UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE SAN LUIS POTOSÍ

Facultad de Economía

Fundamentos matemáticos de las economías con infinitos bienes.

TESIS

que para obtener el grado de

Maestría en Economía Matemática

PRESENTA:

Humberto Alejandro Muñiz Colorado

Director de tesis:

Dr. Elvio Accinelli Gamba.

Abril 2014. San Luis Potosí, S.L.P., México

Índice general

Capítulo 1

Introducción

En el presente trabajo se prueba la existencia del equilibrio en una economía, modelada sobre $L_\infty(M, \mathfrak{M}, \mu)$, es decir, el espacio de funciones μ-esencialmente acotadas. Como en Bonnisseau (1997) no consideramos ninguna hipóteis de convexidad sobre el conjunto de producción y admitiremos la existencia de externalidades, lo que le da al modelo amplia generalidad. No obstante, debemos considerar que las firmas siguen alguna regla de asignación de precios, dentro de las que, como caso particular, consideramos la determinada por maximización de beneficios. Como dijimos, en el modelo hemos de considerar externalidades, es decir, aquellos casos en los que el bienestar de un consumidor, es directamente afectado por las decisiones de los demás agentes de la economía. Donde, "directamente" significa que excluimos cualquier efecto que sea consecuencia de los precios; pero sí, podemos suponer que por ejemplo, el conjunto de producción de una firma en particular, podría verse afectado por las decisiones de otras firmas, o bien que el conjunto de consumo y las preferencias de los consumidores dependerá de las acciones de los otros agentes.

El uso de $L_\infty(M, \mathfrak{M}, \mu)$, como espacio de consumo y producción, aparece de manera natural en la teoría económica, por ejemplo, cuando consideramos incertidumbre acerca de los infinitos posibles estados futuros del mundo, o bien, cuando asumimos una infinita variedad en las características de los bienes o momentos de consumo de los mismos. Como referencias básicas podemos citar el seminal trabajo de Bewley (1972), y la amplia reseña realizada en Mas-Collel y Zame (1991), donde se consideran además, otros posibles espacios de dimensión infinita, posibles de ser considerados para la modelación económica.
La prueba de la existencia del equilibrio en estas economías generalizdas, es el principal objetivo de este trabajo. Para realizarla, seguiremos el método de Bewley (1972), esto es, nos restringiremos primeramente, a subespacios de dimensión finita y probaremos la existencia del equilibrio en cada unas de las subeconomías definidas en estos subespacios. Extenderemos estas economías a subespacios cada vez mayores (en el sentido de la dimensión). Luego el equilibrio para la economía total, resultará ser el límite de la red de equilibrios de cada una las economías restringidas. Para la demostración de la existencia del equilibrio en las subeconomías, aplicaremos un análogo al Teorema 2.1. de Bonnisseau (1997). Dicho teorema no es directamente aplicable, pues la restricción de las correspondencias que definen los consumos y planes de producción óptimos en la economía que nos interesa, podrían no ser hemi-continuas-inferiores en las sub-economías, ver Sun (2006).

El resto del trabajo está organizado como sigue:
En el capítulo 2 presentamos el modelo, describiendo los conjuntos de consumo y de producción para los consumidores y productores respectivamente, así como las preferencias de los consumidores, damos parte de las nociones matemáticas necesarias para describir el sistema de precios de nuestra economía, así como las correspondencias que representan el sector de producción y el espacio de consumo, así como algunos de los supuestos necesarios para probar la existencia del equilibrio. En el capítulo 3, introducimos las sub-economás, además de algunos supuestos adicionales que nos llevan a probar el teorema de existencia

(Teorema 3.0.6). Para la demostración de este teorema, requeriremos de algunos lemas válidos para las sub-economías que serán probados también en este capítulo. Finalmente mostraremos líneas posibles de generalización del presente trabajo.

DEDICATORIA

A ti por por darle un orden $\leq$ *(¿total o parcial?) a mis ideas* X
y bien definir $\alpha : [0, 1] \to X$ *en ellas.*
Gracias por completar este espacio,
por ayudarme a probar que todos cualquier límite
que tomemos siempre se podrá alcanzar,
por hacerme notar que no importa
cuando grande sea el n *que se nos ponga,*
siempre abra forma de superarlo.
Pero sobretodo GRACIAS por ser la $\delta > 0$ *que necesitaba.*

Q.E.D.

Capítulo 2

El modelo

En el presente trabajo, consideraremos una economía cuyos conjuntos de consumo y producción será modelados sobre subconjuntos del espacio de dimensión infinita $L = L_\infty(M, \mathfrak{M}, \mu)$[1]. Es decir, el espacio vectorial sobre el que modelaremos la economía, es el formado por las funciones medibles, esencialmente acotadas sobre un espacio de medida $\sigma-$finito $(M, \mathfrak{M}, \mu)$.
Supondremos que existen m consumidores y n productores en la economía. Siguiendo la notación de Bonnisseau (1997) (entre otros), denotaremos por $z = ((x_i)_{i=1}^m, (y_j)_{j=1}^n) \in L^{m+n}$ un plan de consumo y producción, uno para cada agente y para cada productor. Por otra parte para todo $i = 1, \ldots, m$ y $j = 1, \ldots, n$ denotamos por z_{-i}, z_{-j} los planes de producción y consumo z, en los que se excluye el plan de consumo del $i-$ésimo consumidor y del $j-$ésimo productor respectivamente, es decir:

$$z_{-i} = ((x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_m), (y_j)_{j=1}^n) \in L^{m+n-1}$$

$$z_{-j} = ((x_i)_{i=1}^m, (y_1, \ldots, y_{j-1}, y_{j+1}, \ldots, y_n)) \in L^{m+n-1}.$$

Dado que consideramos la posibilidad de externalidades, el conjunto de producción del $j-$ésimo productor, dependerá de los planes de consumo y producción de cada agente, por lo cual representaremos a este por la correspondencia

$$Y_j : L^{m+n-1} \to L$$

La cual asocia a cada acción de los otros productores (z_{-j}) el conjunto de producción $Y_j(z_{-j}) \subset L$.
Análogamente para el $i-$ésimo consumidor su conjunto de consumo será representado por la correspondencia:

$$X_i : L^{m+n-1} \to L_+ \ ^2$$

Teniendo en cuenta que los conjuntos de consumo se ven afectados por las elecciones realizadas por los demás agentes de la economía, las preferencias individuales se verán a su vez afectadas, más aún, si para cada $z_{-i} \in L^{m+n-1}$, $X_i(z_{-i}) \subset L_+$, representará el conjunto de consumo del $i-$ésmimo agente. Debemos definir, para cada agente, una relación de preferencias sobre cada uno de estos posibles conjuntos de consumo. Representaremos a las preferencias de cada consumidor sobre cada uno de estos conjuntos por una relación binaria $\succsim_{i,z_{-i}}: X_i(z_{-i}) \times X_i(z_{-i}) \to X_i(z_{-i})$, completa, reflexiva y transitiva.
Precisamente, la incorporación de externalidades en el modelo, se refleja en el hecho de que las preferencias individuales, dependen de la elección de los otros consumidores.
Recordemos que en el caso de dimensión finita, un sistema de precios (un funcional lineal) es un elemento del espacio mismo, pues existe una identificación clara entre el espacio y su dual (algebraico), sin embargo

[1]Ver apéndice 1
[2]Dados $x, y \in L$ decimos que $x \geq y$ si $x(m) \geq y(m)$ $\quad a.e.\ m \in M$. Definimos ahora el cono positivo de L como $L_+ = \{x \in L : x \geq 0\}$

para el caso dimensión infinita esto no es cierto, pues los funcionales continuos dependen de la topología con la cual estemos trabajando.

Cuando L es dotado con la topología de la norma, el conjunto de precios está dado por $L^* = ba(M, \mathfrak{M}, \mu)$, el espacio de funciones aditivas acotadas sobre $(M, \mathfrak{M})$ absolutamente continuas respecto a μ[3]. Entonces el valor de una cesta de bienes $x \in L$ es $\int_M x d\pi$, el cual carece de interpretación económica, sin embargo no lo es así para los $p \in L_1(M, \mathfrak{M}, \mu) \subset ba(M, \mathfrak{M}, \mu)$, pues el valor de una cesta dado un sistema de precios p, está dada por $\int_M p(m)x(m)d\mu(m)$, el cual es una generalización del concepto de producto interno.

Notación 2.0.1. *$S = \{\pi \in ba_+(M, \mathfrak{M}, \mu) : \pi(\chi_M) = 1\}$. Donde χ_M denota la función característica*

2.1. Topologías

En lo que sigue, cuando hablemos de espacio dual de L, nos estaremos refiriendo al dual topológico de L, es decir, al conjunto de los funcionales continuos definidos sobre dicho espacio. Debe tenerse en cuenta, que a diferencia de lo que sucede en espacios vectoriales finitos, en el que todas las topologías lineales y Hausdorff son equivalentes, en los espacios de dimensión infinita esto no sucede. En estos casos, muchas de las propiedades del espacio, y de las funciones o relaciones sobre ellos definidas, dependen fuertemente de la topología que se elija.

Comenzamos ahora definiendo algunas topologías y algunas de sus propiedades (para más información sobre espacios topológicos referimos al lector a Aliprantis y Border (1994), Munkres (1996)):

Definición 2.1.1. *Sea X un conjunto no vacío, $\{Y_i, \tau_i\}_{i \in I}$ una familia de espacios topológicos y consideremos para cada $i \in I$ una función $f_i : X \to Y_i$, la topología débil sobre X, generada por la familia de funciones $\{f_i\}_{i \in I}$ es la topología más débil sobre X que hace a todos los funciones f_i continuas.*

Notación 2.1.2. *Denotamos por:*

i) $\sigma(L, L_1) = \sigma^\infty$ *a la topologías débil estrella, la topología más débil para la cual el dual de L es L_1.*

ii) $\Pi_{L^s}\sigma^\infty$ *a la topología producto sobre L^s*

iii) $\sigma(L, ba)$ *y* $\sigma(ba, L) = \sigma^{ba}$ *son la topología débil y débil estrella sobre L y ba respectivamente.*

iv) τ *la topología de la norma sobre L*

Definición 2.1.3. *Sea $A : L^s \to L$ una correspondencia. Decimos que A es:*

i) $(\Pi_{L^s}\sigma^\infty, \sigma^\infty)-$*cerrada si tiene grafo cerrado para el producto de las topolgía débil estrella.*

ii) $(\Pi_{L^s}\sigma^\infty, \tau)-$*hemi-continua-inferior (l.h.c. por sus siglas en inglés). Si para cada red $(z^\alpha) \subset L^s$ tal que $z^\alpha \to z$ en $\Pi_{L^s}\sigma^\infty$ y $a \in A(z)$ existe una red $(a^\alpha) \subset A(z^\alpha)$ para todo α y $a^\alpha \to a$ en τ*

Por $\omega = \sum_{i=1}^m \omega_i$ denotamos la riqueza inicial acumulada de la economía, donde $\omega_i \in L_+$ es la dotación inicial del $i-$ésimo agente. Para cada agente definimos su función de ingreso $r_i : \mathbb{R}^{1+n} \to \mathbb{R}$ definida como

$$(\omega_i, y_1, ..., y_n) \to r_i(\pi(\omega_i), (\pi(y_j))_{j=1}^n)$$

de forma tal que dado un sistema de precios $\pi \in S$ y un plan de producción $(y_j)_j^n \in \Pi_j^n Y_j(z_{-j})$ el ingreso del $i-$ésimo consumidor, depende del valor de sus dotaciones iniciales y de los beneficios o pérdidas de los

[3] $\pi \in ba(M, \mathfrak{M}, \mu)$ se dice absolutamente continua con respecto a μ, si $E \in M$ y $\mu(E) = 0$, implica que $\pi(E) = 0$. La norma de $ba(M, \mathfrak{M}, \mu)$ es la variación total, $\| \pi \| = sup\{\sum_{i=1}^n | \pi(E_i) | : E_1, \ldots, E_n \quad \text{disjuntos en } \mathfrak{M}\}$

productores.

El conjunto de asignaciones débilmente eficientes[4] está dado por:

$$Z = \{z \in L^{m+n} : \forall i, j; x_i \in X_i(z_{-i}), y_j \in \partial_\infty Y_j(z_{-j})\}$$

Donde $\partial_\infty Y_j(z_{-j})$ denota la frontera de $Y_j(z_{-j})$ en la topología de la norma.

Describimos ahora el comportamiento de los productores. La $j-$ésima firma sigue la regla de precios, definida por una correspondencia $\phi_j : Z \to S$, i.e., para cada $z \in Z$, el $j-$ésimo productor pone el precio de mercado $\pi \in \phi_j(z)$, entonces decimos que dicha firma está en equilibrio en el vector $(\pi, z) \in S \times Z$, si $\pi \in \phi_j(z)$[5].

Definición 2.1.4. *El conjunto de asignaciones factibles débilmente eficientes, dadas las dotación inicial en la economía ω está dado por:*

$$A(\omega) = \{z \in Z : \sum_{i=1}^{m} x_i \leq \sum_{j=1}^{n} y_j + \omega\}$$

Definición 2.1.5. *Decimos que la economía $\mathfrak{E} = ((X_i, \succsim_i, \overline{z}_{-i}, r)_{i=1}^m, (Y_j, \varphi_j)_{j=1}^n, (\omega_i)_{i=1}^m)$ está en equilibrio al par $(\overline{z}, \overline{\pi}) = ((((x_i)_{i=1}^m, (y_j)_{j=1}^n), \overline{\pi}) \in Z \times S$ si:*

a) Para todo $i, \overline{x_i}$ es $\succsim_{i,\overline{z}_i}$- maximal en $\{x_i \in X_i(\overline{z}_{-i}) : \overline{\pi}(x_i) \leq r_i(\overline{\pi}(\omega_i), (\overline{\pi}(\overline{y_i}))_{j=1}^n)\}$

b) $\overline{\pi} \in \bigcap_{j=1}^n \varphi_j(\overline{z})$

c) $\sum_{i=1}^m \overline{x}_i = \sum_{j=1}^n \overline{y}_j + \omega$

Definición 2.1.6. *La condición a) en la definición anterior nos dice que los consumidores maximizan, sus preferencias dentro de su restricción presupuestaria, b) nos habla de que en el equilibrio los productores elijen el mismo precio $\overline{\pi}$, el inciso c) nos dice que los mercados se vacían o equivalentemente que la oferta iguala a la demanda*[6].

Definimos ahora
El conjunto de equilibrio de producción está dado por:

$$PE = \{(\pi, z) \in S \times Z : \pi \in \bigcap_{j=1}^{n} \varphi_j(z)\}$$

2.2. Supuestos y más supuestos

Para la demostración de la existencia del equilibrio, precisaremos de una serie de supuestos sobre las características de la economía y acerca del comportamiento de los consumidores y de los productores.
Supuestos para los consumidores.

Supuesto (C) para todo i

[4] $y \in Y_j$ se dice débilmente eficiente si no existe plan de producción $y' \in Y_j$ tal que $y' - y \in intL$, i.e., existe $c > 0$ tal que $y' \geq y + c\chi_M$. Una noción más fuerte de eficiencia se define como: $y \in Y_j$ es eficiente si no existe $y' \in Y_j$ tal que $y' - y \gg 0$, i.e. $y'(m) > y(m)-$a.e. en M, en dimensión finita ambas definiciones coinciden.

[5] Cornet (1998) Para más información sobre el uso de reglas de asignación de precios y ejemplos de las mismas. Bonnisseau (1997), pag. 214-215 para casos particulares

[6] Compara esta definición y resultados con los dado por Bonnisseau (2002)

(i) X_i es una correspondencia $(\Pi_{L^s}, \sigma^\infty)$-cerrada con valores convexos y contiene el 0.

(ii) Las preferencia son no saciadas, y además convexas; i.e. para todo $(x_i, x_i^{'}) \in X_i(z_{-i})^2$ y para todo $t \in (0,1)$, si $x_i \succ_{i,z_{-i}} x_i^{'}$ entonces $tx_i + (1-t)x_i^{'} \succ_{i,z_{-i}} x_i$

(iii) El conjunto $\Gamma_i = \{(z_i, x_i, x_i^{'}) \in L^{m+n+1} : (x_i, x_i^{'}) \in X_i^2(z_{-i}), x_i \precsim_{i,z_{-i}} x_i^{'}\}$ es cerrado para el producto de las topologías débil estrella

(iv) La función r_i es continua y estrictamente creciente en la segunda variable. Además, $\sum_{i=1}^m r_i(\pi(\omega_i), (\pi(y_j))_j^n) = \pi(\omega) + \sum_{i=1}^m \pi(y_j)$

El punto iv) nos permite abarcar el caso de una economía de propiedad privada.

Supuestos para los productores.

Supuesto (P) para todo j

(i) Y_j es una correspondencia $(\Pi_{L^{m+n-1}}, \sigma^\infty)$-cerrada .

(ii) Y_j es una correspondencia $(\Pi_{L^{m+n-1}}, \tau)$- l.h.m.

(iii) Existen escalares $\underline{t}_j, \bar{t}_j$ tal que para todo $z_{-j} \in L^{m+n-1}$, $\underline{t}_j\chi_M \in Y_j(z_{-j})$, $\quad \bar{t}_j\chi_M \notin Y_j(z_{-j})$

(iv) Y_j satisface free disposal, i.e., $Y_j(z_{-j}) - L_+ = Y_j(z_{-j})$ para todo $z_{-j} \in L^{m+n-1}$.

Supuesto (B) Para todo $\omega^{'} \geq \omega$, el conjunto

$$A(\omega^{'}) = \{z \in Z : \sum_{i=1}^m x_i \leq \sum_{j=1}^n y_j + \omega^{'}\}$$

Es acotado en la norma.

Este último supuesto parece muy natural pues nos dice que las asignaciones factibles son acotadas, aún cuando uno incremente sus dotaciones iniciales; i.e., las formas no pueden producir una cantidad ilimitada de output con una cantidad finita de insumos.

Notemos que para el caso particuar en el cual el espacio de bienes es $\mathbb{R}^l$, los supuestos **(C), (P) y (B)** coinciden con los de Bonnisseau (1997), los cuales a su vez en ausencia de externalidades, coinciden con los hechos en Bonnisseau y Cornet (1998), por lo cual tiene sentido mostrar este el siguiente ejemplo, en el cual podemos ver la importancia del supuesto (B), pues de no cumplirse (PE) podría ser vacío.
Supuesto (BL) (pérdida acotada). Para toda j. Existe un número real α_j tal que $z \in Z$ y $\pi_j \in \varphi_j(z)$ implica que $\pi_j(y_j) \geq \alpha_j$.

Supuesto (WSA) (Weak survival assumption). Para todo $(\pi, z, \lambda) \in PE \times \mathbb{R}_+$, si $z \in A(\omega + \lambda\chi_M)$ entonces $\pi(\sum_{j=1}^n y_j + \omega + \lambda\chi_M) > 0$.

(R) Para todo $(\pi, z) \in PE$, si $z \in A(\omega)$ entonces $r_i(\pi(\omega_i), (\pi(y_j))_{j=1}^n) > 0$.

Ejemplo 2.2.1. ***(Remark 5.1 Bonnisseau y Cornet (1988))*** *Consideremos una economía con dos bienes, m consumidores satisfaciendo (C) y (R), supongamos que las dotaciones iniciales son $\omega = (1,1)$, y que $X_i = \mathbb{R}^l$ para todo $i = 1, \ldots m$. Consideremos dos firmas Y_1, Y_2 dadas por*

$$Y_1 = \{(y^1, y^2) \in \mathbb{R}^2 \mid y^1 \leq 0, y^2 \leq y^1/(2+y^1), \quad si \quad y^1 > -2\}.$$

$$Y_2 = -R^2_+$$

Con reglas de precios normalizadas dadas por $\overline{\phi}_1(y_1) = \{(1,0)\}$ *y* $\overline{\phi}_2(y_2) = \{(\frac{-y_2^2}{1-y_2^2}, \frac{1}{1-y_2^2})\}$ *respectivamente entonces* ***PE*** *es vacío, pues no se cumple (B).*

C(i) Implica que para todo $z_i \in L^{m+n-1}$, es no vacío y acotado por 0. **C(ii)** señala que la convexidad de la preferencia junto con la no saciabilidad implica la no saciabilidad local (LNS). El supuesto **C(iii)** dice que las preferencias varían continuamente conforme va cambiando el ambiente, en ausencia de externalidades este suspuesto es simplemente la continuidad de las preferencias de los consumidores.

Necesitamos **P(iii)** para garantizar que la restricción de las correspondencias Y_j a los espacios de dimensión finita es no vacía, en la prueba de la existencia del equilibrio. El supuesto free disposal **P(iv)** puede ser interpretado como siempre que se puede producir y. Entonces se puede producir un $y^{'}$ tal que $y^{'}$ produce a lo más la misma cantidad de output usando al menos la misma cantidad de input.

BL nos dice que la pérdida de las firmas está acotada. Aún cuando este supuesto parece bastante natural, también impone restricciones en las firmas, cuando el espacio es $\mathbb{R}^l$, y la regla de asignación es el cono normal de Clark ver **Bonnisseau y Cornet (1988)**, **Lemma 4.2** donde se prueba que **BL** es equivalente a que el conjunto sea $star-shaped$, bajo estos hipótesis, la cual se satisface cuando se consideran tecnologías convexas.

Capítulo 3

Subeconomías

En este capítulo comenzamos definiendo la red de sub-espacios de dimensión finita los cuales serán dirigidos por la inclusión. También definimos las restricciones de las correspondencias definidas en el capítulo pasado a dichos sub-espacios; enunciamos también el teorema de existencia del equilibrio y su demostración para la cual necesitaremos de algunos lemas cuyas demostraciones aparecen en el apéndice, seguiremos Bonisseau 1997. Como señalamos en la introducción de este trabajo, dicho teorema no es aplicable directamente, pues aún cuando suponemos que la economía satisface la no saciedad local de las preferencias, el supuesto débil de supervivencia, así como la hemi-continuad-inferior de las preferencias, dichos supuestos podrían no mantenerse cuando nos restrinjamos a las sub-economías de dimensión finita.
Para el primer problema se prueba que la no saciedad local es válida sobre las asignaciones factibles, si el espacio de consumo es suficientemente grande, además consideremos un supuesto de supervivencia más débil que el hecho en Bonniseau 1997, el cual es suficiente para la demostración de los lemas, respecto a la hemi-continuidad-inferior plantemos supuestos adicionales sobre las resticciones de las correspondencias, siguiendo lo propuesto en Sun 2006.

Comenzamos ahora definiendo la red de sub-economías auxiliares.

Notación 3.0.2. *Denotamos por:*

$$\mathfrak{F} = \{F \leq L \mid dimF < \infty, \quad \chi_M, \quad \omega_i \in F, \quad \textit{para todo} \quad i\}.^1$$

Notemos que como $\chi_M \in intL_+$ (para la topología de la norma), se tiene que $F_+ = F \cap L_+$, y el $intF_+ = F \cap intL_+$ son no vacíos. Además cada $F \in \mathfrak{F}$ puede ser dotado con estructura euclidea satisfaciendo:

a) $\|\chi_M\| = 1$

b) $\{\chi_M^{\perp}\} \cap F_+ = 0$

para cada $F \in \mathfrak{F}$, consideramos la sub-economía:

$$\mathfrak{E}^F = ((X_i^F, \succsim_{i,z_{-i}^F}, r_i^F)_{i=1}^m, (Y_j^F, \varphi_j^F)_{j=1}^n, (\omega_i)_{i=1}^m)$$

Donde X_i^F, Y_j^F representan las restricciones de X_i, Y_j a la sub-economía, i.e.

$$X_i^F : F^{m+n-1} \to 2^{F_+}, \quad X_i^F(z_{-i}^F) = X_i(, z_{-i}^F) \cap F_+$$

$$Y_j^F : F^{m+n-1} \to 2^F, \quad Y_j^F(z_{-j}^F) = Y_j(z_{-j}^F) \cap F.$$

[1] La familia $\mathfrak{F}$ es dirigida por la inclusión.

al igual que r_i^F, $\succsim_{i,z^F_{-i}}$ representan las restricciones del ingreso y las preferencias respectivamente del $i-$ésimo consumidor a la subeconomía.

Retomando el aspecto matemático damos la siguiente definición la cual nos ayudará a definir un conjunto importante al considerar la restiricción a la sub-economía

Definición 3.0.3. *Sea V un espacio vectorial, dado $F \subset V$ el cono polar F^0 de F está dado por:*

$$F^0 = \{f \in V^* \mid \forall x \in S; f(x) \geq 0\}$$

Por lo cual el simplex de precios de $\mathfrak{E}^F$ está dado por:

$$S^F = \{p^F \in F^0_+ : \langle p^F, \chi_M \rangle = 1\}.$$

Definición 3.0.4. *El conjunto de asignaciones débilmente eficientes para la resticción a las sub-economías está dado por:*

$$Z^F = \{z^F \in F^{m+n} : \forall i x_i^F \in X_i^F(z^F_{-i}), \forall j y_j^F \in \partial Y_j^F(z^F_{-j})\} \text{ [2]}$$

$\forall z^F_{-j} \in F^{m+n-1}$.

Definimos ahora las restricciones de las correspondencias a las las subeconomías.

Definición 3.0.5. *Dado $z^F \in Z^F$ definimos:*

(i) $\varphi_j^F(Z^F) = \{p^F \in S^F \mid$ *existe* $\pi \in \varphi_j(Z^F)$ *y* $p^F = \pi \mid_F\}$.

(ii) $PE^F = \{(p^F, z^F) \in S^F \times Z^F \mid p^F \in \cap_{j=1}^n \varphi_j^F(z^F)\}$

(iii) $A^F(\omega) = \{z^F \in Z^F \mid \sum_{i=1}^m x_i^F \leq \sum_{j=1}^n y_j^F + \omega\} \subset A(\omega)$

(ii) y (iii) son llamados el conjunto de equilibrio de producción, y de asignaciones débilemte eficientes en $\mathfrak{E}^F$, respectivamente.

A continuación hacemos un supuesto necesario en la prueba de la existencia del equilibrio en las sub-economías, el cual es más débil que suponer que la regla de asignación de precios es hemi-continua-superior.

Supuesto (PR) Para todo j

(i) La correspondencia $\varphi_j : Z \to 2^s$ es no vacía y a valores convexos.

(ii) Para cada $F \in \mathfrak{F}$ la correspondencia φ_j^F tiene grafo cerrado.

(iii) Sea $(z^{F(t)}, \pi^{F(t)})_{t \in (T, \geq)}$ una subred de la red $(z^F, \pi^F)_{F \in \mathfrak{F}} \in Z \times S$ tal que:

$(z^{F(t)}, \pi^{F(t)}) \to (\overline{z}, \overline{\pi})$ para el producto de las topologías débil estrella

$\pi^{F(t)} \in \varphi_j(z^{F(t)})$ para toda $t \in T$

$\pi^{F(t)}(z^{F(t)})_{t \in T}$ Converge

Tenemos los siguientes

(a) $\lim \pi^{F(t)}(z^{F(t)}) \geq \overline{\pi}(\overline{y}_j)$ más aún, si $\lim \pi^{F(t)}(z^{F(t)}) = \overline{\pi}(\overline{y}_j)$ entonces

(b) $\overline{y}_j \in \partial_\infty Y_j(\overline{z}_j)$ y $\overline{\pi} \in_j (\overline{z}_j)$

[2]Este conjunto está bien definido pues $\partial Y_j^F(z^F_{-j}) \subset \partial_\infty Y_j(z^F_{-j})$

Teorema 3.0.6. *Si*

1) Y_j convexo.

2) $\succsim_i$ es una relación de preferencia constante para todo i.

3) Se sumple (P).

Entonces $\varphi_j = PM_j$ cumple (PR)

Para la demostración de este teorema así como otro ejemplo de una regla de precios que satisface este supuesto ver Bonnisseau y Meddeb (1999)[3], además si el espacio de bines es $\mathbb{R}^l$, este supuesto coincide con el dado por Bonnisseau (1997), donde se muestra que si $0 \in \partial Y_j(z_{-j})$, entonces:

$$AC(z) = \{(p_j) \in S^n \mid \text{para cada j}, p_j.y_j = 0\}.$$

Satisface el supuesto PR.

3.0.1. Método de Bewley (1972)

Comenzamos esta sección con un ejemplo en el cual se muestra por qué el Teorema de Bonniseau (1997) no es aplicable a las subeconomías, como veremos aún cuando suponemos que las correspondencias X_i y Y_j son hemi-continua-superiores, la restricción de las misma no necesariamente satisfacen dicha condición. Entonces analicemos ahora:

Ejemplo 3.0.7. *Consideremos una relación de preferencia $\phi : \mathbb{R}^3_+ \to 2^{\mathbb{R}^3_+}$ definida por:*

$$\phi(x,y,z) = \begin{cases} \{(u,v,w) \in \mathbb{R}^3_+ \mid u+v > x+y \quad y \quad w > 0\} & si \quad y > 0 \\ \{(u,v,w) \in \mathbb{R}^3_+ \mid u+v > x+y \quad y \quad w \geq 0\} & si \quad y = 0 \end{cases}$$

$\phi_{xy}(x,y,0)$ es l.h.c. convexa y valores abiertos, cuando restringimos ϕ al sub-espacio $\mathbb{R}^3_{xy} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0\}$, la restricción ϕ_{xy} es:

$$\phi(x,y,0) = \begin{cases} \{(u,v,0) \in \mathbb{R}^3_+ \mid u+v > x+y\} & si \quad y = 0 \\ \emptyset & \quad\quad y > 0 \end{cases}$$

es claro que ϕ_{xy} no es l.h.c. sobre $\mathbb{R}^3_{xy} \cap \mathbb{R}^3_+$.

Para evitar este problema se plantean los siguientes supuestos adicionales[4].

(v) Existe $\overline{F} \in \mathfrak{F}$ tal que, para cualquier subespacio $F \in \mathfrak{F}$ tal que $\overline{F} \subset F$. La correspondencia X_i^F es l.h.c sobre F^{m+n-1}.

(vi) la correspondencia X_i es $(\Pi_{L^{m+n-1}\sigma}, f)$- l.h.c. sobre L^{m+n-1}, tal que, si $z^\alpha_{-i} \to z_{-i}$ en L^{m+n-1} para el producto de las topologías débil estrella y $x \in X_i(z_{-i})$, existe un sub-espacio $\dot{F}$ tal que existe una sub-red $(x^\alpha) \subset x + \dot{F}$ con $x^\alpha \in X_i(z^\alpha_{-i})$ para todo α y $x^\alpha \to x$.

Además del problema de la l.h.c. para la restricción de las correspondencias se tiene que aún cuando esta propiedad se mantenga en dichas restricciones, ésta no es suficiente para garantizar que el punto limite de la red de equilibrios en las sub-economías sea un equilibrio en la economía original. Para evitar este problema se supone también:

Supuesto (P)

(v) Existe un subespacio de dimensión finita $\overline{\overline{F}} \in \mathfrak{F}$ tal que, para cualquier j y cualquier sub-espacio de dimensión finita $F \in \mathfrak{F}$ tal que $\overline{\overline{F}} \subset F$, la correspondencia Y_j^F es l.h.c. sobre F^{m+n-1}

[3]En Fuente (2011) se prueba el mismo teorema aún cuando el punto (2) no se cumpla, ver apéndice B.
[4]Fuentes (2011) pág. 272.

3.0.2. Existencia del equilibrio

Finalmente en esta sección se presenta el Teorema de existencia del equilibrio en la economía original, el cual como indicamos seguiría el método de Bewley (1972), para el cual se haría uso del Teorema 2.1 de Bonniseau (1997), sin embargo para la aplicación de dicho Teorema aún falta garantizar los supuestos (WSA) y (LNS) para las sub-economías finitas, para lo cual enunciamos ahora el Teorema de existencia y en su demostración se probará también que una versión débil de los dos supuestos restantes se cumplen también, la cual es suficiente para la el uso del Teorema 2.1. de Bonniseau.

Teorema 3.0.8. *Bajo los supuestos* ***(C),(P),(B),(BL),(WSA),(R) y (PR)****, la economía* $\mathfrak{E} = ((X_i, \succsim_{i,z_{/i}}, r_i)_i^m, (Y_j, \varphi_j)_j^n, (\omega_i)_i^m,)$ *tiene un equilibrio.*

Como indicamos antes ahora se prueba que si F es suficientemente grande, entonces cada subeconomía satisface una versión débil del supuesto de supervivencia, junto con la no saciedad local de las preferencia sobre el conjunto de asignaciones factibles.

Siguiendo la prueba de Bonniseau (1997), introducimos ahora algunos parámetros:

Sea $\eta > 0$, $\gamma > 0$ tal que $\gamma > -\sum_{j=1}^n \alpha_j + (1+\eta) \parallel \omega \parallel$, donde α_j está dado por el supuesto **(BL)** para cada j, finalmente tomamos $\overline{\lambda}$ tal que $\overline{\lambda} \geq \gamma$.

Lema 3.0.9. *Bajo los supuestos* ***(C),(P),(B),(BL),(WSA),(R) y (PR)****, existe un sub-espacio* $\widehat{F} \in \mathfrak{F}$*, tal que, para todo* $F \in \mathfrak{F}$*, si* $\widehat{F} \subset F$ *entonces la subeconomía* $\mathfrak{E}^{\mathfrak{F}}$ *satisface lo siguiente:*
($\boldsymbol{WSA^F}$ *) Para todo* $(p^F, z^F, \lambda^F) \in PE^F \times [0, \overline{\lambda}]$*, si* $z^F \in A^F(\omega + \lambda^F)$ *entonces* $\langle p^F, \sum_j^n y_j^F + \omega + \lambda^F \chi_M \rangle_F > 0$.
($\boldsymbol{LNS^F}$ *) Para todo* $((x_i^F)_{i=1}^m, (y_j^F)_{j=1}^n) \in A^F(\omega)$*, y para todo* $\epsilon > 0$*, existe* $(x_i'^F)_{i=1}^m \in \Pi_{i=1}^m (X_i^F(z_{-i}^F) \cap B(x_i^F, \epsilon))$ *tal que* $x_i'^F \succ_{i, z_{-i}^F} x_i^F$.

Por lo cual tenemos el siguiente resultado:

Lema 3.0.10. *Sean* $\overline{F}, \overline{\overline{F}}$ *los sub-espacio de los supuestos* $C(v)$ *y* $P(v)$*, respectivamente, y sea* $\widehat{F}$ *el sub-espacio del Lema anterior, bajo los supuestos* ***(C),(P),(B),(BL),(WSA),(R) y (PR)****, si tenemos que* $\overline{F}, \overline{\overline{F}}, \widehat{F} \subset F$ *entonces la economía* $\mathfrak{E}^F$ *tiene un equilibrio* $(z^F, p^F) \in Z^F \times S^F$.

Demostración. Como ya señalamos, lo parámetros introducidos antes del Lema anterior, no ayudaran a poder aplicar el Teorema 2.1 de Bonniseau 1997, para ello definimos $S_\eta^F = S^F + \eta B_{\chi_M^{\perp F}}(0,1)$ un conjunto compacto de precios. Entonces necesitamos un parámetro $\overline{\gamma}$ tal que $\overline{\gamma} > -\sum_{j=1}^n \alpha_j + max\{\langle p^F, -\omega \rangle_F : p^F \in S_\eta^F\}$, afirmamos que $\overline{\gamma} = \gamma$ definido antes del Lema anterior satisface dicha propiedad. En efecto basta notar que $\gamma > -\sum_{j=1}^n \alpha_j + (1+\eta) \parallel \omega \parallel \geq -\sum_{j=1}^n \alpha_j + max\{\langle p^F, -\omega \rangle_F : p^F \in S_\eta^F\}$.

Remark Para concluir la prueba del Lema, debemos notar que el Lema 3.0.8. garantiza que bajo las hipótesis de este Lema la sub-economías satisfacen $(\mathbf{WSA}^F)$ junto con $(\mathbf{LNS}^F)$ por lo cual combinado con S_η^F nos pone en condiciones del Teorema 2.1 de Bonniseau 1997, para ver la importancia de estos supuestos ver Lema 3.2 y claim 5 y 6 en dicho trabajo. □

3.0.3. Equilibrio en la economía original

Proposición 3.0.11. *Dada la red de equilibrio* $(((x_i^F)_{i=1}^m, (y_j^F)_{j=1}^n), p^F)_{F \in \mathfrak{F}}$ *de las economías* $(\mathfrak{E}^{\mathfrak{F}})_{F \in \mathfrak{F}}$*, por definición de* p^F *existe* $(\pi_j^F)_{j=1}^n$ *tal que* $p^F = \pi_F^F |_F$ *para todo* j*. Consideremos ahora la red* $((x_i^F)_{i=1}^m, (y_j^F)_{j=1}^n, (\pi_j^F)_{j=1}^n)_{F \in \mathfrak{F}}$*. Entonces, el límite puntual de esta red existe y es un equilibrio con pérdidas acotadas de la economía* $\mathfrak{E}$*.*

Demostración. La prueba de la proposición estará dividida en paso, en el primero de ellos garantizamos la existencia el límite puntual, de la red de equilibrios.

1) Existe una sub-red $((x_i^{F(t)})_{i=1}^m, (y_j^{F(t)})_{j=1}^n, (\pi_j^{F(t)})_{j=1}^n)_{t\in(T,\geq)}$ convergente a $((\overline{x}_i)_{i=1}^m, (\overline{y}_j^{F(t)})_{j=1}^n, (\overline{\pi}_j^F)_{j=1}^n)$ para el producto de las topologías débil estrella, además $(\pi_j^{F(t)}(y_j))_{t\in(T,\geq)}$ y $(\pi_j^{F(t)}(y_j))_{t\in(T,\geq)}$ son convergentes.

   Demostración. Dado que $((x_i^F)_{i=1}^m, (y_j^F)_{j=1}^n, p^F)$ es un equilibrio de la economía $\mathfrak{E}^F$, por lo cual de la definición de equilibrio, se sigue que $((x_i^F)_{i=1}^m, (y_j^F)_{j=1}^n) \in A(\omega)$. entonces por el Teorema Banach-Alaoglu se tiene que la red $(x_i^F)_{i=1}^m, (y_j^F)_{j=1}^n)$ pertenece a un conjunto débil estrella compacto y dado que $(\pi_j^F)_F \in \mathfrak{F} \in S$ el cual es $\sigma^{ba}-$compacto, por lo cual existe una subred $((x_i^{F(t)})_{i=1}^m, (y_j^{F(t)})_{j=1}^n, (\pi_j^{F(t)})_{j=1}^n)_{t\in(T,\geq)}$ la cual converge a $((\overline{x}_i)_{i=1}^m, (\overline{y}_j^{F(t)})_{j=1}^n, (\overline{\pi}_j^F)_{j=1}^n)$ para el producto de las topologías débil estrella, además las subredes $(\langle p^{F(t)}, y_j^{F(t)}\rangle_{F(t)}) = \pi_j^{F(t)}(y_j^{F(t)})$ y $(\langle p^{F(t)}, x_i^{F(t)}\rangle_{F(t)}) = \pi_j^{F(t)}(x_i^{F(t)})$, por lo cual podemos suponer que convergen.

   □

   Veamos ahora que

2) $\overline{\pi}_1 = \overline{\pi}_2 = \cdots = \overline{\pi}_n > 0$.

   Demostración. Para $j = 2, \ldots, n, \quad \overline{\pi}_j = \overline{\pi}_1$, sea $x \in L$ entonces existe $F \in \mathfrak{F}$ tal que $x \in F$, y un $t_0 \in T$ tal que $t > t_0$ implica $F \subset F(t)$, como $\pi_j^{F(T)} \mid_{F(T)} = \pi_1^{F(T)} \mid_{F(T)} = p^{F(T)}$, por lo cual para $t > t_0$, $\langle p^{F(t)}, x_i^{F(t)}\rangle_{F(t)} = \pi_1^{F(t)}(x_i^{F(t)}) = \pi_j^{F(t)}(x_i^{F(t)})$, dado que $x \in L$ arbitrario, tomando límite se obtiene el resultado. □

   Con lo cual hemos probado que se satisface b) de la definición de equilibrio, demostramos ahora que el limite de la red de equilibrios satisface también c).

3) $((\overline{x}_i)_{i=1}^m, (\overline{y}_j)_{j=1}^n) \in \Pi_{i=1}^m X_i(\overline{z}_{-i}) \times \Pi_{j=1}^n Y_j(\overline{z}_{-j})$ y $\sum_{i=1}^m \overline{x}_i = \sum_{j=1}^n \overline{y}_j + \omega$

   Demostración. $((x_i^{F(t)})_{i=1}^m, (y_j^{F(t)})_{j=1}^n) \in Z^{F(t)} \subset \Pi_{i=1}^m X_i(z_{-i}^{F(t)}) \times \Pi_{j=1}^n Y_j(z_{-j}^{F(t)})$, como X_i, Y_j son $(\Pi_{L^{m+n-1}}\sigma^\infty, \sigma^\infty)-$cerrado, y $(z^{F(t)})_{t\in(T,\geq)}$ converge a $\overline{z}$ para el producto de las topologías débil estrella, se sigue que $\overline{z}((\overline{x}_i)_i^m, (\overline{y}_j)_j^n) \in \Pi_{i=1}^m X_i(\overline{z}_{-i}) \times \Pi_{j=1}^n Y_j(\overline{z}_{-j})$ □

4) Para todo i, si $x_i \succsim_{i,\overline{z}_i} \overline{x}_i$ entonces $\overline{\pi}(x_i) \geq r_i(\overline{\pi}(\omega_i), \text{lím}(\pi_j^{F(t)}(y_j)_{j=1}^n)$

   Demostración. Supongamos que $\overline{\pi}(x_i) < r_i(\overline{\pi}(\omega_i), \text{lím}(\pi_j^{F(t)}(y_j)_{j=1}^n)$, luego por la continuidad de $\overline{\pi}$ existe $\epsilon > 0$ tal que
$$\overline{\pi}(x_i) + \epsilon < r_i(\overline{\pi}(\omega_i), \text{lím}(\pi_j^{F(t)}(y_j)_{j=1}^n) \tag{3.1}$$

   Del supuesto **C(ii)**, se sigue que existe $x_i^{'} \in X_i(\overline{z}_{-i}) \cap B_{\epsilon/2}(x_i)$ tal que $x_i^{'} \succ_{i,\overline{z}_{-i}} x_i$, por la transitividad de las preferencias tenemos $x_i^{'} \succ_{i,\overline{z}_{-i}} \overline{x}_i$, como la sub-red $(z_{-i}^{F(t)})_{t\in(T,\geq)}$ converge débilemte a $\overline{z}_{-i}$ y dad que X_i es $(\Pi_{L^{m+n-1}}\sigma, f) - l.h.c$, sobre L^{m+n-1} por el supuesto **C(vi)**, existe un subespacio de dimensión finita $\dot{F}$ tal que existe una sub-red $(x_i^{'F(t)})_{t\in(T,\geq)}$, la cual converge a $x_i^{'}$, con $(x_i^{'F(t)})_{t\in(T,\geq)} \subset x_i^{'} + \dot{F}$ y $x_i^{'F(t)} \in X_i(z_{-i}^{F(t)})$ para todo t. Existe $t_0 \in T$ sal que $t > t_0$ implica que $x_i^{'} + \dot{F} \subset F(t)$. Y así, $x_i^{'F(t)} \in X_i(z_{-i}^{F(t)}) \cap F(t)$ para todo $t > t_0$.

Como $(\overline{z}_{-i}, x_i^{'}, \overline{x}_i) \notin \Gamma_i$ y la sub-red $(x_i^{F(t)})_{t\in(t,\geq)}$ converge a $\overline{x}_i$, para el producto e las topologías débil estrella, existe $t_1 \in T$, tal que, para todo $t > t_1$, $(z_{-i}^{F(t)},, x_i^{'}, \overline{x}_i) \notin \Gamma_i$. Dado que la sub-red $(x_i^{'F(t)})$ converge a $x_i^{'}$, para la topología de la norma, existe un $t_2 \in T$, tal que para todo $t > t_2$, $x_i^{'F(t)} \in B_{\epsilon/2}(x_i^{'})$. Y así, por la completes de la preferencias, para todo $t \geq max\{t_0, t_1, t_2\}$.

$$x_i^{F(t)} \in X_i(z_{-i}^{F(t)}) \cap F(t)$$
$$x_i^{'F(t)} \in X_i(z_{-i}^{F(t)}) \cap F(t) \cap B_{\epsilon/2}(x_i^{'}) \quad \text{y} \quad x_i^{'F(t)} \succ^{F(t)}_{i,z_{-i}^{F(t)}} x_i^{F(t)}$$

Dado que la asignación $((x_i^{F(t)})_{i=1}^m, (y_j^{F(t)})_{j=1}^n, p^{F(t)})$ es un equilibrio de $\mathfrak{F}(\mathrm{t})$, se sigue que, para todo $t \geq max\{t_0, t_1, t_2\}$.

$$\langle p^{F(t)}, x_i^{'F(t)} \rangle_{F(t)} > \langle p^{F(t)}, x_i^{F(t)} \rangle_{F(t)} = r_i(\langle p^{F(t)}, \omega\rangle_{F(t)}, (\langle p^{F(t)}, y_j\rangle_{F(t)})_{j=1}^n)$$

Como $p^{F(t)} = \pi_{j|F(t)}^{F(t)}$ para todo j, tenemos

$$\pi_j^{F(t)}(x_i^{'F(t)}) > \pi_j^{F(t)}(x_i^{F(t)}) = r_i(\pi_j^{F(t)}(\omega_i), (\pi_j^{F(t)}(y_j^{'F(t)}))_{j=1}^n)$$

recordemos que $x_i^{'F(t)} < x_i^{'} + \frac{\epsilon}{2}\times_M$, desde que $\pi_j^{F(t)}$ es un funcional lineal positivo, se tiene

$$\pi_j^{F(t)}(x_i^{'} + \frac{\epsilon}{2}\times_M) > \pi_j^{F(t)}(x_i^{'F(t)}) = r_i(\pi_j^{F(t)}(\omega_i), (\pi_j^{F(t)}(y_j^{'F(t)}))_{j=1}^n)$$

Usando la linealidad y tomando limite obtenemos

$$\overline{\pi}_j^{F(t)}(x_i^{'}) + \frac{\epsilon}{2} \geq \text{lím}\, \pi_j^{F(t)}(x_i^{'F(t)}) = r_i(\overline{\pi}(\omega_i), \text{lím}(\pi_j^{F(t)}(y_j^{'F(t)}))_{j=1}^n)$$

Además tenemos $x_i^{'} < x_i^{'} + \frac{\epsilon}{2}\times_M$ y $\overline{\pi} > 0$, tenemos

$$\overline{\pi}_j^{F(t)}(x_i) + \epsilon \geq r_i(\overline{\pi}(\omega_i), \text{lím}(\pi_j^{F(t)}(y_j^{'F(t)}))_{j=1}^n)$$

lo cual contradice (3,1).

□

5) Para todo j, $\overline{\pi}(\overline{y}_j) = \text{lím}\, \pi_j^{F(t)}(y_j^{F(t)})$

Demostración. Por el supuesto **PR(iii)(a)** y el punto 2 implican que $\text{lím}\, \pi_j^{F(t)}(y_j^{F(t)}) \geq \overline{\pi}_j(\overline{y}_j) = \overline{\pi}(\overline{y}_j)$ para todo j. De **C(iv)**, para todo i, se tiene

$$r_i(\overline{\pi}(\omega_i), \text{lím}(\pi_j^{F(t)}(y_j^{F(t)}))_{j=1}^n) \geq r_i(\overline{\pi}(\omega_i), (\overline{\pi}(\overline{y}_j))_{j=1}^n)$$

lo cual, junto con el punto anterior nos lleva a

$$\overline{\pi}(\overline{x}_i) \geq r_i(\overline{\pi}(\omega_i), \text{lím}(\pi_j^{F(t)}(y_j^{F(t)}))_{j=1}^n) \geq r_i(\overline{\pi}(\omega_i), (\overline{\pi}(\overline{y}_j))_{j=1}^n)$$

probamos ahora que $\overline{\pi}(\overline{y}_j) = \text{lím}\, \pi_j^{F(t)}(y_j^{F(t)})$, para todo i. Supongamos que para algún i_0, tenemos

$$\overline{\pi}(\overline{x}_j) > r_{i_0}(\overline{\pi}(\omega_{i_0}), (\overline{\pi}(\overline{y}_j))_{j=1}^n)$$

Entonces por el supuesto **C(iv)** se sigue que $\sum_{i=1}^{m}\overline{\pi}(\overline{x}_i) > \sum_{j=1}^{n}\overline{\pi}(\overline{y}_j)+\overline{\pi}(\omega)$. Pero, por el punto 3 tenemos $\sum_{i=1}^{m}\overline{\pi}(\overline{x}_i) = \sum_{j=1}^{n}\overline{\pi}(\overline{y}_j)+\overline{\pi}(\omega)$, lo cual es una contracción, pues por **C(iv)**, r_i es estrictamente creciente en la segunda variable, por lo cual $\overline{\pi}(\overline{y}_j) = \text{lím}\,\pi_j^{F(t)}(y_j^{F(t)})$ para todo j.

De los puntos (1) y (5) junto con el supuesto **PR(iii)(b)**, se obtiene $((\overline{x}_i)_{i=1}^m, (\overline{y}_j)_{j=1}^n) = \overline{z} \in Z$ y $\overline{\pi} \in \cap_{j=1}^n \varphi_j(\overline{z})$. Del paso 3, tenemos $\sum_{i=1}^{m}\overline{x}_i \leq \sum_{j=1}^{n}\overline{y}_j + \omega$. Y así, $(\overline{z},\overline{\pi}) \in PE$ y $\overline{z} \in A(\omega)$ ☐

Usando el punto que acabamos de probar, tenemos que en 4) en realidad tenemos la resticción presupuestaria del i-ésimo agente, por lo cual solo resta probar que $\overline{x}_i$ es maximal para las preferencias de cada agente, dentro de su restricción, es decir:

6) Para todo i, $\overline{x}_i$ es $\succsim_{i,\overline{z}_{-i}}$ $-$maximal en $\{x_i \in X_i(\overline{z}_{-i}) : \overline{\pi}(x_i) \leq r_i(\overline{\pi}(\omega_i), (\overline{\pi}(\overline{y}_j))_{j=1}^n)\}$.

Demostración. Para probar que $\overline{x}_i$ es maximal para cada agente i, debemos ver que si $x_i \succ_{i,\overline{z}_i} \overline{x}_i$ entonces $\overline{\pi}(x_i) > \overline{\pi}(\overline{x}_i)$. Del 4, se tiene $\overline{\pi}(x_i) \geq \overline{\pi}(\overline{x}_i)$. Supongamos $\overline{\pi}(x_i) = \overline{\pi}(\overline{x}_i)$ de los puntos $4, 5$ y el supuesto **(R)**, $\overline{\pi}(\overline{x}_i) = r_i(\overline{\pi}(\omega_i), (\overline{\pi}(\overline{y}_j))_{j=1}^n) > 0$. Dado que $0 \in X_i(\overline{z}_{-i})$ y las preferencias son no saciadas, convexas y continuas basta con tomar una combinación convexa de $\overline{x}_i$ y algún x suficientemente cercano a cero para concluir. ☐

☐

3.1. Apéndice 1

Comenzamos este apéndice dando algunas definiciones para aquellas personas interesadas en leer este trabajo y que no estén familiarizados con las nociones meramente matemáticas.

Dado un conjunto no vacío X denotamos por $P(X) = \{A : A \subset X\}$.

Definición 3.1.1. *Decimos que una clase no vacía $S \subset P(X)$ es una $\sigma-$álgebra si:*

1) $X \in S$

2) $E, F \in S$, *entonces* $E - F \in S$.

3) Si (E_n) *es una suceción de elementos de* S, *entonces* $\cup_n^\infty E_n \in S$

Definición 3.1.2. *Un* ***espacio medible*** *es una pareja (X,S) donde X es un conjunto no vacío y S es una $\sigma-$álgebra de subconjuntos de X.*

Sea $X = \mathbb{R}$ y $\tau \subset P(\mathbb{R})$ la topología usual de X, definimos la $\sigma-$álgebra de Borel $B_{\mathbb{R}}$ como la $\sigma-$álgebra generada por τ.

Definición 3.1.3. *Dados dos espacio medibles (X,S) y $(Y,S^{'})$. Decimos que $f: X \to Y$ es medible relativa a las $\sigma-$álgebras S y $S^{'}$ si $f^{-1}(S^{'}) \subset S$, i.e. $f^{-1}(E^{'}) \in S$ para todo $E^{'} \in S$. SI $Y = \mathbb{R}$ y $S^{'} = \mathbb{B}_{\mathbb{R}}$. Entonces decimos que f es $S-$medible si $f^{-1}(B_{\mathbb{R}}) \subset S$.*

Definición 3.1.4. *Sea (X,S) un espacio medible. Una* ***medible*** *em (X,S) es una función $\mu : X \to \overline{\mathbb{R}}$ con las siguientes propiedades:*

1) $\mu(\emptyset) = 0$

2) $\mu(E) \geq 0$, *para todo* $E \in S$.

*3) μ es $\sigma-$ **aditiva**, i.e. Si (E_n) es una sucesión de elementos disjuntos entre sí de S, entonces:*

$$\mu(\cup_{n=1}^{\infty}) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$$

Definición 3.1.5. *Sea μ una medida en (X, S). Se dice que μ es **finita** si no toma el valor extendido $+\infty$. Si existe una sucesión $E_n \subset S$ tal que $X = \cup_{n=1}^{\infty} E_n$ y $\mu(E_n)\infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces diremos que μ es $\sigma-$**finita**.*

Definición 3.1.6. *Un **espacio de medida** es una terna (X, S, μ), en la que (X, S) es un espacio de medible y $\mu : S \to \overline{\mathbb{R}}$ es una medida.*

Definición 3.1.7. *Sea (X, S, μ) un espacio de medida, denotamos por $N(\mu)$ a la clase de elementos de E de S tales que $\mu(E) = 0$, los cuales llamaremos conjuntos $\mu-$**nulos**.*

Definición 3.1.8. *Sea (X, S, μ) un espacio de medida y sea $P(x)$ una proposición referente a $x \in X$. decimos que $P(x)$ es cierta **casi donde quiera relativa a** μ (c.d. rel. μ o a.e. por sus siglas en inglés) si existe $E \in N(\mu)$ tal que $P(x)$ es cierta si $x \in X - E$.*

Definición 3.1.9. *Dado un espacio de medida $(M, \mathfrak{M}, \mu)$ $\sigma-$finito. Definimos*

$$L_{\infty}(M, \mathfrak{M}, \mu) = \{f : M \to \mathbb{R} : f \quad \text{es medible y} \quad \| f \|_{\infty} < \infty\}$$

donde $\| f \|_{\infty} = sup\{\alpha \geq 0 : \mu\{m \in M : | f(m) | \geq \alpha\} > 0\}$. Consideremos ahora la relación de equivalencia $\sim$ definida por: f y f' funciones medibles sobre M, $f \sim f'$ si $\mu\{m \in M \mid f(m) \neq f'(m)\} = 0$, definimos $\mathfrak{L}_{\infty}(M, \mathfrak{M}, \mu) := L_{\infty}/ \sim$.

Definimos además:

$$\mathfrak{L}_{\infty}^{+}(M, \mathfrak{M}, \mu) = \{f \in \mathfrak{L}_{\infty}(M, \mathfrak{M}, \mu) : f(m) \geq 0 \quad a.e.\}.$$

$ba(M, \mathfrak{M}, \mu)$ es el espacio de funciones aditivas acotadas en $(M, \mathfrak{M})$ absolutamente continuas con respecto a μ, i.e., $\pi \in ba(M, \mathfrak{M})$ es tal que $\pi(E) = 0$ para toda $E \in \mathfrak{M}$ tal que $\mu(E) = 0$. La norma de $ba(M, \mathfrak{M})$ es la variación total, i.e., dado $\pi \in ba(M, \mathfrak{M})$, $\| \pi \| = sup\{\sum_i = 1^n \mid E_i \mid: E_1, E_2, \ldots, E_n\}$.

3.1.1. Demostraciones

Lema 3.0.9.

Demostración. La demostración será por contradicción, supongamos que para todo $F \in \mathfrak{F}$, existe un $F' \in \mathfrak{F}$ tal que $F \subset F'$, $(p^{F'}, z^{F'}, \lambda^{F'}) \in PE^{F'} \times [0, \overline{\lambda}]$, $\quad z^{F'} \in A(\omega + \lambda^{F'}\chi_M)$, y $\langle p^{F'}, \sum_{j=1}^{n} y_j^{F'} + \omega + \lambda^{F'}\chi_M\rangle_{F'} = 0$, luego tenemos que $\pi_{j|F'} = p^{F'}$ para todo j, dado que $z^{F'} \in A(\omega + \lambda^{F'}\chi_M) \subset A(\omega + \overline{\lambda}\chi_M)$ para todo $F' \in \mathfrak{F}$. El cual por el supuesto (B) es débilmente compacto, luego la red $((z^{F'}), (\pi_j^{F'})_{j=1}^n, (\pi_j^{F'}(y_j^{F'}))_{j=1}^n, \lambda^{F'})_{F' \in \mathfrak{F}}$ pertenece a un conjunto para el producto de las topologías débil-estrella y la topología de $\mathbb{R}^{n+1}$, por lo cual existe una sub-red $((z^{F'(t)}), (\pi_j^{F'(t)})_{j=1}^n, (\pi_j^{F'(t)}(y_j^{F'(t)}))_{j=1}^n, \lambda^{F'(t)})_{t \in (T, \geq)}$, la cual converge a $((\overline{z}), (\overline{\pi}_j)_{j=1}^n, (\lim \pi_j^{F'(t)}(y_j^{F'(t)}))_{j=1}^n, \lambda)$.
Dado que $z^{F'} \in A(\omega + \lambda^{F'}\chi_M)$, y L_+ es débilmente cerrado, entonces para todo $F' \in \mathfrak{F}$, tenemos que $\sum_{j=1}^n y_j^{F'(t)} + \omega + \lambda^{F'}\chi_M \geq \sum_i^m x_i^{F'(t)} \geq 0$, tenemos $\sum_{j=1}^n y_j + \omega + \lambda\chi_M \geq \sum_i^m x_i \geq 0$, entonces $\overline{z} = ((\overline{x}_i)_{i=1}^m, (\overline{y}_j)_{j=1}^n)$ pertenece a $\Pi_{i=1}^m X_i(\overline{z}_{-i}) \times \Pi_{j=1}^n Y_j(\overline{z}_{-j})$, pues X_i, $\quad Y_j$ son $(\Pi_{L^{m+n-1}\sigma^{\infty}}, \sigma^{\infty})-$cerrados.

Por hipótesis tenemos que $p^{F' \in PE^{F'}}$, podemos probar que $\overline{\pi}_j = \pi > 0$, para todo j, se sigue que $\sum_{j=1}^n \overline{\pi}(\overline{y}_j) + \overline{\pi}(\omega) + \lambda \geq 0$, además $\langle p^{F'}, \sum_{j=1}^n y_j^{F'} + \omega + \lambda^{F'}\chi_M\rangle_{F'} = 0$, por lo cual $\sum_{j=1}^n \lim \pi_j^{F'(t)}(y_j^{F'(t)}) + \overline{\omega} + \lambda = 0$, de donde tenemos

$$0 \leq \sum_{j=1}^{n} \overline{\pi}(\overline{y}_j) + \overline{\pi}(\omega) + \lambda \leq \sum_{j=1}^{n} \operatorname{lím} \pi_j^{F^{'}(t)}(y_j^{F^{'}(t)}) + \overline{\omega} + \lambda = 0$$

entonces debemos tener
$\sum_{j=1}^{n} \overline{\pi}(\overline{y}_j) = \sum_{j=1}^{n} \operatorname{lím} \pi_j^{F^{'}(t)}(y_j^{F^{'}(t)})$ por lo cual $\overline{\pi}(\overline{y}_j) = \operatorname{lím} \pi_j^{F^{'}(t)}(y_j^{F^{'}(t)})$ para todo j, de donde demos tener $\overline{\pi} \cap_{j=1}^{n} \varphi_j(\overline{z})$ para todo j, por **WSA** obtenemos $0 < \sum_{j=1}^{n} \overline{\pi}(\overline{y}_j) + \overline{\pi}(\omega) + \lambda$ lo cual es una contradicción. Por tanto se tiene el resultado.

LNS^F

Probemos que la resticción de las preferencias a las sub-economías satisface la no saciedad local en el conjunto de asignaciones factibles. Supongamos que no es así, es decir que para todo $F \in \mathfrak{F}$, existe un subespacio $F' \in \mathfrak{F}$ tal que $F \subset F'$, $((x_i^F)_i^m, (y_j^F)_j^n) \in A^{F'}(\omega)$ y algun i_0, no existe $\zeta_{i_0}^{F'} \in X_{i_0}^{F'}(z_{-i_0}^{F'})$ tal que $\zeta_{i_0}^{F'} \succ \zeta_{i_0, z_{-i_0}^{F'}}^{F'}$. Como $A^{F'}(\omega) \subset A(\omega)$ para todo $F' \in \mathfrak{F}$, existe una sub-red $((x_i^{F(t)})_i^m, (y_j^{F(t)})_j^n)_{t \in (T, \geq)}$ la cual converge a $\overline{z} = ((\overline{x_i})_i^m, (\overline{y_j})_j^n)$ para la topología débil estrella, por lo cual $\overline{z} \in \Pi_{i=1}^m X_i(\overline{z}_{-i}) \times \Pi_{j=1}^n Y_j(\overline{z}_{-j})$, entonces del supuesto **C(ii)** existe $\zeta_i \in \Pi_{i=1}^m X_i(\overline{x}_i)$ tal que $\zeta_i \succ_{i, \overline{z}_{-i}} \overline{x}_i$ para todo i. Por el supuesto **C(vi)** tenemos X_i es $(\Pi_{L^{m+n-1}\sigma\infty, f})$−l.h.c. en L^{m+n-1}, por lo cual existe un sub-espacio $\dot{F}_i$ tal que existe una sub-red $(\zeta_i^{F'(t)})_{i \in (T, \geq)} \subset X_i(z_{-i}^{F'(t)})$ la cual converge a ζ_i, con $(\zeta_i^{F'(t)})_{i \in (T, \geq)} \subset \zeta_i + \dot{F}_i$. Existe un índice $t_0 \in T$ que si $t > t_0$ se tiene $\zeta_i + \dot{F}_i \subset F'(t)$ para todo i, y así $\zeta_i^{F'(t)} \in X_i(z_{-i}^{F'(t)}) \cap F'(t)$ para todo $t > t_0$ y todo i.

Dado que $(\overline{z}_{-i}, \zeta_i, \overline{x}_i) \in \Gamma_i$ y la red $(x_i^{F'(t)})_{t \in (T, \geq)}$ converge para la topología débil estrella a $\overline{x}_i$, existe un t_1 tal que, para todo $t > t_1$, $(z_{-i}^{F'(t)}, \zeta_i^{F'(t)}, x_i^{F'(t)}) \notin \Gamma_i$, de donde obtenemos que para todo i y $t > t_0, t_1$, se tiene $\zeta_{i_0}^{F'(t)}, x_{i_0}^{F'(t)} \in X_i(z_{i_0}^{F'(t)}) \cap F'(t)$, y por la completes de la preferencias se sigue que $\zeta_{i_0}^{F'(t)} \succ_{i_0}^{F'(t)}$. Como $\{F'(t) : t \in T\} \subset \{F' : F' \in \mathfrak{F}\}$, esto contradice el hecho de que exista un $F' \in \mathfrak{F}$ tal que $F \subset F'$, $((x_i^{F'})_{i=1}^m, (y)_{j=1}^n) \in A^{F'}(\omega)$ tal que $\zeta_{i_0}^{F'} \succ_{i_0}^{F'}$. Con lo cual hemos probado que las preferencias son no saciadas, lo que nos lleva al resultado, pues las preferencias son convexas. $\square$

Capítulo 4

Proyectos Futuros

En este apartado buscamos presentar una posible extención al presente trabajo, pues mientras trabajamos en él nos surgieron algunas preguntas a las cuales trataremos dar una respuesta en algún trabajo a corto plazo. Lo primero que notamos y lo cual dio pie a la primera de nuestras preguntas fue el hecho de que al considerar la elección del $i-$ésimo agente en $X_i(z_{-i}) \subset L_+$ sólo consideramos el caso para el cual debe elegir la cantidad a consumir en cada período de un únic bien, el cual es producido por n firmas usando cada una distintas tecnologías. Naturalmente surge la pregunta acerca de la posibilidad de que el agente decida realizar un plan de consumo óptimo, eligiendo en cada período consumir distintas cantidades de distintos bienes, durante un determinado período de tiempo T el que eventualmente puede ser infinito. Esto no lleva a la necesidad de considerar cestas de consumo del tipo $x(t) = (x_1(t), ..., x_m(t))\ \ \forall t \in T$ donde cada $x_j : T \to R$ representa una función definda en en un esapacio vectorial $L_j, j = 1, ..., m$ predeterminado. Análogamente las firmas, deberán elegir planes de producción para dicho período, considerando una cesta de insumos y productos posibles. Así considerado el modelo, un plan de consumo o producción corresponde a un elemento de un espacio producto $x \in \Pi_{j=1}^{m} L_j$. Consecuentemente los precios serán elementos del espacio dual $\left(\Pi_{j=1}^{m} L_j\right)^*$, de donde surge entonces, la necesidad de caracterizar este conjunto de funciones lineales, definido ahora sobre un espacio producto de espacios de Banach, sobre el cual se modela el consumo y la producción.
La primera interrogantes que aparece es la siguiente:

Pregunta 4.0.10. *Dados $L_1, \ldots, L_r$ espacios vectoriales sobre el mismo campo, ¿Qué relación existe entre $(\Pi_{s=1}^{r} L_s)^* = (L_1 \times \cdots \times L_r)^*$ y $(\Pi_{s=1}^{r} L_s^*) = L_1^* \times \cdots \times L_r^*$[1]?*

En principio parecería una pregunta un tanto separada del resto del trabajo, sin embargo no lo es, pues el hecho de responder si existe relación entre ambos espacios, nos ayudaría a saber que tanto de los resultados que ya se tienen pueden ser extendidos. Si por ejemplo existiera un isomorfismo entre ambos espacios, nos ahorraría la labor de tener que calcular el dual de $\Pi_{j=1}^{m} L_j$, y podríamos trabajar con los precios como un vector de funcionales lineales $p = (p_1, ..., p_r)$ definidos en $(\Pi_{s=1}^{r} L_s^*)$. Más aun, poder probar la afirmación anterior nos llevaría a elegir una topología relativamente senncilla, de forma tal que un aberto debil en $\tau = (\Pi_{s=1}^{r} L_s, (\times_{s=1}^{r} L_s)^*)$ se correspondería con un producto de abiertos en $\tau_s = (L_s, L_s^*)$. De esta forma resulatría que $\tau = \Pi_{s=1}^{r} \tau_j$ o bien que para todo $A \in \tau$ existen $A_s \in \tau_s$ tales que $A = \Pi_{s=1}^{r} A_s$ y recíprocamente. Afortunadamente tenemos el siguiente resultado, con el cual estamos en condiciones de extender algunas de la nociones definidas en los capítulos anteriores.

Teorema 4.0.11. *Sean $V_1, \ldots, V_r$ espacios vectoriales sobre el campo $\mathbb{F}$ entonces $(\Pi_{s=1}^{r} V_s)^* \cong (\Pi_{s=1}^{r} V_s^*)$*

Demostración. Sea $L \in (\Pi_{s=1}^{r} V_s)^*$ y definimos $L_s(b_s) := L(0, \ldots, b_s, \ldots 0)$ para todo $b_s \in B_s, \quad s =$

[1] Estos espacios en dimensión finita resultan ser isomorfos, sin embargo sabemos que no todos los resultados de dimension finita son aplicables para espacio arbitrarios

$1, \ldots, r$, afirmamos que L_s es un funcional lineal en B_s^*. Por otra parte dado $(L_1, L_2, \ldots, L_s) \in \Pi B_i^*$, entonces definimos $L(b_1, \ldots, b_n) = L_1(b_1)+\cdots+L_n(b_n)$, para todo $(b_1, \ldots, b_n) \in \Pi B_i$, de donde $L \in (\Pi B_i)^*$. Definimos ahora $F : (\Pi B_i)^* \to (\Pi B_i^*)$ definida como $F(L) = (L_1, \ldots, L_n)$, por lo cual obtenemos que F así definida resulta ser un isomorfimo[2].

□

Enunciaremos ahora algunos resultado de topología sin demostración los cuales nos serán de gran ayuda teniendo en cuenta este isomorfismo y usando los siguientes resultados de Topología el cual no probaremos aquí

Definición 4.0.12. *Sea $(X_\alpha, \tau_\alpha) : \alpha \in I$ una familia de espacios topológicos definimos la* ***Topología producto*** *como la menos fina de las topologías que hace continua a las proyecciones*

$$p_\alpha : \Pi_{\beta\in I} X_\beta \to X_\alpha$$

Proposición 4.0.13. *Sean Y, X_α $\alpha \in I$ espacios topologícos na función*

$$f : Y \to \Pi_{\beta\in I} X_\beta$$

es continua si y solo si

$$p_\alpha \circ f : Y \to X_\alpha$$

es continua.

Corolario 4.0.14. *Si V_i, $\quad i = 1 \ldots r$ espacios vectoriales y V_i^*, $\quad i = 1 \ldots r$ sus duales, entonces la topología producto producto es la topología menos fina para cual el dual del producto cartesiano de los V_i es el producto cartesiano de los duales*[3].

Demostración. Basta con tomar $Y = \Pi_{\beta\in I} X_\beta$ en el teorema anterior, considerar $f = Id$ y hacer uso del Teorema 4.0.3. □

4.0.2. Como tendría que ser la demostración.

En esta parte se pretende solo dar vistazo a grandes rasgos de como debemos modificar algunas de las definiciones hechas en los capítulos anteriores, así como un bosquejo de hacia donde se dirige este y los trabajos siguientes[4]:

1) Notemos que ahora pretendemos tener dos bienes de consumo y así las firmas produzcan con su tecnología dada los mismos. Por lo cual ahora espacios donde se tomaran las decisiones dados $i = 1, \ldots m, j = 1, \ldots n$ agentes y firmas respectivamente será $L^{2(m+n-1)}$, entonces denotamos por $x_i = (x_1^i, x_2^i)$ y $y_j = (y_1^j, y_2^j)$, $\quad \forall i, j$ y mantenemos las misma notación para z_{-i} y z_{-j}, dadas estas definiciones el espacio de consumo para cada agente i estará dado por una correspondencia $X_i : L^{2(m+n-1)} \to L_+^2$ tal que a cada z_{-i} le asocia un subconjunto $X_i(z_{-i})$ de L_+^2, así como para cada firma su tecnología es definida por una correspondencia $Y_j : L^{2(m+n-1)} \to L^2$, $Y_j(z_{-j}) \subset L^2$. Denotamos por $\omega_i = (\omega_1^i, \omega_2^i) \in L \times L$ a las dotaciones iniciales de cada agente en la economía. Entonces la dotación inicial total de la economía está dada por $\omega = \sum_i^m \omega_i$. El ingreso de i-ésimo agente esta dado por una función $r_i : \mathbb{R}^{1+n} \to \mathbb{R}$, $r_i(\pi(\omega_i), (\pi(y_j))_{j=1}^n)$ dado el sistema de precios $(\pi_1, \pi_2) \in S = \{(\pi_1, \pi_2) \in ba_+(M, \mathfrak{M}, \mu) \times ba_+(M, \mathfrak{M}, \mu) : \pi_1(\chi_M) + \pi_2(\chi_M) = 1\}$

[2]Recordemos que para la demostración debemos probar que esta transformación lineal es inyectiva y supra. ya que al considerar espacios de dimensión infinita no podemos aplicar el teorema de las dimensiones.

[3]Haciendo uso del Teorema 4.0.3. estamos identificando a $(\Pi V_i)^*$ con (ΠV_i^*)

[4]**Nota:** Las definiciones y supuestos que no mencionamos es por siguen igual que los capítulos anteriores solo teniendo en cuenta que ahora trabajamos sobre $L \times L$ y su dual.

2) Dada una cesta de bines $(f,h) \in L \times L$ el valor de esta cesta está dado por $\int_M f d\pi_1 + \int_M h d\pi_2$[5]. Al igual que en caso definidos en el capítulo 1, resulta de mayor interés cuando los precios se encuentren en $L_1 \times L_1$.

3) Para las topologías: en el caso de las topologías débil y débil estrella, todo queda de la misma manera solo debemos tener en cuenta que estamos sobre $L \times L$ y su dual, para la topología de norma propondremos trabajar con:

$$|| (f,h) ||= max\{(|| f ||_\infty, || h ||_\infty)\}.$$

4) **Subeconomías:** En este punto hacemos mención de la construcción de los espacios de dimensión finita, al igual que lo hicimos anteriormente consideramos una familia $\mathfrak{F}$ de subespacios F de dimensión finita con la propiedad de que $\omega_i, X_M \in F$ para todo $i = 1, \ldots, m$ donde $X_M = (\chi_M, \chi_M)$, además notemos que la construcción hecha en el capítulo 3, sigue siendo valida, pues basta notar que X_M pertenece al interior de $L \times L$ para topología inducida por la norma de $L \times L$.

4.0.3. Problema y posibles soluciones

En esta sección presentamos una breve descripción de los problemas que se presentan en los teoremas y lemas enunciados en los capítulos precedentes, y cuales parecen ser las posibles soluciones a los mismos. Cuando se busca modelar una economía con "**infinitos**" bienes típicamente se considera un solo bien a lo largo del tiempo, como dijimos anteriormente, nosotros pretendemos considerar más de un bien por periodo, sin embargo no es difícil imaginar que esto podría traer consigo el tener que implementar resultados matemáticos que tal vez carezcan de todo sentido económico, tal como lo descrito a principios de este capítulo con los espacios duales. Además de intentar dar un significado económico (de ser posible) a las identificaciones que tenemos que hacer entre los espacios, se presentan problemas tales como:

1) Poder decidir si existe una una regla de asignación de precios la cual satisfaga el supuesto (PR) (ver pág. 15).

2) Garantizar que $S = \{(\pi_1, \pi_2) \in ba_+(M, \mathfrak{M}, \mu) \times ba_+(M, \mathfrak{M}, \mu) : \pi_1(\chi_M) + \pi_2(\chi_M) = 1\}$, $\sigma^{ba} \times \sigma^{ba}$-compacto.

Los cuales serían los principales problemas a vencer, pues en ellos recae gran parte de las demostraciones de los lemas y teoremas presentados.

[5]Recordemos que estamos usando el isomorfismo $(L \times L)^*$ y $(L^* \times L^*)$, para identificar el elemento $\pi \in (L \times L)^*$ con $(\pi_1, \pi_2) \in (L^* \times L^*)$.

Bibliografía

[1] Fuentes, Matías, N. (2011), *Existence of equilibria in economies with externalities and non-convexities in an infinite-dimensional commodity space*. Journal of Mathematical Economics 47. $768 - 776$.

[2] Aliprantis,Border, K. (1994), *Infinite Dimentional Analysis*. Springer-Verlag, Berlin. .

[3] Bewley, T. (1972), *Existence of equilibria in economies with infinitely many commodities*. Journal of Economic Theory 4, $514 - 540$.

[4] Bonnisseau, J.M. (1997), *Existence of equilibria in economies with externalities and nonconvexities*. Set Valued Analysis 5 , $209 - 226$.

[5] Bonnisseau, J.M. (2002), *The marginal pricing rule in economies with infinitely many commodities* .

[6] Bonnisseau, J.M., Cornet, B. (1988), *Existence of equilibrium when firms follow bounded losses pricing rules*. Journal of Mathematical Economics 17, $119 - 147$.

[7] Bonnisseau, J.M., Meddeb, M. (1999), *Existence of equilibria in economies with increasing returns and infinitely many commodities*. Journal of Mathematical Economics 31, $287 - 307$.

[8] Bonnisseau, J.M., Médecin, M. (2001), *Existence of marginal pricing equilibria in economies with externalities and non-convexities*. Journal of Mathematical Economics 36, $271 - 294$.

[9] Chichilnisky, G., Kalman, P.J., (1980), *Applications of functional analysis to models of efficient allocation of economic resources*. Journal of Optimization Theory and Applications 30, $19 - 32$.

[10] Cornet, B. (1988), *General equilibrium theory and increasing returns : presentation* . Journal of Mathematical Economics 17, $103 - 118$.

[11] Dunford, N., Schwartz, J. (1958), *Linear Operators, Part I. Wiley-Interscience, New York.*

[12] Grabinsky, Steider, Guillermo. (2012), *Teoría de la medida.* , UNAM Fac. de Ciencias.

[13] Munkres, James R. (2002), *Topología. 2.ª edición.*, Pearson Educación, S.A., Madrid.

[14] Papageorgiou N., Kyritsi-Yiallourou, S., (2009), *Handbook of Applied Analysis. Springer, Dordrecht*

[15] Sun N., (2006), *Bewley's limiting approach to infinite dimensional economies with l.s.c. preferences. Economic Letters 92,7-13.*