluimos que toda medición cuántica que produce un dato (un click) necesariamente incluye algún momento “demoledor”, en el que (todo o) una parte del sistema micro es asimilado al entorno macro.

En cuanto a la modalidad de las mediciones cuánticas negativas (las silenciosas, las que no producen click's) destacamos sus dos propiedades importantes: (1) la posibilidad de ser mediciones que no demuelen lo cuántico (*quantum non-demolition*) y son por tanto útiles para la preparación de estados cuánticos y (2) que siempre que aportan información son invasivas; en otras palabras, no existen mediciones negativas que sean no-invasivas. Esta última propiedad invalida (por vacuidad) los argumentos de que una “medición negativa ideal” permitiría a la prueba LG dar un testimonio de no-realismo [12] y, para nosotros, constituye el golpe definitivo contra el discurso del macro-realismo.

La prueba LG requiere de mediciones no-invasivas, que son mediciones que no perturban al sistema micro. Para tratar de cubrir todas las modalidades que pudieran sacar del hoyo al macro-realismo, en la Sección 4-3 revisamos las llamadas *mediciones libres de interacción* [30, 33, 34] y concluimos que este tipo de mediciones se refieren a una no-interacción que es irrelevante par la prueba LG. Damos por terminado el Capítulo 4 sin discutir, por falta de tiempo, la modalidad de mediciones débiles (weak measurements).

Capítulo 2

La prueba LG versus las hipótesis de macro-realismo

Empezamos el capítulo introduciendo en la Sección 2-1 el protocolo experimental de la prueba LG para estimar el correlator K_3 (LG) a lo largo de ciertos trayectos temporales de cantidades medibles a un sistema (micro o macro) que solo toman uno de dos valores posibles (les llamamos cantidades dicotómicas).

En la Sección 2-2 demostramos que la prueba LG no es, de manera directa, una prueba de no-realismo: no es una prueba de la violación de la hipótesis R1. Demostramos que, estrictamente, la prueba LG aporta un criterio para decidir sobre la validez de la combinación de hipótesis “R1 Y R2”, o bien $(R1) \wedge (R2)$. El criterio lo presentamos formalmente como el Lema 2-2.2 que establece que si $(R1) \wedge (R2)$ es verdadero entonces K_3 satisface la desigualdad LG. [1]

En la misma Sección 2-2 anticipamos la discusión sobre las condiciones que la combinación $(R1) \wedge (R2)$ impone sobre la necesidad de no-invasividad de las mediciones empleadas para que el resultado de K_3 obtenido en una prueba LG sea válido como una prueba de no-realismo, i.e., para probar —mediante la desigualdad LG— la invalidación de R1 para el sistema sometido a la prueba. El protocolo LG mínimo, suficiente para obtener un correlator K_3 significativo, lo presentamos al final de la Sección 2-2. Los trayectos que en los sistemas macro realizan para K_3 los valores establecidos como cotas de la desigualdad LG los identificamos en la Sección 2-3.

Concluimos el capítulo con la presentación de dos categorías de sistemas macro, que elegimos como ejemplos de cómo se modela en los sistemas macro los trayectos involucrados en la prueba LG. Un ejemplo lo constituyen los sistemas macro con una evolución determinista que tratamos formalmente (y en general) en la Sección 2-4. Con ellos ilustramos cómo es que se realiza la prueba LG mediante el uso de variables de estado dicotómicas. El otro ejemplo lo constituyen los procesos estocásticos, que los presentamos en la Sección 2-5. Hemos enfocado el interés en el caminante aleatorio unidimensional. Los resultados obtenidos en la Sección 2-5 los usaremos como elementos de contraste al discutir el caminante aleatorio atómico del Capítulo 6.

2-1. El protocolo experimental de la prueba LG

Para el sistema en evolución que es sometido a la prueba LG, se miden tres cantidades dicotómicas Q_t (que pueden resultar en el valor 1 o -1) a los tiempos $0 = t_1 < t_2 < t_3$. La prueba LG compara la evolución libre desde medir Q_1 hasta medir Q_3 , denotada $Q_1 \rightarrow Q_3$, con la evolución $Q_1 \rightarrow Q_2 \rightarrow Q_3$ que además incluye la medición de Q_2 en el punto intermedio t_2 de la evolución. Para lograr la comparación, la prueba LG se realiza en dos etapas. En una *etapa a dos tiempos* se registra la ocurrencia de las trayectorias $Q_1 \rightarrow Q_3$ y en otra *etapa a tres tiempos* se registran las trayectorias $Q_1 \rightarrow Q_2 \rightarrow Q_3$.

2-1.1. La necesidad de mediciones no-invasivas. En la siguiente Sección 2-2 demostramos que la prueba LG, si se quiere usar como prueba de no-realismo (la violación de R1), requiere de “mediciones no-invasivas”, para las cuales —aún bajo las hipótesis R— nos es imposible definir una categoría general y válida a priori. Aseverar que un acto de medir es no-invasivo requiere la confirmación de condiciones de naturalezas muy diferentes. Empezando por cuál sea el tipo de sistema bajo estudio hasta llegar a cuestiones tan circunstanciales como la pericia e ingenio del experimentador. Por esto es que un tema actual de investigación es la exploración experimental de diferentes estrategias de medición. [3, 35, 36, 37] Algunas de ellas las discutimos en el Capítulo 4.

Llegando a este punto, lo único que podemos hacer es identificar a la categoría de las “mediciones negativas” [1] sin pretender que sean no-invasivas. En una *medición negativa* de la cantidad dicotómica Q se registra (se contabiliza, se acepta) como valor medido $Q = 1$, cuando en realidad el resultado de la medición fue $Q = -1$. Con este procedimiento el sistema queda preparado de manera que con certeza una medición subsecuente resultará en $Q = 1$. Decimos que después de una medición negativa el sistema queda preparado (fue perturbado) para dar con certeza el valor complementario al valor medido.

Vamos a restringir nuestra presentación de la prueba LG a las “mediciones negativas” de cantidades dicotómicas, sin por ello aceptar que por ser negativas son no-invasivas. Los detalles los discutimos en el Capítulo 4.

2-1.2. Las dos etapas de la prueba LG. En la *etapa a tres tiempos* de la prueba LG, mediante el uso de las mediciones negativas antes descritas (que están en la categoría de las preparaciones), se registran las posibles secuencia observacionales (trayectos) $Q_1 \rightarrow Q_2 \rightarrow Q_3 \in \{-1, 1\}^3$ en el lapso de t_1 a t_3 . El

recurso experimental para estimar las probabilidades de los trayectos es contar $N(Q_1 \rightarrow Q_2 \rightarrow Q_3)$, el número de veces que se registra el trayecto $Q_1 \rightarrow Q_2 \rightarrow Q_3$ en un total de N realizaciones en condiciones idénticas (repeticiones).

Con los ocho números $N(Q_1 \rightarrow Q_2 \rightarrow Q_3)$ se calculan los números $N(Q_1 \xrightarrow{2} Q_2) = \sum_{Q_3} N(Q_1 \rightarrow Q_2 \rightarrow Q_3)$ y $N(Q_2 \xrightarrow{2} Q_3) = \sum_{Q_1} N(Q_1 \rightarrow Q_2 \rightarrow Q_3)$. Para evitar confusiones con la etapa a dos tiempos (la que exponemos más adelante) escribimos $Q_\ell \xrightarrow{2} Q_m$ para indicar que el trayecto de t_ℓ a t_m es parte del trayecto "intervenido" con mediciones negativas al tiempo intermedio t_2 . En cambio, con $Q_1 \rightarrow Q_3$ designamos al trayecto que evoluciona libremente de t_1 a t_3 , sin mediciones negativas intermedias. Entonces, para la etapa a tres tiempos se tiene que $N(Q_1 \xrightarrow{2} Q_3) = \sum_{Q_2} N(Q_1 \rightarrow Q_2 \rightarrow Q_3)$.

Finalmente se calculan los números $N(Q_m) = \sum_{Q_{m-1}} N(Q_{m-1} \xrightarrow{2} Q_m)$ para $m = 2$ o 3 y $N(Q_1) = \sum_{Q_2} N(Q_1 \xrightarrow{2} Q_2)$. Normalizando las cantidades acumuladas con el número total N de repeticiones se obtiene la estimación de las probabilidades $P(Q_\ell)$, $P(Q_\ell \xrightarrow{2} Q_m)$ (bien definida para $\ell < m$) y $P(Q_1 \rightarrow Q_2 \rightarrow Q_3)$. Definimos la probabilidad $P(Q_m|Q_\ell)$ (a los tiempos $t_\ell < t_m$) del trayecto $Q_\ell \xrightarrow{2} Q_m$ *condicionado* a partir (salir) en el tiempo t_ℓ del estado Q_ℓ , para llegar al estado Q_m , mediante la relación

$$P(Q_m|Q_\ell)P(Q_\ell) = P(Q_\ell \xrightarrow{2} Q_m), \quad \ell < m. \quad (1)$$

Para la *etapa a dos tiempos* de la prueba LG se cuentan el número $N(Q_1 \rightarrow Q_3)$ de los cuatro trayectos libres posibles $Q_1 \rightarrow Q_3$, mediante mediciones negativas a los tiempos t_1 y t_3 , dejando que el sistema evolucione libremente de t_1 a t_3 , sin realizar ninguna medición entre los dos tiempos. Normalizando al total de repeticiones se estiman las probabilidades $P(Q_1 \rightarrow Q_3)$ de los trayectos.

En la sección 2-4 presentamos una construcción de las trayectorias para sistemas macro con una dinámica determinista. En la subsección 2-5 damos una construcción de las trayectorias como procesos estocásticos macro, ejemplificados con el caminante aleatorio unidimensional.

2-2. ¿Qué pone a prueba la prueba LG?

El fundamento de la prueba LG, formalizado en el siguiente lema, es el criterio combinado de realismo (R1) y de medición no-invasiva (como *una posibilidad formal* en virtud de R2).

Lema 2-2.1. *Una prueba LG concluye en que $P(Q_1 \rightarrow Q_3) = P(Q_1 \xrightarrow{2} Q_3)$ si, y solo si, el sistema es macro (R1) y las mediciones negativas son no-invasivas (R2).*

DEMOSTRACIÓN. Sea macro el sistema y sean no-invasivas las mediciones. Según la hipótesis de realismo R1, el trayecto $Q_1 \rightarrow Q_3$ ocurre por una de dos vías: por $Q_1 \rightarrow 1_2 \rightarrow Q_3$ o bien por $Q_1 \rightarrow -1_2 \rightarrow Q_3$. Si además las mediciones negativas son no-invasivas (para N suficientemente grande) se tiene que

$$N(Q_1 \rightarrow Q_3) = N(Q_1 \rightarrow 1_2 \rightarrow Q_3) + N(Q_1 \rightarrow -1_2 \rightarrow Q_3) = N(Q_1 \xrightarrow{2} Q_3).$$

Sea ahora que la prueba LG concluye en que $P(Q_1 \rightarrow Q_3) = P(Q_1 \xrightarrow{2} Q_3)$. En este caso $N(Q_1 \rightarrow Q_3) = N(Q_1 \rightarrow 1_2 \rightarrow Q_3) + N(Q_1 \rightarrow -1_2 \rightarrow Q_3)$ que, por las hipótesis R1 y R2, es la condición de no-invasividad para un sistema macro. \square

En el Lema 2-2.1 son inseparables la condición de ser macro y la no-invasividad de las mediciones negativas. Si no nos andamos con cuidado, la interpretación de la prueba LG puede ser ambigua. Si una prueba LG concluye en que $P(Q_1 \rightarrow Q_3) \neq P(Q_1 \xrightarrow{2} Q_3)$ puede ser porque se “viola el macro-realismo”, o bien porque las mediciones negativas son invasivas, o ambas a la vez.

Para permanecer dentro de los límites del marco establecido por las hipótesis-R, vemos que las dos alternativas seguras de aplicación del Lema 2-2.1 que podemos adoptar son las siguientes.

Una alternativa es *garantizar* que las mediciones son no-invasivas, lo cual —especialmente en el caso de los sistemas micro— es un asunto delicado y difícil. Supongamos, de cualquier manera, que tenemos la certeza de no-invasividad de las mediciones. Entonces el Lemma 2-2.1 es un criterio para decidir si la evolución del sistema es micro o macro, es decir que —solo si tenemos la certeza de que las mediciones negativas son no-invasivas— la prueba LG es una prueba de macro-realismo R1.

La segunda opción es poco interesante cuando nos mantenemos dentro del marco de las hipótesis-R. Consiste en tener la certeza de que el sistema es macro y entonces el Lema 2-2.1 es una prueba de no-invasividad de las mediciones negativas sobre el sistema macro. Esto es muy distante de la motivación original de tener un criterio para decidir si un sistema dado es micro o es macro.

En conclusión, la prueba LG está sujeta a condiciones adicionales sobre el montaje experimental que hará difícil el aplicarla de manera que aporte conclusiones claras (no ambiguas) a propósito de las hipótesis-R para el sistema bajo prueba. Pero la advertencia es para mantenernos atentos y no para desanimarnos. La vida es más rica que las hipótesis-R (tenemos la opción de abandonar el discurso del macro-realismo reteniendo lo sustancial), así que sigamos adelante.

2-2.1. El correlator LG y la desigualdad LG. Consideramos los tiempos $0 \leq t_1 < t_2 < t_3$ en la evolución de un sistema sometido a la prueba LG. Definimos los correlatores a dos tiempos, $C_{\ell,m} \equiv \langle Q_\ell Q_m \rangle$ y $t_\ell < t_m$, como el siguiente promedio sobre los cuatro posibles trayectos $Q_\ell \rightarrow Q_m \in \{-1, 1\}^2$ del sistema,

$$\begin{aligned} C_{\ell,m} &= \sum_{Q_\ell \rightarrow Q_m} Q_\ell Q_m P(Q_\ell \rightarrow Q_m) = \sum_{Q_\ell, Q_m} Q_\ell Q_m P(Q_\ell) P(Q_m | Q_\ell) \\ &= P(1_\ell \rightarrow 1_m) - P(1_\ell \rightarrow -1_m) + P(-1_\ell \rightarrow -1_m) - P(-1_\ell \rightarrow 1_m) . \end{aligned} \quad (2)$$

En la prueba LG, para los correlatores C_{12} y C_{23} , los trayectos usados en (2) son $Q_1 \rightarrow Q_2 \equiv Q_1 \xrightarrow{2} Q_2$ y $Q_2 \rightarrow Q_3 \equiv Q_2 \xrightarrow{2} Q_3$, cuyas probabilidades se estiman mediante la etapa a tres tiempos. Mientras que para el correlator C_{13} , en (2), el trayecto $Q_1 \rightarrow Q_3$ en la prueba LG es el trayecto libre (sin medición al tiempo t_2) y las probabilidades correspondientes se estiman mediante la etapa a dos tiempos. La segunda ecuación en (2) es válida en vista de la definición (1). La realización de una prueba LG resulta en un valor para el correlator (LG)

$$K_3 := C_{12} + C_{23} - C_{13} \quad (3)$$

que (en condiciones muy especiales) cumple con el siguiente.

Lema 2-2.2 (Desigualdad LG [1]). *Sea K_3 el valor del correlator (3) que resulta de una prueba LG, realizada con mediciones no invasivas y sobre un sistema macro. Entonces, su cumplen las desigualdades $-3 \leq K_3 \leq 1$.*

DEMOSTRACIÓN. Expandiendo

$$K_3 = \sum_{Q_1 \rightarrow Q_2 \rightarrow Q_3} (Q_1 Q_2 + Q_2 Q_3) P(Q_1 \rightarrow Q_2 \rightarrow Q_3) - \sum Q_1 Q_3 P(Q_1 \rightarrow Q_3)$$

Para el caso de una prueba LG con mediciones no-invasivas sobre un sistema macro, el Lema 2-2.1 nos permite hacer el reemplazo

$$P(Q_1 \rightarrow Q_3) = P(Q_1 \xrightarrow{2} Q_3) = \sum_{Q_2} P(Q_1 \rightarrow Q_2 \rightarrow Q_3) .$$

Utilizando luego el hecho de que la suma sobre trayectorias $\sum P(Q_1 \rightarrow Q_2 \rightarrow Q_3) = 1$, se obtiene que

$$K_3 = 1 - 4 \left(P(1_1 \rightarrow -1_2 \rightarrow 1_3) + P(-1_1 \rightarrow 1_2 \rightarrow -1_3) \right) . \quad (4)$$

La desigualdad LG a ser demostrada resulta de considerar que

$$0 \leq P(1_1 \rightarrow -1_2 \rightarrow 1_3) + P(-1_1 \rightarrow 1_2 \rightarrow -1_3) \leq 1 . \quad (5)$$

□

Con propósitos de énfasis repetimos que las condiciones del Lema (2-2.2) son dos: mediciones no invasivas y un sistema macro. Por lo tanto, la desigualdad LG, en el Lema (2-2.2), es consecuencia de la combinación $(R1)\wedge(R2)$ de *dos* hipótesis de realismo, y una de ellas (la R2) interviene como *una posibilidad*, que es responsabilidad del experimentador. Así que un valor de K_3 que viola la desigualdad LG invalida la hipótesis combinada $(R1)\wedge(R2)$ y de ninguna manera es inmediato concluir que se trata de una violación del “macro-realismo”. En su esencia, la prueba LG no es una prueba del macro-realismo decantado en la hipótesis-R1.

2-2.2. Protocolo LG mínimo. Para realizar pruebas de no-realismo buscando la violación de una desigualdad LG es suficiente con dejar que la evolución del sistema se inicie al tiempo $t_1 = 0$ con $Q_1 = 1_1$, y asegurándonos que nunca lo haga con $Q_1 = -1_1$. La preparación de inicio $Q_1 = 1$ *impuesta*, implica para la distribución de probabilidad que $P(1_1) = 1$ y $P(-1_1) = 0$.

A la prueba que resulta la llamamos el protocolo mínimo y en lo sucesivo nos restringimos a él. Para hacerlo explícito, una distribución de probabilidad P que cumple la condición del protocolo mínimo la denotamos como \mathbb{P} .

En el protocolo mínimo se tiene que $\mathbb{P}(-1_1 \rightarrow Q_2) = 0$ y entonces los correlatores $C_{1,m}$, tal como se definieron en (2), son simplemente

$$\begin{aligned} C_{1,m} &= \mathbb{P}(1_1 \rightarrow 1_m) - \mathbb{P}(1_1 \rightarrow -1_m) \\ &= 2\mathbb{P}(1_1 \rightarrow 1_m) - 1 . \end{aligned} \tag{6}$$

Para la definición de $C_{2,3}$ en (2) (al no intervenir directamente la medición al tiempo t_1) no se tiene ninguna simplificación en términos de \mathbb{P} .

En cuanto a la fórmula (4) para calcular K_3 *para un sistema macro*, en el protocolo mínimo se reduce a

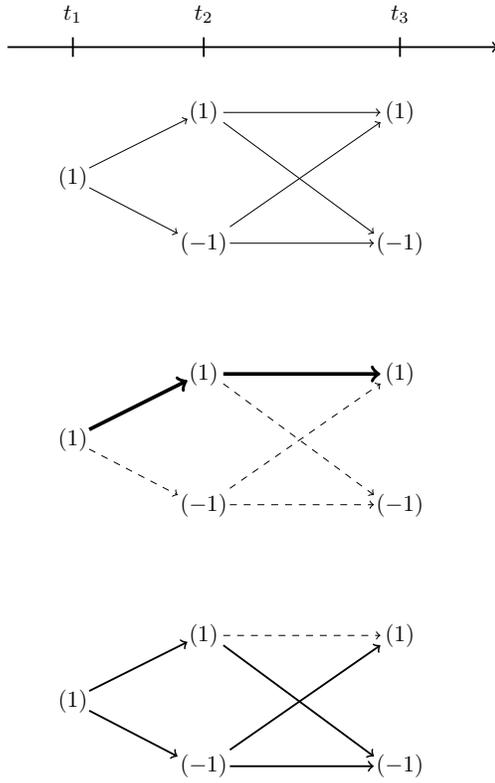
$$K_3 = 1 - 4\mathbb{P}(1_1 \rightarrow -1_2 \rightarrow 1_3) \tag{7}$$

y la desigualdad LG para un sistema macro aparece como algo trivial

$$0 \leq \mathbb{P}(1_1 \rightarrow -1_2 \rightarrow 1_3) \leq 1 . \tag{8}$$

2-3. Interpretación para los sistemas macro

¿Cuáles son los trayectos que acotan la desigualdad LG? En el protocolo mínimo la desigualdad equivalente (8) para sistemas macro es muy sugestiva y nos permite dar una interpretación muy clara en términos de trayectos a las cotas establecidas por la desigualdad LG.



La gráfica en la parte superior muestra todas las trayectorias $Q_1 \rightarrow Q_2 \rightarrow Q_3$ posibles (cuatro) para el protocolo mínimo, a partir de $Q_1 = 1$ con $P(1_1) = 1$.

En la cota superior de la desigualdad LG, con $K_3 = 1$, la única forma de llegar a 1_3 es por la trayectoria $1_1 \rightarrow 1_2 \rightarrow 1_3$. La situación es la de la gráfica de en medio.

En la cota inferior de la desigualdad LG, con $K_3 = -3$, la única trayectoria factible es la $1_1 \rightarrow -1_2 \rightarrow 1_3$. Es la situación en la gráfica de abajo.

FIGURA 1. Trayectorias de la prueba LG en el protocolo mínimo. Las flechas a trazos corresponde a trayectos de probabilidad cero. Arriba corre la línea del tiempo.

En el caso de cumplir con la cota inferior en la desigualdad (8), que corresponde a $K_3 = 1$, se tiene que $\mathbb{P}(1_1 \rightarrow -1_2 \rightarrow 1_3) = 0$, lo que se interpreta diciendo que la evolución que lleva al estado $Q_3 = 1_3$ desde el estado $Q_1 = 1_1$ al tiempo t_1 , ocurre (en promedio) al 100% de los casos pasando por el estado intermedio $Q_2 = 1_2$ al tiempo t_2 . Las trayectorias para $K_3 = 1$ se muestran en la gráfica de en medio de la figura 1.

Cuando la cota superior de la desigualdad (8) es observada, correspondiendo a $K_3 = -3$, se tiene que $\mathbb{P}(1_1 \rightarrow -1_2 \rightarrow 1_3) = 1$ y la evolución que lleva desde el estado $Q_1 = 1_1$ al $Q_3 = 1_3$ ocurre (en promedio) al 100% de los casos pasando por el estado intermedio $Q_2 = -1_2$ al tiempo t_2 . Todas las otras trayectorias tienen probabilidad cero, como se ilustra en la gráfica al pie de la figura 1.

Así pues, las cotas de la desigualdad LG corresponden a dos trayectos extremos opuestos, ilustrados gráficamente en la figura 1. El valor extremo de $K_3 = 1$ indica que la evolución de un sistema macro nunca (en promedio) sigue la trayectoria $-1_2 \rightarrow 1_3$ pues tiene probabilidad $\mathbb{P}(-1_2 \rightarrow 1_3) = 0$ y siempre se llega a $Q_3 = 1$ pasando por $Q_2 = 1$: el único canal viable (abierto) hacia $Q_3 = 1$ es $Q_2 = 1$.

Mientras que el otro valor extremo $K_3 = -3$ significa que la única trayectoria factible es la $1_1 \rightarrow -1_2 \rightarrow 1_3$. La evolución es en extremo predecible y ni siquiera el resultado $Q_3 = -1$ tiene probabilidad positiva: el único canal viable (abierto) es $Q_2 = -1$ dirigido a $Q_3 = 1$. Para valores intermedios de K_3 los dos canales ($Q_2 = 1$ o $Q_2 = -1$) son viables y valores K_3 mas allá de las cotas no son factibles para los sistemas macro.

Recalcamos que para un sistema bajo prueba (que no supiéramos si es micro o es macro) K_3 debe calcularse a partir de los correlatores $C_{\ell m}$, definidos en (3), pues la equivalencia de las desigualdades LG y la (8) es solo válida para sistemas macro (y para el protocolo mínimo). A ningún sistema macro le es factible rebasar las cotas establecidas en (8), que son equivalentes a las establecidas para K_3 por la desigualdad LG. Solo hay que tener la precaución de que la cota inferior de (8) corresponde a la cota superior de la desigualdad LG y viceversa.

2-4. Sistemas macro deterministas

La hipótesis R1 de realismo permite definir variables de estado para un sistema macro, que axiomáticamente toman un valor bien definido en todo momento de un lapso de evolución temporal considerado. Esta, con base en la hipótesis R3, la podemos considerar como la acción de \mathbb{R} (el tiempo) sobre el espacio de estados del sistema, X , que es lo que se llama una evolución determinista.

Las variables de estado proyectan la evolución del sistema a lo largo del tiempo en una trayectoria (secuencia ordenada temporalmente) de valores para las variables de estado seleccionadas, valores que, por la hipótesis R2, tenemos la posibilidad de acceder experimentalmente mediante actos de “medición no-invasiva”.

2-4.1. Variables y trayectorias dicotómicas. Sea X el conjunto (el espacio) de todos los estados accesibles (discretos o continuos) a un sistema macro. Sea Y un subconjunto del espacio X . Se define la variable de estado dicotómica

$$Q_t = \begin{cases} +1, & \text{el sistema al tiempo } t \text{ se encuentra en un estado de } Y \\ -1, & \text{el sistema al tiempo } t \text{ se encuentra en un estado de } Y^c \end{cases} . \quad (9)$$

La interpretación de la función característica de Y en el espacio de estados X , con valores en $\{-1, 1\}$, como una variable de estado Q_t es consistente con la hipótesis de realismo R1, que establece que a cualquier tiempo t el sistema macro existe en un (y sólo un) estado de los disponibles en X .

Entonces, suponiendo una cierta distribución P de probabilidad (de acceder a los estados) en X , a cualquier instante de tiempo t las funciones de probabilidad para el estado del sistema $P(Q_t = 1) \equiv P(1_t) := P(Y)$ y $P(Q_t = -1) \equiv P(-1_t) := P(Y^c)$ están bien definidas. Dado que los subconjuntos Y y Y^c son disjuntos, que $Y \cup Y^c = X$ y que $P(X) = 1$, se tiene que $P(1_t) + P(-1_t) = 1$.

Suponemos que el estado del sistema muta en el tiempo y por la hipótesis R2 podemos, en principio al menos, llevar el registro de qué estado tiene el sistema a cada instante de tiempo, sin perturbar su periplo. Llevar el registro ($t \mapsto x$) directamente sobre el espacio X nos produce la órbita (o trayectoria) en la que el sistema evolucionó. La hipótesis R1 nos permite admitir que la trayectoria existe sin necesidad de ser observada. No cometemos falta pues en definir a continuación lo que son las trayectorias dicotómicas de un sistema macro.

Consideremos algún tiempo $t_1 \geq 0$ y especifiquemos un subconjunto de estados $Y_1 \subseteq X$. Al tiempo t_1 y al subconjunto de estados Y_1 , les asociamos la variable de estado Q_1 , según la hemos definido en (9). Consideremos además la variable Q_2 , asociada al tiempo $t_2 \geq t_1$ y al subconjunto $Y_2 \subseteq X$.

Si admitimos que la evolución es determinista —por órbitas determinadas por alguna ley de evolución— entonces existe el conjunto de todos los estados $x \in X$ que a partir del tiempo t_1 hasta el tiempo t_2 evolucionan a algunos de los estados en Y_2 y lo denotamos por $Y_2(t_1)$. Entonces, el conjunto $Y_2(t_1) \cap Y_1$ lo constituyen los estados de Y_1 que al tiempo t_2 llegan a Y_2 y lo llamamos el trayecto $1_1 \rightarrow 1_2$.

Adoptando una distribución de probabilidad P sobre X para la elección del estado de inicio (x al tiempo t_1), definimos $P(1_1 \rightarrow 1_2) = P(Y_2(t_1) \cap Y_1)$ como la probabilidad de que la variable de estado $Q_1 = 1$ al tiempo t_1 evolucione a la variable de estado $Q_2 = 1$ al tiempo t_2 . Nos referimos a ella como la probabilidad del trayecto $1_1 \rightarrow 1_2$. De manera similar definimos la probabilidad del trayecto $1_1 \rightarrow -1_2$ como $P(1_1 \rightarrow -1_2) := P(Y_2(t_1)^c \cap Y_1)$.

Según las definiciones anteriores, las trayectorias $1_1 \rightarrow 1_2$ y $1_1 \rightarrow -1_2$ son una partición de Y_1 : los que desde Y_1 llegan a Y_2 en el tiempo t_2 y los que, en el mismo tiempo, no llegan. Se tiene pues que $\sum_{Q_2} P(1_1 \rightarrow Q_2) = P(1_1)$.

La buena definición de la función de probabilidad P para las variables de estado, asegurada por la hipótesis de realismo R1, nos permite definir la probabilidad $P(1_2|1_1)$ (a los tiempos $t_1 \leq t_2$) de la trayectoria $1_1 \rightarrow 1_2$ condicionada a partir del estado ($Q_1 = 1$) = Y_1 en el tiempo t_1 , mediante la relación

$$P(1_2|1_1)P(1_1) = P(1_1 \rightarrow 1_2) \equiv P(Y_2(t_1) \cap Y_1), \quad t_1 \leq t_2. \quad (10)$$

Describimos a $P(1_2|1_1)$ como la probabilidad de llegar al estado $Q_2 = 1$ en el tiempo t_2 , habiendo partido *con certeza* del estado $Q_1 = 1$ en t_1 . Para este condicionamiento ($Q_1 = 1$) usaremos la notación $\mathbb{P}(1_1 \rightarrow 1_2) \equiv P(1_2|1_1)$. De manera similar, y a los mismos dos tiempos, definimos las cuatro probabilidades, $P(Q_2|Q_1)$, de llegada a Q_2 condicionada a partir de Q_1 . Para ellas cuatro se tiene las siguientes dos identidades, $\sum_{Q_2} P(Q_2|Q_1) = 1$, con $t_1 \leq t_2$. En particular $\sum_{Q_2} \mathbb{P}(1_1 \rightarrow Q_2) = 1$.

En general, la probabilidad de que el sistema macro evolucione desde el estado Q_1 al tiempo t_1 hasta el estado Q_2 en el tiempo t_2 (la probabilidad de que siga el trayecto $Q_1 \rightarrow Q_2$) es

$$P(Q_1 \rightarrow Q_2) = P(Q_2|Q_1)P(Q_1) , \quad \text{con } t_1 \leq t_2 . \quad (11)$$

Nos referimos a $Q_1 \rightarrow Q_2$ como un trayecto del sistema macro que ocurre con probabilidad $P(Q_1 \rightarrow Q_2)$. La colección de los cuatro trayectos $Q_1 \rightarrow Q_2$, el conjunto $\{-1, 1\}^2$, es exhaustiva de manera que $\sum_{\{-1, 1\}^2} P(Q_1 \rightarrow Q_2) = 1$.

Consideremos un tercer tiempo $t_3 \geq t_2 \geq t_1 \geq 0$ y el subconjunto de estados $Y_3 \subseteq X$, con variable dicotómica asociada Q_3 . El conjunto $Y_1 \cap Y_2(t_1) \cap Y_3(t_1)$ son los puntos de Y_1 que al tiempo t_3 llegan a Y_3 habiendo pasado por Y_2 al tiempo t_2 . Su tamaño es la probabilidad del trayecto $1_1 \rightarrow 1_2 \rightarrow 1_3$,

$$P(1_1 \rightarrow 1_2 \rightarrow 1_3) := P(Y_1 \cap Y_2(t_1) \cap Y_3(t_1)) .$$

De manera análoga se definen las probabilidades para cualesquiera de las ocho trayectorias $Q_1 \rightarrow Q_2 \rightarrow Q_3$. De acuerdo a esas definiciones, las cuatro trayectorias $1_1 \rightarrow Q_2 \rightarrow Q_3$ son una partición de Y_1 y las otras cuatro $-1_1 \rightarrow Q_2 \rightarrow Q_3$ son una partición de Y_1^c . Las ocho trayectorias son una partición de X . Por lo tanto, la suma sobre todas las trayectorias cumple que $\sum P(Q_1 \rightarrow Q_2 \rightarrow Q_3) = 1$.

Dado que $P(Y_1 \cap Y_2(t_1)) = P(Y_1 \cap Y_2(t_1) \cap Y_3(t_1)) + P(Y_1 \cap Y_2(t_1) \cap Y_3(t_1)^c)$, se tiene que

$$P(1_1 \rightarrow 1_2) = \mathbb{P}(1_1 \rightarrow 1_2)P(1_1) = P(1_1 \rightarrow 1_2 \rightarrow 1_3) + P(1_1 \rightarrow 1_2 \rightarrow -1_3) ,$$

que se extiende a $P(Q_1 \rightarrow Q_2) = \sum_{Q_3} P(Q_1 \rightarrow Q_2 \rightarrow Q_3)$. Para las probabilidades condicionadas se tiene que $\mathbb{P}(-1_1 \rightarrow Q_2) = 0$. La identidad que nos parece muy sugestiva es la siguiente

$$P(Q_1 \rightarrow Q_3) = \sum_{Q_2} P(Q_1 \rightarrow Q_2 \rightarrow Q_3)$$

ya que nos dice que la probabilidad para ir en directo de Q_1 a Q_3 (sin hacer la observación de Q_2 al tiempo t_2) es la suma de las probabilidades de los trayectos con los resultados intermedios posibles para Q_2 .

A fin de también tener la identidad $P(Q_2 \rightarrow Q_3) = \sum_{Q_1} P(Q_1 \rightarrow Q_2 \rightarrow Q_3)$, que es usada en la demostración del lema 2-2.2 (ver (3) más abajo), definimos

$$(1_2 \rightarrow 1_3) = Y_2(t_1) \cap Y_3(t_1) , \quad t_1 < t_2 < t_3 , \quad (12)$$

que son los estados que al avanzar el tiempo desde t_1 hasta t_3 llegan a Y_3 ($Q_3 = 1$) pasando por Y_2 ($Q_2 = 1$) al tiempo t_2 . De manera similar se define cualquier trayecto $Q_2 \rightarrow Q_3$, por ejemplo $(-1_2 \rightarrow 1_3) = Y_2(t_1)^c \cap Y_3(t_1)$. Las definiciones dependen del primer tiempo t_1 pero son independientes de Y_1 . Los cuatro trayectos $Q_2 \rightarrow Q_3$ son una partición de X , así que $\sum P(Q_2 \rightarrow Q_3) = 1$.

Las probabilidades para los trayectos $Q_2 \rightarrow Q_3$ condicionados a $Q_1 = 1$ quedan definidas de la siguiente manera

$$\mathbb{P}(Q_2 \rightarrow Q_3)P(1_1) = P(1_1 \rightarrow Q_2 \rightarrow Q_3) ,$$

con $0 \leq t_1 < t_2 < t_3$.

2-5. El caminante aleatorio unidimensional

Una clase importante de modelos que cumplen con las hipótesis R es la constituida por los procesos estocásticos. Un sistema realista aleatorio es modelado como un proceso estocástico en el que las cantidades que resultan en un experimento son tratadas como una familia de variables aleatorias $\xi(t)$, parametrizadas por $t \in T \subset \mathbb{R}$, que en nuestro caso hace el papel del tiempo. En un experimento la variable aleatoria $\xi(t)$ toma, para todo t , un único valor, en acuerdo con la hipótesis R1.

En esta sección sometemos a la prueba LG al caminante aleatorio unidimensional, que es un proceso estocástico de tiempo discreto. Nuestro interés es comparar los correlatores temporales y las distribuciones de probabilidad propias del caminante aleatorio realista con los que presenta el caminante atómico que trataremos en el Capítulo 6.

El conjunto de estados para el caminante aleatorio unidimensional es el conjunto de los enteros \mathbb{Z} y el tiempo avanza a saltos discretos $t = 0, 1, \dots$. En cada instante de tiempo, mediante un volado (la variable aleatoria S con valores -1 y 1 con probabilidad $1/2$) el caminante brinca del lugar x al lugar $x + S$. La probabilidad de que el caminante ocupe el sitio x en el tiempo $t = n$ es la distribución

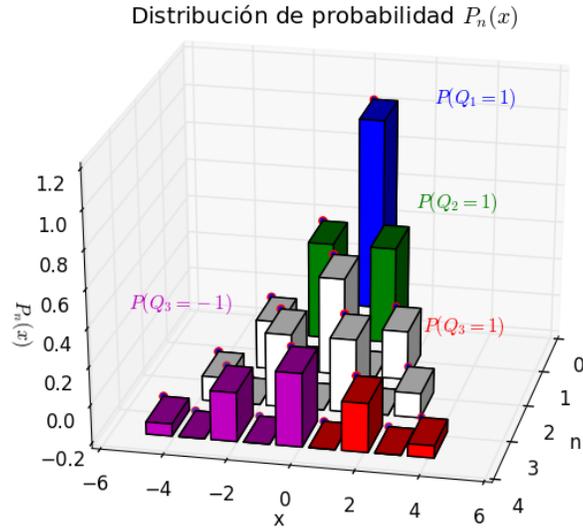


FIGURA 2. Gráfica de la distribución de probabilidad de (13).

binomial,

$$P_{t=n}(x) = \frac{1}{2^n} \binom{n}{(n-x)/2} \frac{1}{2} \left| (-1)^n + (-1)^x \right|. \quad (13)$$

El avance del caminante está acotado por $|x| \leq n$.

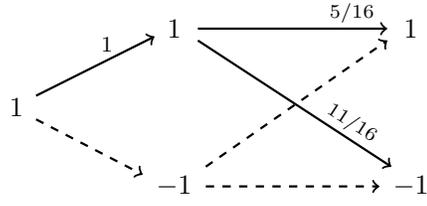
Cuando el tiempo n es un número par, el caminante solo puede ocupar una posición x par. Cuando el tiempo n es impar el caminante solo puede ocupar una posición x impar. Por esto el factor $|(-1)^n + (-1)^x|$ en (13) es importante, ya que así, la probabilidad de que el caminante ocupe una posición x impar cuando n es par, es cero y viceversa.

2-5.1. La desigualdad LG. Para la prueba LG consideramos las variables de estado dicotómicas Q_1, Q_2 y Q_3 , definidas a los tiempos $t_1 = 0, t_2 = 1$ y $t_3 = 4$, y para los conjuntos $Y_1 = \{0\}$, $Y_2 = \{-1, 1\}$ y $Y_3 = \{x > 0\}$. Según la definición (9) las variables toman los siguientes valores,

$$Q_1 = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ -1, & x \neq 0 \end{cases}, \quad Q_2 = \begin{cases} 1, & |x| = 1 \\ -1, & |x| \neq 1 \end{cases}, \quad Q_3 = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x \leq 0 \end{cases}.$$

Adoptamos el protocolo mínimo. Dado que $Y_1 = \{0\}$, para tener $P(1_1) = 1$ imponemos la condición de que el caminante parta del sitio $x = 0$ al tiempo $t_1 = 0$. Ahora procedemos a calcular los correlatores que intervienen en la desigualdad LG.

Para C_{12} requerimos del trayecto $1_1 \rightarrow 1_2$. Partiendo de $x = 0$ al tiempo $t_1 = 0$, en el siguiente tiempo de observación $t_2 = 1$ el caminante podrá estar en



Las flechas están etiquetadas con las probabilidades correspondientes. Para las variables de estado que fueron elegidas, solo el canal $Q_2 = 1$ está abierto.

FIGURA 3. Gráfica de trayectorias para el caminante aleatorio.

el sitio $x = 1$ o en $x = -1$, con probabilidad $1/2$. Entonces, dada la definición de Y_2 tenemos que

$$\mathbb{P}(1_1 \rightarrow 1_2) = P_{t_2=1}(Y_2) = P_{t_2=1}(x = 1) + P_{t_2=1}(x = -1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

que nos indica que la probabilidad de pasar por $Q_2 = 1$ es uno y que entonces no hay trayectorias que pasen por $Q_2 = -1$ (lo cual nos anuncia que el valor para K_3 será la cota superior de la desigualdad LG). Continuando con el cálculo, el correlator C_{12} , dado por (6), es

$$C_{12} = 2\mathbb{P}(1_1 \rightarrow 1_2) - 1 = 1.$$

Para calcular el correlator C_{13} necesitamos de la probabilidad $\mathbb{P}(1_1 \rightarrow 1_3)$. Para el tiempo de observación $t_3 = 4$ y $Y_3 = \{x > 0\}$ tenemos que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(1_1 \rightarrow 1_3) &= \mathbb{P}(1_3) = P_{t_3=4}(0 < x \leq 4) \\ &= P_{t_3=4}(x = 2) + P_{t_3=4}(x = 4) = \frac{4}{16} + \frac{1}{16} = \frac{5}{16}. \end{aligned}$$

Así que, según (6), el correlator C_{13} es

$$C_{13} = 2\mathbb{P}(1_1 \rightarrow 1_3) - 1 = -\frac{6}{16}$$

Para calcular el correlator C_{23} se requiere la probabilidad de llegar a $Q_3 = 1$ habiendo pasado por $Q_2 = 1$. Los que pueden llegar a Y_3 desde el tiempo $t_2 = 1$ son los del conjunto $Y_3(t_2) = \{x \geq -1\}$ que incluye a $Y_2 = \{-1, 1\}$. Partiendo de $(Q_2 = 1) = Y_2$, en tres pasos (de $t_2 = 1$ a $t_3 = 4$) se produce la secuencia $Y_2 = \{-1, 1\} \rightarrow \{-2, 0, 2\} \rightarrow \{-3, -1, 1, 3\} \rightarrow \{-4, -2, 0, 2, 4\} =: Y_2(t_3)$. Los que llegan a $Q_3 = 1$ habiendo pasado por Y_2 son $Y_3 \cap Y_2(t_3) = \{2, 4\}$. Por lo tanto,

$$\mathbb{P}(1_1 \rightarrow 1_2 \rightarrow 1_3) = P_{t_3=4}\{2, 4\} = P_{t_3=4}(2) + P_{t_3=4}(4) = \frac{4}{16} + \frac{1}{16} = \frac{5}{16}$$

y $\mathbb{P}(1_1 \rightarrow 1_2 \rightarrow -1_3) = 1 - \mathbb{P}(1_1 \rightarrow 1_2 \rightarrow 1_3) = 11/16$. El correlator C_{23} (2) es:

$$C_{23} = 2\mathbb{P}(1_1 \rightarrow 1_2 \rightarrow 1_3) - 1 = -\frac{6}{16}$$

Con los correlatores ya calculados, el valor que se obtiene para

$$K_3 = C_{12} + C_{23} - C_{13} = 1 - \frac{6}{16} - \left(-\frac{6}{16}\right) = 1$$

es la cota superior de la desigualdad LG, que es un caso particular de la situación representada en la gráfica de en medio de la figura 1. La gráfica de trayectorias para el caminante aleatorio en la figura 3 muestra que el único “canal abierto” es el de $Q_2 = 1$.

Como *sabemos* que el caminante aleatorio es macro y que el protocolo usado es el mínimo, el resultado $K_3 = 1$ lo pudimos haber obtenido inmediatamente de la ecuación (7), dado que $\mathbb{P}(1_1 \rightarrow -1_2 \rightarrow 1_3) = 0$.

Más adelante vamos a comparar el caminante macro presentado en esta sección con una realización experimental del caminante aleatorio cuántico.

Capítulo 3

El correlator LG en sistemas cuánticos

Los correlatores a dos tiempos $C_{\ell m} = \langle Q_\ell Q_m \rangle$ no tienen un análogo cuántico obvio (directo) en términos de operadores (los observables \hat{Q}_k). Sin embargo, siguiendo las definiciones introducidas al exponer el protocolo LG en la Sección 2-1 es posible darles a los correlatores $C_{\ell m}$ un sentido preciso en términos de amplitudes de probabilidad en el caso de mediciones cuánticas proyectivas. La única ambigüedad pendiente por ser resuelta para llegar a la prueba LG es: cuándo las mediciones son, o no son, no-invasivas. Este tema es tratado en el Capítulo 4.

El cálculo de los correlatores cuánticos en términos de amplitudes lo hacemos en la Sección 3-1. En la Subsección 3-3 identificamos los efectos de interferencia en el correlator LG cuántico. Tomando como punto de partida los resultados de la Sección 3-1, en la siguiente Sección 3-2 derivamos una representación operacional para los correlatores $C_{\ell m}$ y el correlator LG, cuánticos. Las representaciones obtenidas son rigurosas para el caso en que las mediciones cuánticas son proyectivas y el auto-valor $Q_k = 1$ de los operadores \hat{Q}_k no es degenerado.

3-1. Correlatores a dos tiempos para un sistema cuántico

Consideramos la evolución de un sistema cuántico a partir del tiempo $t_1 = 0$ y preparado en el estado $|t_1\rangle = |\Psi_1\rangle$. A un tiempo posterior $t > t_1$ el vector de estado habrá evolucionado a:

$$|t\rangle = e^{-i(t-t_1)\hat{H}/\hbar} |\Psi_1\rangle = U(t, t_1) |t_1\rangle . \quad (14)$$

En tres momentos de la evolución, $t_1 < t_2 < t_3$, se hará la medición de tres observables dicotómicos, necesarios para determinar el correlator K_3 mediante el protocolo LG.

A fin de evitar complicaciones técnicas que oscurezcan el sentido de los correlatores LG cuánticos, trabajaremos con sub-espacios $Q_k = 1$ de una dimensión. En otras palabras, se define \hat{Q}_k de manera que su autovalor $Q_k = 1$ no sea degenerado. Con esta simplificación técnica los tres observables dicotómicos \hat{Q}_k , $k = 1$ a 3, son de la forma

$$\hat{Q}_k = 2 |\Psi_k\rangle \langle \Psi_k| - \hat{1} , \quad (15)$$

para algún estado $|\Psi_k\rangle \equiv |k\rangle$, elegido convenientemente, al tiempo t_k .

Será hasta llegar al Capítulo 6 cuando tengamos la ocasión de trabajar con autovalores $Q_k = 1$ degenerados. Mientras tanto, si al medir \widehat{Q}_k el sistema se encuentra preparado en el estado $|k\rangle$, entonces el resultado de la medición es 1_k *con certeza*. Si al hacer la medición el sistema está preparado en un estado ortogonal a $|k\rangle$, el resultado de medir \widehat{Q}_k es -1_k , *con certeza*. Para otros vectores de estado el resultado de la medición (1_k o -1_k) es aleatorio.

3-1.1. Los correlatores cuánticos C_{12} y C_{13} . Al tiempo de inicio $t_1 = 0$ el sistema se encuentra preparado en el estado $|t_1\rangle = |1\rangle$, el vector propio de \widehat{Q}_1 con $Q_1 = 1$, según la definición (15). Así se cumple con la condición $P(1_1) = 1$ del protocolo mínimo. Para calcular los correlatores C_{12} y C_{13} se realiza un primer experimento (la etapa a tres tiempos) en el que si se mide el observable \widehat{Q}_2 . En un segundo experimento (la etapa a dos tiempos) se mide \widehat{Q}_3 , dejando libre al sistema desde t_1 hasta t_3 .

En el experimento a tres tiempos el vector de estado $|t_1\rangle = |1\rangle$ habrá evolucionado en el vector $|t_2\rangle$ al tiempo $t_2 \geq t_1$. La amplitud de probabilidad de obtener el resultado $Q_2 = 1_2$ en la medición intermedia es

$$\psi_{1 \rightarrow 2} = \langle 2 | U(t_2, t_1) | 1 \rangle =: e^{i\theta_2} |\psi_{1 \rightarrow 2}| . \quad (16)$$

Siguiendo el protocolo mínimo se tiene la identidad $\mathbb{P}(1_1 \xrightarrow{2} 1_2) = |\psi_{1 \rightarrow 2}|^2$. Entonces, el correlator a los tiempos t_1 y t_2 , definido en (6), es el siguiente

$$C_{12} = 2 |\psi_{1 \rightarrow 2}|^2 - 1 . \quad (17)$$

En la definición de C_{13} se evita la medición al tiempo t_2 . La única medición es la del observable \widehat{Q}_3 al tiempo t_3 . Al inicio, al tiempo $t_1 = 0$, el sistema se encuentra preparado en el estado $|t_1\rangle = |1\rangle$ por lo que $P(1_1) = 1$ y $P(-1_1) = 0$. Al tiempo t_3 el estado habrá evolucionado a $|t_3\rangle$, con la siguiente amplitud

$$\psi_{1 \rightarrow 3} = \langle 3 | U(t_3, t_1) | 1 \rangle =: e^{i\phi_3} |\psi_{1 \rightarrow 3}| , \quad (18)$$

donde θ_3 es la fase de la amplitud $\psi_{1 \rightarrow 3}$ en el caso de que al sistema se le deja evolucionar libremente de $|t_1\rangle$ a $|t_3\rangle$, sin efectuar ninguna medición al tiempo t_2 . Para el protocolo mínimo se tiene la identidad $\mathbb{P}(1_3|1_1) = \mathbb{P}(1_1 \rightarrow 1_3) = |\psi_{1 \rightarrow 3}|^2$ y entonces el correlator C_{13} , definido en (6), es

$$C_{13} = 2 |\psi_{1 \rightarrow 3}|^2 - 1 . \quad (19)$$

3-1.2. El correlator cuántico C_{23} . El cálculo del correlator entre el tiempo intermedio t_2 y el tiempo final t_3 , C_{23} , requiere la medición, en la etapa a tres tiempos, de los observables \widehat{Q}_2 y \widehat{Q}_3 . Cuando se obtiene el resultado $Q_2 = \pm 1$ el vector de estado $|t_2\rangle = U(t_2, t_1)|1\rangle$, al tiempo t_2^+ , aparece proyectado aleatoriamente a uno de entre dos estados posibles: al estado $|2\rangle$ (el que produce con certeza el valor $Q_2 = 1$) o al estado $|\tilde{2}\rangle$ (el complemento ortogonal a $|2\rangle$, normalizado, en la suma directa de $|t_2\rangle$).

Queremos enfatizar que el colapso aleatorio del estado $|t_2\rangle$, según haya sido el resultado obtenido en la medición de \widehat{Q}_2 , modifica la evolución y los resultados de mediciones subsecuentes (al tiempo t_3) en relación al caso de la evolución directa. Así pues, aunque la medición intermedia (al tiempo t_2) no haya sido demoledora (que el sistema micro no se haya asimilado al entorno macro), el colapso del estado la hace invasiva pues altera los posibles resultados en mediciones subsecuentes.

Consideremos primero la posibilidad de que al medir \widehat{Q}_2 el resultado sea $Q_2 = 1_2$. Un instante después de la medición (al tiempo t_2^+) el estado $|t_2\rangle$ se ha colapsado a $|2\rangle$ y al tiempo t_3 el estado evoluciona a $|t_3, +\rangle = U(t_3, t_2)|2\rangle$, por lo que la amplitud de obtener $Q_3 = 1_3$ es

$$\psi_{2 \rightarrow 3} = \langle 3|U(t_3, t_2)|2\rangle =: e^{i\theta_3}|\psi_{2 \rightarrow 3}|. \quad (20)$$

Se hace la identificación $\mathbb{P}(1_3|1_2) = |\psi_{2 \rightarrow 3}|^2$ y entonces

$$\mathbb{P}(1_2 \xrightarrow{2} 1_3) = |\psi_{2 \rightarrow 3}|^2 \mathbb{P}(1_2) = |\psi_{1 \rightarrow 2}\psi_{2 \rightarrow 3}|^2. \quad (21)$$

La alternativa complementaria (obtener el resultado $Q_3 = -1_3$) es

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(1_2 \xrightarrow{2} -1_3) &= \mathbb{P}(-1_3|1_2) \mathbb{P}(1_2) = (1 - \mathbb{P}(1_3|1_2)) \mathbb{P}(1_2) \\ &= |\psi_{1 \rightarrow 2}|^2 - |\psi_{1 \rightarrow 2}\psi_{2 \rightarrow 3}|^2. \end{aligned} \quad (22)$$

Consideremos ahora la posibilidad de que al medir \widehat{Q}_2 el resultado sea $Q_2 = -1_2$. Un instante después de la medición (al tiempo t_2^+), el colapso de $|t_2\rangle$ es al estado

$$|\tilde{2}\rangle = \frac{|t_2\rangle - |2\rangle \langle 2|t_2\rangle}{\sqrt{1 - |\psi_{1 \rightarrow 2}|^2}}.$$

En la forma de normalizar la proyección a $|\tilde{2}\rangle$ se introdujo una fase arbitraria, adoptada de manera que la fase de $\psi_{1 \rightarrow 2}$, el ángulo θ_2 definido en (16), es relativa a la fase de $\langle \tilde{2}|t_2\rangle$ y esta amplitud la tomamos real.

La evolución subsecuente a la medición de Q_2 (partiendo de $|\tilde{2}\rangle$) lleva, al tiempo t_3 , al estado

$$|t_3, -\rangle = \left(|t_3\rangle - |t_3, +\rangle \langle 2|t_2\rangle \right) \frac{1}{\sqrt{1 - |\psi_{1\rightarrow 2}|^2}},$$

donde $|t_3\rangle = U(t_3, t_2) |t_2\rangle = U(t_3, t_1) |t_1\rangle$ es el resultado de la evolución directa, sin medición intermedia. Por lo tanto, la probabilidad de obtener el resultado $Q_3 = 1_3$ al tiempo t_3 , habiendo partido del estado $|\tilde{2}\rangle$ al tiempo t_2 es

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(1_3 | -1_2) &= |\langle 3|t_3, -\rangle|^2 \\ &= \frac{1}{1 - |\psi_{1\rightarrow 2}|^2} \left(|\psi_{1\rightarrow 3}|^2 + |\psi_{1\rightarrow 2}\psi_{2\rightarrow 3}|^2 \right. \\ &\quad \left. - 2 |\psi_{1\rightarrow 3} \psi_{1\rightarrow 2} \psi_{2\rightarrow 3}| \cos(\theta_2 + \theta_3 - \phi_3) \right), \end{aligned} \quad (23)$$

Entonces

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(-1_2 \xrightarrow{2} 1_3) &= \mathbb{P}(1_3 | -1_2) \mathbb{P}(-1_2) = \mathbb{P}(1_3 | -1_2) (1 - |\psi_{1\rightarrow 2}|^2) \\ &= |\psi_{1\rightarrow 3}|^2 + |\psi_{1\rightarrow 2}\psi_{2\rightarrow 3}|^2 - 2 |\psi_{1\rightarrow 3} \psi_{1\rightarrow 2} \psi_{2\rightarrow 3}| \cos(\theta_2 + \theta_3 - \phi_3) \end{aligned} \quad (24)$$

y la alternativa complementaria (obtener el resultado $Q_3 = -1_3$) es

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(-1_2 \xrightarrow{2} -1_3) &= (1 - \mathbb{P}(1_3 | -1_2)) \mathbb{P}(-1_2) = \mathbb{P}(-1_2) - \mathbb{P}(-1_2 \xrightarrow{2} 1_3) \\ &= 1 - |\psi_{1\rightarrow 2}|^2 - \mathbb{P}(-1_2 \xrightarrow{2} 1_3). \end{aligned} \quad (25)$$

Donde la probabilidad $\mathbb{P}(-1_2 \xrightarrow{2} 1_3)$ está dada en (23).

El ángulo $\delta = \theta_2 + \theta_3 - \phi_3$ en (23) es la diferencia de fase entre dos "vías" que se superponen interferentemente en la amplitud $\psi_{1\rightarrow 3}$ cuando no se mide \hat{Q}_2 . Una de las vías es la de $Q_2 = 1_2$ y la otra la vía con $Q_2 = -1_2$. La fase $\delta = \theta_2 + \theta_3 - \phi_3$ que interviene en (23) es la diferencia entre la fase θ_3 de la vía directa de $|t_1\rangle$ a $|t_3\rangle$ y la fase de las dos vías que son distinguidas por \hat{Q}_2 .

Cuando sustituimos las probabilidades (21), (22), (24) y (25) en la definición (2) de C_{23} , encontramos para el correlator a los tiempos t_2 y t_3 la siguiente fórmula

$$C_{23} = 1 - 2 \left(|\psi_{1\rightarrow 2}|^2 + |\psi_{1\rightarrow 3}|^2 - 2 |\psi_{1\rightarrow 3} \psi_{1\rightarrow 2} \psi_{2\rightarrow 3}| \cos \delta \right). \quad (26)$$

Las amplitudes y la diferencia de fases δ que aparecen en (26) fueron introducidas en (16), (20) y (18). Usando los resultados obtenidos para los correladores cuánticos C_{12} y C_{13} la fórmula para C_{23} , (26) se escribe

$$C_{23} = 4 \mathbf{Re} \psi_{1\rightarrow 3}^* \psi_{1\rightarrow 2} \psi_{2\rightarrow 3} - 1 - C_{12} - C_{13}, \quad (27)$$

en la que solo quedaría por calcular el término de interferencia

$$R_3 := \mathbf{Re} \psi_{1 \rightarrow 3}^* \psi_{1 \rightarrow 2} \psi_{2 \rightarrow 3} . \quad (28)$$

Recolectamos en el siguiente lema los resultados obtenidos para los correlatores cuánticos en las dos últimas sub-secciones.

Lema 3-1.1. *En una prueba LG cuántica no-degenerada los correlatores temporales son*

$$\begin{aligned} C_{1m} &= 2 |\psi_{1 \rightarrow m}|^2 - 1 , \quad m = 2, 3 , \\ C_{23} &= 4 \mathbf{Re} \psi_{1 \rightarrow 3}^* \psi_{1 \rightarrow 2} \psi_{2 \rightarrow 3} - 1 - C_{12} - C_{13} . \end{aligned}$$

Las amplitudes involucradas están definidas en (16), (18) y (20)

3-2. Forma operacional de los correlatores

El correlator K_3 obtenido en (38) se puede reescribir en términos de los operadores en la representación de Heisenberg,

$$\mathcal{Q}_k(t_1) = U^*(t_k, t_1) \widehat{Q}_k U(t_k, t_1) . \quad (29)$$

con la condición $\mathcal{Q}_k(t_k) = \widehat{Q}_k$. Para no sobrecargar la notación, vamos a escribir \mathcal{Q}_k para referirnos a $\mathcal{Q}_k(t_1)$.

Partiendo de la definición hecha en (15) y haciendo uso del operador de evolución temporal (14), tenemos:

$$\mathcal{Q}_k = 2U^*(t_k, t_1) |k\rangle \langle k| U(t_k, t_1) - \mathbb{1} . \quad (30)$$

Además, también a partir de (15), es fácil obtener:

$$|k\rangle \langle k| = \frac{1}{2} (\widehat{Q}_k + \mathbb{1}) \quad (31)$$

Con las consideraciones anteriores podemos reescribir el correlator (17), teniendo en cuenta la definición (16):

$$\begin{aligned} C_{12} &= 2 |\psi_{1 \rightarrow 2}|^2 - 1 = 2 \langle 1| U^*(t_2, t_1) |2\rangle \langle 2| U(t_2, t_1) |1\rangle - 1 \\ &= 2 \langle 1| U^*(t_2, t_1) \frac{1}{2} (\widehat{Q}_2 + \mathbb{1}) U(t_2, t_1) |1\rangle - 1 \\ &= \langle 1| \mathcal{Q}_2 |1\rangle = \langle 1| \frac{1}{2} \{ \mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2 \} |1\rangle . \end{aligned} \quad (32)$$

La última ecuación es válida en vista de que $\mathcal{Q}_1(t_1) = \widehat{Q}_1$ y de que $\widehat{Q}_1 |1\rangle = |1\rangle$.

Aplicando las mismas consideraciones que en (32) y la definición (18), se obtiene:

$$C_{13} = \langle 1| \mathcal{Q}_3 |1\rangle = \langle 1| \frac{1}{2} \{ \mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_3 \} |1\rangle . \quad (33)$$

Para el correlator C_{23} partimos del resultado obtenido en (26). Utilizamos los resultados (17), (19), y las definiciones correspondientes (16), (18) y (20):

$$\begin{aligned}
C_{23} &= 1 - 2 \left(|\psi_{1 \rightarrow 2}|^2 + |\psi_{1 \rightarrow 3}|^2 - \psi_{1 \rightarrow 2} \psi_{2 \rightarrow 3} \psi_{1 \rightarrow 3}^* - \psi_{1 \rightarrow 2}^* \psi_{2 \rightarrow 3}^* \psi_{1 \rightarrow 3} \right) \\
&= -C_{12} - C_{23} + 2 \left(\psi_{1 \rightarrow 2} \psi_{2 \rightarrow 3} \psi_{1 \rightarrow 3}^* + \psi_{1 \rightarrow 2}^* \psi_{2 \rightarrow 3}^* \psi_{1 \rightarrow 3} \right) - 1 \\
&= -C_{12} - C_{23} - 1 + 2 \left(\langle 1 | U^*(t_3, t_1) | 3 \rangle \langle 3 | U(t_3, t_2) | 2 \rangle \langle 2 | U(t_2, t_1) | 1 \rangle + c.c. \right) \\
&= -C_{12} - C_{23} - 1 + \\
&\quad + 2 \left(\langle 1 | U^*(t_3, t_1) \frac{1}{2} (\widehat{Q}_3 + \mathbb{1}) U(t_3, t_1) U^*(t_2, t_1) \frac{1}{2} (\widehat{Q}_2 + \mathbb{1}) U(t_2, t_1) | 1 \rangle + c.c. \right) \\
&= \langle 1 | \frac{1}{2} \{ \mathcal{Q}_2, \mathcal{Q}_3 \} | 1 \rangle .
\end{aligned} \tag{34}$$

En el siguiente lema recopilamos los resultados, (32) - (34), que hemos obtenido para los observables \widehat{Q}_k con auto-valor $Q_k = 1$ no-degenerado.

Lema 3-2.1. *Una prueba LG cuántica no-degenerada, con estado inicial $|t_1\rangle = |1\rangle$ y que usa mediciones proyectivas, genera los correlatores temporales,*

$$C_{\ell m} = \langle 1 | \frac{1}{2} \{ \mathcal{Q}_\ell, \mathcal{Q}_m \} | 1 \rangle , \quad \ell < m .$$

De tal manera que el correlator LG, $K_3 = C_{12} + C_{23} - C_{13}$, para sistemas cuánticos se puede reescribir en términos de los operadores dicotómicos en (29) de la siguiente manera,

$$K_3 = \langle 1 | \frac{1}{2} \left(\{ \mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2 \} + \{ \mathcal{Q}_2, \mathcal{Q}_3 \} - \{ \mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_3 \} \right) | 1 \rangle . \tag{35}$$

3-3. Los correlatores a dos tiempos y la coherencia cuántica

En secciones anteriores dimos a los correlatores $C_{\ell m}$, accesibles experimentalmente, una fundamentación sana en mecánica cuántica. Así que nos olvidamos del macro-realismo y enfocamos nuestra mira a extraer de los correlatores medidos experimentalmente información sobre las amplitudes de probabilidad y la coherencia en un sistema micro.

Empezamos por las amplitudes, que consiste en re-escribir el Lema 3-1.1 de la siguiente manera.

Lema 3-3.1. *Un prueba LG con observables dicotómicos no degenerados aporta la siguiente información sobre las amplitudes,*

$$|\psi_{1 \rightarrow m}|^2 = \frac{1}{2} (C_{1m} + 1) , \quad m = 2, 3 \tag{36}$$

$$\text{Re} \psi_{1 \rightarrow 3}^* \psi_{1 \rightarrow 2} \psi_{2 \rightarrow 3} = \frac{1}{4} (1 + C_{12} + C_{13} + C_{23}) . \tag{37}$$

En cuanto al correlator $K_3 = C_{12} + C_{23} - C_{13}$, de las fórmulas (17), (26) y (19) se tiene que

$$K_3 = 1 - 4 \left(|\psi_{1 \rightarrow 3}|^2 - \mathbf{Re} \psi_{1 \rightarrow 3}^* \psi_{1 \rightarrow 2} \psi_{2 \rightarrow 3} \right) . \quad (38)$$

La desigualdad LG, $-3 \leq K_3 \leq 1$, se escribe de la siguiente manera

$$0 \leq |\psi_{1 \rightarrow 3}|^2 - \mathbf{Re} \psi_{1 \rightarrow 3}^* \psi_{1 \rightarrow 2} \psi_{2 \rightarrow 3} \leq 1 . \quad (39)$$

En la desigualdad interviene la amplitud $\Phi_2 = \psi_{1 \rightarrow 2} \psi_{2 \rightarrow 3}$ de obtener el resultado $Q_3 = 1_3$ al tiempo t_3 , habiendo hecho la medición de \hat{Q}_2 al tiempo t_2 con el resultado $Q_2 = 1_2$. La amplitud para el canal alternativo es $\Phi_{\tilde{2}} = \psi_{1 \rightarrow \tilde{2}} \psi_{\tilde{2} \rightarrow 3}$. La otra amplitud que interviene en la desigualdad es $\psi_{1 \rightarrow 3} = \Phi_2 + \Phi_{\tilde{2}}$, que es la amplitud de obtener el resultado $Q_3 = 1_3$ cuando el sistema evoluciona libremente de $|t_1\rangle$ a $|t_3\rangle$, sin observar el valor de Q_2 al tiempo t_2 .

La desigualdad LG con amplitudes en (39) es satisfecha trivialmente en los casos en que el término de interferencia es nulo, $\mathbf{Re} \psi_{1 \rightarrow 3}^* \psi_{1 \rightarrow 2} \psi_{2 \rightarrow 3} = 0$, lo que ocurre cuando la fase $\delta = \pi/2$. En general, la cota superior de (39) no es trivial dado que $\mathbf{Re} \psi_{1 \rightarrow 3}^* \psi_{1 \rightarrow 2} \psi_{2 \rightarrow 3} < 0$ para $\delta > \pi/2$.

3-4. El protocolo LG como medida de coherencia

El protocolo LG se puede emplear para determinar el término de interferencia para ir del estado $|1\rangle$ a $|3\rangle$, cuando no existe medición intermedia. Este término de interferencia es un indicador de la coherencia del sistema. Si la interferencia se pierde, entonces también la coherencia lo hace.

Consideremos la amplitud de ir del estado

$$\begin{aligned} \psi_{1 \rightarrow 3} &= \langle 3 | U(t_3, t_1) | 1 \rangle \\ \psi_{1 \rightarrow 3} &= \langle 3 | U(t_3, t_2) | 2 \rangle \langle 2 | U(t_3, t_2) | 1 \rangle + \langle 3 | U(t_3, t_2) | \tilde{2} \rangle \langle \tilde{2} | U(t_3, t_2) | 1 \rangle . \end{aligned} \quad (40)$$

Podemos designar $\langle 3 | U(t_3, t_2) | 2 \rangle \langle 2 | U(t_3, t_2) | 1 \rangle = \psi_{2 \rightarrow 3} \psi_{1 \rightarrow 2} = \Phi_2$

y $\langle 3 | U(t_3, t_2) | \tilde{2} \rangle \langle \tilde{2} | U(t_3, t_2) | 1 \rangle = \Phi_{\tilde{2}}$.

De esta forma reescribimos la ecuación en términos de las amplitudes de los caminos a tomar para ir de $|1\rangle$ a $|3\rangle$ como:

$$\psi_{1 \rightarrow 3} = \Phi_2 + \Phi_{\tilde{2}} , \quad (41)$$

y obtener:

$$|\psi_{1 \rightarrow 3}|^2 = |\Phi_2|^2 + |\Phi_{\tilde{2}}|^2 + 2 \mathbf{Re} \Phi_2^* \Phi_{\tilde{2}} . \quad (42)$$

Sustituyendo el valor de $|\Phi_{\tilde{2}}|^2 = |\psi_{1 \rightarrow 3} - \Phi_2|^2$, se llega a la ecuación:

$$\mathbf{Re} \Phi_2^* \Phi_{\tilde{2}} = \mathbf{Re} \psi_{1 \rightarrow 3}^* \Phi_2 - |\Phi_2|^2 . \quad (43)$$

Donde el término $\mathbf{Re} \Phi_2^* \Phi_2$ es una medida de la interferencia de los caminos de ir de $|1\rangle$ a $|3\rangle$.

Reescribiendo la definición de $\Phi_2 = \psi_{2 \rightarrow 3} \psi_{1 \rightarrow 2}$:

$$\mathbf{Re} \Phi_2^* \Phi_2 = \mathbf{Re} \psi_{1 \rightarrow 3}^* \psi_{2 \rightarrow 3} \psi_{1 \rightarrow 2} + |\psi_{2 \rightarrow 3} \psi_{1 \rightarrow 2}|^2 . \quad (44)$$

Empleando los resultados obtenidos en la ecuación (3-1.1), se logra llegar a la ecuación:

$$\mathbf{Re} \Phi_2^* \Phi_2 = \frac{1}{4} (C_{12} + C_{23} + C_{13} + 1) - P(1_3|1_2)P(1_2) . \quad (45)$$

Esta última ecuación nos permite conocer el término de interferencia de los caminos para ir del estado $|1\rangle$ a $|3\rangle$, $\mathbf{Re} \Phi_2^* \Phi_2$ en términos de los correlatores y de la probabilidad $P(1_3|1_2)P(1_2)$. Por lo que el protocolo LG experimentalmente es suficiente para medir el término de interferencia y así tener información de la coherencia del sistema.

3-5. El correlator K_3 y la coherencia cuántica

Es posible escribir una ecuación para el correlator K_3 que contenga el término de interferencia definido en (45), tal que, si la coherencia cuántica se pierde se recupera la ecuación para K_3 construida bajo consideraciones de las hipótesis de macro-realismo.

En la ecuación (45) tenemos el término $P(1_3|1_2)P(1_2) = P(1_1 \xrightarrow{2} 1_2 \xrightarrow{2} 1_3)$, siguiendo la definición (1) y sin perder generalidad.

Dado que los correlatores C_{12} y C_{23} (ambos) requieren de la medición intermedia, se puede expresar $P(1_1 \xrightarrow{2} 1_2 \xrightarrow{2} 1_3)$ en términos de estos, para el caso del protocolo mínimo:

$$4 P(1_1 \xrightarrow{2} 1_2 \xrightarrow{2} 1_3) = 2 C_{12} + 2 C_{23} + 4 P(1_1 \xrightarrow{2} -1_2 \xrightarrow{2} 1_3) .$$

Si multiplicamos la ecuación (45) por 4, sustituimos el término $P(1_1 \xrightarrow{2} 1_2 \xrightarrow{2} 1_3)$ con la expresión anterior y despejamos, resulta:

$$K = C_{12} + C_{23} - C_{13} = 1 - 4 P(1_1 \xrightarrow{2} -1_2 \xrightarrow{2} 1_3) - 4 \mathbf{Re} \Phi_2^* \Phi_2 . \quad (46)$$

Cuando la coherencia se pierde, el término de interferencia se hace cero y se recupera la expresión para K_3 en el sentido macro, como se define en (7). La violación a K_3 bajo hipótesis de macro-realismo se debe al término de interferencia.

En el Capítulo 5 trataremos la precesión de espines nucleares en un experimento de resonancia magnética [2]. La confirmación del Lema 3-3.1 con nuestros

cálculos y los datos experimentales que extrajimos de la referencia [2] es muy buena, lo que confirma que la prueba LG es una herramienta para obtener información sobre la coherencia cuántica. Los cálculos en el Capítulo 5 nos permitieron poner en práctica los dos métodos desarrollados en este capítulo.

Capítulo 4

El acto de medir sistemas cuánticos

Los científicos de la información cuántica [38] sacan provecho [39, 40] del *hecho* de que un estado cuántico desconocido *no puede ser observado sin ser perturbado*. Desde la perspectiva de la información cuántica, el asunto suele ser identificado con el dicho “no se obtiene información sin perturbar” [41]. En la otra cara de la moneda está el gremio del macro-realismo que busca maneras “no-invasivas” (sin perturbar) para sacar información de los sistemas micro: buscan observar sin perturbar. ¿Serán estos los hackers de los sistemas de información cuántica?

En los últimos cincuenta años han aparecido en la física cuántica formas “nuevas” de medición, como las mediciones débiles (weak measurements) [35], las mediciones sin demoler lo cuántico (quantum nondemolition measurements) [37] y las máquinas cuánticas de interrogación [34, 36], que deciden sobre la presencia/ausencia de un objeto sin tocarlo (en caso de que el objeto esté presente).

Ninguno de estos nuevos enfoques aporta una solución al “problema de la medición” [42] ni constituyen reglas (axiomas) nuevos en la mecánica cuántica. Solo se trata de aplicaciones nuevas de los mismos conceptos viejos. El problema que nos interesa en relación a la prueba LG es la jerga que se genera en torno a ellos y que suele sugerir más profundidad de la que realmente hay.

Este Capítulo es un ejercicio por aclarar nuestra confusión en torno al uso descuidado del lenguaje macro para referirse a situaciones de carácter micro. Los dos términos por aclarar son “mediciones no-invasivas” (sinónimo de no-perturbativas) y “mediciones libres de interacción”. La limpieza de los conceptos es necesaria para entender los alcances de la prueba LG y, para ello, en las siguientes secciones revisamos formas de medición que son más sutiles que la medición proyectiva simple.

Solo el término “medición con resultado negativo” (o simplemente “medición negativa”) nos parece que esta libre de ambigüedades. Sin embargo, se le atribuyen más virtudes de las que tiene [3]. El resultado de una medición ordinaria es el registro de la ocurrencia de un cierto evento mientras que el resultado de una medición negativa se infiere de la ausencia (no ocurrencia) de un cierto evento. Por

ejemplo, un sistema de dos estados se prepara en la superposición $c_- |-1\rangle + c_+ |1\rangle$ de estados propios de Q y se realiza un experimento para detectar el valor $Q = -1$. Si el resultado es negativo (no se detecta), entonces concluimos que el valor medido de Q fue 1. Lo incorrecto es concluir (para de ahí seguir adelante) que la medición fue no invasiva (sin perturbar) por el hecho de haber sido negativa. Dos casos [30, 43] los discutimos en la subsección 4-2

Otro término que discutimos y llegamos a darle un significado preciso es el término de “coherencia cuántica macro” ya que un uso descuidado del término también es motivo de confusión en la interpretación (utilidad) de la prueba LG. Les anticipamos que la “coherencia cuántica macro” es lo usual en cualquier experimento cuántico que usa mediciones proyectivas simples y que es un error darle la connotación vaga del gato vivo-muerto de Schrödinger. Empezamos por este asunto.

4-1. ¿Cuál coherencia cuántica macro?

Una medición sobre un sistema micro involucra una primera etapa de amplificación, la cual por lo general tiene una evolución unitaria, seguida de una etapa de interacción del sistema micro con el entorno macro. En cualquier experimento se busca que sea este un entorno controlado, pero es imposible evitar una interacción casual del sistema micro con la parte no controlada del entorno macro.

Por ejemplo, no hay detectores que tengan una eficiencia cuántica del 100%. Un fotón que llega al detector puede “perderse”, sin que este lo registre, o bien puede el detector registrar la presencia de un fotón sin que realmente haya llegado uno. En el segundo caso hay un enmascaramiento de la información recogida y en el primero es información la que se pierde, que se va a la parte no controlada del entorno macro y no se recoge.

La asimilación de lo micro a lo macro es el aspecto que no ha podido ser controlado en su totalidad en el acto de medir. Además, es la parte conceptualmente difícil en los puentes que conectan lo micro y lo macro.

En cambio en la etapa de amplificación se prepara una superposición de estados de propiedades que pueden ser amplificadas y llevadas a un nivel macro, susceptibles de dar origen a registros en los instrumentos (también) macro. El siguiente ejemplo dá contenido a esta descripción tan general, que parece vaga.

El prototipo de un acto de medición proyectiva es el experimento de Stern-Gerlach. Para su realización, el observable vector de spin (micro) se acopla a la componente z del vector momento mediante el gradiente de B (macro, no cuántico)

que produce un desplazamiento en la dirección z , que es amplificado al viajar a lo largo del imán: hay un acoplamiento micro-macro que es planeado por el experimentador¹ y que puede ser descrito de manera semi-clásica.

Al salir del amplificador (un imán suficientemente largo y con un gradiente de campo muy pronunciado), el estado cuántico de un átomo de plata es una superposición coherente de estados de spin enlazados con estados propios $|\pm\delta p_z\rangle$ de momento p_z , $|\uparrow\rangle|\delta p_z\rangle + |\downarrow\rangle|-\delta p_z\rangle$, suficientemente diferenciados como para ser distinguibles en el nivel macro. Una vez amplificados, los desplazamientos en z serán usados como las marcas para la aguja (o apuntador, *pointer*) de un instrumento, correspondientes a las posibles orientaciones del spin. Solo uno de ellos será realizado al momento de medir. Esto ocurre con la “asimilación” del sistema micro (el átomo de plata) al entorno macro (sobre la placa de vidrio) donde se forman las manchas de plata desplazadas en z . La asimilación de lo micro a lo macro, necesaria para producir un dato, es *necesariamente* un acto demoledor para el sistema micro: es la única manera en que una medición cuántica puede producir un resultado.

En conclusión, cuando hablemos de “coherencia cuántica macro” nos estaremos refiriendo a la coherencia cuántica de *propiedades macro de un sistema micro*, coherencia que no solo es manejable sino que constituye una parte esencial en la planeación de un experimento: lo que se quiere medir a un sistema micro se debe acoplar a propiedades que se pueden amplificar para llevarlas a un nivel macro. Después viene (de ser requerida por el experimento) la interacción micro-macro, que es cuando se produce el dato.

Es un error entender por “coherencia cuántica macro” la superposición cuántica de propiedades de un objeto macro. Esta falsa concepción conlleva una contradicción con la definición de “objeto macro” que luego se vera reflejada en las conclusiones de una argumentación basada en este mal-entendimiento.

Por grande que sea un sistema (un gato) si lo podemos preparar en un estado coherente es porque lo tenemos en un ambiente aislado del entorno macro. Y entonces, según nuestra convención, se trata de un sistema micro (un gato-micro),

¹ En la *Stanford Encyclopedia of Philosophy* leemos lo siguiente. “Stern calculated, for example, that a magnetic field gradient of 10^4 Gauss per centimeter would be sufficient to produce deflections that would give detectable separations of the beam components. He asked Gerlach if he could produce such a gradient. Gerlach responded affirmatively, and said he could do even better.” Tomado de, <https://plato.stanford.edu/entries/physics-experiment/app5.html>

aunque de proporciones gigantescas. Nada impide —en principio, solo en principio²— tener un gato perfectamente aislado del entorno macro (sin respirar, sin comer, ¡nada!) y manteniendo estable la relación de fase entre sus partes. Entonces podríamos, en tal entorno controlado por nosotros, hacer evolucionar al gato-micro unitariamente entre la vida y la muerte: podríamos resucitar al gato-micro muerto (o a la simulación cuántica de un gato).

4-2. Las mediciones negativas y la preparación de estados cuánticos

La cuestión “originalmente” planteada por Renninger [43] fue ¿qué pasa con el estado cuántico de *un* sistema si *un* acto de medición dá un resultado negativo: lo que se busca no se encuentra? Renninger plantea el asunto de una “medición negativa” en un experimento conceptual (gedanken) que no incluye los elementos suficientes para dar una mejor respuesta que el axiomático colapso del estado.

Dicke retoma el asunto [30] en una situación mucho más detallada (una versión mejorada del microscopio de Heisenberg) y, en un cálculo a segundo orden, encuentra que “... momentum is also transferred when the lack of a scattered photon is used to discover that the particle is absent from the field of view of the microscope (i.e., located outside the light beam)”. [30]

El resultado de Dicke demuestra que una medición negativa del lado macro puede ser *profundamente invasiva del lado micro*: el criterio de invasión del lado micro es la transferencia de momento al ente micro —sin dispersión del fotón macro (pulso de luz muy localizado en el tiempo): ¡paradoja! [30, 45]. En el ejemplo de Dicke la medición negativa tiene un interés como un método para preparar al sistema en un estado evacuado en la zona del haz luminoso.

Ejemplos elementales de mediciones negativas como preparaciones de orientaciones de estados de spin las discute Feynman (con el nombre de filtros) en el Capítulo 5 del Vol.3 de sus lecciones de física [27].

² W.G. Unruh [44] calcula que N objetos cuánticos pierden su coherencia al menos N veces más rápido que uno solo y hay que tener en cuenta que para un gato $N > 10^{26}$. Lo usual para minimizar la influencia del entorno macro es ponerlo a temperaturas lo suficientemente bajas para mantener al sistema en su estado base. Para un resonador mecánico de unas pocas micras la exigencia es que $T \ll 50$ nK [25].

4-3. Las mediciones libres de interacción

El siguiente paso se dio en otra dirección muy diferente. Consistió en plantearse el problema de cómo realizar una medición negativa que sea “libre de interacción” (seguir leyendo). Concretamente, el problema planteado fue cómo montar “una máquina de interrogación” (¡para obtener información!), que mediante “mediciones libres de interacción” revele la presencia o la ausencia de *un objeto macro*, “sin verlo o tocarlo”. La condición es que “estar” o “no estar” sean eventos macro y no solo conclusiones de algún counterfactual reasoning (o de un soliloquio ¿desquiciado? por aquello de “to be or not to be”).

Una “máquina cuántica de interrogación” [34, 36] revela la presencia o la ausencia, no de cualquier objeto, sino de un detector incógnita (que en [34] le dan la personificación de una bomba) capaz de producir irreversiblemente un evento macro (una explosión, buhm, y no un tímido click). El punto de vista es que si la máquina es capaz de dar una respuesta afirmativa sin que el detector incógnita haga click (que la bomba no haga buhm), entonces se dice que la máquina dió la respuesta de una manera libre de interacción.

En esta situación, el término “libre de interacción” significa que la máquina reportó que el detector incógnita “si está” y que *en este no se desencadenó el proceso irreversible que generaría un registro macro* (el gran buhm).

El objeto de interés para la máquina cuántica de interrogación es el detector incógnita (la bomba) que es un objeto ambivalente (que según los intereses de quien use la máquina podría ser *el objeto en observación* o podría ser *un dispositivo de medición* (un detector)), que provee (en cualquier caso) un puente micro-macro.

Bajo la hipótesis de que el detector incógnita es eficiente al 100% (el detector detona en un click si, y solo si, ha recibido un fotón) el reto planteado fue que la máquina decida sobre la presencia/ausencia del detector incógnita (un objeto macro) *sin activar su canal micro-macro*. Es la no activación del canal micro-macro lo que se considera un sinónimo de ser libre de interacción [33, p. 495] para una máquina cuántica de interrogación.

4-4. La prueba LG y las mediciones no-invasivas

Para ella no es relevante mantener apagada la conexión micro-macro de uno de los detectores: la forma requerida de no-invasividad es otra. En el montaje de interrogación cuántica el interés para la prueba LG sería “saber” si la evolución del

fotón (usado de sensor por interferencia) no es afectada por la presencia/ausencia del detector incógnita (aún en el caso negativo de que no haga click).

La respuesta es conocida por todos: el fenómeno de interferencia hace que la "evolución" *si se vea* afectada. Los resultados de las mediciones posteriores no son los mismos cuando el detector está ausente (existen en el sistema dos alternativas interferentes) a cuando está presente (solo existe una vía), aún restringiéndonos a una selección de los eventos "negativos". Es una situación idéntica al experimento de Young [27, Chap. 1].

Capítulo 5

La prueba LG para espines nucleares en precesión

La prueba LG se realizó experimentalmente (en la India [2]) para espines nucleares precesando en un campo magnético externo, usando un sistema de resonancia magnética nuclear. Las correlaciones medidas a intervalos de tiempo en los que es despreciable la decoherencia del sistema (molecular) de spin-1/2 están en muy buen acuerdo con los resultados de la teoría cuántica. El experimento confirma la validez del Lema 3-3.1.

La medición en [2] del correlator K_3 a intervalos de tiempo muy prolongados se va reduciendo hasta meterse entre las cotas establecidas por la desigualdad LG, lo cual es una evidencia de que la coherencia se va perdiendo al paso del tiempo. Interacciones dipolo-dipolo y anisotropías del entorno químico son la causa de la decoherencia [2], que va metiendo al correlator K_3 en la zona válida para el “macro-realismo”.

El experimento de resonancia magnética nuclear [2] nos aporta una evidencia de que, mas allá del discurso del macro-realismo, la prueba LG es una herramienta útil para investigar la sobrevivencia y durabilidad del carácter cuántico de un sistema (espines nucleares individuales en este caso) al interactuar con su entorno macro [2]. Cada miembro en el ensamble tiene su propia interacción con el entorno macro, lo que tiende a destruir la relación de fase característica de una superposición de estados cuánticos.

5-1. Cálculo de los correlatores $C_{\ell m}$ y K_3

A continuación aplicamos los resultados del capítulo anterior para calcular una fórmula para el correlator LG en la precesión de un spin-1/2 en un campo magnético constante. El ejercicio es útil para concretar en un ejemplo la aplicación de los dos métodos que expusimos: haciendo uso de las amplitudes y haciendo uso de los operadores. Al final comparamos con los resultados experimentales que nos permitimos extraer de la referencia [2].

El hamiltoniano para una partícula de spin-1/2 en un campo externo constante es

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \hbar \omega \sigma_{\hat{n}} , \quad (47)$$

donde $\sigma_{\hat{n}} = n_1\sigma_1 + n_2\sigma_2 + n_3\sigma_3$, las σ_i son las matrices de Pauli y $\hat{n} = (n_1, n_2, n_3)$ es un vector unitario en \mathbb{R}^3 , que es la orientación del campo externo. La evolución de los vectores de estado es unitaria dada por

$$U(t', t) = \cos \frac{1}{2}\omega(t' - t) - i\sigma_{\hat{n}} \sin \frac{1}{2}\omega(t' - t) .$$

Adoptamos como la base estandar a los vectores propios de σ_3 : $\sigma_3 |\uparrow\rangle = |\uparrow\rangle$ y $\sigma_3 |\downarrow\rangle = -|\downarrow\rangle$.

Para los tres tiempos t_ℓ , $\ell = 1$ a 3, el observable dicotómico es $\hat{Q}_\ell = \sigma_3$. Para calcular los correladores requeridos se realizarán dos experimentos: uno de ellos a tres y el otro a dos tiempos. Para ambos experimentos se prepara a la partícula en el estado $|t_1\rangle = |\uparrow\rangle \equiv |1\rangle$.

5-1.1. Cálculo con amplitudes. La amplitud de probabilidad para obtener al tiempo t_2 el resultado $Q_2 = 1_2$ (con $|2\rangle = |\uparrow\rangle$) es

$$\psi_{1 \rightarrow 2} = \langle \uparrow | U(t_2, t_1) | \uparrow \rangle = \cos(\frac{1}{2}\omega t_2) - in_3 \sin(\frac{1}{2}\omega t_2) . \quad (48)$$

Considerando (17), el correlator C_{12} es:

$$C_{12} = 2(\cos^2(\omega t_2/2) + n_3^2 \sin^2(\omega t_2/2)) - 1 . \quad (49)$$

Utilizando las identidades trigonométricas $2\cos^2\theta - 1 = \cos(2\theta)$ y $2\sin^2\theta = 1 - \cos(2\theta)$, el correlator anterior es

$$C_{12} = n_3^2 + (1 - n_3^2) \cos(\omega t_2) . \quad (50)$$

Si el estado evoluciona libremente de t_1 a t_3 , la amplitud para obtener al tiempo t_3 el resultado $Q_3 = 1_3$ (con $|3\rangle = |\uparrow\rangle$), sin ningún condicionamiento, es

$$\psi_{1 \rightarrow 3} = \langle \uparrow | U(t_3, t_1) | \uparrow \rangle = \cos \frac{1}{2}\omega t_3 - in_3 \sin \frac{1}{2}\omega t_3 . \quad (51)$$

El tratamiento algebraico para calcular C_{13} es idéntico que para el cálculo de (50). El resultado es

$$C_{13} = n_3^2 + (1 - n_3^2) \cos(\omega t_3) . \quad (52)$$

Para calcular el correlator C_{23} , la amplitud para obtener al tiempo t_3 el resultado $Q_3 = 1_3$ ($|3\rangle = |\uparrow\rangle$), partiendo de $Q_2 = 1_2$ al tiempo t_2 , es

$$\psi_{2 \rightarrow 3} = \langle \uparrow | U(t_3, t_2) | \uparrow \rangle = \cos \frac{1}{2}\omega \Delta t - in_3 \sin \frac{1}{2}\omega \Delta t . \quad (53)$$

El cálculo del correlator C_{23} es similar al cálculo de (50). El resultado es

$$C_{23} = n_3^2 + (1 - n_3^2) \cos(\omega \Delta t) . \quad (54)$$

Con los correladores calculados, (50), (54) y (52), el correlator LG es:

$$K_3 = n_3^2 + (1 - n_3^2) \left(\cos(\omega t_2) + \cos(\omega \Delta t) - \cos(\omega t_3) \right) . \quad (55)$$

Si tomamos al tiempo t_2 equidistante a los tiempos t_1 y t_3 , tal que: $\omega \Delta t = \omega t_2 = \pi/3$ y que el vector del campo está sobre el plano x - y , $n_3 = 0$, se obtiene

$$K_3 = \frac{3}{2} > 1 , \quad (56)$$

que viola la desigualdad LG. El resultado (56) no es una sorpresa. Lo que hay que entender es qué significa (en cuanto a la interferencia) que un sistema cuántico viole la desigualdad LG.

5-1.2. Cálculo con operadores. El observable dicotómico en la prueba LG de la precesión de espines es el mismo para los tres tiempos: $\hat{Q}_k = |\uparrow\rangle\langle\uparrow| - |\downarrow\rangle\langle\downarrow| = \sigma_3$. En el Anexo, Sección 5-3, se calcula su representación de Heisenberg, $\mathcal{Q}_k = U^*(t_k, t_1)\hat{Q}_k U(t_k, t_1)$. También en el Anexo se calcula el anticonmutador de \mathcal{Q}_ℓ y \mathcal{Q}_m , obteniéndose

$$\langle t_1 | \frac{1}{2} \{ \mathcal{Q}_\ell, \mathcal{Q}_m \} | t_1 \rangle = n_3^2 + (1 - n_3^2) \cos(t_\ell - t_m) . \quad (57)$$

Con este resultado el correlator K_3 definido mediante operadores en (35) es,

$$K_3 = n_3^2 + (1 - n_3^2) \left(\cos(t_2 - t_1) + \cos(t_3 - t_2) - \cos(t_3 - t_1) \right) . \quad (58)$$

Que coincide con el correlator obtenido con amplitudes, la ecuación (55) de la Sección anterior con $t_1 = 0$.

5-2. Teoría y experimento

En los experimentos [2] se preparan los espines con orientación sobre el plano x - y , perpendiculares al campo magnético. Entonces todas las fórmulas obtenidas en las secciones anteriores (ver el Lema 3-3.1) se aplican con $n_3 = 0$. En estas condiciones, durante la prueba LG se colectan datos para los correladores $C_{\ell m}$ usando intervalos simétricos de tiempo $t = t_2 - t_1 = t_3 - t_2$ crecientes.

La primer cantidad de interés es el correlator K_3 . Los puntos rojos en la figura 1 son los valores de $K_3 = C_{12} + C_{23} - C_{13}$ obtenidos con los datos aportados por la prueba LG (los tomamos de la referencia [2]) para los correladores $C_{\ell m}$. La curva verde es la gráfica del correlator K_3 teórico, la fórmula (55) o la (58) con $n_3 = 0$. Para los intervalos de tiempo más largos mostrados en la figura, $\omega t \approx 4\pi$, la coincidencia entre teoría y experimento es aún lo suficientemente buena como para concluir que no ha habido todavía una pérdida considerable de la coherencia.

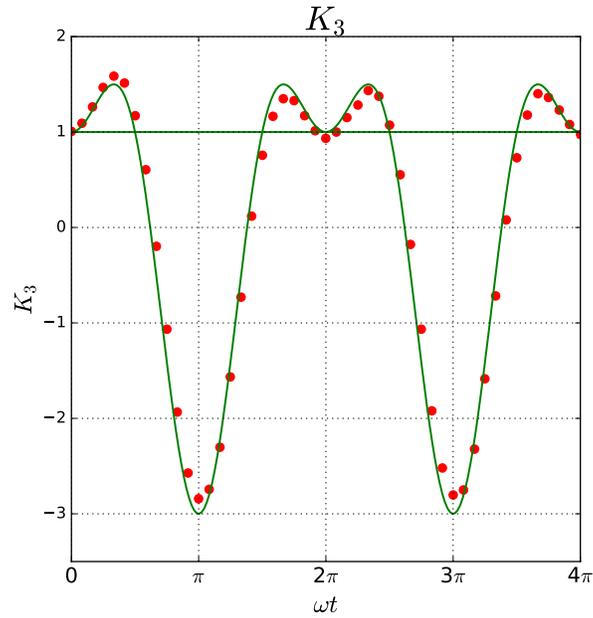


FIGURA 1. Los datos mostrados los tomamos de la referencia [2].

En la figura 2 ponemos a prueba la predicción (37) del Lema 3-3.1. Los puntos rojos son los valores para $\frac{1}{4}(1+C_{12}+C_{23}+C_{13})$ calculados con los datos aportados por la prueba LG realizada en [2] y la línea verde es la gráfica del término de interferencia $\text{Re} \psi_{13}^* \psi_{12} \psi_{23}$, calculado con las amplitudes (48), (51) y (53). La comparación entre teoría y experimento en la figura 2 muestra que mediante la

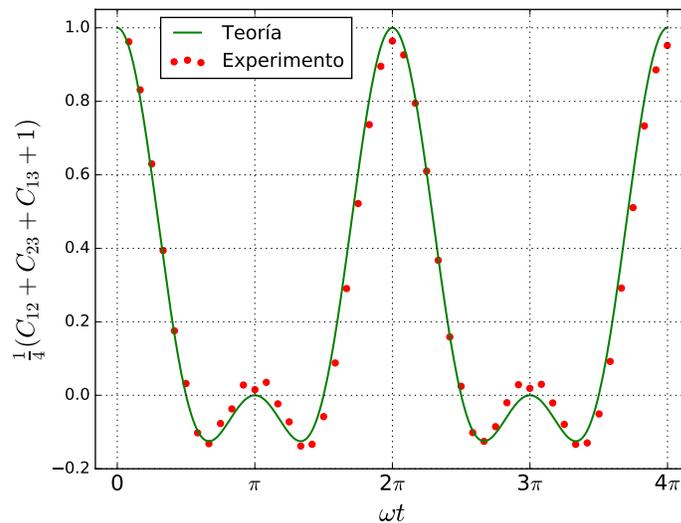


FIGURA 2. Los datos mostrados los tomamos de la referencia [2].

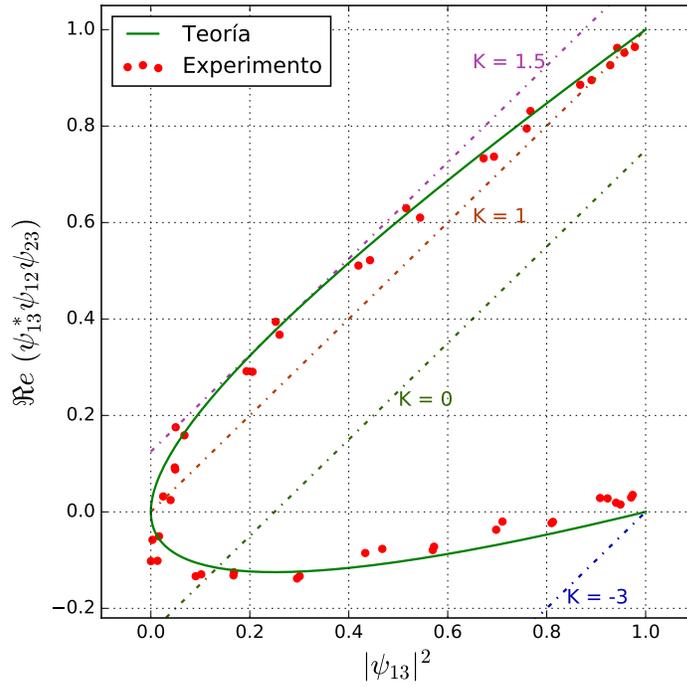


FIGURA 3. Los datos mostrados los tomamos de la referencia [2].

prueba LG es posible extraer el término de interferencia, según lo establece el Lemma 3-3.1.

La confirmación concluyente de que la prueba LG da acceso experimental a las dos principales cantidades cuánticas —el término de interferencia $\text{Re } \psi_{1 \rightarrow 3}^* \psi_{1 \rightarrow 2} \psi_{2 \rightarrow 3}$ y la probabilidad de transición $|\psi_{1 \rightarrow 3}|^2$ — es la coincidencia razonablemente buena, mostrada en la figura 3, entre los valores obtenidos experimentalmente [2] (los puntos rojos) y los calculados usando las amplitudes (48), (51) y (53) (la curva verde). Las curvas de nivel para cuatro valores de $K_3 (= -3, 0, 1 \text{ y } 1.5)$ son líneas rectas (según la fórmula en (38)) y son mostradas a trazos cortos en la figura 3. Los datos que quedan por encima de la línea $K_3 = 1$ violan la desigualdad LG.

5-3. ANEXO: Anticonmutadores en la representación de Heisenberg

El operador de evolución temporal para un sistema de dos niveles, que tiene un hamiltoniano general $\hat{H} = \frac{1}{2}\hbar\omega \sigma_{\hat{n}}$, es:

$$U(t, t_0) = e^{-i\frac{1}{2}\omega(t-t_0)\sigma_{\hat{n}}} = \cos(\frac{1}{2}\omega(t-t_0)) - i\sigma_{\hat{n}} \sin(\frac{1}{2}\omega(t-t_0)) . \quad (59)$$

Donde el vector $\hat{n} = (n_1, n_2, n_3)$ es unitario y el operador de evolución $U(t, t_0)$ es solo función de $\tau = \frac{1}{2}\omega(t-t_0)$: $U(t, t_0) \equiv U(\tau)$. En la base de auto-vectores de σ_3 el operador de evolución (59) es:

$$U(\tau) = \begin{pmatrix} v(\tau) & w(\tau) \\ -w^*(\tau) & v^*(\tau) \end{pmatrix} \quad (60)$$

donde

$$v(\tau) = \cos(\tau) - in_3 \sin(\tau) , \quad \text{y} \quad w(\tau) = -i(n_1 - in_2) \sin(\tau) , \quad (61)$$

con $|v(\tau)|^2 + |w(\tau)|^2 = 1$.

De la regla de composición que cumple el operador de evolución (60), $U(\tau)U^*(T) = U(\tau - T)$, resulta que las funciones v y w , definidas en (61), tienen la propiedad siguiente,

$$\begin{aligned} v(\tau - T) &= v(\tau)v^*(T) + w(\tau)w^*(T) \\ w(\tau - T) &= -v(\tau)w(T) + w(\tau)v(T) . \end{aligned} \quad (62)$$

5-3.1. La representación de Heisenberg de σ_3 . La transformación unitaria para una traslación temporal de σ_3 es la siguiente:

$$\begin{aligned} U^\dagger(\tau) \sigma_3 U(\tau) &= \begin{pmatrix} v^*(\tau) & -w(\tau) \\ w^*(\tau) & v(\tau) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v(\tau) & w(\tau) \\ -w^*(\tau) & v^*(\tau) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} |v(\tau)|^2 - |w(\tau)|^2 & 2 v^*(\tau) w(\tau) \\ 2 v(\tau) w^*(\tau) & -|v(\tau)|^2 + |w(\tau)|^2 \end{pmatrix} . \\ &= \vec{A}(\tau) \cdot \vec{\sigma} . \end{aligned} \quad (63)$$

En donde hemos introducido el vector

$$\begin{aligned} \vec{A}(\tau) &= (v^*(\tau)w(\tau) + v(\tau)w^*(\tau)) \hat{\mathbf{x}} + \\ &\quad + i(v^*(\tau)w(\tau) - v(\tau)w^*(\tau)) \hat{\mathbf{y}} \\ &\quad + (|v(\tau)|^2 - |w(\tau)|^2) \hat{\mathbf{z}} . \end{aligned} \quad (64)$$

Una ecuación que se mencionará mas adelante es el producto punto de $\vec{A}(\tau)$ y $\vec{A}(T)$:

$$\begin{aligned}\vec{A}(\tau) \cdot \vec{A}(T) &= 2 v^*(\tau) w(\tau) v(T) w^*(T) + \\ &\quad + 2 v(\tau) w^*(\tau) v^*(T) w(T) + \\ &\quad + (|v(\tau)|^2 - |w(\tau)|^2) (|v(T)|^2 - |w(T)|^2) \\ &= |v(\tau - T)|^2 - |w(\tau - T)|^2 .\end{aligned}\tag{65}$$

La identidad anterior se demuestra expandiendo $v(\tau - T)$ y $w(\tau - T)$ (y sus conjugados) usando las identidades (62).

5-3.2. Los anticonmutadores. Sea σ_3 un operador, la traslación temporal de σ_3 corresponde con la representación de ese operador a la Heisenberg. De modo que la ecuación (29), es:

$$\sigma_3(t_k, t_0) = U^\dagger(t_k, t_0) \sigma_3 U(t_k, t_0) = \vec{A}(\frac{1}{2}(t_k - t_0)) \cdot \vec{\sigma} .\tag{66}$$

El anticonmutador del operador anterior para tiempos distintos, siguiendo las relaciones de las matrices de Pauli:

$$\frac{1}{2} \{ \sigma_3(t_\ell, t_0), \sigma_3(t_m, t_0) \} = \vec{A}(\frac{1}{2}(t_\ell - t_0)) \cdot \vec{A}(\frac{1}{2}(t_m - t_0)) \cdot \mathbb{1} .\tag{67}$$

El resultado del producto punto se muestra en la ecuación (65):

$$\frac{1}{2} \{ \sigma_3(t_\ell, t_0), \sigma_3(t_m, t_0) \} = |v(\frac{1}{2}(t_\ell - t_m))|^2 - |w(\frac{1}{2}(t_\ell - t_m))|^2 .\tag{68}$$

Utilizando las definiciones de $v(\tau)$ y $w(\tau)$, se tiene:

$$\frac{1}{2} \{ \sigma_3(t_\ell, t_0), \sigma_3(t_m, t_0) \} = 2 \cos^2(\frac{1}{2}(t_\ell - t_m)) + 2 n_3^2 \sin^2(\frac{1}{2}(t_\ell - t_m)) - 1 .\tag{69}$$

Reemplazando algunos términos con las identidades trigonométricas: $\sin^2(\tau) = 1 - \cos^2(\tau)$ y $2 \cos^2(\tau) = 1 + \cos(2\tau)$, el anticonmutador se reduce a:

$$\frac{1}{2} \{ \sigma_3(t_\ell, t_0), \sigma_3(t_m, t_0) \} = n_3^2 + (1 - n_3^2) \cos(t_\ell - t_m) .\tag{70}$$

Capítulo 6

La prueba LG para un caminante aleatorio atómico

En este capítulo analizamos la *caminata aleatoria* de un átomo de Cesio en una retícula óptica doble, en un experimento realizado por Robens *et al* [3]. Calculamos los correladores cuánticos C_{12} , C_{23} y C_{13} que son consistentes con los obtenidos en el experimento [3]. La violación al lema 2-2.1 y a la desigualdad LG (3).

La prueba LG requiere dos series de experimentos. Una series de experimentos a dos tiempos: el caminante evoluciona libremente del tiempo t_1 al tiempo t_3 , midiéndose a esos tiempos los observables dicotómicos \hat{Q}_1 y \hat{Q}_3 . En la otra serie los experimentos son a tres tiempos, $t_1 < t_2 < t_3$. En cada tiempo se miden los observables \hat{Q}_1 , \hat{Q}_2 y \hat{Q}_3 . Todas las mediciones —muy especialmente la intermedia, al tiempo t_2 — deben ser negativas.

Un átomo de Cesio es puesto en una superposición coherente que entrelaza orientaciones de “spin” y sitios en la reticula. La retícula consiste de dos redes ópticas unidimensionales empalmadas y manejadas independientemente. El parámetro de red —distancia entre sitios vecinos— es de $0.433 \mu\text{m}$. Las retículas se desplazan a distancias los suficiente grandes (amplificación) para que los instrumentos puedan diferenciar entre sitios.

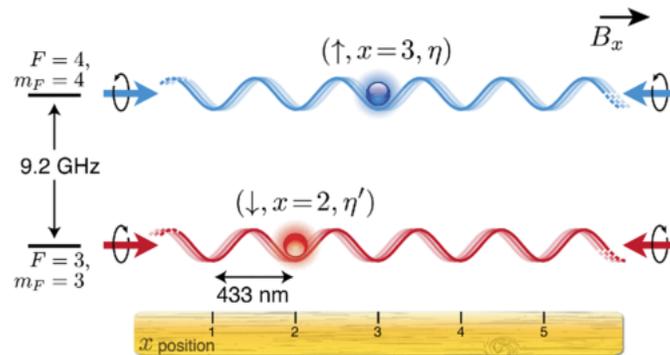


FIGURA 1. El experimento de la caminata aleatoria cuántica usando dos redes ópticas sobrepuestas. Ilustración tomada de la referencia [3].

6-1. Evolución unitaria a tiempo discreto

El átomo de Cesio inicia su caminata al tiempo $t_1 = 0$ partiendo del sitio $x = 0$ e internamente puesto en el estado base. El estado inicial del caminante atómico es $|t_1\rangle = |F = 3, m_F = 3\rangle |x = 0\rangle \equiv |\uparrow, 0\rangle$.

Para la evolución, en lugar de lanzar una moneda como se hace en el caminante aleatorio clásico, se aplica un pulso $\pi/2$ de microondas —operación que llamaremos C (por *coin*)— para poner al átomo en una superposición 50/50 del estado base $|\uparrow, 0\rangle$ y el estado excitado $|F = 4, m_F = 4\rangle |x = 0\rangle \equiv |\downarrow, 0\rangle$, manteniendo la ubicación $x = 0$. El resultado del “volado cuántico” sobre $|t_1\rangle$ es

$$C |t_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow, 0\rangle + |\downarrow, 0\rangle) \quad (71)$$

Con ayuda de las redes ópticas empalmadas se producen los siguientes desplazamientos. El estado $|\uparrow, x\rangle$ solo siente el potencial producido por la red dextrógira (en color rojo en la figura 1). Si se desplaza la red roja a la izquierda por un parámetro de red, esta arrastrará solo al estado $|\uparrow, x\rangle$ con ella un sitio a la izquierda, $|\uparrow, x - 1\rangle$, una distancia de 433 nm.

Por el contrario, el estado $|\downarrow, x\rangle$ solo experimenta el potencial de la red levógira (en color azul en la figura 1) y se le desplazará un sitio a la derecha como parte de la operación básica.

A la operación combinada de desplazamientos básicos izquierda-derecha de las redes ópticas empalmadas la denotamos S (por *shift*), definida de la siguiente manera

$$S |\uparrow, x\rangle = |\uparrow, x - 1\rangle \quad \text{y} \quad S |\downarrow, x\rangle = |\downarrow, x + 1\rangle .$$

La secuencia de operaciones $U := SC$ es la analogía cuántica de la acción del caminante aleatorio clásico cuando el resultado de lanzar la moneda decide para qué lado brincar. La definición formal de U es la siguiente,

$$U |\uparrow, x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow, x - 1\rangle + |\downarrow, x + 1\rangle) , \quad (72)$$

$$U |\downarrow, x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow, x - 1\rangle - |\downarrow, x + 1\rangle) . \quad (73)$$

Cada acción de U la consideramos una unidad de tiempo, que experimentalmente es de 26 μs , aproximadamente [3]. La repetición sucesiva de la acción de U realiza una caminata aleatoria cuántica unidimensional.

Por ejemplo, partiendo del estado inicial $|t_1\rangle$, la acción de U nos lleva al tiempo $t_2 = 1$ y al caminante atómico a la superposición

$$|t_2\rangle = U |t_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow, -1\rangle + |\downarrow, 1\rangle) . \quad (74)$$

6-2. Los observables dicotómicos

Al tiempo $t_1 = 0$ se escoge el observable \hat{Q}_1 para que tenga el valor $Q_1 = 1$ en el subespacio unidimensional que es extendido por el vector $|\uparrow, 0\rangle$. A su complemento ortogonal le asignamos el valor $Q_1 = -1$. El observable al tiempo t_1 es

$$\hat{Q}_1 = 2 |\uparrow, 0\rangle \langle \uparrow, 0| - \mathbb{1} .$$

Al siguiente tiempo $t_2 = 1$ se escoge \hat{Q}_2 para que tenga el valor $Q_2 = 1$ en el sub-espacio expandido por los dos estados $\{|\uparrow, -1\rangle, |\downarrow, 1\rangle\}$: $Q_2 = 1$ es doblemente degenerado. El valor $Q_2 = -1$ le corresponde al complemento ortogonal. El observable a t_2 es:

$$\hat{Q}_2 = 2 (|\uparrow, -1\rangle \langle \uparrow, -1| + |\downarrow, 1\rangle \langle \downarrow, 1|) - \mathbb{1} . \quad (75)$$

En el último tiempo $t_3 = 4$ el observable dicotómico es

$$\hat{Q}_3 = - \sum_{s,x \leq 0} |s, x\rangle \langle s, x| + \sum_{s,x > 0} |s, x\rangle \langle s, x| , \quad (76)$$

que para los estados $|s, x\rangle$ con $x \leq 0$ asigna el valor $Q_3 = -1$ y para los estados con $x > 0$, asigna el valor $Q_3 = 1$. La degeneración de este es infinita.

6-3. La medición negativa de \hat{Q}_2 al tiempo t_2

El valor $Q_2 = 1$ está doblemente degenerado (ver la definición de \hat{Q}_2 en la sección anterior). Siguiendo el protocolo mínimo que parte de $|t_1\rangle$, el estado al tiempo t_2 es la superposición en (74) y lo que se busca con la medición negativa intermedia de $Q_2 = 1$ es destruir la superposición (74), proyectando el estado a $|\uparrow, -1\rangle$ o a $|\downarrow, 1\rangle$, con probabilidad $1/2$.

Para decidir “negativamente” si el átomo se encuentra en el estado $|\uparrow, -1\rangle$, en el experimento se desplaza la red levógira (la roja) cinco sitios a la derecha: el sitio rojo $x = 1$ se vuelve el sitio rojo $x = 6$. Dada la resolución experimental [3], esta distancia se considera suficiente para aplicar fluorescencia en el sitio $x = 6$ y decidir sobre la presencia/ausencia del átomo, y lograrlo sin iluminar (que luego se confunde con “sin perturbar”) al átomo que “pudiera estar” (counterfactual!) en el sitio $x = -1$.

Si la fluorescencia no revela la presencia del átomo en el sitio $x = 6$ se considera que la medición fue negativa y el resultado es que el estado del átomo es colapsado al estado $|\uparrow, -1\rangle$

$$\frac{1}{N}P_- U |t_1\rangle = |\uparrow, -1\rangle = |t_2, \uparrow\rangle, \quad (77)$$

donde $P_- = |\uparrow, -1\rangle \langle \uparrow, -1|$ es el operador de proyección para la medición y N es una constante de normalización. En caso contrario, la fluorescencia revela la presencia del átomo en el sitio $x = 6$: la medición no es negativa y es desechada.

Para obligar a que el valor $Q_2 = 1$ sea realizado por el estado $|\downarrow, 1\rangle$ se aplica un método de medición negativa en el sitio $x = -1$, similar al descrito para el sitio $x = 1$ en el párrafo anterior. El operador de proyección para esta segunda opción es $P_+ = |\downarrow, 1\rangle \langle \downarrow, 1|$ y, si la medición fue negativa, el estado se colapsa a

$$\frac{1}{N}P_+ U |t_1\rangle = |\downarrow, 1\rangle = |t_2, \downarrow\rangle. \quad (78)$$

6-4. La secuencia temporal de la prueba LG

El estado que resulta de la evolución unitaria $t_1 \rightarrow t_2$ es la superposición en (74). Los estados que resultan de los otros dos trayectos, $t_2 \rightarrow t_3$ y $t_1 \rightarrow t_3$, se calculan a continuación.

6-4.1. La evolución de t_2 a t_3 . Se aplica el operador U tres veces (U^3 para tres pasos de tiempo) al estado que resulte de la medición negativa al tiempo t_2 , que puede ser $|t_2, \uparrow\rangle$ o $|t_2, \downarrow\rangle$. De manera que para el tiempo $t_3 = 4$ se tienen los dos posibles casos siguientes.

Si la medición negativa al tiempo t_2 produjo el estado $|t_2, \uparrow\rangle = |\uparrow, -1\rangle$, al aplicar el operador U^3 el estado final es,

$$|t_3, \uparrow\rangle = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(|\uparrow, -4\rangle + 2|\uparrow, -2\rangle + |\downarrow, -2\rangle - |\uparrow, 0\rangle + |\downarrow, 2\rangle \right). \quad (79)$$

Para el otro caso, $|t_2, \downarrow\rangle = |\downarrow, 1\rangle$, al aplicar el operador U^3 tenemos,

$$|t_3, \downarrow\rangle = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(|\uparrow, -2\rangle + |\downarrow, 0\rangle + |\uparrow, 2\rangle - 2|\downarrow, 2\rangle - |\downarrow, 4\rangle \right). \quad (80)$$

6-4.2. La evolución libre de t_1 a t_3 . Para determinar el correlator C_{13} , se siguen pasos similares a los anteriores, pero se omite la medición al tiempo t_2 . Después de aplicar tres veces el operador U al estado $|t_2\rangle$, al tiempo $t_3 = 4$ tenemos el estado:

$$\begin{aligned} |t_3\rangle &= U^4 |t_1\rangle = U^3 |t_2\rangle \\ &= \frac{1}{4} \left(|\uparrow, -4\rangle + 3|\uparrow, -2\rangle + |\downarrow, -2\rangle - |\uparrow, 0\rangle + |\downarrow, 0\rangle + |\uparrow, 2\rangle - |\downarrow, 2\rangle - |\downarrow, 4\rangle \right). \end{aligned} \quad (81)$$

Que también se puede escribir como:

$$|t_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|t_3, \uparrow\rangle + |t_3, \downarrow\rangle \right). \quad (82)$$

6-5. Distribuciones de la probabilidad sobre la retícula al tiempo final

Designemos como I , al experimento sin medición intermedia y II cuando si hubo medición intermedia. Las predicciones de la mecánica cuántica para la distribución de probabilidad sobre la retícula óptica al tiempo t_3 , correspondientes al experimento I es

$$P_I(x, t_3) = \sum_{s=\uparrow, \downarrow} |\langle s, x | t_3 \rangle|^2. \quad (83)$$

Los valores positivos de la distribución P_I , calculados con el estado (81), ocurren en los sitios pares que se muestran en la figura 2-A.

Para el experimento II , la probabilidad P_{II} se distribuye a lo largo de la retícula óptica al tiempo t_3 según la fórmula

$$P_{II}(x, t_3) = \sum_{s=\uparrow, \downarrow} \left(P(\uparrow_2) |\langle s, x | t_3, \uparrow \rangle|^2 + P(\downarrow_2) |\langle s, x | t_3, \downarrow \rangle|^2 \right), \quad (84)$$

donde $P(\uparrow_2) = |\langle \uparrow, x = -1 | t_2 \rangle|^2 = 0.5$, $P(\downarrow_2) = |\langle \downarrow, x = 1 | t_2 \rangle|^2 = 0.5$ y los estados usados para calcular P_{II} son (79) y (80). Al igual que P_I , la distribución P_{II} tiene valores positivos solo en los sitios pares, según se muestran en la figura 2-B.

La distribución de probabilidad para el experimento I se muestra en la figura 2-A. Su asimetría respecto al sitio $x = 0$ se atribuye a interferencia cuántica. La figura 2-B muestra la distribución de la probabilidad para el experimento II . La medición de \hat{Q}_2 al tiempo t_2 destruye la interferencia y la distribución es simétrica. Las figuras 2-A y B muestran que medir o no medir negativamente \hat{Q}_2 hace una diferencia en la evolución subsecuente del sistema, que se refleja en distribuciones de probabilidad diferentes al tiempo t_3 . La medición negativa de \hat{Q}_2 fue perturbativa.

6-6. Invalidación del lema 2-2.1

Las distribuciones de probabilidad sobre la retícula al tiempo final t_3 , mostradas en las figuras 2, son diferentes para el caso en que el experimento involucra una medición intermedia y para el caso en que el experimento corre libremente de t_1 a t_3 , sin la intervención intermedia para medir \hat{Q}_2 .

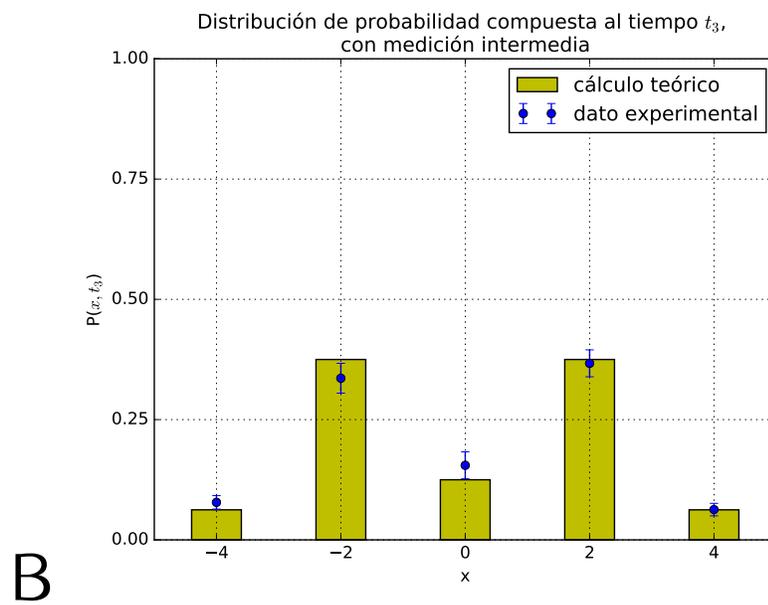
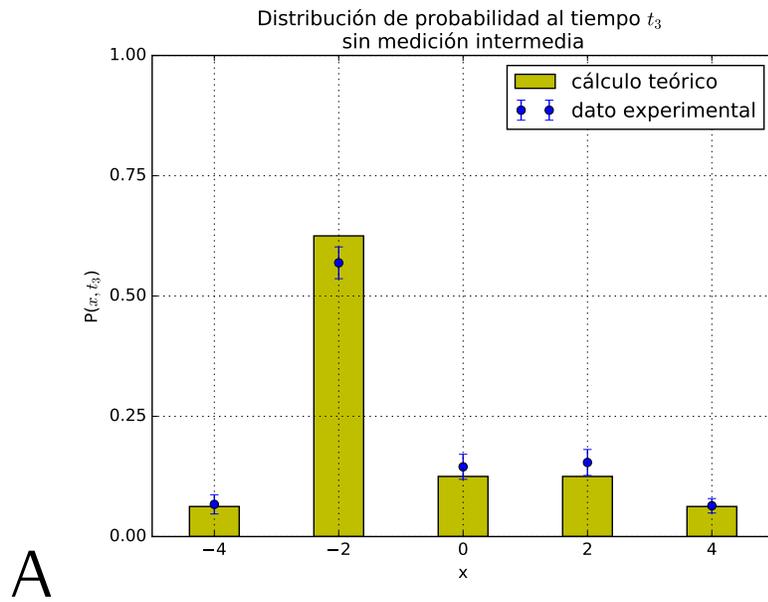


FIGURA 2. Los datos experimentales mostrados son de la referencia [3].

Vemos a continuación que la diferencia en las distribuciones de probabilidad implica que $P(1_1 \rightarrow Q_3) \neq P(1_1 \xrightarrow{2} Q_3)$, en violación clara a lo establecido en el lema 2-2.1. Usando los resultados teóricos (83) y (84), para cada uno de los posibles valores $Q_3 = \pm 1$ tenemos que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(1_1 \rightarrow 1_3) &= \sum_{x>0} P_I(x, t_3) = \frac{3}{16} \neq \mathbb{P}(1_1 \xrightarrow{2} 1_3) = \sum_{x>0} P_{II}(x, t_3) = \frac{7}{16} \\ \mathbb{P}(1_1 \rightarrow -1_3) &= \sum_{x\leq 0} P_I(x, t_3) = \frac{13}{16} \neq \mathbb{P}(1_1 \xrightarrow{2} -1_3) = \sum_{x\leq 0} P_{II}(x, t_3) = \frac{9}{16} \end{aligned} \quad (85)$$

Los valores experimentales, calculados a partir de los datos en la figura 2, están en un buen acuerdo con los valores teóricos (85).

Por lo tanto, la prueba LG muestra que el caminante atómico no está en la categoría de los sistemas macro (realistas) pues no cumple con la hipótesis R1 (realismo) o con la R2 (medición no-invasiva). Lo que nos anticipa la posibilidad de una violación de la desigualdad LG (3).

6-7. Los correladores LG cuánticos: teoría y experimento

Para calcular el correlator C_{12} usando la fórmula (17) hay que tener en cuenta la degeneración de $Q_2 = 1$. El cambio por hacer es sumar sobre los resultados posibles al medir \widehat{Q}_2 , usando una base ortonormal del subespacio $Q_2 = 1$. La nueva fórmula es

$$C_{12} = 2 \sum_{\ell} |\psi_{1 \rightarrow 2(\ell)}|^2 - 1 ,$$

donde la suma corre sobre una base ortonormal de $Q_2 = 1$. En la definición (75) del observable \widehat{Q}_2 se tiene que

$$\sum_{\ell} |\psi_{1 \rightarrow 2(\ell)}|^2 = |\langle \downarrow, 1 | t_2 \rangle|^2 + |\langle \uparrow, -1 | t_2 \rangle|^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 ,$$

que resulta en

$$C_{12} = 1 . \quad (86)$$

La misma consideración aplica para el correlator C_{13} ya que el autovalor $Q_3 = 1$ del operador \widehat{Q}_3 definido en (76) está infinitamente degenerado. La nueva fórmula, que reemplaza a (19), es

$$C_{13} = 2 \sum_{\ell} |\psi_{1 \rightarrow 3(\ell)}|^2 - 1 ,$$

donde la suma corre sobre una base ortonormal del subespacio $Q_3 = 1$. Para el caminante aleatorio $\ell = (s, x)$ y las amplitudes necesarias son $\psi_{1 \rightarrow 3(\ell)} = \langle s, x | t_3 \rangle$. El estado $|t_3\rangle$, calculado en (81), tiene las amplitudes listadas a continuación

$$\begin{array}{c|cccccc|ccc} \ell & (\uparrow, -4) & (\uparrow, -2) & (\downarrow, -2) & (\uparrow, 0) & (\downarrow, 0) & (\uparrow, 2) & (\downarrow, 2) & (\downarrow, 4) \\ \langle s, x | t_3 \rangle & 1/4 & 3/4 & 1/4 & -1/4 & 1/4 & 1/4 & -1/4 & -1/4 \end{array} .$$

Las tres amplitudes a la extrema derecha son para $x > 0$, que son las de $Q_3 = 1$ (ver la definición (76)) y producen el siguiente correlator

$$C_{13} = 2\left(\frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16}\right) - 1 = -\frac{5}{8} = -0.625 . \quad (87)$$

El valor experimental reportado en [3] es $C_{13} = -0.57 \pm 0.05$.

En el caso en que los autovalores $Q_2 = 1$ y $Q_3 = 1$ son degenerados no es fácil obtener una fórmula general en términos de amplitudes para el correlator cuántico C_{23} . Así que nos restringimos a un cálculo ad hoc para la situación en curso. Partimos de la definición (2).

El experimento se planeo (eligiendo el estado inicial $|t_1\rangle$ y el observable \widehat{Q}_2) para que $P(-1_2 \rightarrow Q_3) = 0$, lo que simplifica la definición (2) a lo siguiente,

$$C_{23} = \mathbb{P}(\uparrow_2) \left(\mathbb{P}(1_3 | \uparrow_2) - \mathbb{P}(-1_3 | \uparrow_2) \right) + \mathbb{P}(\downarrow_2) \left(-\mathbb{P}(-1_3 | \downarrow_2) + \mathbb{P}(1_3 | \downarrow_2) \right) , \quad (88)$$

donde

$$\mathbb{P}(\uparrow_2) = |\langle \uparrow, -1 | t_2 \rangle|^2 = \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad \mathbb{P}(\downarrow_2) = |\langle \downarrow, +1 | t_2 \rangle|^2 = \frac{1}{2} ,$$

son las probabilidades de obtener $\ell = (\uparrow, -1)$ o $\ell = (\downarrow, 1)$ al hacer la medición al tiempo t_2 .

Las probabilidades $P(\pm 1_3 | \uparrow_2)$ en (88) son para obtener los resultados $Q_3 = \pm 1$ (al tiempo t_3) dado que al tiempo t_2 el resultado medido fue $\ell = (\uparrow, -1) \equiv \uparrow_2$. Las probabilidades $P(\pm 1_3 | \downarrow_2)$ son para cuando el resultado medido al tiempo t_2 fue $\ell = (\downarrow, 1) \equiv \downarrow_2$. Las probabilidades se calculan con los estados obtenidos en (79) y (80). Los resultados del cálculo son los siguientes,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(1_3 | \uparrow_2) &= \sum_{s, x > 0} |\langle s, x | t_3, \uparrow \rangle|^2 = \frac{1}{8} \\ \mathbb{P}(-1_3 | \uparrow_2) &= \sum_{s, x \leq 0} |\langle s, x | t_3, \uparrow \rangle|^2 = \frac{1}{8} + \frac{4}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8} \\ \mathbb{P}(1_3 | \downarrow_2) &= \sum_{s, x > 0} |\langle s, x | t_3, \downarrow \rangle|^2 = \frac{1}{8} + \frac{4}{8} + \frac{1}{8} = \frac{6}{8} \\ \mathbb{P}(-1_3 | \downarrow_2) &= \sum_{s, x \leq 0} |\langle s, x | t_3, \downarrow \rangle|^2 = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{2}{8} \end{aligned}$$

Sustituyendo en (88) el correlator que resulta es

$$C_{23} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{8} - \frac{7}{8} \right) + \frac{1}{2} \left(-\frac{2}{8} + \frac{6}{8} \right) = -\frac{1}{8} = -0.125 \quad (89)$$

El valor experimental reportado en [3] es $C_{23} = -0.14 \pm 0.05$.

6-8. La desigualdad LG y conclusiones

De manera que la función K_3 (3) es:

$$K_3 = C_{12} + C_{23} - C_{13} = 1 - \frac{1}{8} - \left(-\frac{5}{8}\right) = \frac{3}{2} = 1.5 \quad (90)$$

El correlator cuántico experimental $K_3 = 1.435 \pm 0.074$ viola la desigualdad LG y es consistente con el calculado teóricamente con base en el colapso del estado producido por una medición negativa.

La prueba LG se puede emplear como un indicador de la coherencia de un sistema cuántico. Con un protocolo adecuado es posible revasar las cotas impuestas con las hipótesis de macro-realismo y atestiguar la coherencia del sistema. Además, el protocolo es suficiente para obtener el término de interferencia mostrado en (46).

Capítulo 7

Comentarios finales

7-1. Conclusiones

Pusimos en evidencia (*i*) que el protocolo LG constituye una prueba de la hipótesis de realismo R1 únicamente si las mediciones involucradas en la prueba son no-invasivas y (*ii*) que todas las mediciones cuánticas que aportan alguna información (incluidas las negativas) son invasivas. Tal contradicción expone al marco formal (o el discurso) del macro-realismo como una vía que no conduce a conclusiones físicamente interesantes o novedosas acerca de los sistemas micro.

Pero no todo está perdido. Hemos demostramos que todas las cantidades determinadas experimentalmente en una prueba LG tienen una contraparte en la teoría cuántica y en el caso de mediciones proyectivas hemos aportado la conexión rigurosa. Esto le da a la prueba LG una perspectiva en aplicaciones meramente cuánticas, que nosotros exploramos en dos casos.

Analizamos dos experimentos reportados en la literatura y mostramos que, en la perspectiva meramente cuántica, la prueba LG es un sonda útil para extraer información sobre la interferencia cuántica en sistemas micro mediante mediciones negativas (que son invasivas pero no demoledoras). Tanto para observables dicotómicos no-degenerados (resonancia magnética nuclear) como para observables degenerados (caminante aleatorio atómico). La concordancia entre las fórmulas calculadas en la mecánica cuántica (que incorpora la hipótesis del colapso del estado en la medición intermedia) y los resultados experimentales es contundente.

7-2. Perspectivas

La continuación del trabajo que reportamos en la tesis es formalizar la conexión entre la probabilidad interferente y el grado de coherencia cuántica, utilizando los correladores a dos tiempos aportados por la prueba LG, y convertir a esta en una caracterización de los ritmos de decoherencia, empezando por el caso de los espines nucleares en un entorno macro líquido.

Conclusiones satisfactorias de la continuación del proyecto pondrían a la prueba LG como una herramienta de uso general en el estudio de la evolución temporal de los sistemas micro en su relación con el entorno macro.

También quedó pendiente buscar una fórmula general para el correlator a dos tiempos cuántico C_{23} para el caso de observables dicotómicos con autovalor $Q = 1$ degenerado. Las fórmulas para C_{12} y C_{13} se extienden fácilmente al caso degenerado.

En la parte “cultural” de la tesis, quedó pendiente analizar la (im)pertinencia de las mediciones débiles (weak measurements) para el protocolo LG como una prueba de no-realismo.

Bibliografía

- [1] A. J. Leggett and Anupam Garg. Quantum mechanics versus macroscopic realism: Is the flux there when nobody looks? *Phys. Rev. Lett.*, 54:857–860, Mar 1985. doi: 10.1103/PhysRevLett.54.857. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.54.857>.
- [2] Vikram Athalye, Soumya Singha Roy, and T. S. Mahesh. Investigation of the leggett-garg inequality for precessing nuclear spins. *Phys. Rev. Lett.*, 107:130402, Sep 2011. doi: 10.1103/PhysRevLett.107.130402. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.107.130402>.
- [3] Carsten Robens, Wolfgang Alt, Dieter Meschede, Clive Emary, and Andrea Alberti. Ideal negative measurements in quantum walks disprove theories based on classical trajectories. *Phys. Rev. X*, 5:011003, Jan 2015. doi: 10.1103/PhysRevX.5.011003. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevX.5.011003>.
- [4] E. Schrödinger. Der stetige Übergang von der mikro- zur makromechanik. *Naturwissenschaften*, 14(28):664–666, Jul 1926. ISSN 1432-1904. doi: 10.1007/BF01507634. URL <https://doi.org/10.1007/BF01507634>.
- [5] Marissa Giustina, Marijn A. M. Versteegh, Sören Wengerowsky, Johannes Handsteiner, Armin Hochrainer, Kevin Phelan, Fabian Steinlechner, Johannes Kofler, Jan-Åke Larsson, Carlos Abellán, Waldimar Amaya, Valerio Pruneri, Morgan W. Mitchell, Jörn Beyer, Thomas Gerrits, Adriana E. Lita, Lynden K. Shalm, Sae Woo Nam, Thomas Scheidl, Rupert Ursin, Bernhard Wittmann, and Anton Zeilinger. Significant-loophole-free test of bell’s theorem with entangled photons. *Phys. Rev. Lett.*, 115:250401, Dec 2015. doi: 10.1103/PhysRevLett.115.250401. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.115.250401>.
- [6] Lynden K. Shalm, Evan Meyer-Scott, Bradley G. Christensen, Peter Bierhorst, Michael A. Wayne, Martin J. Stevens, Thomas Gerrits, Scott Glancy, Deny R. Hamel, Michael S. Allman, Kevin J. Coakley, Shellee D. Dyer,

- Carson Hodge, Adriana E. Lita, Varun B. Verma, Camilla Lambrocco, Edward Tortorici, Alan L. Migdall, Yanbao Zhang, Daniel R. Kumor, William H. Farr, Francesco Marsili, Matthew D. Shaw, Jeffrey A. Stern, Carlos Abellán, Waldimar Amaya, Valerio Pruneri, Thomas Jennewein, Morgan W. Mitchell, Paul G. Kwiat, Joshua C. Bienfang, Richard P. Mirin, Emanuel Knill, and Sae Woo Nam. Strong loophole-free test of local realism. *Phys. Rev. Lett.*, 115:250402, Dec 2015. doi: 10.1103/PhysRevLett.115.250402. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.115.250402>.
- [7] Johannes Handsteiner, Andrew S. Friedman, Dominik Rauch, Jason Gallicchio, Bo Liu, Hannes Hosp, Johannes Kofler, David Bricher, Matthias Fink, Calvin Leung, Anthony Mark, Hien T. Nguyen, Isabella Sanders, Fabian Steinlechner, Rupert Ursin, Sören Wengerowsky, Alan H. Guth, David I. Kaiser, Thomas Scheidl, and Anton Zeilinger. Cosmic bell test: Measurement settings from milky way stars. *Phys. Rev. Lett.*, 118:060401, Feb 2017. doi: 10.1103/PhysRevLett.118.060401. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.118.060401>.
- [8] J. A. Formaggio, D. I. Kaiser, M. M. Murskyj, and T. E. Weiss. Violation of the leggett-garg inequality in neutrino oscillations. *Phys. Rev. Lett.*, 117:050402, Jul 2016. doi: 10.1103/PhysRevLett.117.050402. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.117.050402>.
- [9] M. Arndt, O. Nairz, J. Vos-Andreae, C. Keller, G. van der Zouw, and A. Zeilinger. Wave-particle duality of c60 molecules. *Nature*, 401:680, Oct 1999. URL <http://dx.doi.org/10.1038/44348>.
- [10] Markus Arndt and Klaus Hornberger. Testing the limits of quantum mechanical superpositions. *Nat. Phys.*, 10(4):271–277, Apr 2014. ISSN 1745–2473. URL <http://dx.doi.org/10.1038/nphys2863>.
- [11] Stefan Gerlich, Sandra Eibenberger, Mathias Tomandl, Stefan Nimmrichter, Klaus Hornberger, Paul J. Fagan, Jens Tüxen, Marcel Mayor, and Markus Arndt. Quantum interference of large organic molecules. *Nat. Commun.*, 2: 263, Apr 2011. URL <http://dx.doi.org/10.1038/ncomms1263>.
- [12] Clive Emary, Neill Lambert, and Franco Nori. Leggett–garg inequalities. *Reports on Progress in Physics*, 77(1):016001, 2014. URL <http://stacks.iop.org/0034-4885/77/i=1/a=016001>.
- [13] A. Tonomura, J. Endo, T. Matsuda, T. Kawasaki, and H. Ezawa. Demonstration of single-electron buildup of an interference pattern. *American Journal of Physics*, 57(2):117–120, 1989. doi: 10.1119/1.16104. URL <http://dx.doi.org/10.1119/1.16104>.

- org/10.1119/1.16104.
- [14] E. Schrödinger. Die gegenwärtige situation in der quantenmechanik. *Naturwissenschaften*, 23(48):807–812, Nov 1935. ISSN 1432-1904. doi: 10.1007/BF01491891. URL <https://doi.org/10.1007/BF01491891>.
- [15] Serge Haroche. Entanglement, decoherence and the quantum /classical boundary. *Physics Today*, 51(7):36–42, jul 1998. doi: 10.1063/1.882326. URL <https://doi.org/10.1063/1.882326>.
- [16] D. J. Wineland, C. J. Myatt, B. E. King, Q. A. Turchette, C. A. Sackett, D. Kielpinski, W. M. Itano, and C. Monroe. *Nature*, 403(6767):269–273, jan 2000. doi: 10.1038/35002001. URL <https://doi.org/10.1038/35002001>.
- [17] Anthony J. Leggett. *QUANTUM MECHANICS AT THE MACROSCOPIC LEVEL*, pages 187–248. WORLD SCIENTIFIC, 2013. doi: 10.1142/9789814415309_0006. URL http://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/9789814415309_0006.
- [18] A. Einstein, B. Podolsky, and N. Rosen. Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete? *Phys. Rev.*, 47:777–780, May 1935. doi: 10.1103/PhysRev.47.777. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.47.777>.
- [19] N. Bohr. Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete? *Phys. Rev.*, 48:696–702, Oct 1935. doi: 10.1103/PhysRev.48.696. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.48.696>.
- [20] S. Haroche, G. Nogues, A. Rauschenbeutel, S. Osnaghi, M. Brune, and J. M. Raimond. *Nature*, 400(6741):239–242, jul 1999. doi: 10.1038/22275. URL <https://doi.org/10.1038/22275>.
- [21] D. J. Wineland, Wayne M. Itano, and J. C. Bergquist. Absorption spectroscopy at the limit: detection of a single atom. *Opt. Lett.*, 12(6):389–391, Jun 1987. doi: 10.1364/OL.12.000389. URL <http://ol.osa.org/abstract.cfm?URI=ol-12-6-389>.
- [22] M. H. Devoret and R. J. Schoelkopf. Superconducting circuits for quantum information: An outlook. *Science*, 339(6124):1169–1174, 2013. ISSN 0036-8075. doi: 10.1126/science.1231930. URL <http://science.sciencemag.org/content/339/6124/1169>.
- [23] Mark M. Wilde, James M. McCracken, and Ari Mizel. Could light harvesting complexes exhibit non-classical effects at room temperature? *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 466(2117):1347–1363, 2010. ISSN 1364-5021. doi: 10.

- 1098/rspa.2009.0575. URL <http://rspa.royalsocietypublishing.org/content/466/2117/1347>.
- [24] K. Stannigel, P. Komar, S. J. M. Habraken, S. D. Bennett, M. D. Lukin, P. Zoller, and P. Rabl. Optomechanical quantum information processing with photons and phonons. *Phys. Rev. Lett.*, 109:013603, Jul 2012. doi: 10.1103/PhysRevLett.109.013603. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.109.013603>.
- [25] A. D. O’Connell, M. Hofheinz, M. Ansmann, Radoslaw C. Bialczak, M. Lenander, Erik Lucero, M. Neeley, D. Sank, H. Wang, M. Weides, J. Wenner, John M. Martinis, and A. N. Cleland. Quantum ground state and single-phonon control of a mechanical resonator. *Nature*, 464(7289):697–703, mar 2010. doi: 10.1038/nature08967. URL <https://doi.org/10.1038/nature08967>.
- [26] Edward A. Laird, Ferdinand Kuemmeth, Gary A. Steele, Kasper Grove-Rasmussen, Jesper Nygård, Karsten Flensberg, and Leo P. Kouwenhoven. Quantum transport in carbon nanotubes. *Rev. Mod. Phys.*, 87:703–764, Jul 2015. doi: 10.1103/RevModPhys.87.703. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.87.703>.
- [27] Richard P. Feynman, Robert B. Leighton, and Matthew Sands. *The Feynman lectures on physics. Vol. 3: Quantum mechanics*, volume 3. Addison-Wesley Publishing Co., Inc., Reading, Mass.-London, 1965.
- [28] Henry Pierce Stapp. *s*-matrix interpretation of quantum theory. *Phys. Rev. D*, 3:1303–1320, Mar 1971. doi: 10.1103/PhysRevD.3.1303. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.3.1303>.
- [29] Asher Peres. Quantum limitations on measurement of magnetic flux. *Phys. Rev. Lett.*, 61:2019–2021, Oct 1988. doi: 10.1103/PhysRevLett.61.2019. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.61.2019>.
- [30] R. H. Dicke. Interaction-free quantum measurements: A paradox? *American Journal of Physics*, 49(10):925–930, oct 1981. doi: 10.1119/1.12592. URL <https://doi.org/10.1119/1.12592>.
- [31] Emilie Huffman and Ari Mizel. Violation of noninvasive macrorealism by a superconducting qubit: Implementation of a leggett-garg test that addresses the clumsiness loophole. *Phys. Rev. A*, 95:032131, Mar 2017. doi: 10.1103/PhysRevA.95.032131. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.95.032131>.
- [32] Johannes Kofler and Āaslav Brukner. Conditions for quantum violation of macroscopic realism. *Phys. Rev. Lett.*, 101:090403, Aug 2008. doi:

- 10.1103/PhysRevLett.101.090403. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.101.090403>.
- [33] Lev Vaidman. The meaning of the interaction-free measurements. *Foundations of Physics*, 33(3):491–510, Mar 2003. ISSN 1572-9516. doi: 10.1023/A:1023767716236. URL <https://doi.org/10.1023/A:1023767716236>.
- [34] Avshalom C. Elitzur and Lev Vaidman. Quantum mechanical interaction-free measurements. *Foundations of Physics*, 23(7):987–997, Jul 1993. ISSN 1572-9516. doi: 10.1007/BF00736012. URL <https://doi.org/10.1007/BF00736012>.
- [35] Agustin Palacios-Laloy, François Mallet, François Nguyen, Patrice Bertet, Denis Vion, Daniel Esteve, and Alexander N. Korotkov. Experimental violation of a bell’s inequality in time with weak measurement. *Nature Physics*, 6(6):442–447, apr 2010. doi: 10.1038/nphys1641. URL <https://doi.org/10.1038/nphys1641>.
- [36] Carsten Robens, Wolfgang Alt, Clive Emary, Dieter Meschede, and Andrea Alberti. Atomic “bomb testing”: the elitzur–vaidman experiment violates the leggett–garg inequality. *Applied Physics B*, 123(1):12, Dec 2016. ISSN 1432-0649. doi: 10.1007/s00340-016-6581-y. URL <https://doi.org/10.1007/s00340-016-6581-y>.
- [37] C. Budroni, G. Vitagliano, G. Colangelo, R. J. Sewell, O. Gühne, G. Tóth, and M. W. Mitchell. Quantum nondemolition measurement enables macroscopic leggett–garg tests. *Phys. Rev. Lett.*, 115:200403, Nov 2015. doi: 10.1103/PhysRevLett.115.200403. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.115.200403>.
- [38] Charles H. Bennett. Quantum information and computation. *Physics Today*, 48(10):24–30, 1995. doi: 10.1063/1.881452. URL <http://dx.doi.org/10.1063/1.881452>.
- [39] Boris Korzh, Charles Ci Wen Lim, Raphael Houlmann, Nicolas Gisin, Ming Jun Li, Daniel Nolan, Bruno Sanguinetti, Rob Thew, and Hugo Zbinden. Provably secure and practical quantum key distribution over 307 km of optical fibre. *Nature Photonics*, 9(3):163–168, feb 2015. doi: 10.1038/nphoton.2014.327. URL <https://doi.org/10.1038/nphoton.2014.327>.
- [40] S. Debnath, N. M. Linke, C. Figgatt, K. A. Landsman, K. Wright, and C. Monroe. Demonstration of a small programmable quantum computer with atomic qubits. *Nature*, 536(7614):63–66, aug 2016. doi: 10.1038/nature18648. URL <https://doi.org/10.1038/nature18648>.

- [41] Paul Busch. “No information without disturbance”: quantum limitations of measurement., pages 229–256. Springer Netherlands, 2009. doi: 10.1007/978-1-4020-9107-0. URL <https://doi.org/10.1007/978-1-4020-9107-0>.
- [42] J. A. Wheeler and W. H. Zurek, editors. Princeton University Press, 1983. URL <http://www.jstor.org/stable/j.ctt7ztxn5>.
- [43] M. Renninger. Messungen ohne störung des meßobjekts. *Zeitschrift für Physik*, 158(4):417–421, Aug 1960. ISSN 0044-3328. doi: 10.1007/BF01327019. URL <https://doi.org/10.1007/BF01327019>.
- [44] W. G. Unruh. Maintaining coherence in quantum computers. *Phys. Rev. A*, 51:992–997, Feb 1995. doi: 10.1103/PhysRevA.51.992. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.51.992>.
- [45] Philip Pearle. Wavefunction collapse and conservation laws. *Foundations of Physics*, 30(8):1145–1160, Aug 2000. ISSN 1572-9516. doi: 10.1023/A:1003677103804. URL <https://doi.org/10.1023/A:1003677103804>.
- [46] Kurt Gottfried and Tung-Mow Yan. *Quantum Mechanics: Fundamentals 2nd Ed.* Springer New York, 2003. doi: 10.1007/978-0-387-21623-2. URL <https://doi.org/10.1007/978-0-387-21623-2>.
- [47] J. P. Groen, D. Ristè, L. Tornberg, J. Cramer, P. C. de Groot, T. Picot, G. Johansson, and L. DiCarlo. Partial-measurement backaction and non-classical weak values in a superconducting circuit. *Phys. Rev. Lett.*, 111:090506, Aug 2013. doi: 10.1103/PhysRevLett.111.090506. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.111.090506>.
- [48] Jin-Shi Xu, Chuan-Feng Li, Xu-Bo Zou, and Guang-Can Guo. Experimental violation of the leggett-garg inequality under decoherence. *Scientific Reports*, 1(1), sep 2011. doi: 10.1038/srep00101. URL <https://doi.org/10.1038/srep00101>.
- [49] J. Dressel, C. J. Broadbent, J. C. Howell, and A. N. Jordan. Experimental violation of two-party leggett-garg inequalities with semiweak measurements. *Phys. Rev. Lett.*, 106:040402, Jan 2011. doi: 10.1103/PhysRevLett.106.040402. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.106.040402>.
- [50] Yutaro Suzuki, Masataka Inuma, and Holger F Hofmann. Violation of leggett-garg inequalities in quantum measurements with variable resolution and back-action. *New Journal of Physics*, 14(10):103022, 2012. URL <http://stacks.iop.org/1367-2630/14/i=10/a=103022>.

- [51] G. Waldherr, P. Neumann, S. F. Huelga, F. Jelezko, and J. Wrachtrup. Violation of a temporal bell inequality for single spins in a diamond defect center. *Phys. Rev. Lett.*, 107:090401, Aug 2011. doi: 10.1103/PhysRevLett.107.090401. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.107.090401>.
- [52] George C. Knee, Stephanie Simmons, Erik M. Gauger, John J.L. Morton, Helge Riemann, Nikolai V. Abrosimov, Peter Becker, Hans-Joachim Pohl, Kohei M. Itoh, Mike L.W. Thewalt, G. Andrew D. Briggs, and Simon C. Benjamin. Violation of a leggett–garg inequality with ideal non-invasive measurements. *Nature Communications*, 3:606, jan 2012. doi: 10.1038/ncomms1614. URL <https://doi.org/10.1038/ncomms1614>.
- [53] Zong-Quan Zhou, Susana F. Huelga, Chuan-Feng Li, and Guang-Can Guo. Experimental detection of quantum coherent evolution through the violation of leggett-garg-type inequalities. *Phys. Rev. Lett.*, 115:113002, Sep 2015. doi: 10.1103/PhysRevLett.115.113002. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.115.113002>.