UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE SAN LUIS POTOSÍ

Facultad de Economía

Teoría de Juegos evolutivos.
Imitación en un modelo de trabajadores y empresas.

TESIS

que para obtener el grado de

Maestría en Economía Matemática

P R E S E N T A:

Aracely Escandón de la Rosa

Director de tesis:

Dr. Edgar J. Sánchez Carrera

Julio 2014. San Luis Potosí, S.L.P., México

Índice general

Como un padre siempre te he visto y como una madre también, gracias a su sabiduría es para ustedes está tesis en agradecimiento por todo su amor.

Gracias abuelos.

Agradecimientos

Agradezco a CONACYT por el apoyo económico brindado durante la realización de este proyecto.

Quiero agradecerle a mi asesor de tesis, el Dr. Edgar J. Sánchez Carrera, sus conocimientos invaluables que me brindo para llevar a cabo esta investigación, y sobretodo a su gran paciencia para esperar a que este trabajo pudiera llegar a su fin.

Agradezco a los miembros del jurado, el Dr. Joss Erick Sanchez Pérez y Dr. William Olvera López, por las valiosas contribuciones que hicieron al trabajo final y por el tiempo que dedicaron para revisarlo, aún a pesar de tantas actividades que los ocupan.

Agradezco a aquellas grandes personas que hacen posible el conocimiento en las aulas de la sección, los excelentes profesores del programa de maestría. En especial al Dr. Elvio Accinelli Gamba, sin el difícilmente yo estaría aquí, un fuerte abrazo.

A mis compañeros de la generación, por todos los buenos y malos momentos que viví con ellos.

Agradezco a Gabriela de la Rosa, por toda su comprensión, nobleza y dedicación que en todo momento mostró hacia mis compañeros y a mí.

Agradezco a mis hermanos quienes me han inundado en la alegría, compartiendo todos nuestros sentimientos y proyectos viendo los grandes logros y tropiezos de una forma amena.

A mis padres quienes me han heredado el tesoro más valioso que se le puede dar a un hija. Quienes sin escatimar esfuerzo alguno han sacrificado gran parte de su vida, que me han formado y educado. A ellos los seres universalmente más queridos sinceramente Gracias

Introducción

La teoría de juegos se ha desarrollado como un instrumento para entender el conflicto y sus posibles soluciones. Explica más como deberían ser o pueden ser las soluciones a los conflictos que como son o serán realmente. La teoría de juegos aparece inicialmente como una herramienta para la teoría económica, pero adquiere su propia vida, y en su desarrollo se transforma entre otras cosas en una herramienta posible para la biología, naciendo así la teoría de juegos evolutivos. La clave de esta transformación se encuentra en los trabajos de Smith y Price (1973) y Smith (1974). Luego, a su vez, la teoría de juegos evolutivos se transforma en una nueva herramienta para la teoría económica.

En el presente trabajo estudiaremos un juego evolutivo, dando a conocer un modelo dinámico que representa el conflicto existente entre empresas y trabajadores con el hecho de que las empresas pueden elegir ser innovadoras o no y por otro lado los trabajadores pueden elegir entre educarse o bien no hacerlo. El conflicto se encuentra a la hora en que interactúan ambas poblaciones, pues dependiendo que es lo que elijan los jugadores en cada población tendremos uno, varios o ningún equilibrio en el sistema.

Si bien los juegos evolutivos son parte de la teoría de juegos estos, tienen sus propias características y conceptos. El primer capítulo se encargará de dar una visión general de la teoría de juegos evolutivos, explicando y exponiedo sus similitudes y diferencias con la teoría de juegos clásica.

En el capítulo 2 daremos a conocer el juego estático, con el fin de entender el desarrollo de dicho juego. En este juego se verá que los agentes pueden elegir entre dos perfiles: altos o bajos. Donde ser de perfil alto significa prepararse, educarse e innovar. Mientras ser de perfil bajo significa no tener ningún interés en educarse e innovar. Será pues un *juego de coordinación* .

Para el Capítulo 3, pasaremos al juego dinámico entrando a los juegos evolutivos, esto con el fin de observar qué pasa cuando el tiempo transcurre, explicando qué es un juego evolutivo, viendo las diferentes maneras de imitar con el fin de obtener nuestro modelo a estudiar. En este caso tendremos a las poblaciones de firmas y trabajadores, de entre estas poblaciones se eligen individuos al azar una y otra vez para jugar el juego. Cada jugador sigue una estrategia; quienes siguen su misma estrategia forman un club. Con el tiempo, el número de individuos que pertenecen cada club cambia acorde a la dinámica.

En el Capítulo 4 mostraremos que el comportamiento individual basado en la imitación puede llevar a una senda de crecimiento alto o bajo; esto según si el porcentaje de agentes económicos con perfiles altos supera o no un valor umbral. Dicho valor umbral se verá que dependerá de los costos de educación, los incentivos dados a los agentes de perfiles altos y los impuestos sobre las utilidades de los agentes económicos.

En las sociedades donde la calificación no es bien retribuida o bien el coste de educación es alto, es frecuente que los trabajadores no tengan incentivos a educarse. Si a esto le añadimos el proceso de imitación, tendremos un elevado porcentaje de individuos con bajo perfil siendo difícil encontrar profesionales altamente calificados. Al añadirle el hecho que las empresas tampoco tendrán incentivos para realizar innovación y desarrollo, tendremos que tanto empresas como trabajadores serán agentes económicos de bajos perfiles Esta acción conjunta situará a la economía en un equilibrio bajo. La evolución por imitación es una de las posibles formas en que una sociedad puede cambiar, siempre y cuando los agentes a imitar sean de perfiles altos.

La dinámica del replicador describe un proceso evolutivo que está impulsado por imitación pura entre los jugadores y la cual también se estudiará en el Capítulo 4. Asumiremos que los agentes económicos deciden por imitación la conducta más exitosa. Aquellos que decidan cambiar su conducta, imitarán con mayor probabilidad a aquellos que sean más exitosos. Para que un agente decida cambiar de estrategia primero debe haber tomado conciencia de la posibilidad del cambio. Luego de que tome conciencia deberá elegir si cambiar o no de estrategia. La frecuencia con la que se haga esa pregunta viene determinada por el éxito de su estrategia seguida.

Después de ver la problemática a la que nos enfrentamos nuestro siguiente paso y de lo que se ocupa el Capítulo 5 es encontrar los parámetros adecuados para no caer en una trampa de pobreza; analizaremos cada equilibrio y a partir de ahí podremos dar condiciones para superar el equilibrio bajo. Usaremos un poco la computadora para graficar los equilibrios y ver cómo se comporta el sistema. Finalmente comentaremos los resultados obtenidos.

Capítulo 1

Elementos de teoría de juegos evolutivos

En los juegos evolutivos los jugadores serán poblaciones y no individuos como se maneja normalmente, dichas poblaciones se considerarán con un número grande de individuos, véase *Population Games and Evolutionary Dynamics* de Sandolm [8].
Los juegos evolutivos nos muestran qué ocurre con las poblaciones a lo largo del tiempo cuando están sujetas a una dinámica, es decir nos muestran si dichas poblaciones aumentan o por otro lado si en realidad su número decrece. Algo que también nos interesa es si hay algún equilibrio al que se dirijan.
Existen dos tipos de modelado para juegos poblacionales:

1. **Juegos en contra del campo**

   - No hay un oponente específico para un agente dado.

   - Los pagos dependen de lo que todos en la población están haciendo.

   - Un individuo de una población se enfrenta a una población determinada.

2. **Juego por emparejamiento**

   - Hay un oponente específico para un agente, seleccionado al azar (por naturaleza).

   - Los pagos dependen del comportamiento individual de las poblaciones.

   - Las estrategias son generadas por el comportamiento individual.

Nosotros trabajaremos con juegos en contra del campo, pues:

- El comportamiento individual no será tomado en cuenta, esto debido a que no afecta mucho lo que un individuo haga, pues la función de pagos no se verá alterada.

- No haremos distinción entre un individuo y otro dentro de cada población.

Como ya hemos dicho, consideraremos a cada población como un jugador, que sigue un comportamiento mixto, donde la estrategia mixta seguida por la población corresponde a una distribución de individuos sobre el conjunto de estrategias puras.

En teoría de juegos, el *juego de coordinación* es un juego que describe un conflicto entre seguridad y cooperación social. Otros nombres para este juego o sus variantes son "juego de la seguridad", "la caza del ciervo" y "dilema de la credibilidad". Jean-Jacques Rousseau describió una situación en la que dos individuos van a cazar. Cada uno elige cazar un ciervo o una liebre. Cada jugador debe elegir una acción sin conocer la del otro. Si un individuo caza un ciervo, debe cooperar con su compañero para tener éxito. Un jugador individual puede cazar una liebre por sí mismo, pero una liebre vale menos que un ciervo.
Formalmente, un juego de coordinación es un juego con dos estrategias puras de equilibrio de Nash - una es riesgo dominante y la otra es recompensa dominante. Además, existe un equilibrio de Nash de estrategia mixtas el cual depende de las recompensas. Empezaremos dando los conceptos basicos en los juegos evolutivos.

La teoría de juegos evolutivos estudia la relación existente entre equilibrios de Nash, equilibrios dinámicos y su estabilidad. La relación entre estrategias evolutivamente estables, equilibrios dinámicos y su estabilidad, es un tema central de la teoría de los juegos evolutivos veasé Weibull (1995) y van Damme (1991). Un equilibrio de Nash tiene la particularidad de que en él, cada individuo está haciendo lo mejor dado lo que los demás hacen, es decir que las posibilidades de sobrevivencia y reproducción de la especie están siendo de alguna forma optimizadas dado el entorno existente. Una estrategia evolutivamente estable, es un equilibrio de Nash y algo más que implica cierta inmunidad a las mutaciones. Es éste un concepto central de la teoría de juegos evolutivos.

Capítulo 2

El juego estático

El modelo aquí presentado se basa en el trabajo de Accinelli y Sánchez Carrera (2010); para profundizar en su estudio el lector puede consultar [1]
Consideremos un juego en forma normal de dos poblaciones: empresas (Y) y trabajadores (X), cada una dividida en dos clubes diferentes: alto o bajo perfil. Los conjuntos $S_Y = \{A, B\}$, $S_X = \{a, b\}$ son los conjuntos de estrategias puras, con Δ_i el conjunto de estrategias mixtas para $i = Y, X$.
En este caso tenemos un juego de manejo de información asimétrica, pues las empresas conocen a qué tipo de club pertenecen los trabajadores, mientras que los trabajadores ignoran a qué tipo de club pertenecen los empresas.
Los contratos entre empresas y trabajadores tienen una duración de un período y al finalizar existe un proceso de recontratación, los cuales presentan las siguientes características:

1. **Complementariedad estratégica** Para una empresa del tipo A es conveniente un trabajador del tipo a. Análogamente para una empresa del tipo B es conveniente un trabajador del tipo b.

    - Cuando una empresa del tipo A contrata a un trabajador del tipo a el beneficio para la empresa es U, mientrás que cuando contrata a un trabajador del tipo b el beneficio para la empresa es u, con $U > u$.

    - Cuando una empresa del tipo B contrata a un trabajador del tipo b el beneficio para la empresa es V, mientras que cuando contrata a un trabajador del tipo a el beneficio para la empresa es v, con $V > v$.

    - El salario para un trabajador que es contratado por una empresa del tipo A es W, independientemente del tipo de trabajador que sea. Y será w su salario si es contratado por una empresa del tipo B, con $w < W$.

    - Los individuos de ambas poblaciones pagan impuestos al ingreso. Tales tasas impositivas serán denotadas por τ para los trabajadores y γ, para las empresas.

2. **Información privada** La empresa al momento de contratar sabe a qué tipo de trabajador emplea, pero los trabajadores no saben qué tipo de empresa los contrata sino hasta el final del período. Lo que sí conocen es la probabilidad σ con la que serán empleados por una empresa del tipo A y con una probabilidad $(1 - \sigma)$ del tipo B.

3. La empresa elige libremente y sin costos entre los perfiles posibles. Mientras que para los trabajadores no es así, si quiere ser del tipo a tendrá que pagar al inicio de cada período $c \in \mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$, que es el costo a la educación. Pero si elige ser del tipo b simplemente no paga c. Esto se repite cada inicio de período.

4. Al final de cada período la empresa de tipo A, dará un bono $p \in \mathbb{R}^+$, indicando su verdadero tipo, recibido únicamente por el trabajador del tipo a, pues dicho bono es debido a que el trabajador decidio educarse y produce más que un trabajador que no lo hizo, con lo cual la empresa obtiene mayores beneficios y por lo tanto puede pagar el bono.

La representación formal del juego viene dado por la siguiente matriz de pagos:

T/F	y_A	y_B
x_a	$(1-\tau)W + p - c, (1-\gamma)U - W - p$	$(1-\tau)w - c, (1-\gamma)v - w$
x_b	$(1-\tau)W, (1-\gamma)u - W$	$(1-\tau)w, (1-\gamma)V - w$

Como es un juego de coordinación tiene que cumplir con las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned}
(1-\tau)W + p - c &> (1-\tau)w \\
(1-\gamma)U - W - p &> (1-\gamma)V - w \\
(1-\tau)w - c &= (1-\gamma)u - W \\
(1-\gamma)v - w &= (1-\tau)W \\
(1-\tau)W + p - c &> (1-\tau)W \\
(1-\tau)W + p - c &\geq (1-\gamma)u - W
\end{aligned}$$

También podemos ver la representación extensiva del juego:

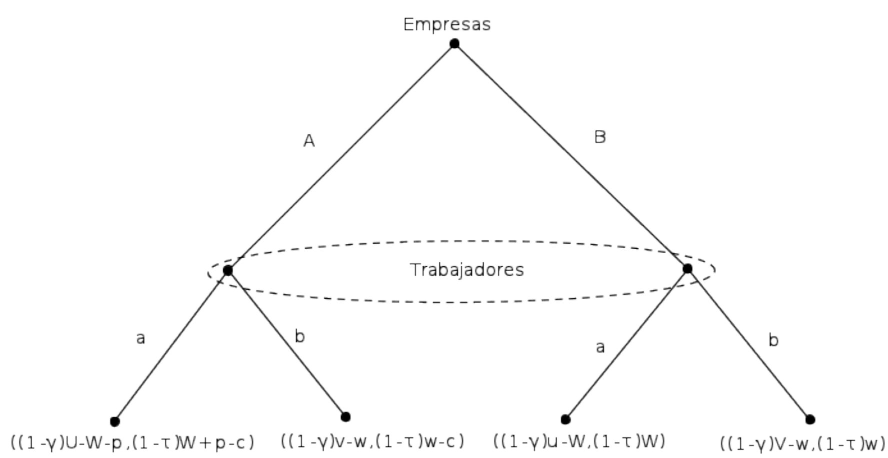

Figura 2.1: Representación extensiva del juego

Los trabajadores pagan impuestos de tasa τ sobre su salario, mientras que las firmas pagan γ sobre sus beneficios.
Nótese que:

- La prima o el bono tiene que ser mayor al costo de educación, $p > c > 0$ y además

$$p > (1 - \tau)(w - W).$$

- Las empresas de tipo A no pueden dar un bono mayor que la diferencias de sus ganancias.

$$p < (1 - \tau)(U - u).$$

Como es un juego de coordinación tenemos dos equilibrios de Nash en estrategias puras: (A, a) , (B, b) y un equilibrio en estrategias mixtas:

$$NE = \{\theta, (1 - \theta); \sigma, (1 - \sigma)\}$$

donde: θ es la probabilidad de que la empresa encuentre a un trabajador de perfil alto. Haciendo los cálculos cuando los agentes son indiferentes entre los perfiles correspondientes tenemos:

$$\sigma = \frac{c}{p} \ y \ \theta = \frac{(1 - \gamma)(V - u) + W - w}{(1 - \gamma)(U - u + V - v) - p}.$$

Observamos que para que la probabilidad σ de que un trabajador sea contratado por una empresa de alto perfil depende del costo de educación y el bono otorgado. Esta crece cuando el costo aumenta o cuando el bono baja, análogamente para el caso en que decrezca tiene que pasar que el bono aumente y el costo decrezca.
Mientras que la probabilidad θ de que una empresa encuentre a un trabajador de perfil alto depende del impuesto sobre los beneficios de la empresa, pues tanto los salarios de los trabajadores como los beneficios de las empresas están fijos. Así pues, cuando dicho impuesto baja, θ aumenta, en forma análoga cuando γ sube, θ baja.

Capítulo 3

El juego dinámico

Hasta ahora hemos analizado el juego en su forma estática; en este capítulo estudiaremos qué ocurre cuando el juego se vuelve dinámico, dando a conocer un *juego evolutivo*. Si se quiere profundizar en estos conceptos veáse el libro *Evolutionary Game Theory* de Weibull Jäorgen y Sanchez Carrera (2012).

3.1. El juego evolutivo

El siguiente juego evolutivo tiene como referencia el trabajo de Accinelli; Carrera (2010) veáse [1]. Los individuos de la población X (trabajadores) pueden elegir entre los comportamientos $\{a, b\}$, mientras que para la población Y(empresas) pueden elegir entre $\{A, B\}$. Así pues x_a representa el número de individuos de la población X siguiendo la estrategia a, mientras que y_A representa el número de individuos de la población Y siguiendo la estrategia A, respectivamente y de igual forma para x_b, y_B.
El vector $x = (x_a, x_b)$ es una distribución de los individuos de la población X, donde $x_a = \frac{X_a}{X}$, análogamente para x_b, y_A,y_B.
Así los pagos esperados pueden ser descritos como:

$$\begin{aligned} E_{x_a} &= y_A((1-\tau)W + p) + (1-y_A)(1-\tau)w - c && (3.1)\\ E_{x_b} &= y_A(1-\tau)W + (1-y_A)(1-\tau)w && (3.2)\\ E_{y_A} &= x_a((1-\gamma)U - W - p) + (1-x_a)(1-\gamma)u - W) && (3.3)\\ E_{y_B} &= x_a((1-\gamma)v - w) + (1-x_a)((1-\gamma)V - w). && (3.4)\end{aligned}$$

Ahora que ya tenemos definidos los pagos esperados podemos definir una dinámica simple para este modelo, que tendrá la forma:

$$\dot{x}_{i_k} = [E_{i_k} - E_{j_k}]x_{i_k}, \tag{3.5}$$

para todos los pares $i \neq j$, $i \in \{(A, B), (a, b)\}$.
Esta dinámica supone que los individuos conocen en cada instante los valores esperados a las diferentes estrategias puras posibles y en consecuencia se obtiene un flujo creciente hacia los clubes de valor esperado mayor.
Nos interesa analizar la relación existente entre la evolución de una economía y las decisiones tomadas por los agentes que cambian su comportamiento con base en alguna forma de imitación.

3.2. Decisiones por imitación

En la sección anterior suponíamos que los individuos conocían su pago esperado después de haber elegido alguna estrategia, ahora en esta sección cambiemos y pensemos que en realidad los individuos no

conocen los verdaderos valores esperados, pero pueden llegar a creer que existen otras estrategias las cuales les pueden reportar mejores resultados que la estrategia que están siguiendo. Con lo cual tienen que decidir de qué manera seguir comportándose, es decir si continuar con su estrategia o cambiar a otra. A aquellos individuos que se lleguen a preguntar si existen otras estrategias mejores que las suyas les llamaremos revisores.
Una de los posibles conductas que pueden tomar los revisores es seguir el comportamiento de lo que hace la mayoría, pues asumen que lo que hace la mayoría es lo mejor.
Otra conducta que se pueden tomar es la de cambiar de estrategia cuando se observa que existe otra, que reporte mejores resultados, tomando en cuenta por supuesto el marco poblacional en el que se encuentra.
O bien podrían comparar los resultados obtenidos por seguir su estrategia, con los obtenidos por el primero que se encuentre.
Ahora bien, no todos los individuos son revisores, pues puede pasar que en realidad sigan una estrategia exitosa, con los cual no hay necesidad de cambiar. Pero si no estamos en este caso la frecuencia con lo que se pregunta si debe o no cambiar de estrategia dependerá del éxito de su estrategia actual. Bajo una probabilidad representada por: $r_j^k(x)$, el agente de la población k, que sigue la estrategia j bajo el perfil poblacional x, se pregunta si debe o no cambiar de estrategia.
Representemos a e_j^k como el estrategista de la población k, que sigue la estrategia j, para $k \in \{X, Y\}$ y $j \in \{(A, B), (a, b)\}$. Notando que: $x = x_a e_a + x_b e_b$, análogamente para y.
La decisión de cambiar dependerá de la distribución de la población y por supuesto del pago esperado asociado a la conducta elegida; este valor será representado por $E(e_j^k, x)$, lo cual se lee como "El pago esperado del jugador que sigue la estrategia j de la población k, dentro del perfil poblacional x".
Supongamos que la tasa $r_j^k(x)$ es una función decreciente (pues mientras más pase el tiempo las estrategias que vaya eligiendo serán aquellas que resulten más exitosas, con lo cual a largo tiempo ya no se preguntará si debe cambiar) del valor esperado asociado a la estrategia seguida por el dada la distribución de la población.
Tenemos pues

$$r_j^k(x) = f_j^k(E(e_j^k, x)).$$

La función f puede ser interpretada como la disposición de un estrategista a cambiar su elección de i a j y además $\frac{\partial}{\partial E}(f_j^k(E(e_j^k, x)) < 0$. En las siguientes secciones vamos a analizar las diferentes opciones con las que cuentan los revisores para cambiar de estrategia.

3.3. El primero con el que nos encontremos

Este comportamiento se basa en la idea de que lo que hace la mayoría es lo mejor, con lo cual es probable que el primero que nos encontremos sigue el comportamiento de la mayoría.
Así pues supongamos que el agente decide cambiar su estrategia de j a h de acuerdo con la probabilidad de encontrarse con un individuo del tipo h.
Denotamos por $p_{jh}^k(x)$ a la probabilidad de que un individuo revisor de la población k cambie de estrategia j a h dada la distribución x. De acuerdo a los supuestos que tenemos se imitará de acuerdo al individuo más próximo, y esto depende de la frecuencia relativa de la población que siga la estrategia h, es decir x_h.
La probabilidad de que un individuo se cambie efectivamente de una estrategia j a h está dada por:

$$p_{jh}^k(x) = r_j^k(x) x_h$$

cuando $j = h$ se representa la probabilidad de que no cambie de estrategia. Modelamos este proceso como un modelo determinista, obteniendo las siguientes ecuaciones de flujo.

$$\begin{aligned} \dot{x}_j &= x_h[f_h(E(e_h, x))p_{hj}(x)] - x_j[f_j(E(e_j, x))p_{jh}] \\ \dot{y}_{j^*} &= y_h^*[f_h^*(E(e_h^*, y))p_{h^*j^*}(y)] - y_j^*[f_j^*(E(e_j^*, y))p_{j^*h^*}] \end{aligned}$$

Para $j, h \in \{a, b\}$ y $j^*, h^* \in \{A, B\}$ Estas ecuaciones nos indican cómo cambian las diferencias de entradas y salidas de seguir la estrategia j y j^* respectivamente para las diferentes poblaciones. Con algo de álgebra llegamos a las siguientes expresiones:

$$\dot{x}_j = x_j(1-x_j)[f_h(E(e_h,x)) - [f_j(E(e_j),x)] \quad (3.6)$$
$$\dot{y}_{j^*} = y_{j^*}(1-y_j^*)[f_{h^*}(E(e_{h^*},y)) - [f_{j^*}(E(e_{j^*}),y)], \quad (3.7)$$

donde $x_a + x_b = 1$ y $y_A + y_B = 1$. Podemos reducir el sistema a dos ecuaciones con dos variables de estado independientes. Seleccionaremos a x_a y y_A con sus respectivas ecuaciones. Este sistema representa la interacción entre dos grupos de agentes que siguen la regla de la mayoría.

3.4. Una regla de conducta específica

Observemos que la evolución del sistema se determina por las conductas que adopten los individuos, la dinámica está dada en parte por la frecuencia con la que sus individuos se pregunten acerca de si su elección es la correcta, y por otro lado por la forma en que resuelvan esta duda. Veremos una regla que siendo sencilla será útil para irnos familiarizando con este tipo de dinámica.
Supongamos que f_j depende en forma lineal del valor esperado de la estrategia seguida por el individuo y además es decreciente

$$f_j^k(E(e_j^k,x)) = \alpha_j^k - \beta_j^k E(e_j^k,x), \quad (3.8)$$

con $\alpha_j^k, \beta_j^k > 0$ y $\frac{\alpha_j^k}{\beta_j^k} \geq E(e_j^k,x)$ con lo cual se puede garantizar que $f_j \in [0,1]$. α_j^k se puede interpretar como un nivel de insatisfacción mientras que a β_j^k como elasticidad de medida de desempeño sobre la función de revisión.
Para simplificar $\alpha_j = \alpha$ y $\beta_j = \beta$. Al sustituir esta función lineal en el sistema 3.6 tenemos:

$$\dot{x}_i^k = \beta x_i^k(1-x_i^k)[E_i^k - E_j^k],$$

donde $E_i^k = E(e_i^k,x)$ y $E_j = E(e_j^k,x)$. Es una forma de la ecuación del replicador descrita por Taylor (1979) y presentado por Weibull (1995), descrita en la ecuación 3.5. A continuación consideremos una regla de conducta más sofisticada, la cual respeta la decisión de la mayoría como decisión óptima.

3.5. Decisiones a partir de la muestra

Otra regla por la cual el individuo puede guiarse es la regla promedio. En este caso el individuo evalúa cada estrategia de acuerdo con el pago observado promedio dentro del grupo de referencia y actuará de acuerdo con la estimación promedio. El individuo desconoce el pago exacto de cada estrategia, pero puede calcular el pago promedio de cada estrategia y de ahí elegir el mayor.
Representaremos por $\tilde{\mathrm{E}}_j^k$ a los estimadores de los valores reales, $E_j^k = E(e_j^k,x)$. Un revisor decidirá cambiar de estrategia cuando:

- Exista un mejor desempeño estimado de otra estrategia diferente de la suya. Medido por: $P[\tilde{E}(e_i^k,x) - \tilde{E}(e_j^k,x) > 0]$.
  Es decir cuando la probabilidad de la diferencia entre el valor estimado de otra estrategia y el valor estimado de la estrategia que se sigue sea positiva.

- La probabilidad de encontrarse a un agente quien actualmente usa una estrategia exitosa sea alta. Lo que se mide por el porcentaje de cada uno de los clubes del total de la población en el que el revisor participa.

Asumamos como en (Accinelli et al. (2009)) que la probabilidad de que exista un mejor desempeño que una estrategia diferente de la que se está siguiendo crece proporcionalmente con el verdadero valor de la estrategia hacia la que se quiere cambiar siempre y cuando este valor sea estrictamente positivo. Es decir:

$$P[\tilde{E}(e_i^k, x) - \tilde{E}(e_j^k, x) > 0] = \begin{cases} \lambda[E(e_i^k, x)] & \text{si} \quad E(e_i^k, x) > 0 \ \text{ y } \ \lambda = \dfrac{1}{E_i^k + E_j^k}, \\ \\ 0 & \text{si} \quad E(e_i^k, x) \leq 0. \end{cases}$$

El sistema 3.6 se convierte entonces:

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= x_j[f_j^k(E(e_j, x))p_{ji}(x)] - x_i[f_i^k(E(e_i, x))p_{ij}] \\ &= x_i(\alpha - \beta\lambda E_j^k)x_j - x_j(\alpha - \beta\lambda E_i^k)x_i \\ \dot{x}_i^k &= x_i^k(1 - x_i^k)\lambda\beta^k[E_i^k - E_j^k]. \end{aligned}$$

Este sistema representa tanto la regla de conducta de imitación pura, como la que supone la realización de un muestreo por parte del revisor antes de que decida cambiar o no su estrategia.
Al sustituir los valores en 3.1 y 3.3 obtenemos [1]:

$$\dot{y}_A = y_A(1 - y_A)\beta_1 \left[\frac{x_a[(1-\gamma)(U - u + V - v) - p] + (1-\gamma)(u - V) - W + w}{x_a[(1-\gamma)(U - u - V + v) - p] + (1-\gamma)(u + V) - W - w}\right] \tag{3.9a}$$

$$\dot{y}_B = -\dot{y}_A \tag{3.9b}$$

$$\dot{x}_a = x_a(1 - x_a)\beta_2 \left[\frac{p y_A - c}{y_A[2(1-\tau)(W - w) + p] + 2(1-\tau)w - c}\right] \tag{3.9c}$$

$$\dot{x}_b = -\dot{x}_a. \tag{3.9d}$$

Al tomar en cuenta solamente a las ecuaciones 3.9a y 3.9c se tiene un sistema que describe el caso donde se propaga una estrategia de altos perfiles.

Definición 3.1 (Estado estacionario o equilibrio dinámico)**.** *Decimos que un estado estacionario o equilibrio dinámico del sistema* $(\dot{y}_A, \dot{x}_a)$ *es un estado que satisface* $(\dot{y}_A, \dot{x}_a) = (0, 0)$.

Este sistema admite cinco estados estacionarios o equilibrios dinámicos: $(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)$ y un equilibrio interior positivo denotado por $\bar{P} = (y_A^*, x_A^*)$,
donde

$$\bar{P} = (y_A^*, x_A^*) = (\frac{c}{p}, \frac{(1-\gamma)(V - u) + W - w}{(1-\gamma)(U - u + V - v) - p}). \tag{3.10}$$

Estos equilibrios se interpretan de la siguiente manera:

1. El equilibrio trivial (0,0), es en el cual tanto las empresas como los trabajadores son de perfiles bajos.

2. El equilibrio (1,1) es en el cual tanto las empresas como los trabajadores son de perfiles altos.

3. Los equilibrios (1,0) y (0,1), no son equilibrios de Nash y en si no son situaciones lógicas pues por una parte tenemos que las empresas son de perfiles altos mientras los trabajadores son de perfiles bajos y viceversa.

4. El equilibrio interior P describe una situación en la que conviven agentes de ambos tipos de perfiles.

En el siguiente capítulo, veremos algunas características de estos equilibrios.

[1] El álgebra usada se ve en el apéndice.

Capítulo 4

Análisis dinámico

Lo que tenemos al tomar en cuenta 3.9a y 3.9c es un sistema de la forma:

$$\begin{aligned} \frac{dx_a}{dt} &= F(x_a, y_A) \\ \frac{dy_A}{dt} &= G(x_a, y_A) \end{aligned} \tag{4.1}$$

donde tanto F como G son continuamente diferenciales, cada una es continua y poseen las primeras derivadas parciales continuas en todo el plano (x_a, y_A). Un sistema de este tipo, en el que la variable independiente t (tiempo) no se encuentra presente en las funciones del miembro derecho recibe el nombre de *sistema autónomo.*

Puesto que los sistemas de ecuaciones diferenciales raramente se pueden resolver explícitamente, los métodos cualitativos y numéricos adquieren una gran importancia. Cada solución del sistema 4.1 es un par de funciones $x(t)$ e $y(t)$ que definen una curva $C = [x(t), y(t)]$.

Observemos que cada punto de la curva C nos determina el estado del sistema en un instante t correspondiente a una condiciones iniciales determinadas, y que por ello es de gran interés el conocimiento de este tipo de curvas, que son llamadas *órbitas o trayectorias.*

Definición 4.1 (Órbita o trayectoria)**.** *La curva proyección en $\mathbb{R}^2$ (eliminando el tiempo) de una solución particular, $C_0 = [x_0(t), y_0(t)]$, del sistema 4.1 se denomina órbita o trayectoria.*

Como nuestro sistema es de dimensión dos, en el plano (x, y) se pueden dibujar un número de trayectorias suficientes como para poder tener una idea de conjunto del comportamiento de todas las del sistema. Sobre dichas trayectorias se dibuja una flecha que indica el sentido de la variación de x,y al crecer el tiempo (es decir las curvas se recorren en la dirección creciente), lo cual proporciona una imagen "dinámica" de su recorrido con lo cual se obtiene una descripción cualitativa del comportamiento de las soluciones.

Definición 4.2 (Diagrama de fase)**.** *Se denomina diagrama de fase del sistema 4.1 al conjunto de todas las trayectorias de las soluciones del sistema.*

Al resolver este sistema asociado al juego normal y las conductas específicas obtenemos trayectorias en las cuales las distribuciones poblacionales van cambiando debido a las normas de conducta. Empezaremos con una distribución poblacional $(x_{a0}(t_0), y_{A0}(t_0))$ para un tiempo incial $t = t_0$, y calcularemos la dinámica dada para el sistema $(\dot{x}_a, \dot{y}_A)$.

Nos interesa la forma en que las trayectorias se acercan o se alejan de un equilibrio dinámico, es decir nos interesan en particular los equilibrios atractores y puntos sillas. Donde un punto atractor es en realidad un punto asintóticamente estable.

Definición 4.3 (Punto Estable). *Se dice que el punto crítico x del sistema 4.1 es estable si para todo número $R > 0$, existe algún $r > 0$, $r \leq R$, tal que cada trayectoria C que esté dentro de la vecindad U con radio r en algún momento $t = t_0$, permanezca dentro de la vecindad V de radio R para todos los $t > t_0$: esto es, si una trayectoria está cerca del punto de equilibrio, se mantendrá cerca a lo largo del tiempo.*

Definición 4.4 (Punto Asintóticamente Estable). *Se dice que el punto crítico $\tilde{x} = (\tilde{x}, \tilde{y})$ del sistema 4.1 es asintóticamente estable, cuando es estable y existe algún número $r_0 > 0$, tal que toda trayectoria que está dentro de la vecindad U de radio r_0 en algún momento $t = t_0$, se aproxime a $\tilde{x}$ cuando $t \to +\infty$. La expresión "se aproxime al origen cuando $t \to +\infty$" se deberá entender de la siguiente forma: si $C = (x(t), y(t))$ es una trayectoria, deberá verificarse que $x(t) \to \tilde{x}$, e $y(t) \to \tilde{y}$ cuando $t \to +\infty$; es decir, las trayectorias cercanas no sólo se mantienen cerca, sino que se aproximan al punto de equilibrio a lo largo del tiempo.*

Definición 4.5 (Punto inestable). *Se dice que un punto crítico del sistema 4.1 es inestable cuando no es estable: las trayectorias que empiezan cerca del punto de equilibrio se alejan de este punto a lo largo del tiempo.*

Definición 4.6 (Punto silla). *Decimos que un equilibrio dinámico es un punto silla , si existe un entorno suyo tal que existen trayectorias por las que el sistema se acerca y otras por las que se aleja de estado de equilibrio.*

Para un atractor se puede definir:

Definición 4.7 (Cuenca de atracción). *Llamaremos cuenca de atracción de un punto crítico $\tilde{x} = (\tilde{x}, \tilde{y})$, al conjunto $M \subset \mathbb{R}^2$ en el espacio de fases (en nuestro caso espacio de distribuciones) tal que para $x_0 = (x_0(t), y_0(t)) \in M$ se tienen que complir $x(t) \to \tilde{x}$, e $y(t) \to \tilde{y}$ cuando $t \to \infty$.*

Aunque las definiciones de atractor y punto silla son locales se puede extender a todo el espacio en cuyo caso estaríamos hablando de atractores o de puntos sillas globales. Así la cuenca de atracción de un atractor global será todo el espacio y el punto silla nos define las variedades estables e inestables en todo el espacio.

4.1. Estrategias Evolutivamente Estables

Un concepto ampliamente utilizado en la teoría de juegos evolutivos es el de estrategias evolutivamente estables (ESS por sus siglas en inglés), definidas e introducidas por John Maynard Smith y George R. Price en 1973. Aunque inicialmente fueron utilizadas en biología con poblaciones donde sus estrategias se heredan genéticamente, veremos que para la teoría de juegos son una herramienta importante.
En este caso tenemos la definición para una ESS enfocada a juegos evolutivos contra el campo la cual por supuesto incluiremos a continuación.
Dado un juego normal, definimos como un campo a las condiciones definidas por los demás jugadores, esto es la distribución inicial del conjunto de empresarios en altos y bajos perfiles, no depende de la voluntad de los trabajadores, diremos pues que estos juegan entonces en contra del campo, en el momento de elegir su mejor estrategia.

Definición 4.8 (Estrategias Evolutivamente Estables contra un campo (Carrera [10])). *Considere que el perfil de distribución de la población $y = (y_A, y_B)$, decimos que la estrategia $\tilde{x} = (\tilde{x_a}, \tilde{x_b})$ es una* ESS contra el campo *de y si existe $\epsilon_y > 0$ tal que:*

$$E(\tilde{x}, \tilde{y}) \geqslant E(x_2, \tilde{y})$$

para todo $x_2 \in X$ donde $|y - \tilde{y}| \leqslant \epsilon_y$.

En otras palabras $\overline{x}$ es un *ESS* contra campo, si continua siendo maximizadora del valor esperado de los individuos de la población x aun, luego de una mutación (no muy grande) en el comportamiento de la economía.
Sin embargo puede suceder que el campo, definido por la distribución de una población a la que el oponente tome como dada, evolucione a su vez, precisamente por la presión del cambio de distribución que él mismo generó, en dicho oponente. Esta interdependencia mutua genera conductas evolutivamente estables en ambas poblaciones.
Si un sistema económico evoluciona hacia una *trampa de pobreza* pequeñas modificaciones de las condiciones iniciales no alcanzan para modificar el resultado. Es decir que la trampa de pobreza es un atractor de trayectorias definidas por distribuciones de la población que forman perfiles estratégicos evolutivamente estables.

4.2. Análisis dinámico del juego

Como vemos lo que tenemos es un sistema no lineal, el cual no es fácil resolver sin embargo si podemos emplear el Teorema de Grobman-Hartman para poder hacer nuestro análisis de una forma más sencilla. Dicho teorema nos asegura que los sistemas de la forma $x' = Ax$ y $x' = f(x)$ son localmente topológicamente conjungados (en entornos de 0 y x_0) si x_0 es un punto de equilibrio de f y $A = Df(x_0)$ es hiperbólico (i.e todos sus autovalores tienen parte real no nula).

Teorema 4.9 (Grobman-Hartman). *Sea $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un campo C^1, y sea x_0 un punto de equilibrio. Supongamos que $A = Df(x_0)$ es un operador hiperbólico. Entonces existen V, U entornos abiertos de x_0 y de 0 respectivamente tales que los campos $f_{|V}$ y $A_{|U}$ son topológicamente conjugados (i.e. existe un homomorfismo $\varphi : U \to V$ tal que $\varphi \circ e^{tA} = \phi^t \circ \varphi$).*

Analizacemos la relación entre las distribuciones poblacionales, las ESS y trampas de pobreza de nuestro modelo expuesto.
Consideremos el jacobiano $J(\dot{x}_a, \dot{y}_A)$ asociado al sistema 3.9a y 3.9c:

$$J(\dot{x}_a, \dot{y}_A) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \dot{x}_a}{\partial x_a} & \dfrac{\partial \dot{x}_a}{\partial y_A} \\ \dfrac{\partial \dot{y}_A}{\partial x_a} & \dfrac{\partial \dot{y}_A}{\partial y_A} \end{pmatrix}.$$

Al sustituir las respectivas derivadas tenemos:

$$J(\dot{x}_a, \dot{y}_A) = \begin{pmatrix} (1-2x_a)\beta_2 \dfrac{[py_A - c]}{Ey_A + F} & x_a(1-x_a)\beta_2 \dfrac{[Ey_A + F]p - [py_A - c]E}{(Ey_A + F)^2} \\ y_A(1-y_A)\beta_1 \dfrac{(Cx_a + D)A - (Ax_a + B)C}{(Cx_a + D)^2} & (1-2y_A)\beta_1 \dfrac{Ax_a + B}{Cx_a + D} \end{pmatrix} \tag{4.2}$$

donde

$$\begin{aligned} A &= (1-\gamma)(U - u + V - v) - p \\ B &= (1-\gamma)(u - V) - W + w \\ C &= (1-\gamma)(U - u - V + v) - p \\ D &= (1-\gamma)(u + V) - W - w \\ E &= 2(1-\tau)(W - w) + p \\ F &= 2(1-\tau)w - c. \end{aligned}$$

La siguiente proposición resume en forma clara la relación entre reglas de conducta, estrategias evolutivamente estables y trampas de pobreza, de una economía en la que los agentes económicos, imitan la conducta seguida por aquellos individuos que, dada la distribución poblacional y la información disponible, aparecen como los más exitosos.

Proposición 4.10. *Si las empresas o trabajadores siguen las reglas de conducta imitativas, y los revisores resuelven su conducta de acuerdo con el primero que nos encontremos o por muestreo referidas anteriormente entonces:*

1. *Los equilibrios* $(0,0)$ *y* $(1,1)$ *son atractores para el sistema dinámico 4.2 y por tanto definen perfiles estratégicos evolutivamente estables, son* $(0,1;0,1)$ *y* $(1,0;1,0)$.

2. *Los equilibrios* $(0,1)$ *y* $(1,0)$ *son repulsores para el sistema dinámico 4.2.*

3. *El equilibrio* $\overline{P} = (x_a^*, y_A^*)$ *define un valor umbral, en el sentido de que si las condiciones iniciales lo superan, toda la trayectoria solución del sistema dinámico converge hacia el atractor alto* $(1,1)$, *mientras que si los valores iniciales se encuentran por debajo de este convergirán hacia el atractor bajo,* $(0,0)$. *Es decir, estamos ante un punto silla.*

Demostración. Denotaremos por $detJ$ al determinante de la matriz 4.2 evaluada en cada equilibrio, mientrás que a la traza la denotaremos por trJ. Analicemos cada equilibrio:

1. Para los equilibrios $(0,0)$ y $(1,1)$ ocurre:

   - $x_a = y_A = 0$. El jacobiano evaluado en este caso está dado por,

$$J(0,0) = \begin{pmatrix} -\beta_2 \dfrac{c}{2(1-\tau)w - c} & 0 \\ 0 & -\beta_1 \dfrac{(1-\gamma)(V-u) + W - w}{(1-\gamma)(V+u) - W - w} \end{pmatrix}.$$

   Lo que produce:

$$detJ = (\beta_2 \frac{c}{2(1-\tau)w - c})(\beta_1 \frac{(1-\gamma)(V-u) + W - w}{(1-\gamma)(V+u) - W - w}) > 0,$$
$$trJ = -\beta_2 \frac{c}{2(1-\tau)w - c} - \beta_1 \frac{(1-\gamma)(V-u) + W - w}{(1-\gamma)(V+u) - W - w} < 0.$$

   Con lo cual al utilizar el criterio de traza determinante [1] , sabemos que este equilibrio es un nodo asintóticamente estable es decir un atractor y por lo tanto una ESS.

[1] (Criterio traza-determinante). Sea $A \in M_2(\mathbb{R})$. Notamos$T = trazaA$, $D = detA$ y $\Delta = T^2 - 4D$. Entonces el sistema $x' = Ax$ es:

- Una silla si y sólo si $D < 0$.
- Un centro si y sÓlo si $T = 0$ y $D > 0$.
- Un foco si y sólo si $T = 0$ y $\Delta < 0$. El foco es repulsor cuando $T > 0$ y atractor cuando $T < 0$.
- Un nodo si y sólo si $D > 0$ y $\Delta \geqslant 0$. El nodo es repulsor cuando $T > 0$ y atractor cuando $T < 0$. Además, el nodo es impropio si y sólo si $\Delta = 0$ y la matriz A no es diagonal.
- Degenerado cuando $D = 0$.

- $x_a = y_A = 1$. El jacobiano evaluado en este caso está dado por

$$J(1,1) = \begin{pmatrix} -\beta_2 \dfrac{[p-c]}{2(1-\tau)(W)+p-c} & 0 \\ 0 & -\beta_1 \dfrac{(1-\gamma)(U-v)-p-W+w}{(1-\gamma)(U+v)-p-W-w} \end{pmatrix}.$$

Lo que produce:

$$detJ = \left(-\beta_2 \frac{[p-c]}{2(1-\tau)(W)+p-c}\right)\left(-\beta_1 \frac{(1-\gamma)(U-v)-p-W+w}{(1-\gamma)(U+v)-p-W-w}\right) > 0,$$
$$trJ = -\beta_2 \frac{[p-c]}{2(1-\tau)(W)+p-c} - \beta_1 \frac{(1-\gamma)(U-v)-p-W+w}{(1-\gamma)(U+v)-p-W-w} < 0.$$

Con lo cual al utilizar el criterio de traza determinante, sabemos que este equilibrio $(1,1)$ es un atractor asintóticamente estable es decir un atractor y por lo tanto un perfil ESS.

2. Para los equilibrios $(0,1)$ y $(1,0)$ocurre:

   - $x_a = 0$, $y_A = 1$. El jacobiano evaluado en este caso está dado por

     $$J(0,1) = \begin{pmatrix} \beta_2 \dfrac{[p-c]}{2(1-\tau)(W)+p-c} & 0 \\ 0 & \beta_1 \dfrac{(1-\gamma)(V-u)+W-w}{(1-\gamma)(u+V)-W-w} \end{pmatrix}.$$

     $$detJ = \left(\beta_2 \frac{[p-c]}{2(1-\tau)(W)+p-c}\right)\left(\beta_1 \frac{(1-\gamma)(V-u)+W-w}{(1-\gamma)(u+V)-W-w}\right) > 0,$$
     $$trJ = \beta_2 \frac{[p-c]}{2(1-\tau)(W)+p-c} + \beta_1 \frac{(1-\gamma)(V-u)+W-w}{(1-\gamma)(u+V)-W-w} > 0.$$

     Al utilizar el criterio de traza determinante, tenemos que en este caso el equilibrio $(0,1)$ es un repulsor.

   - $x_a = 1$, $y_A = 0$. Para es caso se tiene

     $$J(1,0) = \begin{pmatrix} \beta_2 \dfrac{c}{2(1-\tau)w-c} & 0 \\ 0 & \beta_1 \dfrac{(1-\gamma)(U-v)-p-W+w}{(1-\gamma)(U+v)-p-W-w} \end{pmatrix}.$$

     $$detJ = \left(\beta_2 \frac{c}{2(1-\tau)w-c}\right)\left(\beta_1 \frac{(1-\gamma)(U-v)-p-W+w}{(1-\gamma)(U+v)-p-W-w}\right) > 0,$$
     $$trJ = \beta_2 \frac{c}{2(1-\tau)w-c} + \beta_1 \frac{(1-\gamma)(U-v)-p-W+w}{(1-\gamma)(U+v)-p-W-w} > 0.$$

     De igual forma al utilizar el criterio de traza determinante, tenemos que este equilibrio $(1,0)$ es un repulsor.

3. Por último para $\bar{P} = (x_a^*, y_A^*) = (\dfrac{(1-\gamma)(V-u)+W-w}{(1-\gamma)(U-u+V-v)-p}, \dfrac{c}{p})$,

   $$J(x_a^*, y_A^*) = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{p^2\beta_2(B(A-B))}{A^2(Ec+pF)} \\ \dfrac{A^2\beta_1(c(p-c))}{p^2(AD-BC)} & 0 \end{pmatrix}.$$

   En este caso, soló tendríamos que observar los signos de cada entrada. Como $A^2, p^2, \beta, p-c, Ec+pF > 0$ sólo tenemos que checar como se comporta: $A-B$ Y $AD-BC$. Después de hacer las operaciones tenemos que $A > B$ y $AD > BC$, con lo cual tenemos que:

   $$detJ = -\left(\frac{p^2\beta_2(B(A-B))}{A^2(Ec+pF)}\right)\left(\frac{A^2\beta_1(c(p-c))}{p^2(AD-BC)}\right) < 0$$

   Usando el criterio traza determinante tenemos que dicho equilibrio $\bar{P} = (x_a^*, y_A^*)$ es un punto silla.

□

El punto silla resulta ser el valor umbral, se puede calcular fácilmente y a partir del cual podemos dividir al cuadrado unitario en regiones que estarán dentro de la cuenca de atracción de los referidos atractores. Gracias a esto podremos obtener algunas recomendaciones de política económica.

4.2.1. Trampas de pobreza

Una trampa de pobreza decimos que es un equilibrio de niveles bajos cuando estamos en una situación en la cual el desempeño de la economía es pobre en sus cuentas mas relevantes. Pero a tal situación se llega como un resultado conjunto de individuos que maximizan sus preferencias.
Steven Durlanuf (2003) enriquece la noción de trampa de pobreza a través de una dimensión espacial: introduce la idea de acciones elegidas por los agentes dependen de la composición del grupo o grupos a los cuales pertenece y entre los que interactúa a lo largo de su existencia. A dicha interdependencia de conducta le llama efectos de vecindad.
Estos "efectos de vecindad" son los que explican por qué las trampas de pobreza existen y persisten. Así una trampa de pobreza es aquella donde una comunidad de agentes económicos en el que los agentes de bajo perfil se auto-reproducen manteniendo el nivel bajo como consecuencia de los efectos de vecindad.
Observemos pues que el punto silla $\bar{P}$ depende de los valores paramétricos: c, p y γ, esto es de los costos de educación, bono de eficiencia y las tazas impositivas al ingreso, dependiendo de dichos parámetros podemos manipular el valor umbral y así definir a partir de cuales distribuciones en ambas poblaciones podremos dirigirnos hacia el equilibrio $(1,1)$, pues el equilibrio $(0,0)$ es una *trampa de pobreza*.
El equilibrio $(0,0)$ es una trampa de pobreza en el sentido de que una economía empieza con un número bajo de agentes de perfil alto experimenta una disminución de agentes de perfil alto que eventualmente no conduce a un agente de perfil alto a ser imitado y así proliferar. Esto es la estabilidad para el punto fijo $(0,0)$.
Note que las trayectorias que conducen al equilibrio están formadas por perfiles estratégicos evolutivamente estables por lo que una vez que el sistema se establece en esa trayectoria, los individuos seguirán prefiriendo los perfiles bajos, a no ser que el sistema se perturbe lo suficiente como para sacar al sistema de la cuenca de atracción de tal equilibrio. Las cuencas de atracción están separadas por el punto silla $\bar{P}$.
Definamos pues qué es una trampa de pobreza, lo cual resume lo dicho hasta ahora. Para un juego multi-poblacional, en forma normal, en el que por S^i denotamos al conjunto de distribuciones posibles sobre las estrategias puras de l *i-ésima* población, siendo $i \in \{1, ..., n\}$ en el que, un conjunto de normas de conducta definen un sistema de dinámico el que a su vez determina el flujo en cada población, de los individuos que pueden modificar su comportamiento en cada instante.

Definición 4.11 (Trampa de pobreza)**.** *Entendemos por trampa de pobreza, un equilibrio de Nash, Pareto dominado, el que es a la vez un estado estacionario del sistema dinámico, determinado por las normas de conducta, que define un atractor local, al que convergen trayectorias conformadas por perfiles estratégicos evolutivamente estables.*

Como se ve entonces, salir de una trayectoria que converja a una trampa de pobreza, implica cambios suficientemente grandes, en el sentido de que requiere cambios altos en las condiciones iniciales.
En el siguiente capítulo veremos qué se necesita para tener cambios suficientemente grandes y salir si es que se está en una trampa de pobreza.

4.2.2. La importancia de las condiciones iniciales.

Haremos un ejercicio númerico para saber qué ocurre cuando las condiciones iniciales están por debajo ó por arriba del valor umbral.
Las siguientes gráficas representan el diagrama de fase del sistema 3.9a y 3.9c. Con los siguientes valores numéricos:

$$\begin{array}{cccc} U = 14,000 & V = 10,000 & W = 4,000 & c = 1000 \\ u = 8,000 & v = 7,000 & w = 2500 & p = 2000 \end{array}$$

- Si consideramos las distribuciones $(x_0, y_0) = (0.5, 0.5) < (x_a^*, y_A^*)$, la economía evolucionará por trayectorias definidas por soluciones del sistema dinámico 3.9a y 3.9c, a lo largo de las cuales $\forall t > t_0$,

x_1 es una mejor respuesta para y_1 y a la vez y_1 es una mejor respuesta para x_1, siendo $(x_1(t), y_1(t))$ la solución del sistema 3.9a y 3.9c. con las condiciones iniciales (x_0, y_0).

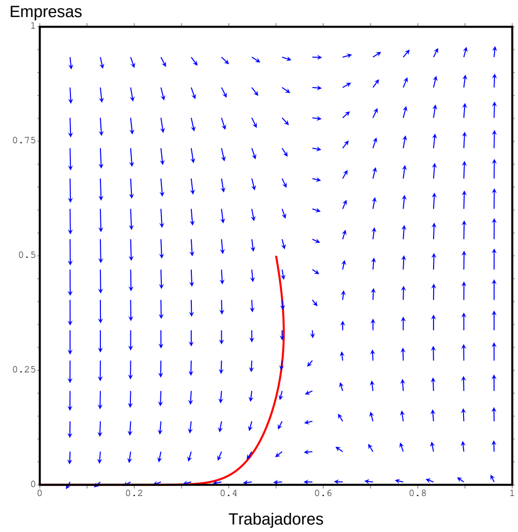

Figura 4.1: Trayectoria con condiciones iniciales $(x_0, y_0) < (x_a^*, y_A^*)$

Se cumplirá además que $x_1 \to (0, 1)$ y $y_1 \to (0, 1)$ cuando $t \to \infty$. Luego en conjunto la economía converge al atractor $(0, 1; 0, 1)$.

- Pero por otro lado si las condiciones iniciales de la economía, definidas por las distribuciones poblacionales iniciales $(x_0, y_0) = (0.5, 0.75) > (x_a^*, y_A^*)$, obtenemos trayectorias a lo largo de las cuales la economía converge a $(1, 0; 1, 0)$.

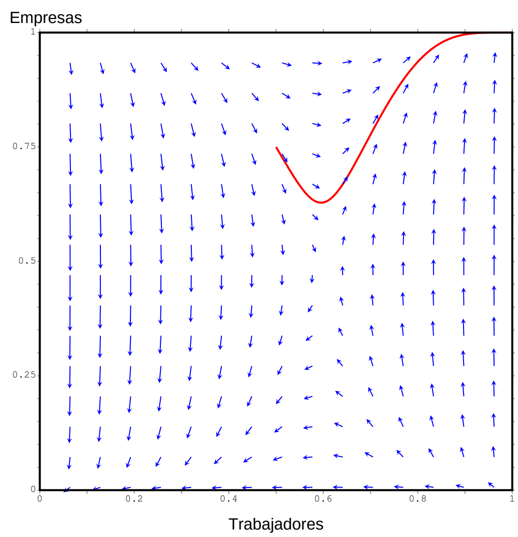

Figura 4.2: Trayectoria con condiciones iniciales $(x_0, y_0) > (x_a^*, y_A^*)$

Las gráficas aquí mostradas fueron generadas con WxMaxima un programa de cáculo simbólico libre.

Capítulo 5

Superar la trampa de pobreza

El objetivo de un planificador central es no estar en una trampa de pobreza, para lo cual como ya lo hemos dicho se necesita o que las condiciones iniciales sean mayores al valor umbral $\overline{P}$ o bien, reducir dicho valor umbral mediante políticas orquestadas por el planificador.
Como es complicado cambiar las condiciones iniciales tan drásticamente, estudiaremos el caso de reducir el valor umbral, es decir nuestro objetivo es:

$$\bar{P} = (x_a^*, y_A^*) = (\frac{(1-\gamma)(V-u)+W-w}{(1-\gamma)(U-u+V-v)-p}, \frac{c}{p}) \to (0,0)$$

para lo cual debe tenerse en cuenta:

1. Para disminuir el valor de y_A^* se debe disminuir el costo de educación c o bien aumentar el valor del p.

2. La tasa de impuestos γ juega un papel crucial para disminuir el valor x_a^*. Pues el valor para el cual x_a^* es cero es:
$$\gamma^* = \frac{V+W-u-w}{V-u} = 1 + \frac{W-w}{V-u} > 1.$$
Con lo que tenemos que en realidad este impuesto se transforma en un subsidio para aquellos agentes que cambien de un perfil bajo a uno alto.

5.1. Análisis numérico

Para poder observar como se comporta dicho sistema, daremos valores numéricos con el fin de observar cómo al cambiar los parámetros, sin cambiar las condiciones iniciales, podemos salir de una trampa de pobreza.

Los parámetros serán: el impuesto sobre los beneficios de las firmas, el costo de educación y el bono o prima de eficiencia, veamos que con los parámetros adecuados tendremos el efecto deseado: salir de la trampa de pobreza. Por otro lado si los parámetros no son los adecuados seguiremos convergiendo a una trampa de pobreza.

Con los siguientes valores haremos los respectivos cálculos:

$$\begin{array}{ccc} U = 14,000 & V = 10,000 & W = 4,000 \\ u = 8,000 & v = 7,000 & w = 2500 \end{array}$$

Y las condiciones iniciales serán $P_0 = (0.5, 0.5)$.

- Al dejar fijo el bono por educación a $p = 2000$ y $\gamma = 0.1$, cuando el costo a la educación se baja lo suficiente, salimos de dicha trampa, de otra forma seguimos en ella.

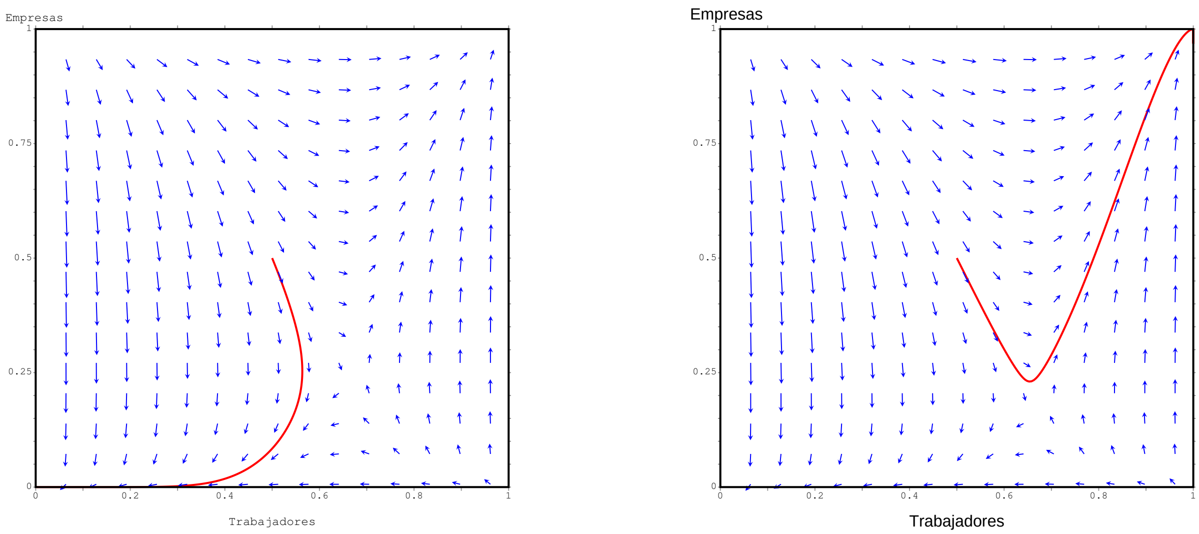

Figura 5.1: Gráficas con $c_1 = 500$ y $c_2 = 390$ respectivamente

Nótese que en realidad dicho costo debe ser mucho menor con respecto al bono de eficiencia p.

- Ahora al dejar fijo el costo $c = 390$ y $\gamma = 0.1$, y variar el bono a la educación observamos que en realidad el el bono p no puede ser tan alto, pues de ser así entramos en la trampa de pobreza.

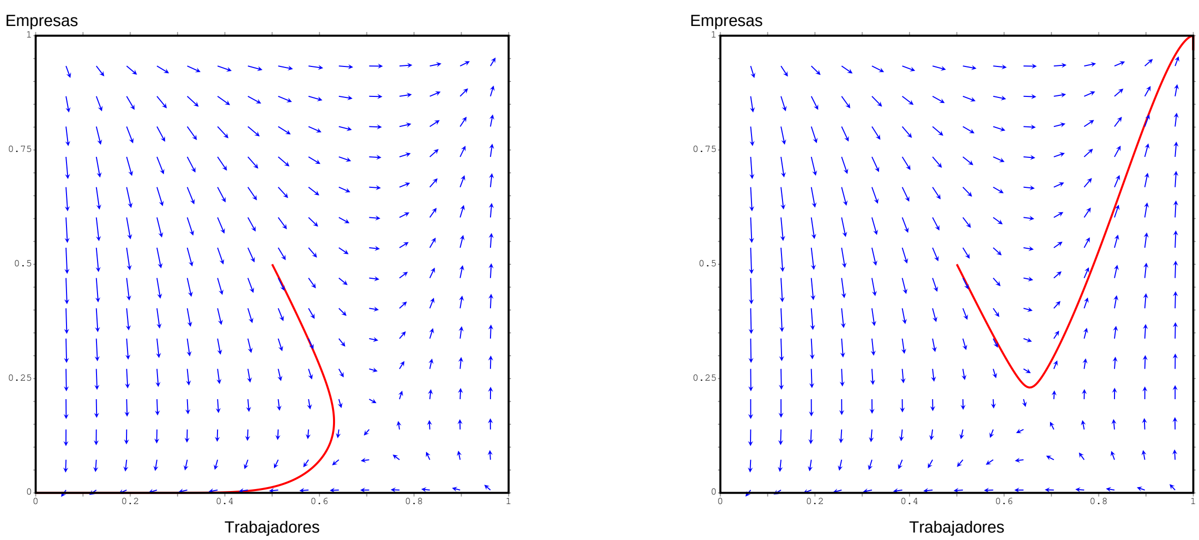

Figura 5.2: Gráficas con $p_1 = 2300$ y $p_2 = 2000$ respectivamente

- Al tomar un valor menor para p ocurre:

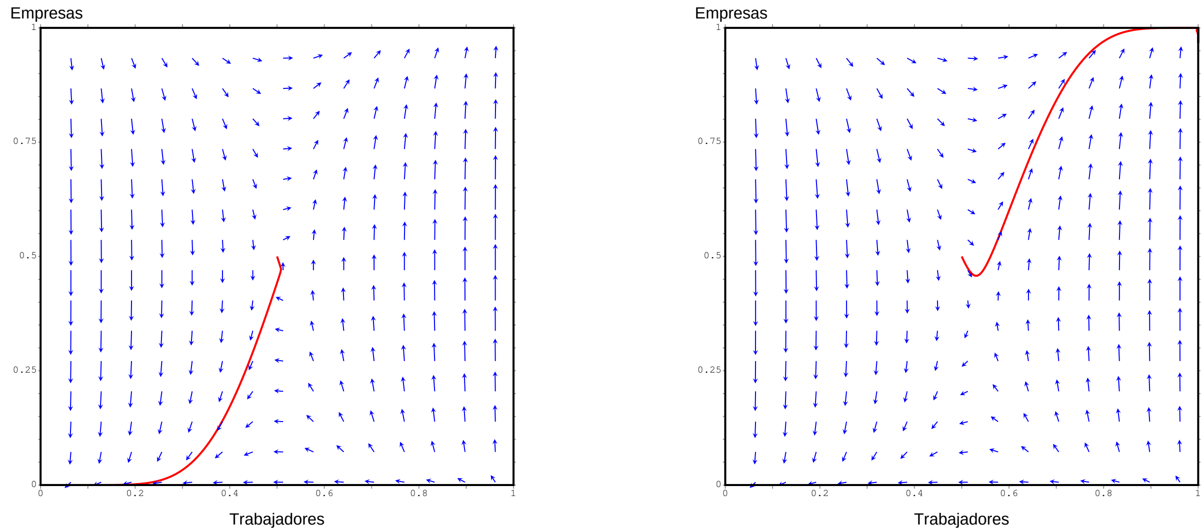

Figura 5.3: Gráficas con $p_1 = 828$ y $p_2 = 1000$ respectivamente

Es decir, el premio está acotado entre 828 y 2000.

5.2. El problema dinámico del planificador

Otro método de calcular los parámetros óptimos es hacer uso del Hamiltoniano, esto en base al trabajo de Ricardo Acevedo; Nathalia Almeida (2010) [5], pues estamos suponiendo que tenemos un planificador central que quiere maximizar los impuestos, costos y bonos para salir si es que se está en la trampa de pobreza.
En este caso la función a maximizar tendrá la siguiente estructura:

$$\max_{\gamma,\tau,c,p} \int_0^\infty [\tau(Wx_A + wx_B)) + \gamma(Uy_A + uy_b) - (cx_A + py_A)]e^{rt}dt.$$

Es decir el planificador central recauda los impuestos de los agentes de la economía los cuales usa para cubrir los costos de educación y las bonificaciones de eficiencia.Las variables de control serán: γ, τ, c, p. Queremos determinar cuales son los parámetros adecuados sujeto a las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned}
\dot{y}_A &= y_A(1-y_A)\beta_1 \left[\frac{x_a[(1-\gamma)(U-u+V-v)-p]+(1-\gamma)(u-V)-W+w}{x_a[(1-\gamma)(U-u-V+v)-p]+(1-\gamma)(u+V)-W-w}\right] \\
\dot{x}_a &= x_a(1-x_a)\beta_2 \left[\frac{py_A - c}{y_A[2(1-\tau)(W-w)+p]+2(1-\tau)w-c}\right] \\
x_A &= x_0 > 0 \\
y_A &= y_0 > 0.
\end{aligned}$$

Pues tenemos que tomar en cuenta que estamos en una economía que se rige por la imitación, con las condiciones iniciales mayores a cero. Este sistema se resuelve con la metodología de Pontryagin. [1] Sin

[1]Parte de la metodología se ve en el apéndice.

embargo resolverlo se complica, por lo que se deja como problema abierto y con planes de resolverlo en un futuro inmediato.

Capítulo 6

Conclusiones

Estudiamos un juego de coordinación con su dinámica evolutiva generada mediante un proceso de imitación. Aquellos agentes revisores que no estén de acuerdo con su comportamiento, por que su elección no les retribuye lo suficiente, deciden cambiar buscando comportamientos que les permitan obtener mejores resultados.

Analizamos un par de criterios para elegir cómo cambiar la elección de un agente revisor: cambiar según la conducta que siga la mayoría, con lo cual imitaremos al primero que se cruce frente a nosotros; otro criterio es el de hacer una muestra aleatoria simple y elegir aquella conducta con mayor utilidad esperada.

Esta conducta de imitación es racional, pues los individuos están maximizando su utilidad esperada. Sin embargo, como los individuos imitan de acuerdo a su entorno puede, que en realidad se tengan resultados ineficientes, desde el punto de vista social. Cuando se tengan pequeñas modificaciones y éstas en realidad no afecten el resultado estamos en una estrategia evolutivamente estable, lo cual puede ser una ventaja o un serio problema. Esto dependiendo de a dónde se dirige dicha dinámica.

El sistema dinámico aquí planteado tiene 2 repulsores, 2 atractores (uno es equilibrio alto y el otro es equilibrio bajo) y por último un punto silla el cual es el valor umbral. Cuando la dinámica se dirige a un equilibrio de perfiles altos no hay nada que hacer, simplemente dejamos que siga su proceso. No obstante si estamos en el caso que nos dirigimos a un equilibrio bajo y como ya dijimos estamos en una estrategia evolutivamente estable, pequeños cambios nos dejarán en el mismo lugar con lo cual debemos de cambiar drásticamente las condiciones iniciales o bien superar el valor umbral.

Las condiciones iniciales en este caso, las distribuciones de las poblaciones iniciales, juegan un papel importante pues con ellas se pueden determinar las trayectorias, las cuales no representan otra cosa más que la evolución de las distribuciones de cada población a lo largo del tiempo, convergiendo a los atractores ya mencionados.

Como vemos, la economía puede converger a un equilibrio bajo aún cuando se basa en estrategias racionales. Para salir necesitamos que el porcentaje de las poblaciones de agentes de perfiles altos superen el valor umbral, para lo cual es necesario modificar los parámetros como los costos de educación, bonos a la educación e impuestos. Un resultado interesante de este análisis es que en realidad no podemos poner un premio demasiado alto pues esto nos lleva al equilibrio bajo, por otro lado tampoco podemos poner un premio muy bajo pues de nuevo nos lleva a un equilibrio bajo, dicho premio debe estar acotado.

Concluimos que usar sólamente la elección racional libre de los agentes económicos no es suficiente para salir del equilibrio bajo si es que las condiciones iniciales no eran las correctas, es necesario que se modifiquen los parámetros ya mencionados y así tener el efecto deseado.

Apéndice

Álgebra del sistema 23

Para las empresas el sistema quedaría de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
\dot{y}_A &= y_A(1-y_A)\lambda_1\beta_1[E_A-E_B] \\
&= y_A(1-y_A)\frac{1}{E_A+E_B}\beta_1[E_A-E_B] \\
&= y_A(1-y_A)\beta_1\{[x_a((1-\gamma)U-W-p)+(1-x_a)(1-\gamma)u-W)] \\
&- [x_a((1-\gamma)v-w)+(1-x_a)((1-\gamma)V-w)\}/\{[x_a((1-\gamma)U-W-p)+(1-x_a)(1-\gamma)u-W)] \\
&+ [x_a((1-\gamma)v-w)+(1-x_a)((1-\gamma)V-w)\} \\
&= y_A(1-y_A)\beta_1\left[\frac{x_a[(U-v)(1-\gamma)-p)]+(1-x_a)(1-\gamma)(u-V)-W+w}{x_a[(1-\gamma)(U+v)-p)]+(1-x_a)[((1-\gamma)(V+u)]-W-w}\right] \\
\dot{y}_A &= y_A(1-y_A)\beta_1\left[\frac{x_a[(1-\gamma)(U-u+V-v)-p]+(1-\gamma)(u-V)-W+w}{x_a[(1-\gamma)(U-u-V+v)-p]+(1-\gamma)(u+V)-W-w}\right]
\end{aligned}$$

Mientras que para los trabajadores tenemos:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_a &= x_a(1-x_a)\lambda_2\beta_2[E_a-E_b] \\
&= x_a(1-x_a)\frac{1}{E_a+E_b}\beta_2[E_a-E_b] \\
&= x_a(1-x_A)\frac{\beta_2(py_A-c)}{2(Wy_A+(1-y_A)w)(1-\tau)+py_A-c} \\
\dot{x}_a &= x_a(1-x_A)\frac{\beta_2(py_A-c)}{y_A[2(1-\tau)(W-w)+p]+2(1-\tau)w-c}
\end{aligned}$$

Problema de Maximización

Escribiremos el Hamiltoniano correspondiente

$$\begin{aligned}
H(x_a,y_A,\lambda,\mu,t) &= \tau(Wx_a+wx_b)+\gamma(Uy_A+uy_b)-(cx_A+py_A) \\
&+ \lambda y_A(1-y_A)\frac{\beta_1[x_a((v-U)(1-\gamma)-p]-(1-x_a)((1-\gamma)(u-V)-W-w]}{x_a[(1-\gamma)(U+v)-W-w-p]+(1-x_a)((1-\gamma)(V+u)-W+w)} \\
&+ \mu x_a(1-x_a)\frac{\beta_2(py_A-c)}{2(Wy_A+(1-y_A)w)(1-\tau)+py_A-c}
\end{aligned}$$

Donde λ,μ son los multiplicadores de Lagrange.

Condiciones de primer orden

Las condiciones de primer orden vienen dadas por:

- $\dfrac{\partial H}{\partial \gamma} = 0$
- $\dfrac{\partial H}{\partial \tau} = 0$
- $\dfrac{\partial H}{\partial c} = 0$
- $\dfrac{\partial H}{\partial p} = 0$

Condiciones de Euler

Las condiciones de Euler vienen dadas por:

$$\begin{aligned} \dot{\lambda} &= -\frac{\partial H}{\partial x_A} \\ \dot{\mu} &= -\frac{\partial H}{\partial y_A}. \end{aligned}$$

Condiciones de transversavilidad

$$\begin{aligned} \lim_{t \to \infty} \lambda x_A e^{-rt} &= 0, \\ \lim_{t \to \infty} \mu y_A e^{-rt} &= 0. \end{aligned}$$

Lo que sigue es resolver el sistema con base en los sistemas de ecuaciones que tenemos, y así encontrar los impuestos costos y bonos necesarios. La dificultad radica en que el álgebra empleada se vuelve un poco complicada para llevarla a cabo aquí.

Bibliografía

[1] E. Accinelli; Edgar Sánchez Carrera. "Los fundamentos estratégicos de las trampas de pobreza". *Perspectivas*, Volumen 4 , Junio 2010

[2] E. Accinelli; Edgar Sánchez Carrera."Imitación y juegos evolutivos en Economía"

[3] E. Accinelli;Silvia London; Lionello F. Punzo ;Edgar Sánchez Carrera. "Complementariedades dinámicas, eficiencia y equilibrio de Nash en un modelo de firmas y trabajadores". *EconoQuantum*,Volumen 6, Núm. 1 2009

[4] Vega Arredondo.*Evolution, Games, and Economic Behaviour.* Oxford University Press. 1996.

[5] Ricardo Azevedo Araujo; Nathalia Almeida de Souza "An evolutionary game theory approach to the dynamics of the labour market: A formal and informal perspective". *Structural Change and Economic Dynamics*, 2010.

[6] Atle Seierstad; Knut Sydsaeter. Optimal Control Theory with Economic Applications.Advanced Textbooks in Economics, Volumen 24. University of Oslo. 1987

[7] Webb James,*Game theory Decisions, Interaction and Evolution*, Springer, 2007.

[8] William H. Sandholm,*Population Games and Evolutionary Dynamics.* The MIT Press. 2010

[9] Weibull, Jäorgen. *Evolutionary Game Theory.* The MIT Press. 1995

[10] Edgar J. Sánchez Carrera. *Imitation and evolutionary stability of poverty traps.* Springer Science+Business Media LLC. Agosto 2011.

[11] Accinelli. *La teoría de juegos evolutivos, naturaleza y racionalidad.* Cátedra Bolívar.Temas de Teoría Económica y su Método 15. Documento 117

[12] C. Henry Edwards; David E. Penney, *Ecuaciones diferenciales con valores en la frontera.* Pearson Edition. 2009