UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE SAN LUIS POTOSÍ

Facultad de Economía

Caracterización de extensiones del valor de Shapley para juegos con externalidades.

TESIS

para obtener el grado de

Maestría en Economía Matemática

P R E S E N T A:

Mayra Lorena Quiroz Vázquez

Director de tesis:

Dr. Joss E. Sánchez Pérez

Febrero 2014. San Luis Potosí, S.L.P., México

Índice general

Capítulo 1

Introducción

El trabajo de Lloyd S. Shapley (1953) ha abierto muchas puertas de investigación dedicadas a dar una solución "justa" a problemas de distribución de ganancias conjuntas o el reparto de costos comunes de un conjunto de agentes económicos que están dispuestos a cooperar con los demás y se entenderá por solución "justa" un operador que resuelva "bien" estos problemas. Recientemente, esta pregunta ha surgido en el caso donde se presentan coaliciones con externalidades. Este es el problema al que contribuye este trabajo. La presencia de tales factores externos es una característica importante en muchas aplicaciones. En un mercado de oligopolio, el beneficio de un cártel depende del nivel de cooperación entre las empresas de la competencia. El poder de una alianza política depende del nivel de coordinación entre las partes en conflicto. El beneficio de un agente que se niega a participar en la producción del bien público depende del nivel de cooperación de los otros agentes y así sucesivamente. Un denominador común a todos los escenarios anteriores es que cada uno de éstos puede describirse como una situación donde, lo que un grupo de jugadores, teniendo una acción común, puede esperar obtener, depende tanto de las medidas adoptadas, así como de la organización y las acciones de los jugadores fuera de este grupo.

Shapley (1953) obtuvo un resultado de notable singularidad el cual lleva su nombre. Él supone que un juego está caracterizado por las valías de cada coalición S del conjunto de jugadores N, donde las valías representan el pago que reciben los jugadores al formar la colación S, estas valías pueden ser ganancias o costos comunes dependiendo del problema. Estas valías se describen en términos de una función característica, la cual está definida sobre el conjunto de todos los subconjuntos de N y así caracteriza una solución única mediante los axiomas de eficiencia, simetría, aditividad y nulidad. Este valor se refiere a la media ponderada de las contribuciones marginales de los jugadores con coaliciones. Esto viene como una sorpresa a primera vista: la singularidad es la consecuencia de cuatro axiomas básicos, y nada en esos axiomas insinúa el principio de marginalidad de larga tradición en la teoría económica. En aportación a esto, Young (1985) propone una solución, formulando el principio de marginalidad en un axioma, es decir, que la solución debe estar en función de las contribuciones marginales de los jugadores con coaliciones. Así, él se encuentra con que la aditividad y nulidad pueden omitirse. El resultado es una única solución que satisface eficiencia, simetría y marginalidad, y nuevamente es el valor de Shapley.

Dadas las "limitaciones" de los juegos en forma de función característica, en 1963 Lucas y Thrall introdujeron una nueva formulación para la teoría de juegos cooperativos en términos de funciones de partición. Estos autores consideraron que los jugadores se dividen en coaliciones, formando así una partición del conjunto de todos los jugadores. De esta forma, lo que obtiene cada coalición está en función de la organización de los jugadores del complemento.

Debido a la riqueza de los juegos con externalidades, se han dado varias soluciones para este tipo de juegos. El primer artículo que propuso un concepto de valor para juegos con externalidades fue el de Myerson (1977) y después, Bolger (1987) deriva una clase de soluciones particulares para este tipo de juegos. Recientemente, Albizuri et al. (2005), Macho-Stadler et al. (2006), Ju (2007) y Pham Do y Norde (2007) aplican el enfoque axiomático para caracterizar valores.

En este trabajo se caracteriza una extensión de la teoría del valor de Shapley a juegos con externalidades haciendo un análisis axiomático. En este análisis axiomático encontramos atractivos axiomas de sistemas básicos que se utilizaron en problemas con externalidades, los cuales no son suficientes para dar una solución única. A pesar de enfrentarse a la complejidad de dar una definición de contribución marginal con externalidades se aborda la cuestión en términos axiomáticos. Se hace un análisis a los efectos de las contribuciones marginales de los jugadores en coaliciones procedentes de las externalidades. Para este análisis se emplean funciones de partición, en las cuales el valor de una coalición S puede variar con la forma en que los jugadores en S deciden cooperar o no cooperar. Para este juego, $w(S,Q)$ es el valor de la coalición S cuando se tiene la estructura Q, donde S es un elemento de Q. Definir la contribución marginal del jugador i en la coalición S es fácil en ausencia de externalidades; esto se complica cuando se busca describir lo que sucede después que el jugador i deja la coalición S. Suponemos que i planea unirse a T, otra coalición en Q. El efecto en S al moverse el jugador i es la diferencia $w(S,Q)-w(S_{-i},\{S_{-i},T_{+i}\}\cup Q_{-S-T})$. Este efecto se puede descomponer en dos. En primer lugar, hay un efecto en las contribuciones marginales cuando el jugador i deja S y decide no unirse a T, es decir, $w(S,Q)-w(S_{-i},\{S_{-i},\{i\}\}\cup Q_{-S})$. En segundo lugar, hay un efecto en las externalidades, que se deriva a partir de que el jugador i deja S, y en lugar de permanecer solo, se une aT, es decir, la diferencia $w(S,Q)-w(S_{-i},\{S_{-i},T_{+i}\}\cup Q_{-S-T})$.

Asumiendo la formación de la gran coalición, se analizan las consecuencias de eficiencia y simetría, junto con la versión de marginalidad débil. De acuerdo con esta última propiedad, se tiene que la solución depende de un parámetro $\alpha \in \mathbb{R}$, por lo que se obtiene una amplia clase de soluciones. Como resultado de esta conclusión, se busca el fortalecimiento de las implicaciones de la versión de marginalidad débil, por lo que se requiere monotonía, es decir, se busca que la ganancia de un jugador esté en aumento en todos los efectos. Y por último se requiere del axioma de marginalidad, en el cual la ganancia del jugador debe depender del vector de las contribuciones marginales, no en el efecto de las externalidades. El resultado es una caracterización de un valor que satisface eficiencia, simetría y marginalidad.

Con base en el análisis de marginalidad débil se define un jugador nulo y se hace una clasificación de soluciones que satisfacen linealidad, simetría, eficiencia y nulidad débil; esta clasificación es una extension del artículo de L. Hernández-Lamoneda, J. Sánchez-Pérez y F. Sánchez-Sánchez (2009) donde se hace una clasificación de valores lineales, simétricos y eficientes.

Capítulo 2

Juegos en forma de función característica

En este capítulo se introducen a los juegos en forma de función característica. Se dan los conceptos básicos de este tipo de juegos, se muestran algunos ejemplos que dan noción a las aplicaciones de esta teoría, se analizan las características deseables del Valor de Shapley (1953) y la extensión de Young (1982) para este valor.

2.1. Motivación

En esta sección se muestran un par de ejemplos que se modelan con la teoría de juegos en forma de función característica, ya que tienen algunos elementos en común. Como el reparto de algunos beneficios (poder político, dinero, etc.), la oportunidad de dividirlos, los agentes son libres de formar coaliciones o participar en negociaciones y cada participante quiere asegurar la mayor parte del beneficio.

Ejemplo 2.1.1 (**Reparto de costos).** *Sea tres pueblos cercanos representados por el conjunto* $N = \{1, 2, 3\}$, *estos pueblos deben invertir en un sistema de suministro de agua municipal u otro servicio común, mediante la construcción de un único sistema de distribución en lugar de subsistemas separados que pueden aprovechar los beneficios de rendimientos crecientes a escala. El problema es cómo distribuir los beneficios de la cooperación equitativa entre los pueblos.*

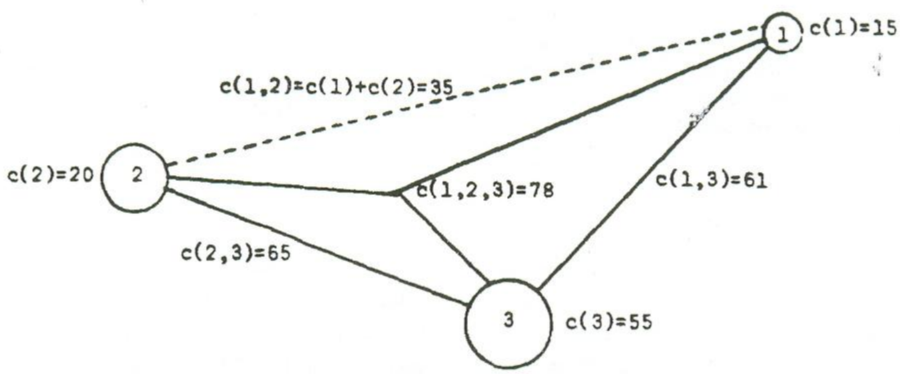

Figura 2.1: Problema de asignación de costos entre tres pueblos.

En la Figura 2.1 se puede ver cómo están distribuidos los costos.

Ejemplo 2.1.2 (Problema de bancarrota). *Una pequeña compañía se declara en bancarrota y debe dinero a tres acreedores. La compañía debe \$100,000 al acreedor 1, \$200,000 al acreedor 2 y, \$300,000 al acreedor 3. Si la compañía tiene sólo \$360,000 para cubrir estas deudas, ¿cómo debería de dividirse el valor neto de la compañía entre sus acreedores?. Naturalmente, es una situación en la que hay un problema de distribución en la que hay que asignar una cantidad insuficiente que no es capaz de satisfacer las demandas de todos los agentes implicados en el reparto.*

Ejemplo 2.1.3 (Consejo de seguridad de las Naciones Unidas). *Es un organismo de la ONU encargado de mantener la paz y la seguridad entre las naciones. A diferencia de otros organismos de la ONU que únicamente pueden realizar recomendaciones a los gobiernos, este Consejo de Seguridad puede tomar (conocidas como resoluciones) y obligar a lo miembros a cumplirlas. El consejo está formado por quince naciones, cinco son miembros permanentes (China, Francia, Reino Unido e Irlanda, Rusia y Estados Unidos), y 10 miembros son no permanentes (Argentina, Australia, Chad, Chile, Jordania, Lituania, Luxemburgo, Nigeria, República de Corea y Rwanda) y son electos cada dos años como representantes regionales. La investigación de la disputa y aplicación de sanciones, y las decisiones requieren voto a favor de al menos nueve miembros, incluyendo los cinco miembros permanentes. Si un miembro permanente vota en contra, la resolución simplemente no se aprueba. Este es el famoso"derecho a veto"de "los cinco grandes", usado cientos de veces desde 1945. Este sistema, obviamente, da a cada miembro permanente un mayor poder que un miembro no permanente. Pero, ¿qué tan mayor?*

Ejemplo 2.1.4 (Manejo de inversiones). *Un inversionista (jugador 1) desea invertir la cantidad de \$1,800,000 sobre una base a corto plazo (de 3 meses). En México, el tipo de interés anual es una función de la suma invertida.*

Este inversionista contacta a un segundo y tercer inversionistas (jugador 2 y 3, respectivamente). El inversionista 2 esta de acuerdo con depositar \$900,000 en el fondo común y el inversionista 3, el cual queda como tesorero, \$300,000. Así pues, se alcanza un fondo de \$3,000,000 y la tasa de interés será del 12 %. ¿Cómo se debería repartir la ganancia entre los tres inversionistas?.

Depósito	Tasa de interés anual
\$0 - \$1,000,000	7.75 %
\$1,000,000 - \$3,000,000	10.25 %
\$3,000,000 - \$5,000,000	12 %

Cuadro 2.1: En esta tabla se presenta el interés anual dependiendo del capital invertido.

2.2. Preliminares

Ahora se muestra la teoría de juegos en forma de función característica que analiza las situaciones anteriores y nos permite modelar esta clase de problemas.

Sea $N = \{1, 2, ..., n\}$ un conjunto de jugadores. Una coalición S, es definida por cualquier subconjunto no vacío de N, $S \subseteq N$, y el conjunto de coaliciones es denotado por $2^N = \{S | S \subseteq N\}$. Por convención, se dice que el conjunto vacío, $\emptyset$, es una coalición, la coalición vacío. El conjunto N es una coalición, llamada la gran coalición. Se denotará la cardinalidad de los conjuntos por las letras minúsculas del abecedario.

Ejemplo 2.2.1. *Sea $N = \{1, 2, 3\}$, entonces las coaliciones para los 3 jugadores son*

$$2^N = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}.$$

Definición 2.2.2. *Se define un juego en forma de función características como*

$$v : 2^N \to \mathbb{R}.$$

Sea $v(S)$ la valía de la coalición S. Intuitivamente, las cantidades $v(S)$ pueden ser ganancias conjuntas, costos comunes o simplemente 1 o 0 dependiendo de si la coalición S logra o no mayoría en una votación. De cualquier forma a $v(S)$, siempre lo consideraremos como un número real.

Denotaremos por

$$J = \{v : 2^N \to \mathbb{R} | v(\emptyset) = 0\}$$

al conjunto de juegos en forma de función característica con un conjunto fijo de jugadores en N.

Se puede ver que el conjunto J es un espacio vectorial sobre el campo de los números reales si se definen la suma y el producto sobre J como sigue:

- $(v_1 + v_2)(S) = v_1(S) + v_2(S)$ para todo $v_1, v_2 \in J$ y $S \subseteq N$
- $(cv)(S) = cv(S)$ para todo $v \in J$, $c \in \mathbb{R}$ y $S \subseteq N$.

Como la cooperación crea beneficios, suponemos que la función v es superaditiva, es decir,

Definición 2.2.3. *Se dice que un juego v es superaditivo si y sólo si $v(S) + v(T) \leq v(S \cup T)$, para S y T coaliciones disjuntas, $S \cap T = \emptyset$.*

Es decir, si dos coaliciones disjuntas deciden unirse para formar una coalición mayor, el beneficio de la nueva coalición será igual o superior que la suma de los beneficios de las coaliciones originales.

Si la desigualdad de la definición anterior se da en sentido opuesto se dice que el juego es subaditivo. Por tanto, un juego v es subaditivo si para toda $S, T \subseteq N$, con $S \cap T = \emptyset$, se verifica que $v(S) + v(T) \geq v(S \cup T)$.

A continuación se muestran un par de ejemplos con juegos explícitos.

Ejemplo 2.2.4 (Reparto de costos). *Para el Ejemplo 2.1.1. Sea $c(S)$ el costo conjunto de suministro de los miembros de $S \subseteq N$ de forma independiente. Entonces c es subaditiva y los beneficios de cooperar en lugar de ir solo vienen dados por la función característica*

$$v(S) = \sum_{i \in S} c(i) - c(S).$$

Así, tenemos los siguientes valores para el juego v.

S	$v(S)$
{1}	0
{2}	0
{3}	0
{1,2}	0
{1,3}	9
{2,3}	10
{1,2,3}	12

Ejemplo 2.2.5 (Problema de bancarrota). *Un juego de bancarrota está definido como una terna (N, d, C) donde $N = \{1, 2, ..., n\}$ es el conjunto de acreedores, $d = (d_1, d_2, ..., d_n)$ con $d_i \geq 0$, $1 \leq i \leq n$, es el vector de demandas de los acreedores y C es el valor neto para repartir entre los elementos de N. El juego asociado a este problema se define como*

$$v(S) = \text{máx}\left\{0, C - \sum_{i \in N \setminus S} d_i\right\},$$

con $\sum_{i \in N \setminus S} d_i > C$. Este juego nos interesa por que se enfoca a las pérdidas en las que se pueden incurrir los demandantes (nadie puede recibir una cantidad negativa) de forma que todas las pérdidas sean iguales. La regla da prioridad a los acreedores con demandas más elevadas, éstos reciben una cantidad antes que los acreedores con demandas menores.

Ejemplo 2.2.6. *Analizando los datos iniciales del Ejemplo 2.1.2 podemos definir un juego para este problema de la siguiente forma. Los acreedores cuentan con \$360,000 para repartirse entre ellos, por lo que $v(\{1, 2, 3\}) = 360,000$. Por sí mismo, el acreedor 1 no garantiza recibir alguno, ya que los otros acreedores podrían repartirse la cantidad total; así hacemos $v(\{1\}) = 0$. De forma similar $v(\{2\}) = 0$. El acreedor 3 podría recibir al menos \$60,000, ya que aunque los acreedores 1 y 2 recibieran el total de sus reclamos, éste tendría la cantidad de \$360,000-\$300,000 = \$60,000. Entonces tomamos $v(\{3\}) = 60,000$. Siguiendo un razonamiento similar, obtenemos que $v(\{1, 2\}) = 60,000$, $v(\{1, 3\}) = 160,000$ y $v(\{2, 3\}) = 260,000$. Lo cual se sintetiza en la siguiente tabla.*

S	$v(S)$
{1}	0
{2}	0
{3}	\$60,000
{1,2}	\$60,000
{1,3}	\$160,000
{2,3}	\$260,000
{1,2,3}	\$360,000

Ejemplo 2.2.7 (Consejo de Seguridad de las Naciones Unidas)**.** *Debido a que una resolución se aprueba o no, podemos asignar una valía de 1 a todas las coaliciones ganadoras, y 0 a toda coalición perdedora. Entonces, el juego puede ser descrito por la función característica:*

$$v(S) = \begin{cases} 1 & \textit{para todo } S \textit{ contiene a los cinco miembros permanentes y al menos 4 no permanentes} \\ \\ 0 & \textit{en otro caso,} \end{cases}$$

para toda $S \subseteq N$.

Definición 2.2.8. *Se dice que un juego* v *es simple si y sólo si* $v(S)$ *únicamente puede ser 0 ó 1 para todo* $S \subseteq N$*. Dado un juego simple* v*, diremos que:*

$S \subseteq N$ *es una coalición ganadora si y sólo si* $v(S) = 1$.

Ejemplo 2.2.9 (Manejo de inversiones)**.** *El interés total del Ejemplo 2.1.4 que cada colición puede asegurar, está dado por la siguiente función característica:*

S	$v(S)$
{*1*}	*46,125*
{*2*}	*17,437.5*
{*3*}	*5,812.5*
{*1,2*}	*69,187.5*
{*1,3*}	*53,812.5*
{*2,3*}	*30,750*
{*1,2,3*}	*90,000*

Shapley (1953) se enfocó en encontrar soluciones a estos problemas y propuso lo siguiente:

Definición 2.2.10. *Se entenderá por una solución* φ *sobre* J *un operador*

$$\varphi : J \to \mathbb{R}^n.$$

Si $v \in J$ y φ es una solución, entonces $\varphi_i(v)$ es el pago que recibe el jugador i en el juego v.

2.3. Soluciones axiomáticas

Después de tener una solución φ, Shapley estudio algunas propiedades deseables del operador, las cuales considera axiomas. Así se estudian los siguientes axiomas que permiten llegar a una solución única.

Axioma 2.3.1 (Aditividad)**.** *La solución* φ *es aditiva si y sólo si* $\varphi(v_1 + v_2) = \varphi(v_1) + \varphi(v_2)$ *para todo* $v_1, v_2 \in J$.

Esta característica pide que lo que obtiene cada coalición es exactamente lo que obtiene en cada uno de los juegos originales y por lo tanto los jugadores no tienen ventaja adicional por jugar los dos juegos en serie.

Otra característica deseable es que la solución no dependa de los atributos personales de los jugadores. Así, si los jugadores intercambian papeles en el juego y además cada coalición logra hacer exactamente lo mismo que la coalición a la que suplanta, entonces lo que debe obtener cada jugador en el nuevo juego es lo que obtenía el jugador al cual suplanta.

Se denotará por S_n al grupo de permutaciones de los jugadores en N, es decir

$$S_n = \{\theta | \theta : N \to N, \theta \text{ biyectiva}\}$$

y por

$$\theta(S) = \{\theta(i) : i \in S\}.$$

Es decir, S_n contiene todos los órdenes totales que se pueden definir sobre el conjunto N, o si se quiere, a todas las permutaciones de los n jugadores. Sin embargo es mejor pensar en la primera interpretación, ya que al extender la teoría a un continuo de jugadores, el concepto de permutación no se generaliza fácilmente. De cualquier manera, cada θ se interpretará como un intercambio de papeles en el juego. En particular, el jugador i pasará a tomar el papel del jugador $\theta(i)$. A continuación se define formalmente el significado de las frases "formar un juego intercambiando papeles" y el de "intercambiar pagos". Para todo $\theta \in S_n$ y $v \in J$ se define el juego $\theta \cdot v$ como sigue:

$$(\theta \cdot v)(S) = v(\theta^{-1}S)$$

Estas definiciones se pueden interpretar como sigue: para $\theta \in S_n$ y $v \in J$ dado, se desea que $v(\theta^{-1}S)$ represente el juego después de que los jugadores hayan intercambiado papeles de acuerdo a θ. Como los jugadores en $\theta(S)$ suplantan a los que están en S, entonces lo que debe poder conseguir $\theta(S)$ en $v(\theta^{-1}S)$ es lo que podía conseguir $S \subseteq N$, es decir, $(\theta \cdot v)(S)$. Ahora, el pago que recibe el jugador $\theta(i)$ con $v(\theta^{-1}S)$ es el que recibía i con $(\theta \cdot v)(S)$.

Axioma 2.3.2 (Simetría)**.** *La solución φ es simétrica si y sólo si $\varphi(\theta \cdot v) = \theta \cdot \varphi(v)$ para toda $\theta \in S_n$ y $v \in J$.*

Es decir, la solución φ es simétrica si y sólo si para cualquier $\theta \in S_n$ y $v \in J$, el monto que asigna φ a cada jugador i en v, $\varphi_i(\theta \cdot v)$, es el mismo que el que φ asigna al jugador que suplanta en v a i, $(\theta \cdot \varphi_{\theta(i)}(v))$.

Axioma 2.3.3 (Eficiencia)**.** *La solución φ es eficiente si y sólo si $\sum_{i\in N} \varphi_i(v) = v(N)$, para todo $v \in J$.*

Es decir, el monto que se reparte entre todos los jugadores bajo φ, es exactamente el monto que puede conseguir la gran coalición $v(N)$.

Por último:

Definición 2.3.4. *Se dice que i es un jugador nulo en v si y sólo si $v(S \cup \{i\}) = v(S)$ para toda $S \subseteq N$.*

Axioma 2.3.5 (Nulidad)**.** *Si el jugador i es un jugador nulo en $v \in J$ y φ es una solución, entonces $\varphi_i(v) = 0$.*

En otras palabras, alguien que no aporte nada al juego, debe ser excluido de la repartición.

2.4. Valor de Shapley

Así, Shapley en 1953 encontró una solución que satisface los axiomas anteriores y está dada en el siguiente teorema.

Teorema 2.4.1 (Valor de Shapley)**.** *Existe una única solución $Sh : J \to \mathbb{R}^n$ que satisface aditividad, simetría, eficiencia y nulidad. Además, está dada por*

$$Sh_i(v) = \sum_{S \not\ni i} \frac{s!(n-s-1)!}{n!} \left[v(S \cup \{i\}) - v(S) \right], \forall i \in N \tag{2.1}$$

Demostración. Probaremos que el valor de Shapley existe y está caracterizado de manera única.

Primero probaremos unicidad; dado que J es un espacio vectorial se considera la siguiente base:

$$v_R(S) = \begin{cases} 1 \quad \text{si} \quad R \subseteq S \\ \\ 0 \qquad \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Así, para cualquier juego dado v existen $\delta_R \in R$ únicos tales que

$$v = \sum_{\{R|\emptyset \neq R \subseteq N\}} \delta_R v_R.$$

Sea φ cualquier valor de Shapley entonces, por aditividad

$$\varphi(v) = \sum_{\{R|\emptyset \neq R \subseteq N\}} \varphi(\delta_R v_R).$$

Así, si el valor de Shapley para todo $\delta_R v_R$ es único, el de v también lo será. Ahora nótese que:

- Si $i \notin R$ entonces i es un jugador nulo en v_R.

  Si i es un jugador nulo en v_R se tiene que $v_R(S) = v_R(S \cup \{i\})$ para todo $i \in S$ y como

  $$v_R(S) = \begin{cases} 1 \quad \text{si} \quad R \subseteq S \\ \\ 0 \qquad \text{en otro caso.} \end{cases}$$

  también se tiene que

  $$v_R(S \cup \{i\}) = \begin{cases} 1 \quad \text{si} \quad R \subseteq (S \cup \{i\}) \\ \\ 0 \qquad \text{en otro caso.} \end{cases}$$

  por lo que se puede concluir que $v_R(S) = 1$ y $v_R(S \cup \{i\}) = 1$ y por lo tanto

  $$v_R(S) = v_R(S \cup \{i\}).$$

- $(\delta_R v_R)(N) = \delta_R$.

  Nótese que

$$v_R(N) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad R \subseteq N \\ \\ 0 & \quad\quad \text{en otro caso.} \end{cases}$$

  por lo que se puede deducir que $v_R(N) = 1$ y así $(\delta_R v_R)(N) = \delta_R(v_R(N)) = \delta_R$.

- Si $i, j \in R$ y θ es tal que $\theta(i) = j$ y $\theta(R) = R$, entonces, por el axioma de simetría

$$\varphi_i(\theta v_R) = \varphi_{\theta(i)}(v_R) = \varphi_j(v_R)$$

  y como $v_R = \theta v_R$ por la forma partícular en que se tomó θ

$$\varphi_i(\theta v_R = \varphi_i(v_R)$$

  de donde:

$$\varphi_i(v_R) = \varphi_j(v_R).$$

Con esto, φ satisface los axiomas y el único valor posible para $\delta_R v_R$ es:

$$\varphi_i(\delta_R v_R) = \begin{cases} \delta_R / r & \text{si} \quad i \in R \\ \\ 0 & \quad\quad \text{en otro caso.} \end{cases}$$

- Ahora mostraremos existencia, demostrando que la solución propuesta satisface los cuatro axiomas anteriores

  1. **Axioma de aditividad:** Si φ es la solución 2.1 dada en el Teorema 2.4.1, entonces mostraremos que $\varphi(v_1 + v_2) = \varphi(v_1) + \varphi(v_2)$ para todo $v_1, v_2 \in J$.

$$\begin{aligned} Sh_i(v_1 + v_2) &= \sum_{S \not\ni i} \frac{s!(n-s-1)!}{n!} \left[v_1(S \cup \{i\}) - v_1(S) + v_2(S \cup \{i\}) - v_2(S) \right] \\ &= \sum_{S \not\ni i} \frac{s!(n-s-1)!}{n!} \left[v_1(S \cup \{i\}) - v_1(S) \right] \\ &+ \sum_{S \not\ni i} \frac{s!(n-s-1)!}{n!} \left[v_2(S \cup \{i\}) - v_2(S) \right] \\ &= Sh_i(v_1) + Sh_i(v_2), \ \forall \ i \in N. \end{aligned}$$

  2. **Simetría:** Si φ es la solución 2.1 dada en el Teorema 2.4.1, entonces mostraremos que $\varphi(\theta \cdot v) = \theta \cdot \varphi(v)$ para toda $\theta \in S_n$ y $v \in J$.

Supongamos que $\theta(i) = j$.

$$
\begin{aligned}
(\theta \cdot Sh(v))_i &= Sh_{\theta(i)}(v) = Sh_j(v) \\
&= \sum_{S \not\ni j} \frac{s!(n-s-1)!}{n!} \left[v(S \cup \{j\}) - v(S) \right] \\
&= \sum_{\theta(S) \not\ni i} \frac{s!(n-s-1)!}{n!} \left[v(\theta(S) \cup \{\theta(i)\}) - v(\theta(S)) \right] \\
&= \sum_{S \not\ni i} \frac{s!(n-s-1)!}{n!} \left[\theta \cdot v(S \cup \{i\}) - \theta \cdot v(S) \right] \\
&= Sh_i(\theta \cdot v).
\end{aligned}
$$

3. **Eficiencia:** Si φ es la solución 2.1 dada en el Teorema 2.4.1, entonces mostraremos que $\sum_{i \in N} \varphi_i(v) = v(N)$, para todo $v \in J$.
   Por la prueba de unicidad se tiene que

$$
Sh_i(v_R) = \begin{cases} 1/r & \text{si} \quad i \in R \\ \\ 0 & \quad\quad \text{en otro caso.} \end{cases}
$$

   por lo que se puede deducir que $\displaystyle\sum_{i \in N} v_R(N) = 1 = v_R(N)$; por linealidad

$$
v = \sum_{\{R \mid \emptyset \neq R \subseteq N\}} \delta_R v_R
$$

   implica que

$$
Sh_i(v) = \sum_{\{R \mid \emptyset \neq R \subseteq N\}} \delta_R Sh_i(v_R).
$$

   Así,

$$
\begin{aligned}
\sum_{i \in N} Sh_i(v) &= \sum_{\{R \mid \emptyset \neq R \subseteq N\}} \delta_R \sum_{i \in N} Sh_i(v_R) \\
&= \sum_{\{R \mid \emptyset \neq R \subseteq N\}} \delta_R v_R(N) \\
&= v(N).
\end{aligned}
$$

4. **Nulidad:** Si φ es la solución 2.1 dada en el Teorema 2.4.1, entonces mostraremos que que si el jugador i es un jugador nulo en v entonces $\varphi_i(v) = 0$.
   Por definición, si i es nulo en v entonces $v(S \cup \{i\}) = v(S)$ para toda $S \subseteq N$.

$$\begin{aligned} Sh_i(v) &= \sum_{S \not\ni i} \frac{s!(n-s-1)!}{n!} \left[v(S \cup \{i\}) - v(S)\right] \\ &= \sum_{S \not\ni i} \frac{s!(n-s-1)!}{n!} \left[v(S) - v(S)\right] \\ &= \sum_{S \not\ni i} \frac{s!(n-s-1)!}{n!} [0] \\ &= 0. \end{aligned}$$

□

Ejemplo 2.4.2 (**Reparto de costos**). *Para el Ejemplo 2.1.1, el valor de Shapley está dado por:*

$$Sh(v) = \left(\frac{13}{6}, \frac{16}{6}, \frac{43}{6}\right).$$

Este valor representa el ahorro para cada jugador.

Ejemplo 2.4.3 (**Problema de bancarrota**). *Para el Ejemplo 2.1.2, el valor de Shapley nos dice que la distribución para los acreedores sería de*

$$Sh(v) = (60000, 110000, 190000).$$

En este caso el valor representa el pago a cada uno de los acreedores.

Ejemplo 2.4.4 (**Consejo de seguridad de las Naciones Unidas**). *Para el Ejemplo 2.1.3, se tendrán coaliciones ganadoras siempre que contengan a los cinco miembros permanentes y al menos cuatro de los miembros no permanentes; entonces habrá coaliciones ganadoras de tamaño 9, 10, 11, 12, 13, 14 y 15. Por lo que el valor de Shapley para un miembro permanente está dado por,*

$$Sh_{perm}(v) = 0.1962703963,$$

este valor está dado por la suma de los valores de las coaliciones ganadoras y representa el poder para miembros permanentes.

Y para un miembro no permanente, el valor es

$$Sh_{no\ perm}(v) = 0.001864801865,$$

el cual es el poder para estos miembros.

Ejemplo 2.4.5 (**Manejo de inversiones**). *Para el Ejemplo 2.1.4, el valor de Shapley está dado por*

$$Sh(v) = (46968.75, 25875, 17156.25),$$

y representa la ganancia para cada inversionista.

2.5. Solución con marginalidad para juegos cooperativos

En 1982, Young propone una caracterización alterna del valor de Shapley utilizando contribuciones marginales; él propone un principio general de monotonía que establece que a medida que cambian los datos del reparto equitativo, la solución debe cambiar de forma paralela. Esto es pertinente para aplicaciones en las que las asignaciones no son definitivas, ya que se revisan periódicamente a medida que surge nueva información. Este es el caso, por ejemplo, en la división de los beneficios conjuntos o costos de una empresa cooperativa equitativa entre los socios cuando la estructura subyacente de la empresa está evolucionando en el tiempo.

Mostraremos una formulación del principio de monotonía para juegos cooperativos. Young en su artículo [3] ve que éste es equivalente al principio de marginalidad y demuestra que es consistente con exactamente un concepto de solución, el valor de Shapley.

Una importante aplicación de juegos cooperativos en el que la monotonía juega un papel natural es el problema de reparto de costos descrito en el Ejemplo 2.1.1. Otro tipo de problema es la asignación de gastos comunes entre las diferentes divisiones en una firma. En este caso podemos interpretar $v(S)$ como la ganancia neta, es decir, ingreso menos costo que cada coalición S podría realizar en una base autónoma.

Una forma frecuente de monotonía es la monotonía agregada. Este principio establece que si el valor de la coalición de la gran coalición aumenta, mientras que el valor de todas las otras coaliciones permanece fijo, entonces ningún jugador debería recibir menos que antes:

$$v(N) \geq w(N) \text{ y } v(S) = w(S) \ \forall\ S \subset N \text{ y todo } v, w \in J$$

lo cual implica

$$\varphi_i(v) \geq \varphi_i(w) \ \forall i \in N.$$

Este concepto fue definido por primera vez para juegos cooperativos por Megiddo (1974), y es bien conocido en otros problemas de reparto equitativo, por ejemplo "monotonía" en el problema de negociación de Kalai/Smorodinsky, y "monotonía de casa" en el reparto Balinski/Young (1982).

Otro método que es monótono es el valor de Shapley, donde la contribución marginal se define como sigue:

Definición 2.5.1 (Contribución marginal). *La contribución marginal de i en S esta dada por:*

$$v^i(S) = \begin{cases} v(S) - v(S \setminus \{i\}) & si\ i \in S, \forall i \in N, S \subseteq N \\ v(S \cup \{i\}) - v(S) & si\ i \notin S. \end{cases}$$

Así, Young propuso los siguientes axiomas:

Axioma 2.5.2 (Monotonía). *Sean $v, w \in J$. Si $v^i(S) \geq w^i(S)$ para toda $S \in 2^N$, entonces $\varphi_i(v) \geq \varphi_i(w)$ para todo $i \in N$.*

Axioma 2.5.3 (Marginalidad). *Sean $v, w \in J$. Si $v^i(S) = w^i(S)$ para toda $S \subseteq N$, entonces $\varphi_i(v) = \varphi_i(w)$ para todo $i \in N$.*

Y obtiene la siguiente caracterización.

Teorema 2.5.4 (Young, 1982). *Existe una única solución $\varphi : G \to \mathbb{R}^n$ que satisface los axiomas de simetría, eficiencia y marginalidad. Y ésta es:*

$$\varphi_i(v) = \sum_{i \in S} \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!} v^i(S) = Sh_i(v), \ \forall \ i \in N. \tag{2.2}$$

Demostración. Se demostrará existencia y unicidad.

- **Existencia.** Del Teorema 2.4.1 se tiene que la solución 2.2 satisface simetría y eficiencia, sólo falta ver que cumple marginalidad.

  Si $v^i(S) = w^i(S)$ para toda $S \subseteq N$, entonces, $\forall \ i \in N$,

$$\begin{aligned} \varphi_i(v) &= \sum_{i \in S} \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!} v^i(S) \\ &= \sum_{i \in S} \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!} w^i(S) \\ &= \varphi_i(w). \end{aligned}$$

- **Unicidad.** Consideramos un juego $v \in J$ que es cero para toda coalición, es decir, $v^i(S) = 0$ para todo i y toda S. Por simetría $\varphi_i(v) = \varphi_j(v)$ para toda $i \neq j$, y por definición del juego, $\sum_N \varphi_i(v) = 0$, entonces $\varphi_i(v) = 0$ para todo i. Por el axioma de marginalidad se tiene que para un juego $w \in J$ y $i \in N$,

$$w^i(S) = 0 \ \forall \ S \subseteq N \text{entonces } \varphi_i(w) = 0.$$

  Esto es, el jugador es nulo.

  Ahora se explota el factor notado por Shapley que todo juego v puede ser expresado por una suma primitiva de juegos,

$$v = \sum_{\emptyset \neq R \subseteq N} c_R v_R, \tag{2.3}$$

  donde

$$c_R v_R(S) = \begin{cases} c_R & \text{si} \quad R \subseteq S, \forall \subseteq N \\ 0 & \quad \text{en otro caso.} \end{cases}$$

  El valor de Shapley puede ser expresado por

$$\varphi_i(v) = \sum_{\emptyset \neq R \subseteq N} \varphi_i(c_R v_R) = \sum_{R : i \in R} c_R / |R|.$$

  Definimos el índice I de v como el número mínimo de términos distintos de cero en la expresión 2.3. Y se prosigue a demostrar por inducción en I.

Si $I = 0$, como i es nulo entonces $\varphi_i(v) = 0$. Si $I = 1$, $v = c_R v_R$ para $R \subseteq N$. Para $i \notin R$, $v^i(S) = 0$ para toda S, por ser i nulo $\varphi_i(v) = 0$ para todo $i, j \in R$, por simetría $\varphi_i(v) = \varphi_j(v)$; combinado con $\sum_N \varphi_k(v) = v(N)$ se concluye que $\varphi_i(v) = c_R/|R|$ para toda $i \in R$. Se tiene que si $\varphi(v)$ es el valor de Shapley entonces el índice de v es 0 ó 1.

Asumimos que $\varphi(v)$ es el valor de Shapley siempre que el índice de v es a lo más I, y sea v con índice $I + 1$ con expresión

$$v = \sum_{k=1}^{I+1} c_{R_k} v_{R_k}, \text{ con } c_{R_k} \neq 0.$$

Sea

$$R = \bigcap_{k=1}^{I+1} R_k$$

y suponemos que $i \notin R$. Se define el juego

$$w = \sum_{k:i\in R_k} c_{R_k} v_{R_k}.$$

El índice de w es a lo más I y $w^i(S) = v^i(S)$ para todo S, por inducción y monotonía se tiene que

$$\varphi_i(v) = \varphi_j(w) = \sum_{k=i\in R_k} c_R/|R_k|$$

el cual es el valor de Shapley de i.

Nótese que $\varphi_i(v)$ es el valor de Shapley cuando

$$i \in R = \bigcap_{k=1}^{I+1} R_k.$$

Por simetría, $\varphi_i(v)$ es una constante c para todos los miembros de R; igualmente el valor de Shapley es alguna constante c' para todo miembro de R. Dado que la asignación es a lo sumo $v(N)$ y es para todo $i \notin R$, entonces $c = c'$.

$\square$

Capítulo 3

Juegos con externalidades

Debido a que los juegos en forma de función característica están sólo en relación con las posibles coaliciones que forman los jugadores, en 1963 Lucas y Thrall introdujeron una nueva formulación para la teoría de juegos cooperativos en términos de funciones de partición, es decir, juegos con externalidades. Estos autores consideraron que los jugadores se dividen en coaliciones, formando así una partición del conjunto de todos los jugadores. De esta forma, lo que obtiene cada coalición está en función de la organización de los jugadores del complemento, es por esto que estudiamos éste tipo de juegos.

Así, en este capítulo se introduce a los juegos con externalidades. Se presentan los conceptos básicos de esta teoría, se muestran algunos ejemplos que dan noción a las aplicaciones económicas, se analizan las características deseables del Valor de Myerson (1977) y una extensión del valor de Shapley para estos juegos dada por Pham Do K. y Norde H. (2007).

3.1. Motivación

A continuación se ven algunos ejemplos que pueden ser modelados con juegos con externalidades y la teoría que nos permite dar una solución a estos problemas.

Ejemplo 3.1.1 (Competencia de mercado). *Consideremos la situación donde tenemos 3 compañías que están compitiendo por un mercado. Cuando los jugadores 1, 2 y 3 están por su propia cuenta, cada uno de ellos obtiene una valía de 50 unidades monetarias. Sin embargo, si cualesquiera de ellos se juntan, pueden acaparar una mayor parte del mercado y así obtener más ganancia, afectando al otro jugador. Finalmente, si se forma la gran coalición, acaparan todo el mercado y así obtienen la máxima ganancia de 200 unidades monetarias.*

Partición	*Ganancia*
$\{1\}\ \{2\}\ \{3\}$	*50 50 50*
$\{1,2\}\ \{3\}$	*120 40*
$\{1,3\}\ \{2\}$	*125 45*
$\{2,3\}\ \{1\}$	*130 10*
$\{1,2,3\}$	*200*

Ejemplo 3.1.2 (Juego de contaminación). *Supongamos que cuando los jugadores 1, 2 y 3 están por su propia cuenta, cada uno de ellos obtiene una valía de -20 por los efectos de la conta-*

minación. Sin embargo, si cualesquiera dos de ellos se juntan, pueden limpiar parcialmente la contaminación y arrojar el resto de la contaminación al otro jugador. En este caso las coaliciones de dos jugadores obtienen una valía de 0 y el jugador restante obtiene -45 si es el jugador 1, -50 si es el jugador 2, y -55 si es el jugador 3. Finalmente, si se forma la gran coalición, aún más contaminación se puede limpiar, resultando una valía de -30.

Partición	*Valía*
$\{1\}\ \{2\}\ \{3\}$	*-20 -20 -20*
$\{1,2\}\ \{3\}$	*0 -45*
$\{1,3\}\ \{2\}$	*0 -50*
$\{2,3\}\ \{1\}$	*0 -55*
$\{1,2,3\}$	*-30*

Sea N un conjunto finito no vacío, y sean los miembros de N los jugadores. Dado N, se define CL como el conjunto de todas las coaliciones (subconjuntos no vacíos) de N.

$$CL = \{S | S \subseteq N, S \neq \emptyset\} = 2^N \setminus \emptyset.$$

Sea PT el conjunto de particiones de N, tal que

$$\{S^1, ..., S^l\} \in PT \text{ si y sólo si:}$$

$$\bigcup_{i=1}^{l} S^i = N,\ \forall j\ S^j \neq \emptyset,\ \forall k\ S^j \cap S^k = \emptyset \text{ si } k \neq j.$$

Dado N, se define ECL como el conjunto de coaliciones incrustadas, es decir, el conjunto de coaliciones juntas con especificaciones en cuanto a cómo los jugadores externos se agrupan. Formalmente

$$ECL = \{(S, Q) | S \in Q \in PT\}.$$

Por convención decimos que $\emptyset \in Q$ para toda $Q \in PT$.

Definición 3.1.3. *Un juego con externalidades es un mapeo*

$$w : ECL \to \mathbb{R}$$

que asigna el valor real $w(S, Q)$ para cada coalición incrustada (S, Q), con la propiedad que $w(\emptyset, Q) = 0$, para toda $Q \in PT$.

El conjunto de juegos con externalidades con jugadores en N es denotado por G, es decir,

$$G = \{w : ECL \to \mathbb{R} | w(\emptyset, Q) = 0\ \forall Q \in PT\}.$$

El valor $w(S, Q)$ representa el pago de la coalición S dada la estructura de coalición para Q. En este tipo de juegos, el valor de alguna coalición no sólo depende de lo que los jugadores de dicha coalición pueden obtener en forma conjunta, sino también de la forma en que los otros jugadores se organizan.

Dado $w_1, w_2 \in G$ y $c \in \mathbb{R}$, definimos la suma $w_1 + w_2$ y el producto cw_1, en G, en forma usual, es decir,

- $(w_1 + w_2)(S, Q) = w_1(S, Q) + w_2(S, Q)$
- $(cw_1)(S, Q) = cw_1(S, Q)$.

Se puede ver que G es un espacio vectorial con estas operaciones.

Una solución es una función $\Phi : G \to \mathbb{R}^n$. Sea Φ una solución y $w \in G$, entonces podemos interpretar $\Phi_i(w)$ como el pago para el jugador i en el juego w.

El grupo S_n actúa en ECL en forma natural, es decir, para $\theta \in S_n$ tenemos:

$$\theta(S) = \{\theta(i) | i \in S\}$$

$$\theta(S_1, \{S_1, ..., S_l\}) = (\theta(S_1), \{\theta(S_1), ..., \theta(S_l)\}).$$

3.2. Soluciones axiomáticas

Y de igual forma que en los juegos en forma de función característica, el propósito es caracterizar soluciones con base en un conjunto de propiedades deseables.

Los axiomas más comunes que se pueden encontrar en la literatura sobre juegos con externalidades son los de linealidad, simetría, eficiencia y aditividad; los cuales se definen a continuación.

Axioma 3.2.1 (Aditividad). *La solución Φ es aditiva si y sólo si $\Phi(w_1 + w_2) = \Phi(w_1) + \Phi(w_2)$ para toda $w_1, w_2 \in G$.*

Axioma 3.2.2 (Eficiencia). *La solución Φ es eficiente si y sólo si $\sum_{i \in N} \Phi_i(w) = w(N, \{N\})$, para todo $w \in G$.*

Axioma 3.2.3 (Linealidad). *La solución Φ es aditiva si y sólo si $\Phi(w_1 + w_2) = \Phi(w_1) + \Phi(w_2)$ y $c\Phi(w_1) = \Phi(cw_1)$, para toda $w_1, w_2 \in G$ y $c \in \mathbb{R}$.*

Axioma 3.2.4 (Simetría). *La solución Φ es simétrica si y sólo si $\Phi_i(w) = \Phi_{\theta(i)}(\theta \cdot w)$ para toda $\theta \in S_n$, $w \in PG$ y $i \in N$, donde el juego $\theta \cdot w$ es definido por*

$$(\theta \cdot w)(S, Q) = w[\theta^{-1}(S, Q)].$$

La interpretación de estos axiomas es similar a los axiomas para soluciones a juegos tradicionales.

3.3. Algunos valores para juegos con externalidades

Debido a la gran riqueza de los juegos con externalidades, varias soluciones se han dado para este tipo de juegos. A continuación se presentan algunas soluciones axiomáticas.

3.3.1. Valor de Myerson

El artículo de Myerson (1977) fue el primero en proponer la caracterización de una solución para estos juegos con base en tres axiomas: linealidad, simetría y otro llamado “portador” el cual implica eficiencia y nulidad para este tipo de juegos.

Se necesitará notación adicional. Para cualesquiera $Q, \tilde{\mathrm{Q}} \in PT$, definimos

$$Q \wedge \tilde{\mathrm{Q}} = \{S \cap \tilde{\mathrm{S}} | S \in Q, \tilde{\mathrm{S}} \in \tilde{\mathrm{Q}}, S \cap \tilde{\mathrm{S}} \neq 0\}$$

y decimos que $(\tilde{\mathrm{S}},\tilde{\mathrm{Q}}) \gg (S, Q)$ si y sólo si $\tilde{\mathrm{S}} \supseteq S$ y $\tilde{\mathrm{Q}} \wedge Q = Q$.

Dados $w \in G$ y $S \in CL$, decimos que S es portador de w si y sólo si

$$w(S, Q) = w(S \cap \tilde{\mathrm{S}}, Q \wedge \{\tilde{\mathrm{S}}, N \setminus \tilde{\mathrm{S}}\})$$

para toda $(S, Q) \in ECL$; es decir, lo que obtienen los jugadores de S en Q es lo mismo que obtienen al restringirse a $\tilde{\mathrm{S}}$. Nótese que N siempre es un portador.

El siguiente axioma propone que el monto que obtiene la gran coalición sea repartido entre los miembros de un portador.

Axioma 3.3.1 (Portador)**.** *Sea Φ una solución, para todo $w \in G$ y toda $S \in CL$, si S es portador de w entonces*

$$\sum_{i \in S} \Phi_i(w) = w(N, \{N\}).$$

Teorema 3.3.2. *Existe exactamente una solución $\Phi : G \to \mathbb{R}^N$ que satisface los axiomas de aditividad, portador y simetría. Además está dada por:*

$$\Phi_n(w) = \sum_{(S,Q) \in ECL} (-1)^{q-1}(q-1)! \bullet$$

$$\left(\frac{1}{n} - \sum_{\substack{\tilde{S} \in Q \\ \tilde{S} \neq S, n \notin \tilde{S}}} \frac{1}{(q-1)(n - |\tilde{S}|)} \right) w(S, Q), \forall n \in N. \tag{3.1}$$

Demostración.

- Primero mostraremos unicidad; para algún $(S, Q) \in ECL$ y $t \in \mathbb{R}$, definimos el juego con externalidades $x^{t,S,Q}$ por

$$(x^{t,S,Q})_{\tilde{\mathrm{S}},\tilde{\mathrm{Q}}} = \begin{cases} t & \text{si} \quad (\tilde{\mathrm{S}},\tilde{\mathrm{Q}}) \gg (S, Q) \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Sea $\theta : N \to N$. Observe que $\theta \cdot x^{t,S,Q} = x^{t,\pi(S,Q)}$ ya que $(\tilde{\mathrm{S}},\tilde{\mathrm{Q}}) \gg (S, Q)$ si y sólo si $\theta(\tilde{\mathrm{S}},\tilde{\mathrm{Q}}) \gg \theta(S, Q)$.

Suponemos $\{n, m\} \subseteq \widehat{S} \in Q$. Sea θ que cambia n y m, dejando el resto de los jugadores fijos. Así, el axioma de simetría requiere que $\Phi_n(x^{t,S,Q}) = \Phi_{\theta(n)}(\theta \circ x^{t,S,Q}) = \Phi_m(x^{t,\theta(S,Q)}) = \Phi_m(x^{t,S,Q})$.

Ahora, si $\widehat{S} \in Q$ entonces S y $S \cup \widehat{S}$ son portador de $x^{t,S,Q}$, así el axioma de portador requiere que

$$\sum_{n\in\widehat{S}} \Phi_n(x^{t,S,Q}) = \begin{cases} t & \text{si} \quad \widehat{S} = S \\ & \\ 0 & \quad\text{en otro caso.} \end{cases}$$

Los axiomas de simetría y portador requieren que

$$\Phi_n(x^{t,S,Q}) = \begin{cases} t/s & \text{si} \quad n \in S \\ & \\ 0 & \quad\text{en otro caso.} \end{cases}$$

Nótese que $x^{t,S,Q} = t{\cdot}x^{1,S,Q}$. Entonces $\Phi(t{\cdot}x^{1,S,Q}) = \Phi(x^{t,S,Q}) = t{\cdot}\Phi(x^{1,S,Q})$. Por simplicidad hacemos $x^{S,Q} = x^{1,S,Q}$.

Consideremos $\{x^{S,Q}|(S,Q) \in ECL\}$ una base en G y supongamos una serie de coeficientes $r_{S,Q}$ distintos de cero, tal que

$$\sum_{(S,Q)\in ECL} r_{S,Q} \cdot x^{S,Q} = 0.$$

Sea $(\widehat{S}, \widehat{Q})$ una coalición incrustada tal que $\widehat{q} = \text{máx}\,\{q|r_{S,Q} \neq 0\}$ y $r_{\widehat{S},\widehat{Q}} \neq 0$. Ahora consideremos que $\sum_{(S,Q)\in ECL} r_{S,Q} \cdot (x^{S,Q})_{\widehat{S},\widehat{Q}} = 0$. Pero $(x^{S,Q})_{\widehat{S},\widehat{Q}} = 0$ dado que $(\widehat{S}, \widehat{Q}) \gg (S,Q)$, y $r_{S,Q} = 0$ dado que $\widehat{q} \gg q$. Entonces (S,Q) es la única coalición incrustrada que satisface las condiciones $(\widehat{S}, \widehat{Q}) \gg (S,Q)$ y $\widehat{q} \gg q$, y por lo tanto $(S,Q) = (\widehat{S}, \widehat{Q})$. Se concluye que $r_{\widehat{S},\widehat{Q}} = 0$, lo cual contradice que $(\widehat{S}, \widehat{Q})$ es preferido. Por consiguiente la colección de juegos $x^{S,Q}$ es linealmente independiente y forma una base en G.

Por inducción en k, el número de sumandos, se puede ver que para el axioma de aditividad

$$\Phi(\sum_{i=1}^{k} w^i) = \Phi(\sum_{i=1}^{k-1} w^i + w^k) = \Phi(\sum_{i=1}^{k-1} w^i) + \Phi(w^k) = \sum_{i=1}^{k} \Phi(w^i).$$

Ahora para algún $w \in G$, tenemos una única colección de coeficientes $b_{S,Q}$ tal que $w = \sum_{(S,Q)\in ECL} b_{S,Q} \cdot x^{S,Q}$, dado que los juegos $x^{S,Q}$ forman una base. Entonces tenemos que $\Phi(w) = \Phi(\sum_{(S,Q)\in ECL} b_{S,Q} \cdot x^{S,Q}) = \sum_{(S,Q)\in ECL} \Phi(b_{S,Q} \cdot x^{S,Q}) = \sum_{(S,Q)\in ECL} b_{S,Q} \cdot \Phi(x^{S,Q})$.

Así tenemos que

$$\Phi_n(x^{S,Q}) = \begin{cases} 1/s & \text{si} \quad n \in S \\ & \\ 0 & \quad\text{en otro caso,} \end{cases}$$

determina que Φ es la única función que satisface aditividad, simetría y el axioma de portador.

- Y por último existencia. Para algún conjunto finito K, sea $PT(K)$ el conjunto de externalidades de K. Se usará la siguiente combinación factorial:

$$\sum_{P \in PT(K)} (-1)^{p+1}(p-1)! = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad k = 1 \\ \\ 0 & \text{si} \quad k > 1. \end{cases}$$

Si $k = 1$, entonces hay una única partición que tiene $p = 1$, por lo que la ecuación es obvia.

Si $k > 1$ tomamos algún $k \in K$, y observamos que $K \setminus \{k\} \neq \emptyset$. Para cada partición $\widehat{P} \in PT(K \setminus \{k\})$, podemos hacer $\widehat{p}$ diferentes particiones de K añadiendo k para cualquiera de los $\widehat{p}$ conjuntos en $\widehat{P}$, y podemos hacer otra partición distinta de K poniendo k solo en $\{K\}$. Para cada $P \in PT(K)$ hay exactamente un $P \in PT(K \setminus \{k\})$ por uno de estos procedimientos. Por lo tanto

$$\begin{aligned} \sum_{P \in PT(K)} (-1)^{p+1}(p-1)! &= \sum_{\widehat{P} \in PT(K \setminus \{k\})} \Big((-1)^{\widehat{p}+1}(\widehat{p}-1)! \cdot \widehat{p} + (-1)^{\widehat{p}+1-1}(\widehat{p}+1-1)! \Big) \\ &= \sum_{\widehat{P} \in PT(K \setminus \{k\})} (-1)^{\widehat{p}+1} \left(\widehat{p}! - \widehat{p}! \right) = 0. \end{aligned}$$

La prueba de unicidad se basa en ver que 3.1 es la única solución que cumple los axiomas.

Por lo que para eficiencia es suficiente mostrar que la solución dada por 3.1 define una función que satisface las condiciones deseables. Por lo que queda mostrar que 3.3.1 se cumple para toda $(\overline{S}, \overline{Q}) \in ECL$ y todo $n \in N$.

Consideramos un $n \in N$ y $(\overline{S}, \overline{Q}) \in ECL$. Sea $\widehat{S}$ una coalición tal que $n \in \widehat{S} \in \overline{Q}$. Entonces la solución 3.1 implica que:

$$
\begin{aligned}
\Phi_n(x^{\overline{S},\overline{Q}}) &= \sum_{(S,Q)\gg(\overline{S},\overline{Q})} (-1)^{q-1}(q-1)! \bullet \left(\frac{1}{n} - \sum_{\tilde{S}\in Q, \tilde{S}\neq S, n\notin \tilde{S})} \frac{1}{(q-1)(n-\tilde{s})} \right) \\
&= \sum_{P\in PT(\overline{Q})} (-1)^{p-1}(p-1)! \bullet \left(\frac{1}{n} - \sum_{T\in P, \widehat{S}\notin T, S\notin T} \frac{1}{(p-1)(n-|\cup_{S\in T} S|)} \right) \\
&= \sum_{T\subseteq \overline{Q}\setminus\{\widehat{S},\overline{S}\}} \frac{1}{n-|\cup_{S\in T} S|} \left(\sum_{P\in PT(\overline{Q}\setminus T)} (-1)^{\widehat{p}-1}(\widehat{p}-1)! \right) \\
&= \begin{cases} \frac{1}{n-|\cup_{S\in\overline{Q}\setminus\{\overline{S}\}} S|} & \text{si} \quad \overline{S}=\widehat{S} \\ 0 & \text{si} \quad \overline{S}\neq\widehat{S} \end{cases} \\
&= \begin{cases} \frac{1}{\overline{s}} & \text{si} \quad n\in\overline{S} \\ 0 & \text{si} \quad n\notin\overline{S}. \end{cases}
\end{aligned}
$$

□

Ejemplo 3.3.3. *Si $N=\{1,2,3\}$ tenemos que $\Phi_1(w)$ para el Valor 3.1 está dada por:*

$$
\begin{aligned}
\Phi_1(w) &= \frac{1}{3}w(123,\{123\}) + \frac{1}{6}w(12,\{12,3\}) - \frac{1}{3}w(3,\{3,12\}) \\
&+ \frac{1}{6}w(13,\{13,2\}) - \frac{1}{3}w(2,\{2,13\}) + \frac{2}{3}w(1,\{1,23\}) \\
&- \frac{1}{3}w(23,\{23,1\}) + \frac{1}{6}w(2,\{1,2,3\}) + \frac{1}{6}w(3,\{1,2,3\}) \\
&- \frac{1}{3}w(1,\{1,2,3\}).
\end{aligned}
$$

3.3.2. Extensión del valor de Shapley

Pham Do y Norde (2007) definen una extensión de el valor de Shapley para la clase de juegos con externalidades. En este caso, caracterizan un valor con los axiomas de linealidad, simetría, eficiencia y otro de nulidad para soluciones a este tipo de juegos. La adaptación del axioma de nulidad es como sigue.

Para $Q\in PT$ y $i\in N$, denotamos la coalición en Q para el jugador i por $S(Q,i)$.

Definición 3.3.4. *Sea $w\in G$ y $i\in N$. El jugador i es llamado jugador nulo en w si para toda $Q\in PT$ con $S(Q,i)=\{i\}$ tenemos $w(i,Q)=0$ y para algún $S\in Q\setminus\{\{i\}\}$ tenemos $w(S\cup\{i\},(Q\setminus\{S,\{i\}\})\cup\{S\cup\{i\}\})=w(S,Q)$.*

De esta forma, se puede dar la siguiente versión del axioma de nulidad para estos juegos, en donde a jugadores que tengan contribuciones marginales igual a cero, se les asigna un pago de cero.

Axioma 3.3.5 (Nulidad)**.** *La solución ϕ es nula si y sólo si para todo $w \in G$ y para todo jugador nulo $i \in w$ tenemos $\phi_i(w) = 0$.*

Sea $\pi(N)$ el conjunto de todas las biyecciones $\sigma : N \to N$. Para $\sigma \in \pi(N)$ y $i \in N$ definimos $S_i^\sigma = \{\sigma(1), \sigma(2), ..., \sigma(i)\}$, y $S_0 = \emptyset$.

Se construye el vector $m^\sigma(v)$ un vector en $\mathbb{R}^N$ definido por

$$m^\sigma_{\sigma(i)}(v) = v(S_i^\sigma) - v(S_{i-1}^\sigma),$$

para $i \in N$.

En juegos en forma de función característica el valor de Shapley $\varphi(v)$ es igual a la media de los vectores marginales, es decir:

$$\varphi(v) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \pi(N)} m^\sigma(v).$$

Sea S una coalición y $Q_S \in PT$ definimos $Q_S := \{S\} \cup \{\{i\} : i \in N \setminus S\}$. Y para algún $w \in G$ se le asocia el juego en forma de función característica v_w por

$$v_w(S) := w(S, Q_S).$$

Se generaliza el valor de Shapley para un juego con externalidades; sea $w \in G$ definimos

$$\phi(w) := \varphi(v_w).$$

Así entonces, en el siguiente teorema se verá que hay un único operador que satisface los axiomas de linealidad, simetría, eficiencia y nulidad; y tiene una estrecha relación con el valor de Shapley para juegos tradicionales.

Teorema 3.3.6. *Existe una única solución en G que satisface aditividad, eficiencia, nulidad y simetría. Esta solución es el valor de Shapley ϕ.*

Demostración. Por demostrar que el valor ϕ es la única solución que satisface aditividad, eficiencia, nulidad y simetría.

- Eficiencia: Sea $w \in G$, tenemos que

$$\begin{aligned}
\sum_{i \in N} \phi_i(N) &= \sum_{i \in N} \varphi(v_w) \\
&= \sum_{i \in N} \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \Pi(N)} m_i^\sigma(v_w) \\
&= \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \Pi(N)} \sum_{i \in N} m_i^\sigma(v_w) \\
&= \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \Pi(N)} v_w(N) \\
&= v_w(N) = w(N, \{N\}).
\end{aligned}$$

- Aditividad: Encontramos que $v_{w_1+w_2} = v_{w_1} + v_{w_2}$, para todo $w_1, w_2 \in G$ dado que φ satisface aditividad en juegos en forma de función característica.
- Nulidad: Se tiene que si k es un jugador nulo en w entonces $m_k^\sigma(v_w) = 0$ para todo $\sigma \in \Pi(N)$.
- Simetría: Sea $w \in G$ y sean i, j jugadores simétricos en w. Sea $\sigma \in \Pi(N)$ y sea $\sigma_{i,j} \in \Pi(N)$ la permutación que se obtiene al intercambiar i y j. Como i, j son simétricos se puede ver que $m_i^\sigma(v_w) = m_j^\sigma(v_w)$.

Ahora supongamos que Ψ satisface las cuatro propiedades del Teorema 3.3.2. Definimos la solución $\Omega \in G$ por $\Omega(w) := \Psi(w) - \phi(w)$ para todo $w \in G$. Notemos que Ω satisface aditividad, nulidad y simetría y que

$$\sum_{i \in N} \Omega_i(w) = 0 \ \forall w \in G. \tag{3.2}$$

Queremos demostrar que $\Psi = \phi$, es decir, que $\Psi(w) = \phi(w)$, para todo $w \in G$, o, equivalentemente, que $\Omega(w) = 0$ para todo $w \in G$. Para todo $w \in G$ escribimos

$$w = \sum_{\tau \in ECL} w(\tau) u_\tau$$

donde, para cada $\tau \in ECL$, el juego con externalidades $u_\tau \in G$ se define por

$$u_\tau(\tau') = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \tau = \tau' \\ \\ 0 & \text{si} \quad \tau \neq \tau'. \end{cases}$$

Por lo tanto, por aditividad,

$$\Omega(w) = \sum_{\tau \in ECL} \Omega(w(\tau) u_\tau).$$

Por lo tanto, es suficiente mostrar para toda $\tau \in ECL$ que

$$\Omega(\lambda u_\tau) = 0 \ \forall \lambda \in \mathbb{R}. \tag{3.3}$$

Sea $\tau = (S, Q) \in ECL$. Denotamos el número de coaliciones únicas en $Q \setminus \{S\}$ por $\nu(\tau)$. Así, por ejemplo, $\tau_1 = (12, \{12, 34, 5\})$ donde $\nu(\tau_1) = 1$, mientras que para $\tau_2 = (1, \{1, 23, 45\})$ tenemos $\nu(\tau_2) = 0$. Vamos a mostrar 3.3 con inducción a $\nu(\tau)$.

Sea $\tau = (S, Q) \in ECL$ tal que $\nu(\tau) = 0$ y sea $\lambda \in \mathbb{R}$. Denotemos $u := \lambda u_\tau$. Si $|Q| = 1$, entonces $S = N$, $Q = \{N\}$, por lo que cualquier par de jugadores i y j son simétricos en u. Por lo tanto $\Omega_i(u) = \Omega_j(u)$ para todo $i, j \in N$ junto con 3.2 obtenemos $\Omega(u) = 0$. Ahora supongamos que $|Q| \geq 2$. Sea $T \in Q \setminus \{S\}$. Dado que $\nu(\tau) = 0$ obtenemos $|T| \geq 2$, así se puede verificar que todos los jugadores en T son nulos en u. Por lo tanto, por nulidad,

$$\Omega_i(u) = 0 \ \forall i \in N \setminus S. \tag{3.4}$$

Así, a partir de 3.2 y 3.3 se deduce que

$$\sum_{i\in S}\Omega_i(u)=0. \tag{3.5}$$

Si $|S|=1$ se obtiene $\Omega(u)=0$. Si $|S|\geq 2$ se puede ver que todo par de jugadores $i,j\in S$ son simétricos en u. Por lo tanto $\Omega_i(u)=\Omega_j(u)$ para todo $i,j\in S$. De 3.4 y 3.5 obtenemos $\Omega(u)=0$.

Ahora sea $Q\in\{0,...,|N|-2\}$ y supongamos que 3.3 es verdadera para cada $\tau=(S,Q)\in ECL$ con $\nu(\tau)=Q$. Sea $\tau=(S,Q)\in ECL$ tal que $\nu(\tau)=Q+1$, sea $\lambda\in\mathbb{R}$ y $u=\lambda u_\tau$. Una vez más, es suficiente mostrar 3.4. Así, sea $i\in N\setminus S$ y $T=S(Q,i)$. Si $|T|\geq 2$, podemos concluir de nuevo que i es un jugador nulo en 4, por lo que $\Omega_i(u)=0$. Si $|T|=1$, definimos $Q':=(Q\setminus\{S,\{i\}\})\cup\{S\cup\{i\}\}$ y $\tau'=(S\cup\{i\},Q)$. Entonces $\nu(\tau)=\nu(\tau)-1=Q$, de modo que $\Omega(\lambda u_{\tau'})=0$. En particular, $\Omega_i(\lambda u_{\tau'})=0$. Dado que el jugador i es un jugador nulo en $\lambda u_\tau+\lambda u_{\tau'}=u+\lambda u_\tau$ tenemos, por nulidad, $\Omega_i(u+\lambda u_\tau)=0$. Por aditividad tenemos $\Omega_i(u+\lambda u'_\tau)=\Omega_i(u)+\Omega_i(\lambda u_{\tau'})$ y por lo tanto $\Omega_i(u)=\Omega_i(u+\lambda u_{\tau'})-\Omega_i(\lambda u_{\tau'})=0-0=0$, lo que termina la prueba.

□

Ejemplo 3.3.7. *Consideramos el juego w definido por*

Partición	*Valía*
$\{1\}\ \{2\}\ \{3\}$	*0 0 0*
$\{1,2\}\ \{3\}$	*2 0*
$\{1,3\}\ \{2\}$	*2 1*
$\{2,3\}\ \{1\}$	*3 2*
$\{1,2,3\}$	*10*

Se le asocia el juego en forma de función característica dado por

S	$v_w(S)$
{1}	*0*
{2}	*0*
{3}	*0*
{1,2}	*2*
{1,3}	*2*
{2,3}	*3*
{1,2,3}	*10*

Por lo tanto su valor de Shapley es: $\phi(w)=(3,3.5,3.5)$.

Capítulo 4

Contribuciones marginales en juegos con externalidades

En este capítulo se propone el concepto de contribución marginal para juegos con externalidades y algunos axiomas que nos ayudan a caracterizar soluciones para estos juegos bajo el principio de marginalidad, estos conceptos se introdujeron por Geoffroy de Clippel y Roberto Serrano (2008) y más recientemente por Oskar Skibski, Tomasz P. Michalak y Michael Wooldridge (2013).

4.1. Marginalidad débil

A continuación se propone el axioma de marginalidad débil, el cual llamamos así por que no nos permite dar una caracterización única adicionando simetría y eficiencia.

Primero definimos $Q_{-S} = Q \setminus \{S\}$, $S_{-i} = S \setminus \{i\}$, $S_{+i} = S \cup \{i\}$, y Q^i denota la partición Q donde está el jugador i. Adicionalmente, se denota la cardinalidad $q^i = |Q^i|$.

Axioma 4.1.1 (Marginalidad débil)**.** *Sean $v, w \in G$. Si $v(S,Q) - v(S_{-i}, \{S_{-i}, T_{+i}\} \cup Q_{-S-T}) = w(S,Q) - w(S_{-i}, \{S_{-i}, T_{+i}\} \cup Q_{-S-T})$ para toda $(S,Q) \in ECL$ tal que $i \in S$, y para toda $T \in Q$ con $T \neq S$; entonces la solución Φ satisface*

$$\Phi_i(v) = \Phi_i(w),$$

para todo jugador $i \in N$.

En el siguiente ejemplo se pueden ver las contribuciones marginales para tres jugadores.

Ejemplo 4.1.2. *Para $N = \{i, j, k\}$ y $v \in G$, la solución Φ_i debería depender de los siguientes números reales:*

$$\begin{aligned}
C_i^1(v) &= v(N, \{N\}) - v(\{j,k\}, \{\{i\}, \{j,k\}\}) \\
C_i^2(v) &= v(\{i,j\}, \{\{i,j\}, \{k\}\}) - v(\{j\}, \{\{j\}, \{i,k\}\}) \\
C_i^3(v) &= v(\{i,j\}, \{\{i,j\}, \{k\}\}) - v(\{j\}, \{\{i\}, \{j\}, \{k\}\}) \\
C_i^4(v) &= v(\{i,k\}, \{\{i,k\}, \{j\}\}) - v(\{k\}, \{\{k\}, \{i,j\}\}) \\
C_i^5(v) &= v(\{i,k\}, \{\{i,k\}, \{j\}\}) - v(\{k\}, \{\{i\}, \{j\}, \{k\}\}) \\
C_i^6(v) &= v(\{i\}, \{\{i\}, \{j,k\}\}) \\
C_i^7(v) &= v(\{i\}, \{\{i\}, \{j\}, \{k\}\})
\end{aligned}$$

Esta dependencia se debe a que buscamos un valor tipo Shapley, es decir, que dependa de las contribuciones marginales de las distintas estructuras que se pueden formar.

En general no se puede caracterizar unívocamente una solución con los axiomas de linealidad, eficiencia, simetría y marginalidad débil, lo cual se puede ver en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.1.3. *Sea Φ una solución, $v \in G$, y un jugador $i \in N$.*

$$\begin{aligned}
\Phi_i(v) &= \frac{1}{3}C_i^1(v) + \frac{1}{6}[\alpha C_i^2(v) + (1-\alpha)C_i^3(v)] + \\
&\quad \frac{1}{6}[\alpha C_i^4(v) + (1-\alpha)C_i^5(v)] + \frac{1}{3}[\alpha C_i^6(v) + (1-\alpha)C_i^7(v)]
\end{aligned}$$

La solución Φ satisface eficiencia, simetría y marginalidad débil para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

Otra característica deseable sería que la ganancia de un jugador esté siempre en aumento y esto se presenta en el axioma de monotonía.

Axioma 4.1.4 (Monotonía)**.** *Sean $v, w \in G$. Si $v(S,Q) - v(S_{-i}, \{S_{-i}, T_{+i}\} \cup Q_{-S-T}) \geq w(S,Q) - w(S_{-i}, \{S_{-i}, T_{+i}\} \cup Q_{-S-T})$ para toda $(S,Q) \in ECL$ tal que $i \in S$, y para toda $T \in Q$ con $T \neq S$; entonces la solución Φ satisface*

$$\Phi_i(v) \geq \Phi_i(w).$$

Ejemplo 4.1.5. *La solución del Ejemplo 4.1.3 anterior es monótona para todo $\alpha \in [0,1]$.*

Con base en esto se puede caracterizar una solución que satisfaga eficiencia, simetría y monotonía pero sin unicidad.

4.2. Marginalidad

En esta sección se introduce una definición de contribución marginal, que nos permite dar un axioma de marginalidad y así dar una caracterización única de algún valor en G.

Definición 4.2.1 (Contribución marginal)**.** *Para $w \in G$ y $(S,Q) \in ECL$ tal que $S \ni i$ se define la contribución marginal*

$$C_i^w(S,Q) = w(S,Q) - w(S_{-i}, \{S_{-i}, \{i\}\} \cup Q_{-S}).$$

Ahora se redefine el axioma de marginalidad por:

Axioma 4.2.2 (Marginalidad)**.** *Sean $v, w \in G$. Si $C_i^v(S,Q) = C_i^w(S,Q)$ para toda $(S,Q) \in ECL$ entonces la solución Φ satisface*

$$\Phi_i(v) = \Phi_i(w).$$

Ahora consideramos la extención del valor de Shapley para juegos con externalidades propuesta por Clippel y Roberto Serrano (2008):

Teorema 4.2.3. *Φ es la única solución que satisface los axiomas de eficiencia, simetría y marginalidad y esta dada por:*

$$\Phi_i(w) := Sh_i(v)$$

para todo $i \in N$ y todo juego con externalidades w, donde v es un juego en forma de función característica definido como:

$$v(S) := w(S, \{S, \{j\}_{j \in N \setminus S}\})$$

para toda coalición S.

Demostración. El conjunto de juegos con externalidades forma un espacio vectorial y la prueba se hará mediante la definición de una base adecuada. Sea (S,Q) una coalición incrustrada, con $S \neq \emptyset$. Entonces $e_{(S,Q)}$ es un juego con externalidades definido como sigue

$$e_{(S,Q)}(S', Q') = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad S \subseteq S' \text{ y} \\ & \quad\; (\forall T' \in Q' \setminus \{S'\})(\exists T \in Q) : T' \subseteq T, \\ 0 & \quad\; \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Veremos que la colección de vectores $(e_{(S,Q)})_{(S,Q)}, (S,Q) \in ECL$ constituye una base para el juego con externalidades.

Nótese que el número de vectores de la colección es igual a la dimensión del espacio. Queda por demostrar que son linealmente independientes, es decir,

$$\sum_{(S,Q) \in ECL} \alpha(S,Q) e_{(S,Q)} = 0 \tag{4.1}$$

esto implica que $\alpha(S,Q) = 0$ para todo $(S,Q) \in ECL$.

Supongamos por el contrario que existe una colección $(e_{(S,Q)})_{(S,Q)}, (S,Q) \in ECL$ de números reales que satisfacen 4.1 tal que $\alpha(S,Q) \neq 0$, para algún $(S,Q) \in ECL$. Sea (S^*, Q^*) una coalición incrustrada tal que:

- $\alpha(S^*, Q^*) \neq 0$;
- $(\forall (S,Q) \in ECL) : S \subsetneq S^*$ entonces $\alpha(S,Q) = 0$;
- $(\forall (S^*, Q) \in ECL,$ donde $Q \neq Q^*) : Q$ más gruesa que Q^* entonces $\alpha(S^*, Q) = 0$.

Por definición, $e_{(S,Q)}(S^*, Q^*) = 0$ si S no está incluida en S^*. La segunda propiedad de (S^*, Q^*) implica que

$$\left[\sum_{(S,Q)\in ECL} \alpha(S,Q)e_{(S,Q)}\right](S^*,Q^*) = \left[\sum_{(S^*,Q)\in ECL} \alpha(S^*,Q)e_{(S^*,Q)}\right](S^*,Q^*).$$

Por definición, $e_{(S,Q)}(S^*,Q^*) = 0$ si Q no está incluida en Q^*. La tercera propiedad de (S^*,Q^*) implica que

$$\left[\sum_{(S^*,Q)\in ECL} \alpha(S^*,Q)e_{(S^*,Q)}\right](S^*,Q^*) = \alpha(S^*,Q^*).$$

Por lo tanto la ecuación 4.1 implica que $\alpha(S^*,Q^*) = 0$, es una contradicción. Así queda demostrado que la base es linealmente independiente.

Ahora mostraremos que las propiedades del valor de Shapley implican que Φ satisface los tres axiomas.

Para la unicidad, sea Φ^* un valor que satisface los tres axiomas. Se probara que $\Phi(w) = \Phi^*(w)$ para cada juego con externalidades w por inducción sobre el número de términos distintos de cero que aparecen en la descomposición de la base de w.

Supongamos que $v = \alpha e_{(S,Q)}$ para algún $\alpha \in \mathbb{R}$ y alguna $(S,Q) \in ECL$. Sea $i \in N \setminus S$ y sea (S',Q') cualquier coalición incrustrada. Las dos afirmaciones siguientes son equivalentes:

1. $S \subseteq S'$ y $(\forall T' \in Q'_{-S'})(\exists T \in Q) : T' \subseteq T$.
2. $S \subseteq S' \setminus \{i\}$ y $(\forall T' \in \{\{i\}, Q'_{-S'}\})(\exists T \in Q) : T' \subseteq T$.

Por lo tanto $e_{(S',Q')}(S',Q') = 1$ si y sólo si $e_{(S',Q')}(S'_{-i}, \{S', \{i\}, Q'_{S'}\}) = 1$. Así, $C_i^w(S,Q) = C_i^v(S,Q)$, donde v es un juego con externalidades nulo, es decir, $v(S,Q) = 0$ para toda $(S,Q) \in ECL$. Marginalidad implica que $\Phi_i(v) = \Phi_i(w)$. Simetría y eficiencia implican que $\Phi_i(v) = 0$. Por lo tanto $\Phi_i(w) = \Phi_i^*(w) = 0$. Además simetría implica que $\Phi_i(w) = \Phi_j(w)$ y $\Phi_i^*(w) = \Phi_j^*(w)$ para todo $i,j \in S$. Por lo que $\Phi(w) = \Phi^*(w)$, ya que Φ, Φ^* satisfacen eficiencia.

Supongamos ahora que hemos probado el resultado para todos los jurgos con externalidades que tienen a lo más k términos distintos de cero en la descomposición de la base y sea

$$w = \sum_{(S,Q)\in ECL} \alpha(S,Q)e_{(S,Q)}$$

un juego con externalidades con exactamente $k+1$ coeficientes distintos de cero. Sea S^* la intersección de las coaliciones S para las que existe una partición Q tal que $\alpha(S,Q)$ es diferente de cero. Si $i \in N \setminus S^*$, entonces el jugador i del vector de contribuciones marginales en w coincide con su vector de contribuciones marginales en el juego con externalidades

$$w' = \sum_{(S,Q)\in ECL, i\in S} \alpha(S,Q)e_{(S,Q)}.$$

Marginalidad implica que $\Phi_i^*(w) = \Phi_i^*(w')$. Nótese que el número de términos distintos de cero en la descomposición de la base de w' es a lo más k. Entonces, por la hipótesis de inducción, $\Phi_i^*(w') = \Phi_i(w')$. Como Φ satisface marginalidad se concluye que $\Phi_i^*(w) = \Phi_i(w)$. Además por simetría tenemos que $\Phi_i(w) = \Phi_j(w)$ y $\Phi_i^*(w) = \Phi_j^*(w)$ para todo $i,j \in S^*$. Por lo tanto $\Phi^*(w) = \Phi(w)$, ya que Φ^*, Φ satisfacen eficiencia. Así la demostración se ha completado. $\square$

Ejemplo 4.2.4. *Para el ejemplo 3.1.1 se tiene el siguiente juego con externalidades w*

$v(S)$	$w(S,\{S,\{j\}_{j\in N\setminus S}\})$	
$v(1)$	$w(1,\{1,2,3\})$	50
$v(2)$	$w(2,\{1,2,3\})$	50
$v(3)$	$w(3,\{1,2,3\})$	50
$v(12)$	$w(12,\{12,3\})$	120
$v(13)$	$w(13,\{13,2\})$	125
$v(23)$	$w(23,\{23,1\})$	130
$v(123)$	$w(123,\{123\})$	200

y su solución Φ según el Teorema 4.2.3 está dada por

$$\Phi_1(w) := Sh_1(v) = \left(\frac{185}{3}, \frac{215}{3}, \frac{200}{3}\right)$$

4.3. Soluciones bajo nulidad débil, linealidad, simetría y eficiencia

Debido a la riqueza de los juegos con externalidades, se han mostrado varias soluciones para estos juegos. Algunas de las soluciones propuestas son las de Myerson (1977), Bolger (1987), Ju (2004), Albizuri et al. (2005), Macho-Stadler (2006) y Pham Do y Norde (2007). Buscamos dar una expresión de soluciones lineales, simétricas y eficientes, adicionando el axioma de nulidad débil en términos de contribuciones marginales.

Por simplicidad, definimos lo siguiente.

Definición 4.3.1. *Sea $(S,Q) \in ECL$ y $i \in S$. Consideramos una partición Q' obtenida por el movimiento del jugador i de S para otra coalición $T \in Q$ (posiblemente vacío). Definimos el mapeo $\alpha_{iT} : Q \to Q'$ por*

$$\begin{aligned}
\alpha_{iT}(S) &= S_{-i} \\
\alpha_{iT}(T) &= T_{+i} \\
\alpha_{iT}(S') &= S' \text{ para } S' \in Q_{-S,-T}
\end{aligned}$$

es llamado un movimiento para el jugador i. Nótese que $\alpha_{iT}(Q) = \{S_{-i}, T_{+i}\} \cup Q_{-S,-T}$.

Usando el concepto de contribución marginal en el axioma de marginalidad débil se define lo que es un jugador dummy como sigue:

Definición 4.3.2 (Jugador dummy)**.** *Se dice que el jugador i es nulo en w si*

$$w(S,Q) - w(S_{-i}, \{S_{-i}, \alpha_{iT}(Q)) = 0$$

para toda $(S,Q) \in ECL$, $i \in S$ y $T \in Q_{-S}$.

Esta definición nos permite proponer el siguiente axioma.

Axioma 4.3.3 (Nulidad débil). *Sea $i \in N$ y $w \in G$. Si i es un jugador dummy entonces la solución φ satisface*

$$\varphi_i(w) = 0.$$

Debido a que los juegos con externalidades están en función de la estructura de las particiones $Q \in PT$, en la siguiente sección estudiamos esto.

4.3.1. Particiones enteras

Una partición entera no negativa se puede expresar como la suma desordenada de números enteros positivos, y que se pueden escribir como tupla. Formalmente:

Definición 4.3.4. *$\lambda = [\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_l]$ es una partición de n (denotada por $\lambda \vdash n$) si y sólo si $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_l$ son particiones positivas y $\lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_l = n$. Dos particiones que solo difieren en el orden de sus elementos, son consideradas como la misma partición.*

El conjunto de todas las particiones de n es denotado por $\Pi(n)$, y, si $\lambda \vdash n$, $|\lambda|$ es el número de elementos de λ.

Por ejemplo para $n = 4$ tenemos las particiones $[1, 1, 1, 1], [2, 1, 1], [2, 2], [3, 1]$ y $[4]$. Se abrevia la notación quitando las comas, así $[2, 1, 1]$ queda $[211]$.

Si $Q \in PT$, asociamos con Q, la única partición $\lambda_Q \vdash n$, donde los elementos de λ_Q son exactamente la cardinalidad de Q. En otras palabras, si $Q = \{S_1, S_2, ..., S_m\} \in PT$, entonces $\lambda_Q = [s_1, s_2, ..., s_m]$.

Para una $\lambda \vdash n$ dada, representamos por λ^0 por el conjunto de números determinado por los λ_i's, y por $m^{\lambda}_{\lambda_j}$ la multiplicidad de λ_j en λ. Así, si $\lambda = [4, 2, 2, 1, 1, 1]$, entonces $\lambda^0 = \{4, 2, 1\}$, $m^{\lambda}_1 = 3$, $m^{\lambda}_2 = 2$ y $m^{\lambda}_1 = 2$. Por convención, $m^{\lambda}_0 = 1$ para todo $\lambda \in \Pi(n)$.

Adicionalmente, si $[\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_l] \vdash n$, para $k \geq 1$ se define $[\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_l] - [\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k] = [\lambda_{k+1}, \lambda_{k+2}, ..., \lambda_l]$. Por ejemplo, $[4, 3, 2, 1, 1, 1] - [3, 1, 1] = [4, 2, 1]$.

Si $\lambda \in \Pi(n)$ y $\lambda' \in \Pi(m)$, entonces podemos formar la partición $\lambda + \lambda' \in \Pi(n + m)$ por combinaciones de todos los elementos de tales particiones. Por ejemplo, $[4, 3, 2, 1, 1, 1] + [3, 1, 1] = [4, 3, 3, 2, 1, 1, 1, 1, 1]$.

Finalmente, para $\lambda \in \Pi(n)$ y $z, r \in \lambda^0 (r \neq 1)$, definimos $\lambda^r_z = \lambda - [r, z] + [r - 1, z + 1]$.

4.3.2. Valor de la solución

Definición 4.3.5. *Sea E_n el conjunto de pares:*

$$E_n = \{(\lambda, s) | s \in \lambda^0 \setminus \{1, n\}, \lambda \in \Pi(n)\}$$

y similarmente, se define el conjunto de triples

$$B_n = \{(\lambda, s, t) | \lambda \in \Pi(n) \setminus \{[n]\}, s \in \lambda^0, t \in (\lambda - [s])^0\}.$$

Ejemplo 4.3.6. *Si $n = 4$, entonces*

$$E_4 = \{([211], 2), ([22], 2), ([31], 3)\}$$

y

$$B_4 = \{([1111], 1, 1), ([211], 1, 1), ([211], 1, 2), ([211], 2, 1), ([22], 2, 2), ([31], 1, 3), ([31], 3, 1)\}.$$

Ahora, damos la caracterización de todas las soluciones que cumplen los axiomas de linealidad, simetría, eficiencia y nulidad débil. Este resultado es una extension del artículo de L. Hernández-Lamoneda, J. Sánchez-Pérez y F. Sánchez-Sánchez (2009) donde se hace una clasificación de valores lineales, simétricos y eficientes.

Teorema 4.3.7. *La solución $\varphi : G \to \mathbb{R}^n$ satisface los axiomas de linealidad, simetría, eficiencia y nulidad débil si y sólo si es de la forma*

$$\varphi_i(w) = \frac{w(N,\{N\}}{n}) + \sum_{(\lambda,s,t)\in B_n} \beta_{(\lambda,s,t)} \left[\sum_{\substack{(S,Q)\in ECL \\ S\ni i, |S|=s \\ \lambda_Q=\lambda}} \sum_{\substack{T\in Q\setminus\{S\} \\ |T|=t}} tw(S,Q) - \sum_{\substack{(S,Q)\in ECL \\ S\not\ni i, |S|=s \\ \lambda_Q=\lambda, |Q^i|=t}} sw(S,Q) \right] \quad (4.2)$$

para todo $i \in N$ y cualquier número real $\{\beta_{(\lambda,s,t)} | (\lambda,s,t) \in B_n\}$ tal que

$$\beta_{([(n-1),1],(n-1),1)} = \frac{1}{n(n-1)} \text{ y}$$

- *Para toda $(\lambda, r) \in E_n$:*

$$(m_r^{\lambda}-1)\left[r\beta_{(\lambda,r,r)} - (r-1)\beta_{(\lambda_r^r,r-1,r+1)}\right] + \sum_{z\in\lambda^0\cup\{0\} z\neq r} \left[zm_z^{\lambda}\beta_{(\lambda,r,z)} - (r-1)m_z^{\lambda}\beta_{\lambda_z^r,r-1,z+1)}\right] = 0. \quad (4.3)$$

Demostración. Por el Teorema 4 del artículo [5],

$$\varphi_i(w) = \frac{w(N,\{N\})}{n} + \sum_{(\lambda,s,t)\in B_n} \beta_{(\lambda,s,t)} \left[\sum_{\substack{(S,Q)\in ECL \\ S\ni i, |S|=s \\ \lambda_Q=\lambda}} \sum_{\substack{T\in Q\setminus\{S\} \\ |T|=t}} tw(S,Q) - \sum_{\substack{(S,Q)\in ECL \\ S\not\ni i, |S|=s \\ \lambda_Q=\lambda, |Q^i|=t}} sw(S,Q) \right]$$

es una solución lineal, simétrica y eficiente para cualquier parámetro $\{\beta_{(\lambda,s,t)} | (\lambda,s,t) \in B_n\}$.

Para la demostración consideramos la colección de juegos $\{u_{(S,Q)} | (S,Q) \in ECL\}$ que constituye la base canónica de los juegos con externalidades, donde

$$u_{(S,Q)}(T,P) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad (T,P) = (S,Q) \\ \\ 0 & \quad\text{en otro caso.} \end{cases}$$

Supongamos que $i \in N$ es un jugador nulo en $u_{(S,Q)}$ para toda $(S,Q) \in ECL$, es decir, $u_{(S,Q)}(R,P) = u_{(S,Q)}(R_{-i}, \alpha_{iT}(P))$ para toda (R,P) tal que $i \in R$ y $T \in P_{-R}$.

Nulidad implica:

1. $\varphi_i(u_{(N,\{N\})}) = \frac{1}{n} - (n-1)\beta_{([n-1,1],n-1,1)} = 0$

   Para, $\beta_{([(n-1),1],(n-1),1)} = \dfrac{1}{n(n-1)}$.

2. $$\varphi_i(u_{(S,Q)}) = \sum_{T\in Q\setminus\{S\}} \left[t\beta_{(\lambda_Q,s,t)} - (s-1)\beta_{(\lambda_{\alpha_{iT}}(Q),s-1,t+1}\right] \tag{4.4}$$

   para toda (S,Q) tal que $s \notin \{1,n\}$. Nótese que la relación anterior produce muchas ecuaciones repetidas. En particular, la relación 4.4 proporciona la misma ecuación para (S,Q) y (S',Q'), si $s = s'$ y $\lambda_Q = \lambda_{Q'}$. Por lo tanto, el número de ecuaciones distintas derivadas de 4.4 coincide con el número de elementos en E_n.

   Ahora, fijamos (S,Q) tal que $s \notin \{1,n\}$, entonces tenemos:

   $$\sum_{T\in Q\setminus\{S\}} t\beta_{(\lambda_Q,s,t)} = \begin{cases} \left(m_s^{\lambda_Q} - 1\right) s\beta_{(\lambda_Q,s,s)} & \text{si} \quad s = t \\ \sum_{\substack{z\in\lambda_Q^0\cup\{0\} \\ z\neq s}} zm_z^{\lambda_Q}\beta_{(\lambda_Q,s,z)} & \text{si} \quad t \neq s \end{cases} \tag{4.5}$$

   y

   $$\sum_{T\in Q\setminus\{S\}} \beta_{(\lambda_{\alpha_{iT}}(Q),s-1,t+1)} = \begin{cases} \left(m_s^{\lambda_Q} - 1\right) \beta_{((\lambda_Q)_s^s,s-1,s+1)} & \text{si} \quad s = t \\ \sum_{\substack{z\in\lambda_Q^0\cup\{0\} \\ z\neq s}} m_z^{\lambda_Q}\beta_{((\lambda_Q)_s^s,s-1,z+1)} & \text{si} \quad t \neq s \end{cases} \tag{4.6}$$

   El sistema 4.3 se deriva de la sustitución de las igualdades 4.5 y 4.6 con relación en 4.4.

   El regreso es un cálculo a partir de las igualdades obtenidas.

Por último, para probar unicidad es suficiente demostrar que si

$$\varphi_i(w) = \frac{w(N,\{N\})}{n} + \sum_{(\lambda,s,t)\in B_n} \beta_{(\lambda,s,t)} \left[\sum_{\substack{(S,Q)\in ECL \\ S\ni i,|S|=s \\ \lambda_Q=\lambda}} \sum_{\substack{T\in Q\setminus\{S\} \\ |T|=t}} tw(S,Q) - \sum_{\substack{(S,Q)\in ECL \\ S\not\ni i,|S|=s \\ \lambda_Q=\lambda,|Q^i|=t}} sw(S,Q) \right] = 0 \tag{4.7}$$

las constantes $\beta_{(\lambda,s,t)}$ satisfacen las condiciones 4.3 y 4.4 para todo juego w, y todo jugador i, entonces todas las $\beta_{(\lambda,s,t)}$ se eliminan.

Así, dadas $(\lambda,s,t) \in B_n$, sea $S = \{1,...,s\}$ y Q cualquier partición tal que $S \in Q$ y $\lambda_Q = \lambda$. También sea $T \in Q$, $w = u_{(S,Q)}$ y cualquier $i \in T$. Se deduce que la suma anterior se reduce a

$$\beta_{(\lambda,s,t)} = 0.$$

□

Ejemplo 4.3.8. *Para un juego con $n = 3$ se tiene*

$$\begin{aligned}\varphi_1(w) = & \frac{w(123, \{123\})}{3} \\ & +\beta\left[2w(1, \{1, 2, 3\}) - w(2, \{1, 2, 3\}) - w(3, \{1, 2, 3\})\right] \\ & + \left(\frac{1}{6} - \beta\right)\left[2w(1, \{1, 23\}) - w(2, \{2, 13\}) - w(3, \{3, 12\})\right] \\ & +\frac{1}{6}\left[w(12, \{12, 3\}) + w(2, \{2, 13\}) - 2w(23, \{23, 1\})\right].\end{aligned}$$

Este ejemplo muestra el paramétro β de la solución 4.2 para el jugador 1.

Corolario 4.3.9. *Definimos $w(S, Q) := v(S)$ haciendo $(S, Q) = (S, Q')$ para toda (S, Q) y (S, Q') en ECL, donde $Q \neq Q'$, y los juegos $v \in J$ y $w \in G$. Se dice que*

$$\varphi_i(w) = Sh_i(v), \ \forall i \in N$$

es decir, la solución 4.2 del Teorema 4.3.7 coincide con el valor de Shapley.

A continuación mostramos algunos valores que satisfacen la solución 4.2 y otros que no la cumplen.

Ejemplo 4.3.10 (El valor independiente esperado)**.** *Este valor nos dice lo que un jugador puede obtener en un juego con externalidades cuando nos centramos en la parte independiente del juego:*

$$\begin{aligned}\psi_i(w) &= \frac{w(N, \{N\})}{n} + \sum_{\substack{\emptyset \neq S \subset N \\ i \notin S}} \frac{s!(n-s-1)!}{n!}\left[w(\{i\}, \{S\} \cup [N \setminus (S \cup \{i\})] \cup \{\{i\}\})\right] \\ &= -\sum_{j \in N\setminus\{i\}} \sum_{S \subset N\setminus\{i,j\}} \frac{s!(n-s-2)!}{n!}\left[w(\{j\}, [N \setminus (S \cup \{i\})] \cup \{S \cup \{i\}\})\right], \ \forall\, i \in N\end{aligned}$$

donde se obtienen los siguientes $\beta_{(\lambda,s,t)}$:

$$\beta_{(\lambda,s,t)} = \begin{cases} \dfrac{(s-1)!(n-s-2)!}{n!} & si \qquad \lambda \in \{[m, 1, ..., 1]\}_{m=1}^{n-1}, s = 1 \ y \ r = m \\ 0 & en\ otro\ caso. \end{cases}$$

Este valor no satisface las condiciones 4.3, por lo tanto no cumple nulidad débil.

Ejemplo 4.3.11 (Extensión del valor de Shapley)**.** *El valor dado en la subsección 3.3.2 tiene los siguientes parámetros*

$$\beta_{(\lambda,s,t)} = \begin{cases} \dfrac{(s-1)!(n-s-1)!}{n!} & si \qquad \lambda \in \{[m, 1, ..., 1]\}_{m=1}^{n-1}, s = m \ y \ r = 1 \\ 0 & en\ otro\ caso. \end{cases}$$

Este valor satisface las condiciones 4.3, por lo tanto cumple nulidad débil.

Ejemplo 4.3.12 (Valor del consenso)**.** *Este valor se obtiene al hacer una combinación lineal y convexa de las dos soluciones anteriores y sus parámetros son una combinación convexa de los paramétros de las soluciones originales. Es decir, para cualesquiera dos soluciones* φ^{β} *y* φ^{γ}*, y un número real* $\delta \in [0,1]$:

$$(1-\delta)\varphi^{\beta} + \delta\varphi^{\gamma} = \varphi^{(1-\delta)\beta+\delta\gamma}$$

En este sentido, Ju (2004) prueba que el valor del consenso es la medida entre el valor independiente esperado y la extensión del valor de Shapley.

Los parámetros para el valor del consenso son

$$\beta_{(\lambda,s,t)} = \begin{cases} \dfrac{1}{2n(n-2)} & si \quad \lambda = [1,...,1]\} \ y \ s = r = 1 \\[2ex] \dfrac{(1-\delta)(s-1)!(n-s-2)!}{2n!} & si \quad \lambda \in \{[m,1,...,1]\}_{m=1}^{n-1}, s = 1 \ y \ r = m \\[2ex] \dfrac{\delta(s-1)!(n-s-1)!}{2n!} & si \quad \lambda \in \{[m,1,...,1]\}_{m=1}^{n-1}, s = m \ y \ r = 1 \\[2ex] 0 & en\ otro\ caso. \end{cases}$$

Este valor no satisface las condiciones 4.3, por lo tanto no cumple nulidad débil.

Ejemplo 4.3.13 (El valor de Myerson)**.** *El valor dado en la subsección 3.3.1 tiene los siguientes parámetros*

$$\beta_{(\lambda,s,t)} = \frac{(-1)^{|\lambda|}(|\lambda|-1)!}{s}\left(\frac{1}{n} - \sum_{t\in(\lambda-[r,s])^0}\frac{1}{(|\lambda|-1)(n-t)}\right).$$

Este valor no satisface las condiciones 4.3, por lo tanto no cumple nulidad débil.

Ejemplo 4.3.14 (El Valor de Albizuri et al.)**.** *Este valor es una caracterización única que satisface las propiedades de linealidad, simetría, eficiencia, oligarquía y una condición adicional de simetría con respecto a las coaliciones incrustradas. El valor se define como*

$$\psi_i(w) = \sum_{\substack{(S,Q)\in ECL \\ i\in S}} \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!P(S,N)} w(S,Q) - \sum_{\substack{(S,Q)\in ECL \\ i\in S}} \frac{s!(n-s-1)!}{n!P(S,N)} w(S,Q), \ \forall\ i\in N$$

donde $P(S,N) = |\{(T,Q)\in ECL | T = S\}|$*. De hecho, se se dan cuenta que* $P(S,N) = p(n-s)$ *donde* $p(k)$ *representa el número de particiones de algún conjunto* K *con cardinalidad* k*.*

A esta solución le corresponden los siguientes parámetros

$$\beta_{(\lambda,s,t)} = \frac{(n-s-1)!(s-1)!}{n!p(n-s)}.$$

Este valor no satisface las condiciones 4.3, por lo tanto no cumple nulidad débil.

Ejemplo 4.3.15 (El Valor de Macho-Stadler et al.)**.** *El valor se define por*

$$\psi_i(w) \;=\; \sum_{\substack{(S,Q)\in ECL \\ i\in S}} \frac{(s-1)!\prod_{T\in Q\setminus\{S\}}(t-1)!}{n!} w(S,Q) - \sum_{\substack{(S,Q)\in ECL \\ i\notin S}} \frac{s!\prod_{T\in Q\setminus\{S\}}(t-1)!}{n!} w(S,Q),\ \forall\ i \in N.$$

A esta solución le corresponden los siguientes parámetros

$$\beta_{(\lambda,s,t)} = \frac{(s-1)!\prod_{t\in(\lambda-[s])^0}(t-1)!}{(n-s)n!}.$$

Este valor satisface las condiciones 4.3, por lo tanto cumple nulidad débil.

Capítulo 5

Conclusiones

En este trabajo estudiamos la teoría de juegos cooperativos, la cual ha sido implementada en numerosas situaciones, tales como competencia, cooperación, negociaciones, formación de coaliciones, reparto de beneficios o distribución de costos. Vemos algunas aplicaciones económicas y contribuimos en algunas soluciones.

Introducimos nuestro estudio en la teoría de juegos en forma de función característica, la cual, por medio de ciertas características deseables llamadas axiomas, llega a soluciones cooperativas como lo son el valor de Shapley y de Young en 1982. Justo esta aportación que propone una solución en la que introduce el concepto de contribuciones marginales y la "limitación" de este tipo de juegos es lo que nos motiva a extender este trabajo a los juegos con externalidades.

Estudiamos algunas soluciones de los juegos con externalidades, ya que como su nombre lo dice estos juegos analizan los factores externos por medio de las coaliciones con externalidades. Algunas soluciones incluidas en este trabajo son las de Myerson (1977) y una extensión del valor de Shapley dada por Pham Do K. y Norde H. (2007).

El estudio de estas soluciones nos dio una intuición del camino a seguir para el objetivo principal de la tesis: caracterizar una solución con contribuciones marginales para juegos con externalidades. Basándonos en el trabajo de Young para juegos en forma de función característica introducimos algunos conceptos como marginalidad débil y marginalidad. El propósito de estos conceptos es dar una característica deseable para la solución; justo aquí nos enfrentamos a la complejidad de definir lo que es una contribución marginal para juegos con externalidades, debido a que la forma más general de definirla, la cual llamamos marginalidad débil, no nos permite dar una solución única. Así es como llegamos al concepto de marginalidad, el cual, aunque esta más restringido, nos permite caracterizar una solución única que cumple las condiciones de eficiencia, simetría y marginalidad, tal como lo hacen Geoffroy de Clippel y Roberto Serrano (2008).

Complementamos este trabajo clasificando todas las posibles soluciones lineales, simétricas, eficientes y que cumplen el axioma de nulidad débil, el cual se define basándose en el concepto de contribución marginal en el axioma de marginalidad débil. Este resultado se obtuvo estudiando el artículo de L. Hernández-Lamoneda, J. Sánchez-Pérez y F. Sánchez-Sánchez (2009) donde se hace una clasificación de valores lineales, simétricos y eficientes.

Bibliografía

[1] Albizuri, M. J., Arin, J. and Rubio, J. (2005): An axiom system for a value for games in partition form. Int. Game Theory Review 7(1), 63-72.

[2] Geoffroy de Clippel and Roberto Serrano(2008): Marginal Contributions and Externalities in the Value. Econometrica, 76(6):1413-1436.

[3] H.P.Young, Maryland (1982): Monotonic Solutions of Cooperative Games. International Journal of Game Theory, Vol.14, 65-72.

[4] Ju, Y. (2006): The consensus value for games in partition function form. Int. Game Theory Review, forthcoming.

[5] L. Hernández-Lamoneda, J. Sánchez-Pérez and F. Sánchez-Sánchez (2009): The class of efficient linear symmetric values for games in partition function form. Int. Game Theory Review, Vol. 11, N0. 3, 369-382.

[6] Lucas, W: F. and Thrall, R. M. (1963): n-person games in partition function form. Naval Research Logistics Quarterly 10, 281-298.

[7] Macho-Stadler, I., Pérez-Castrillo, D. and Wettstein, D.(2006): Sharing the surplus: An extension of the Shapley value for environments with externalities. Journal of Economic Theory 135, 339-356.

[8] Myerson R.B. (1977): Values of games in partition function form. Int. Journal of Game Theory, Vol. 6, 23-31.

[9] Sánchez Pérez Joss E. (2008): Caracterización de soluciones de juegos en forma de función de partición usando teoría de representaciones. Tesis de Doctorado, Centro de investigación matemática.

[10] Sánchez Pérez Joss E. (2010): Juegos cooperativos y sus aplicaciones económicas. Revista de análisis de economía, comercio y negocios internacionales, Vol. 4, No. 1, junio 2010, 59-75.

[11] Sánchez Sánchez Francisco (1993): Introducción a la matemática de los juegos. Prímera edición. México: Universidad de Guadalajara. Siglo veintiuno editores.

[12] Oskar Skibski, Tomasz P. Michalak y Michael Wooldridge (2013): The Shapley Axiomatization for Values in Partition Function Games. Preprint.

[13] Pham Do K. and Norde H. (2007): The Shapley value for partition function games. International Game Theory Review, 9(2), 353-360.

[14] Lloyd S. Shapley (1953): A Value for n-person Games. In Contributions to the Theory of Games, volume II, by H.W. Kuhn and A.W. Tucker, editors. Annals of Mathematical Studies v. 28, pp. 307-317. Princeton University Press.

[15] William Thomson (2002): Axiomatic and game-theoretic analysis of bankruptcy and taxation problems: a survey. Mathematical Social Sciences 45 (2003) 249-297.