Sobre la existencia del equilibrio en una economía competitiva: Análisis de la teoría del valor de Gérard Debreu.

José Alejandro Barrientos Suárez

20 de junio de 2014

Índice general

Capítulo 1

Introducción.

La importancia del estudio del equilibrio general en la teoría económica, se sustenta en tratar de generar un entendimiento integral de los procesos de producción, consumo y la formación de precios dentro de una economía de uno o varios mercados.

En un mercado, se establece que los precios y producción de las mercancías o los bienes, incluyendo el precio del dinero y las tasas de interés, se encuentran relacionadas. Por ejemplo, la variación en el precio del trigo, puede afectar el precio de otro bien (ejem. el pan). Si el consumo del pan, depende de las preferencias sobre el pan, la demanda del pan puede verse afectada por un cambio en el mercado de trigo a nivel internacional. Por consecuencia, la teoría establece que calcular el precio de equilibrio de un solo bien, requiere un análisis de las diferentes mercancías que se encuentren disponibles en la economía.

La aportación que Gérard Debreu brinda en su análisis de equilibrio general en Teoría del Valor y de lo cual es objeto de estudio este documento, obedece a presentar una generalización de los elementos que demuestran la existencia del equilibrio en una economía que cumple ciertas hipótesis, tanto en los conjuntos de producción, como en los de consumo.

1.1. ¿Por qué es importante demostrar la existencia del equilibrio en una economía?

Demostrar la existencia del equilibrio en una economía, es fundamental para brindar una validación a los teoremas del bienestar; ya que no tendría un sentido lógico hablar de ellos, si previamente no se demostrara la existencia del equilibrio. En el sentido estricto, la demostración de la existencia del equilibrio en una economía, permite establecer como los productores y consumidores mantienen una igualdad entre ofertas y demandas bajo un determinado conjunto de precios; este resultado se obtiene a partir de la aplicación de los denominados teoremas de punto fijo.

Entonces, bajo este hecho particular surge la siguiente pregunta: **¿por qué utilizar los teoremas del punto fijo (Brouwer y Kakutani)[1] [2] para demostrar el equilibrio entre oferta y demanda en una economía?.**

La respuesta a la pregunta del parrafo anterior parece ser muy intuitiva, por ejemplo, el teorema de punto fijo de Brouwer especifica las condiciones bajo las cuales una función f sobre un dominio dado, tiene al menos un punto fijo, es decir $f(x) = x$; esto nos dice que entre todas las transacciones que se lleven a cabo en un mercado, siempre existirá un punto de equilibrio donde la demanda de bienes y dotaciones iniciales[3] de los consumidores, se anulara con la oferta de los productores.

Es posible establecer que el punto fijo, tanto de una función, como de una correspondencia; es el punto en el cual se optimizan tantos las preferencias de los consumidores, como los planes de producción de las firmas, y ademas se cumple la ley de Walras para cualquier nivel de precios.

Adicionalmente consideremos lo siguiente: al centrar nuestro campo de análisis sobre la teoría del equilibrio general, establecemos que existe una cantidad m de consumidores y n de productores, los cuales deben de llegar a una situación de equilibrio de mercado; sin embargo, es importante determinar que

[1]Demostrar la existencia del equilibrio walrasiano, es una prueba equivalente a la demostración del teorema del punto fijo de Brouwer, es decir, la existencia de un punto fijo para cualquier función continua de un simplex $n-dimensional$ a sí mismo. Hal R. Varian [1992:373-377]

[2]El teorema de punto fijo de Kakutani es una generalización del teorema de Brouwer para correspondencias (funciones que llevan puntos a conjuntos), la prueba permite establecer la existencia de un punto fijo de una correspondencia, definida en un subconjunto compacto y convexo del espacio euclidiano, es decir, un punto es enviado bajo la función de un subconjunto que también la contiene. En términos de la teoría económica, la demostración de la existencia del equilibrio, auxiliandonos del teorema de Kakutani, nos permite demostrar el punto donde el total de recursos de la economía es igual a la demanda total a un determinado nivel de precios y ademas se cumple la ley de Walras.

[3]Es la asignación de la que parten los consumidores, están formadas de bienes que lleva cada uno de estos agentes al mercado; tras intercambiar algunos de estos bienes, terminan obteniendo una asignación final.

análogamente, existen m funciones de consumo y n funciones de producción, lo cual convierte este análisis en un ejercicio un poco complejo.

De esta manera, se establece que determinar un equilibrio general dentro de un sistema de múltiples funciones e incógnitas es el objetivo primordial de la prueba; de tal forma que los teoremas del punto fijo se convierten en una herramienta necesaria que permite identificar el punto donde la demanda total y oferta total de recursos en la economía se mantienen en equilibrio bajo un determinado vector de precios relativos.

1.2. Objetivos de la monografía.

1.2.1. Primer objetivo.

El primer objetivo, consiste en generar una versión detallada y ampliada de los conceptos teóricos de Equilibrio General presentados por Gérard Debreu en Teoría del Valor[1959]. Este objetivo se realiza, conservando la estructura original de la obra de Debreu; sin embargo, se complementa con la adición de ejemplos, proposiciones y teoremas, de autores como Andreu Mas-Colell [1989, 1995], W. Hildendrand y A.P. Kirman [1982], Juan Horváth [1969], Hal R. Varian [1992], K.C. Border [2013] y notas del curso de Equilibrio General, dictado por el Dr. Elvio Accinelli en 2013, en el Posgrado de Economía Matemática de la Universidad Autónoma de San Luis Potosí; entre material de otros autores.

1.2.2. Segundo objetivo.

El segundo objetivo, es presentar una demostración de la existencia del equilibrio en una economía competitiva, tomando como base los elementos presentados en el objetivo anterior.

1.2.3. Tercer objetivo.

Generar un producto bibliográfico que pueda ser consultado por los compañeros alumnos de la Universidad Autónoma de San Luis Potosí, a manera de notas introductorias para un estudio formal de la teoría del equilibrio general.

1.2.4. Breve nota histórica sobre Teoría del Valor.

Teoría del Valor: Un análisis axiomático del equilibrio económico; escrito por Gérard Debreu, es uno de los libros de teoría económica más lúcidos y elegantes del siglo XX. A partir de un método axiomático, Debreu plantea una explicación sobre el proceso de formación de precios sobre las mercancías en una economía de mercado con propiedad privada, así como la explicación del papel de los precios en un estado óptimo de la economía.

Debreu mantuvo un profundo interés por el estudio de la Teoría del Equilibrio General, en particular por la obra de Léon Walras (1834-1910). Nacido en Francia en 1921, y nacionalizado estadounidense años mas tarde; Gérard Debreu gano el Premio Nobel de Economía en 1983, *por haber incorporado nuevos métodos analíticos en la teoría económica y por su rigurosa reformulación de la teoría del equilibrio general.*

En 1954 junto a Kenneth Arrow, publica un articulo fundamental en la historia económica, *Existencia del Equilibrio para una Economía Competitiva* [Econometrica: Vol. 22, No. 3. (Jul., 1954)]. Años mas tarde en 1959, se edita *Teoría del Valor: Un análisis axiomático del equilibrio económico* [Cowles Foundation Monograph 17, (1959)]; el cual es una version actualizada de la tesis doctoral de Debreu, presentada tres años antes en la Universidad de París. En esta ultima obra, Debreu expone dos problemas centrales de análisis, el primero, versa sobre la explicación de los precios de las mercancías, como resultado de la interacción de los agentes de una economía de propiedad privada a través de mercados, mientras que el segundo problema, exhibe una explicación del papel de los precios, en un estado óptimo de la economía. El análisis que nos brinda Debreu en su obra, gira en torno al concepto de un sistema de precios, o de manera generalizada, a la existencia de una función de valor que se encuentra definida en el espacio de mercancías. [Debreu: 1959:ix]

La obra de Gérard Debreu, y en particular Teoría del Valor, conduce a un cambio radical de los instrumentos matemáticos utilizados en la teoría económica. Este cambio puede ser evidente en el uso de propiedades topológicas y de convexidad, ya que nos proporciona un incremento notable de generalidad y simplicidad en la exposición de la teoría económica.

1.3. Estructura de la investigación.

1.3.1. Producción.

En el capítulo de producción, se estudia el papel de los agentes productores de mercancías (bienes y servicios) en la economía. Se establece que el plan de producción para esta clase de agentes, se encuentra restringido a pertenecer a algún conjunto dado, que esencialmente representa una serie de conocimientos técnicos limitados. El plan de producción para un $j-ésimo$ productor se elige de este conjunto de limitaciones técnicas, para una serie de precios dados; de forma que el productor debe de maximizar sus beneficios, i.e. la suma de sus ingresos menos la suma de todos sus desembolsos. De esta manera, en este capítulo se exhiben los conceptos de productor, de plan de producción y de conjunto de planes de producción posibles; así como las propiedades de tales conjuntos; posteriormente se introduce el concepto de maximización del beneficio del productor, para finalmente exponer como los planes óptimos de producción dependen de los precios.

1.3.2. Consumo.

En el tercer capítulo se estudia el papel del consumidor sobre la economía. El objetivo del consumidor es seleccionar un plan de consumo en un espacio de bienes. El consumidor debe de considerar ciertas restricciones: en primer lugar, la naturaleza del bien, así como su disponibilidad, el tiempo de adquisición, etc.; en segundo lugar, debe tomar en cuenta los precios y su ingreso; el valor de su plan de consumo no debe exceder su nivel de riqueza. Cumpliendo estas dos condiciones se selecciona un plan de consumo al que ningún otro es preferido. De esta manera, en este capítulo se definen los conceptos referentes al consumidor tales como: plan de consumo, conjunto de planes de consumo posibles, preferencias y sus propiedades; para posteriormente analizar la restricción de presupuestal, para finalmente exhibir los planes de consumo óptimos que dependen de los precios y el ingreso.

1.3.3. Equilibrio.

En este capítulo, se exhibe el concepto central de la monografía. En la presente sección se retoman los conceptos definidos en los capítulos anteriores. De manera precisa, es establece que dentro de la economía existen una serie de recursos totales (cantidades disponibles de las diversas mercancías), denotadas estas como dotaciones iniciales de los agentes económicos. Una economía se caracteriza por tener un número m de consumidores (con igual numero de conjuntos de consumo y preferencias), n productores o firmas (caracterizados por sus conjuntos de producción), así como los recursos totales que poseen los agentes en un determinado momento.

Para el desarrollo de esta sección, se considera una clase especial de economías: economías de propiedad privada; donde se establece que los consumidores son los propietarios de los recursos, y que simultáneamente, mantienen control sobre el proceso de producción, dicho de manera análoga; los agentes consumidores mantiene una participación de propiedad sobre la(s) firma(s). De esta manera, los consumidores-accionistas determinan su ingreso, en función a su propia restricción presupuestaria y a la maximización de beneficios de la firma.

1.4. Metodología del documento.

El presente documento mantiene un análisis axiomático de la matemática como herramienta de análisis en la teoría economía.

1.4.1. Motivación del tema.

Las principales cuestiones en el estudio de la teoría del equilibrio general se refiere a las condiciones bajo las cuales se garantiza la existencia, unicidad y estabilidad del equilibrio.

La motivación principal derivada de este documento, se enfoca únicamente en demostrar la existencia del equilibrio en una economía bajo determinadas hipótesis de producción y consumo de los agentes.

Para argumentar un mayor rigor con respecto a la selección del tema, se procede a enunciar de manera intuitiva los teoremas del bienestar y la relación con respecto a la existencia del equilibrio.[4]

Primer teorema de la economía del bienestar. Los equilibrios de mercado son eficientes en el sentido de Pareto.[5]

[4] Las demostraciones de los teoremas del bienestar, pueden ser consultadas en Análisis Microeconómico de Hal Varian Capitulo 17, paginas 381-384.

[5] Si podemos encontrar una forma de mejorar el bienestar de alguna persona sin empeorar el de ninguna otra, tenemos una mejora en el sentido de Pareto. Si una asignación puede ser mejorable en el sentido de Pareto, esta asignación se denomina ineficiente en el sentido de Pareto; si no puede ser mejorable en el sentido de Pareto, esta asignación se denomina eficiente en el sentido de Pareto. [Hal R. Varian: 2011 8a:15]

Adicionalmente se establece que los consumidores son racionales, existe una ausencia de externalidades y la información es perfecta. Si bien existen argumentos contrarios que determinan que estas condiciones son muy poco realistas; se puede argumentar a favor que las fuentes de ineficiencia del mundo real, no se deben a la naturaleza del sistema (de mercado), sino que se generan debido a la existencia de alguna falla de mercado.[6]

Segundo teorema de la economía del bienestar. Aunque cada equilibrio es eficiente, no necesariamente cada asignación eficiente es un equilibrio de mercado.

El segundo teorema establece que cada asignación eficiente puede sostenerse por un conjunto de precios. Análogamente, todo lo que se requiere para alcanzar un resultado particular es una redistribución de las dotaciones iniciales de los agentes después de lo cual el mercado se ajustará sin necesidad de intervenir. Esto sugiere que la eficiencia y la equidad pueden abordarse por separado sin necesidad de favorecer una en demérito de la otra.

Algunos economistas matemáticos como Hildendrand y Kirman [1982:18] consideran que demostrar la existencia del equilibrio es un resultado más fuerte que demostrar los teoremas del bienestar. Para garantizar esta existencia, es necesario que se cumplan ciertas hipótesis (continuidad, monotonía y convexidad) sobre las preferencias de los consumidores y las dotaciones iniciales; ademas los conjuntos de producción deben ser convexos.

1.5. Descripción intuitiva de la prueba.

La teoría del equilibrio general estudia la oferta y demanda de una economía con mercados multiples, con el objetivo de demostrar que todos los precios se mantienen en equilibrio, esta teoría analiza el mecanismo por el cual las decisiones de los agentes económicos se coordinan a través de todos los mercados.

Intuitivamente, la prueba exhibe la interrelación de los agentes económicos bajo supuestos de racionalidad, tales como optimizar sus cestas de consumo y planes de producción dentro de una economía de propiedad privada, es decir,

[6]Causas de fallas de mercado: Calculo inadecuado de costos y beneficios, inadecuadas estructuras de mercado, competencia imperfecta, información asimétrica, externalidades, bienes públicos, entre otros.

donde los consumidores mantienen una participación sobre los beneficios de las firmas.

La demostración de la existencia del equilibrio, se basa en dos pasos básicos. En primer lugar se presenta el concepto de economías, en el cual se describe la relación existente entre la teorías de la producción y consumo, permitiéndonos a partir de estas primeras definiciones, generar una serie de elementos constructivos, que establecen el eje básico de nuestro estudio; por ejemplo, se define la demanda neta y excedente, así como el equilibrio de mercado y el conjunto de equilibrios en una economía. Posteriormente, se estudia el concepto de estados realizables de la economía, distinguiendo una serie de propiedades tales como la acotación, compacidad y convexidad; que son condiciones necesarias para demostrar la existencia del equilibrio, y que a su vez son heredadas a los conjuntos de consumo y producción que existen en la economía. Después de haber exhibido las primeras definiciones y estudio de las propiedades de los estados realizables, se procede a presentar un resultado preliminar enfocado en demostrar la existencia del equilibrio en una economía competitiva de propiedad privada, sin embargo, este preliminar se considera más una condición que un resultado para llegar a una demostración más general; en esta parte, se demuestra que la transferencia de mercancías entre los agentes de la economía es igual al total de recursos existentes.

Finalmente, se presenta una demostración general sobre la existencia del equilibrio, bajo una serie de condiciones tales como la compacidad y convexidad de los conjuntos de consumo; la continuidad, convexidad y no saciabilidad de las preferencias; la convexidad, libre disposición de mercancías y posibilidad de inacción de los planes productivos. Bajo estos supuestos, se procede a normalizar la economía dentro de subconjuntos de consumo y producción convexos y compactos, bajo los cuales se establecen las propiedad de los conjuntos necesarias que permiten demostrar la existencia del equilibrio.[7]

[7]Es importante establecer, que las correspondientes propiedades matemáticas (convexidad, acotación, conjuntos cerrados o abiertos, etc.) para los conjuntos de consumo, producción, preferencias, dotaciones iniciales, tipos de economía, equilibrio, entre otros; se encuentran ampliamente documentados y referenciados en el desarrollo de este documento.

Capítulo 2

Teoría del productor.

2.1. Introducción.

En este capítulo se analiza el papel de los productores generadores de mercancías dentro de la economía. Se establecen las primeras definiciones referentes a las mercancías, el papel de los precios, así como los conjuntos de producción y sus respectivas hipótesis.

2.2. Mercancías.

Siguiendo a Debreu [1959:37] una mercancía se caracteriza por tres propiedades: descripción física, disponibilidad temporal y disponibilidad espacial. Bajo los argumentos de estas propiedades, se dice que a pesar de que dos mercancías sean físicamente homogéneas, si existen en momentos temporales distintos, entonces se dice que no son iguales.

La cantidad de una mercancía, es expresada por un número real. Se supone que el número de mercancías distintas disponibles es finito e igual a ℓ (indexado por $L = 1, ..., \ell$). De este modo, el espacio de mercancías es el espacio euclídeo $\mathbb{R}^\ell$.

2.3. Precios.

A cada una de estas mercancías, tomando como ejemplo la $h - esima$, se le asocia un número real, su precio, denotado por p_h. Formalmente estos precios son representados por el vector precios,

$$p = (p_1, ..., p_h, ..., p_\ell) \in \mathbb{R}^\ell$$

El precio p_h de una mercancía puede ser positivo,i.e. $p_h > 0$, si es que la mercancía es escasa; puede tener un valor de $p_h = 0$ si es una mercancía publica o libre; o negativo, i.e. $p_h < 0$ si es una mercancía nociva.

El hecho de que una mercancía tenga un precio positivo, negativo o nulo, no es bajo ninguna circunstancia una propiedad intrínseca de las mercancías; sino que dependen directamente de la tecnología de las firmas, de los gustos de los agentes, de los recursos existentes en la economía, etc.

2.4. Conjuntos de producción.

Se supone que existe un número entero positivo n de productores, cada uno de ellos será indicado por un índice $j = 1, ..., n$. Para un productor, por ejemplo el $j-\acute{e}simo$, un plan de producción es una elección de las cantidades de *insumos* y *bienes* que selecciona este agente, para llevar a cabo su plan de producción.

Definición 2.1. El **conjunto de posibilidades de producción** de la firma j es denotado por Y_j, el cual es el conjunto de planes de producción técnicamente viables para esta empresa. $Y_j \subset \mathbb{R}^\ell$.

Definición 2.2. Plan de producción. Un **plan de producción** y_j es un vector $\ell - dimensional$, i.e. $y_j \in Y_j \subset \mathbb{R}^\ell$, $j = 1, ..., n$.

Definición 2.3. Dado un plan de producción y_j para cada productor $j = 1, ..., n$,

$$y = \sum_{j=1}^{n} y_j$$

se denomina **producción total u oferta total.**

Definición 2.4. El conjunto

$$Y = \sum_{j=1}^{n} Y_j$$

se denomina el **conjunto de producción total.**

La Figura 2.1. siguiente, ilustra los conceptos anteriores para el caso en que existen tres mercancías y dos productores. Las rectas $0, 2$ y $0, 3$ se encuentran en el plano de la pagina, y que la recta $0, 1$ discontinua es perpendicular al plano de la pagina. El conjunto de producción del primer (segundo) productor es la semirrecta cerrada Y_1 (Y_2) en el plano $1,2$ $(2,3)$. Entonces el conjunto de producción total i.e. Y, corresponderá a el angulo sombreado.

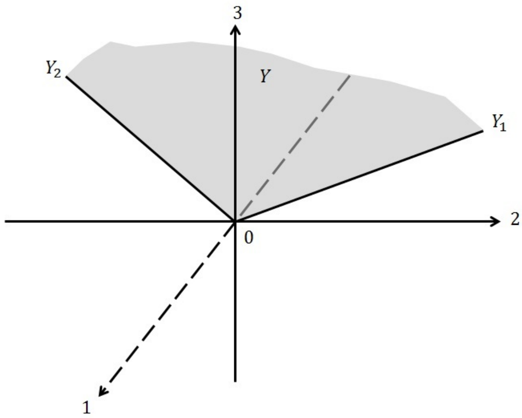


Figura 2.1: Conjuntos de producción.

2.4.1. Hipótesis sobre los conjuntos de producción.

a) Y_j es cerrado.
Es decir, sea $\{y_j^q\}$ una sucesión de producciones; si todas las y_j^q son posibles para el $j - ésimo$ productor, y si $\{y_j^q\} \to y_j^o$, entonces y_j^0 es posible para el $j - ésimo$ productor.

a$'$) Y es cerrado. (Continuidad.)
Se intuye que por la hipótesis de continuidad (a), i.e. Y es cerrado. Sin embargo la sumatoria de conjuntos cerrados Y_j, no necesariamente es cerrado en Y, i.e. $\sum_{j=1}^{n} Y_j = Y_1 + ... + Y_n = Y$, no es necesariamente cerrado para Y.

En este caso, Debreu utiliza la condición matemática de semiindependencia positiva de los conos asintóticos sobre los conjuntos cerrados Y_j, $j = 1, ..., n$. para asegurar que $Y = \sum_{j=1}^{n} Y_j$ es un conjunto cerrado, esta condición ha sido probada a partir del Teorema B.1.

b) $0 \in Y_j$ Posibilidad de inacción.
Es decir, el $j - ésimo$ productor tiene la posibilidad de no hacer nada.

La hipótesis es similar para el conjunto de producción total.

$b')$ $0 \in Y$
Una economía en la que no puede darse ninguna actividad productiva se caracteriza por $Y = \{0\}$, es decir el conjunto de producción consiste en un único punto 0.

c) Imposibilidad de producción libre. $Y \cap \Omega \subset \{0\}$. Donde Ω se define de la siguiente manera:

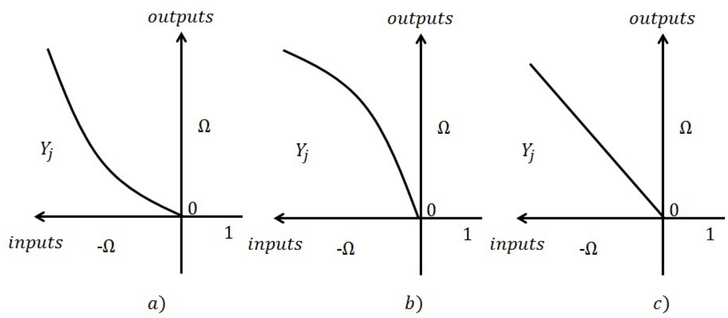
Definición 2.5. El **ortante no negativo** de $\mathbb{R}^\ell$ es el conjunto

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^\ell \mid x \geqq 0\}.$$

Es decir, si los insumos son nulos, los bienes son nulos también.

d) Irreversibilidad de la producción. $Y \cap (-Y) \subset \{0\}$.
Si la producción total y cuyos insumos y bienes no son todos nulos, entonces la producción total $-y$ no es posible. El proceso productivo no es reversible puesto que, en particular, la producción toma un tiempo y las mercancías están fechadas.

Para preparar el estudio de las siguientes tres hipótesis, se introducen las siguientes definiciones.



En el gráfico (a) prevalecen *rendimientos crecientes* a escala si para todo y_j se puede aumentar arbitrariamente la escala de operaciones; b) *rendimientos decrecientes* si se puede disminuir arbitrariamente; y c) *rendimientos constantes* si para todo y_j se pueden cambiar arbitrariamente la escala de operaciones.

e) Aditividad. $(Y_j + Y_j) \subset Y_j$.
Es decir, si y_j^1 e y_j^2 son planes posibles, también lo es $y_j^1 + y_j^2$. Los conjuntos (a) y (c) del gráfico anterior, tienen esta propiedad.

Aplicando (e), si y_j es posible también los es ky_j, donde k es cualquier entero positivo. Por consiguiente (e) implica un cierto tipo de rendimientos crecientes a escala.

f) Convexidad. Y_j es convexo.
Si y_j^1 e y_j^2 son producciones posibles para el $j-\acute{e}simo$ productor, también lo es su promedio ponderado $ty_j^1 + (1-t)y_j^2$ con ponderaciones positivas arbitrarias. Las hipótesis (f) y (b) conjuntamente implican que, si y_j es posible también lo es ty_j para cualquier $t \in [0,1]$; i.e. prevalecen rendimientos decrecientes a escala.
Representa una limitación, ya que se excluyen los rendimientos crecientes a escala, pero aún conserva una gran generalidad, puesto que, en particular es mas débil que la hipótesis de cono convexo que se discute en (g).

f') Y es convexo.
Esta hipótesis es más débil que todos los Y_j son convexos. Las hipótesis (f') y (b'), implica que prevalecen rendimientos decrecientes a escala para Y.

Teorema 2.1. Si todos los Y_j son cerrados y convexos, y si $Y \cap (-Y) = \{0\}$, entonces Y es cerrado.

Demostración Teorema 2.1.

De acuerdo al Teorema B.1., (Anexo B.1.), basta probar que los conos asintóticos son positivos semiindependientes.

Paso 1. Se demostrara que $\sum_j \mathbf{A}Y_j \subset Y$, donde $Y = \sum_{j=1}^m Y_j$. Dado $0 \in Y_j$, existe para cada j, un vector $y_j^0 \in Y_j$ tal que $\sum y_j^0 = 0$.

En virtud de la evidencia de la traslación de los conos asintóticos (Ver Anexo B.1., sección B.1.2.), se tiene que $\mathbf{A}Y_j \subset Y_j - \{y_j^0\}$. El resultado se deduce sumando sobre j.

$$\mathbf{A}Y_j \subset Y_j - \{y_j^0\}$$

Aplicando sumatoria sobre j,

$$\textstyle\sum_j \mathbf{A}Y_j \subset \sum Y_j - \{\sum y_j^0\}$$

como $Y = \sum_{j=1}^m Y_j$ y $\sum y_j^0 = 0$, se tiene que

$$\textstyle\sum_j \mathbf{A}Y_j \subset Y$$

donde concluye la primera parte de la demostración.

Paso 2. Finalmente se demostrara que $y_j \in \mathbf{A}Y_j$ para cada j, y $\sum_j y_j = 0$ implica $y = 0$ para todo j, por ser positivos semiindependientes. Considérese uno de ellos, $y_{j'}$. El vector $\sum_{j \neq j'} y_j$ esta en $\sum_j \mathbf{A}Y_j$, por lo tanto en Y; para $-y_{j'}$ que, similarmente esta en $-Y$. Si $y_{j'}$ fuese distinto de cero, resultaría una contradicción de $Y \cap (-Y) = \{0\}$. ⊠

g) Y_j es un cono de vértice 0. Rendimientos constantes a escala.
Si y_j es una producción posible, también los es $t(y_j)$, donde $t > 0$. Esta hipótesis corresponde a la idea intuitiva de un proceso de producción elemental para el que las proporciones de insumos y bienes están fijas entre sí, pero la escala de operaciones puede variar arbitrariamente.

Los rendimientos constantes a escala (g) junto a la aditividad (e) implican que Y_j es un cono convexo con vértice en cero.

Recíprocamente, la convexidad (f), la aditividad (e) y la posibilidad de inacción (b), implican rendimientos constantes a escala (g).

Todas la hipótesis sobre Y_j $((a), (b), (e), (f), (g))$, cuando se hacen conjuntamente, son equivalente a decir que: Y_j, es un cono cerrado, convexo, de vértice cero. Casos particulares, resultan ser: Y_j consiste exclusivamente en el punto 0; Y_j es una semirecta cerrada de origen en 0; Y_j es un cono poliédrico convexo de vértice 0.

En la Figura 2.2. se observa que $\mathbf{A}Y_1$ es el cono asintótico para el conjunto de producción Y_1, análogamente se sabe que $\mathbf{A}Y_2$ es el cono asintótico para el conjunto de producción Y_2. Por el Paso 1, de la demostración del Teorema 2.1., se sabe que $\sum_{j=1}^{2} \mathbf{A}Y_j \subset Y$. Por lo tanto, la sumatoria de conos asintóticos para una economía en donde existen tres bienes y dos productores, corresponderá al área gris obscura, la cual esta contenida en el conjunto de producción total Y.

h) Free disposal. $Y \supset (-\Omega)$
Esta propiedad establece, que la firma puede eliminar sin costos las mercancías (insumos y bienes) que tienen en exceso. Formalmente, si $y_j^1 \in Y_j$ y y_j^2 es tal que $y_{jk}^2 \leqq y_{jk}^1$, $k = 1, ..., \ell$, entonces $y_j^2 \in Y_j$. Es decir, el plan de producción y_j^2 permite obtener como máximo el mismo nivel de output que el plan de producción y_j^1.

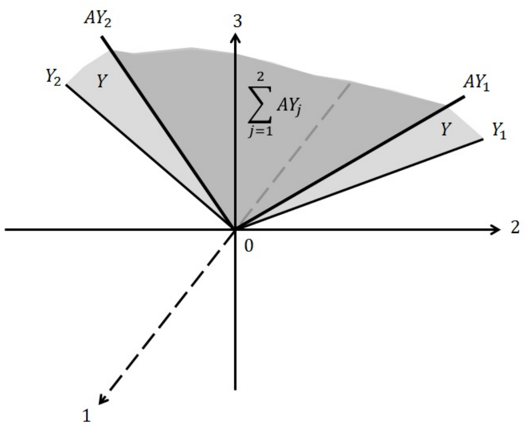
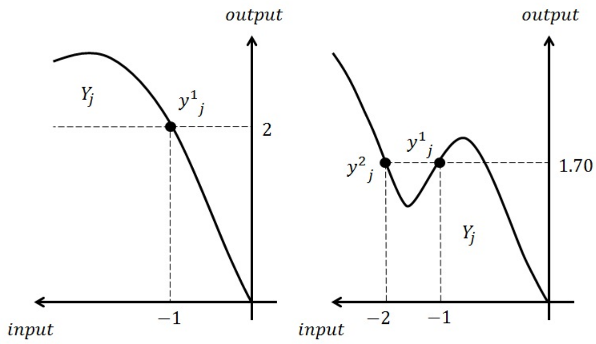


Figura 2.2: Ejemplo de cono asintótico sobre los conjuntos de producción.



Gráficamente la figura anterior representa esta situación; en la parte izquierda de la figura dado cualquier $y_j \in Y_j$, todos los conjuntos por debajo y a la izquierda de y_j también forman parte del conjunto de posibilidades de producción. La parte derecha, ilustra la violación de esta propiedad.

2.5. Maximización del beneficio.

Dado un sistema de precios $p = (p_1, ..., p_h, ..., p_\ell) \in \mathbb{R}^\ell$, y una producción y_j, el **beneficio del productor** $j-$*ésimo* es $p \cdot y_j$. El **beneficio total** es $p \cdot y$. En virtud de las convenciones de signos que existen sobre las coordenadas de y_j y p, se dice que el producto interno de $p \cdot y_i$ es, en efecto, la suma de todos los ingresos menos la suma de todos los desembolsos.

Adicionalmente se sabe que cada productor

a) Considera los precios como dados, debido a que la oferta de cada bien o adquisición de cada insumo, es relativamente pequeña, y se supone que esta adquisición no puede tener influencia sobre los precios.

b) Dado un sistema de precios p, el $j-ésimo$ productor elije su plan de producción y_j en su conjunto de producción Y_j de manera que su beneficio sea máximo. La acción que resulta, se denomina producción de equilibrio del $j-ésimo$ productor relativa a p.

Cuando $p \neq 0$, se tiene la siguiente situación geométrica. Si y_j es un plan de producción maximizador, el conjunto Y_j esta contenido en el semiespacio cerrado debajo del hiperplano H ortogonal a p que pasa por y_j. El conjunto de maximizadores es la intersección de Y_j y de H.

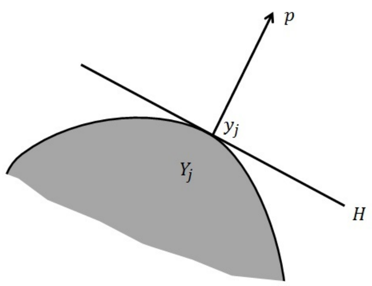


Figura 2.3: Maximización del beneficio.

Dado un p arbitrario puede no haber beneficio máximo (por ejemplo si prevalecen rendimientos crecientes a escala, y si para algún $y_j \in Y_j$ se tiene $p \cdot y_j > 0$, el beneficio puede aumentar de manera arbitraria).

Definición 2.6. Sea

$$T_j' = \{p \in \mathbb{R}^\ell \mid p \cdot Y_j \quad tiene \quad un \quad máximo\}$$

donde ademas T_j' es un cono de vértice 0.

Así a cada sistema de precios $p \in T_j'$ se asocia el conjunto no vacío $\eta_j(p)$ de producciones posibles que maximizan el beneficio para ese p.

Definición 2.7. La correspondencia

$$\eta_j : T_j^{'} \to Y_j$$

se denomina **correspondencia de oferta del** $j - \acute{e}simo$ **productor.**, la cual se define por

$$\eta_j(p) = \{y_j \in Y_j \mid p \cdot y_j = M\acute{a}x \quad p \cdot Y_j\}$$

La consideración de correspondencias (en lugar de usar funciones más simples) es inevitable en el estudio de los productores ya que, en el caso en que Y_j es un cono convexo, cerrado de vértice 0, el conjunto de maximizadores consiste únicamente en un solo elemento que es el caso trivial.

Sea $\pi_j(p)$ el beneficio máximo cuando el sistema de precios es $p \in T_j^{'}$.

Definición 2.8. La función

$$\pi_j : T_j^{'} \to \mathbb{R}$$

se denomina **función de beneficios del** $j - \acute{e}simo$ **productor**, la cual se define por

$$\pi_j(p) = M\acute{a}x\{p \cdot y_j \mid p \cdot Y_j\}.$$

Si todos los precios de p se multiplican por el mismo número positivo t, es evidente que $\eta_j(tp) = \eta_j(p)$, es decir el conjunto de maximizadores no queda afectado, ya que es homogénea a de grado cero. Mientras tanto, $\pi_j(tp) = t\pi_j(p)$, es decir el máximo queda multiplicado por t, por lo tanto es homogénea de grado uno.

Definición 2.9. La **correspondencia de oferta total**,

$$\eta : \bigcap_{j=1}^{n} T_j^{'} \to Y$$

se define por $\eta(p) = \sum_{j=1}^{n} \eta_j(p)$.

Dado un sistema de precios p, existe un beneficio máximo para cada $j = 1, ..., n$ si y sólo si $p \in \bigcap_{j=1}^{n} T_j^{'}$. En este caso se define el conjunto no vacío $\eta(p)$ de las producciones totales posibles compatibles con la maximización del beneficio para este p por parte de cada productor.

Definición 2.10. La **función de beneficio total**,

$$\pi : \bigcap_{j=1}^{n} T_j^{'} \to \mathbb{R}$$

se define por $\pi(p) = \sum_{j=1}^{n} \pi_j(p)$. El resultado siguiente es inmediato.

(1) Sean $y_1, ..., y_h, ..., y_n$ puntos de $Y_1, ..., Y_h, ..., Y_n$ de manera respectiva. Dado un sistema de precios p, se tiene que $p \cdot y = Máx \quad p \cdot Y$, si y sólo si, $p_j \cdot y_j = Máx \quad p \cdot Y_j$ para todo j.

En otros términos, y maximiza el beneficio total en Y, si y sólo si cada y_j maximiza el beneficio en Y_j. Esto se ilustra en la Figura 3.4. siguiente y ofrece una caracterización simple de $\eta(p)$ y $\pi(p)$.

$(1^{'})$ Dado $p \in \bigcap_{j=1}^{n} T_j^{'}$, $\eta(p) = \{y \in Y \mid p \cdot y = Máx \quad p \cdot Y\}$, y $\pi(p) = Máx \quad p \cdot Y$.
En otros términos, $\eta(p)$ se establece que es el conjunto de elementos maximizadores del beneficio total en Y; por lo tanto $\pi(p)$ corresponderá al máximo beneficio total en Y.

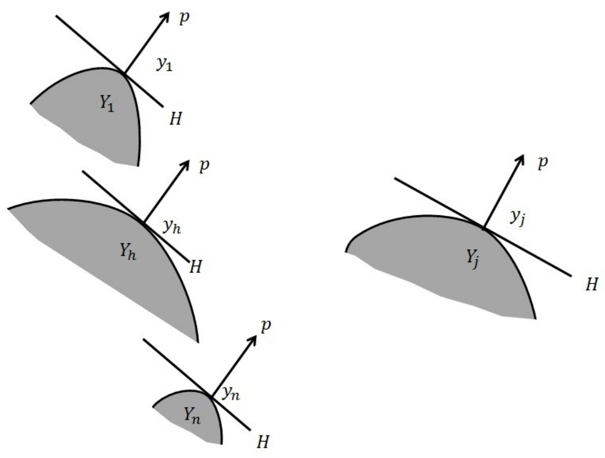


Figura 2.4: Maximización del beneficio.

A continuación se consideran diferentes hipótesis sobre los conjuntos de producción, ademas se estudian las implicaciones de cada una de ellas para la maximización del beneficio.

2.5.1. Hipótesis sobre los conjuntos maximizadores.

1) $0 \in Y_j$. Posibilidad de inacción.
Dado $p \in T_j^{'}$, 0 puede ser un elemento maximizador. (la falta de acción puede ser óptima), incluso puede ser el único elemento maximizador.

2) $(Y_j + Y_j) \subset Y_j$. Aditividad.
Dado $p \in T_j^{'}$, el beneficio máximo no es positivo. (Si una y_j posible tuviese un beneficio positivo, $2y_j$ seria posible y tendría un beneficio doble.). La aditivdad y la posibilidad de inacción implican, pues, que el beneficio máximo, si existe es nulo.

3) Y_j es convexo. Dado $p \in T_j^{'}$, si $p = 0$, el conjunto de $\eta_j(p)$ de maximizadores es el mismo Y_j; si $p \neq 0$, $\eta(p)$ es la intersección de Y_j con un hiperplano (Ver discusión de la Figura 3.3.); en ambos casos $\eta_j(p)$ es convexo. Si cada Y_j es convexo, el conjunto $\eta(p) = sum_{j=1}^{n}\eta_j(p)$, como suma de conjuntos convexos, es convexo para todo $p \in \bigcap_{j=1}^{n} T_j^{'}$.

4) Y_j es un cono de vértice 0 (rendimientos constantes a escala). Dado $p \in T_j^{'}$, el beneficio máximo es nulo, como en el caso de los incisos 1) y 2). Por lo tanto, $T_j^0 = Y_j^0$, el cono polar de Y_j. El origen 0 es un elemento maximizador; por consiguiente, si $p \neq 0$, el conjunto $\eta_j(p)$ de maximizadores es la intersección de Y_j y el hiperplano H ortogonal a p que pasa por 0; si $p = 0$, el conjunto $\eta_j(p)$ es el mismo Y_j. En ambos casos el conjunto $\eta_j(p)$ es un cono de vértice 0. Se puede demostrar que cuando p pertenece al interior de Y_j^0, el origen 0 es el único maximizador (Ver Figura 3.12.(a)). Es un poco más complicado demostrar que, cuando p pertenece a la frontera de Y_j^0 e Y_j es cerrado, el cono $\eta_j(p)$ no se reduce al único punto 0 (Ver Figura 3.12. (b); el cono de maximizadores es la semi recta cerrada de trazo fuerte.)
Cada Y_j es un cono de vértice 0. Entonces Y también lo es. Dado p, existe un máximo de $p\cdot y_j$ en Y_j para cada j si y sólo si existe un máximo $p\cdot y$ en Y. Por consiguiente $\bigcap_{j=1}^{n} Y_j^0 = Y^0$, el polar de Y. Dado p en Y^0, el conjunto $\eta(p)$ es, de acuerdo con $(1^{'})$, el conjunto de maximizadores de $p \cdot y$ en Y.

5) $Y \supset (-\Omega)$. Eliminación libre.
Dado p, existe un máximo de $p\cdot y_j$ en Y_j para cada j, sólo si existe un $p\cdot y$ en Y, solamente si $p \geqq 0$. En efecto, si $p_h < 0$, seria posible aumentar de manera arbitraria $p\cdot y$ aumentando el insumo de la $h-\acute{e}sima$ mercancía en valor absoluto.

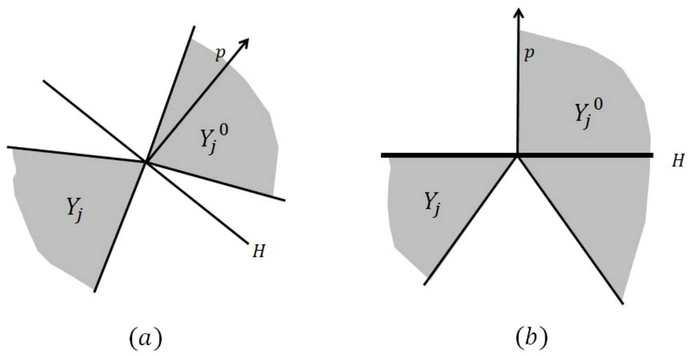


Figura 2.5: Maximización del beneficio.

2.6. Variación de precios.

Sea p un sistema de precios, e y_j una producción óptima la cual es correspondiente para la $j-ésima$ firma. Si $p^{'}$ es un segundo sistema de precios, e $y_j^{'}$ una producción óptima correspondiente, se designara entonces el cambio de precio $p^{'}-p$ por $\triangle p$ y el cambio de producción correspondiente a $y_j^{'}-y_j$ por $\triangle y_j$. Por definición, se sabe que $p\cdot y_j^{'}\leqq p\cdot y_j$; consiguientemente,

$$p\cdot\triangle y_j\leqq 0 \tag{2.1}$$

De manera semejante $p^{'}\cdot\triangle y_j\geqq 0$; de esta manera, restando (2.1),

$$\triangle p\cdot\triangle y_j\geqq 0. \tag{2.2}$$

Si solamente varia un precio, por ejemplo p_h, (2.2) se convierte en $\triangle p_h\cdot\triangle y_{jh}\geqq 0$ donde y_{jh} es la $h-ésima$ coordenada de y_j. Por lo tanto si el precio de una mercancía aumenta, permaneciendo constantes el resto de los precios, un productor aumentara o dejara iguala producción de esta mercancía. Sumando sobre j se obtienen desigualdades análogas a (2.1) y (2.2) para la producción total:

$$p\cdot\triangle y\leqq 0 \quad y \tag{2.3}$$

$$\triangle p\cdot\triangle y\geqq 0 \tag{2.4}$$

En el capitulo referente a equilibrio, se demostrara como bajo ciertas hipótesis, el conjunto Y_j puede sustituirse por cierto subconjunto compacto, no vacío, de Y_j. Por lo tanto, el resto de está sección se estudiara por lo tanto el caso en que Y_j es compacto.

Dado un p arbitrario, $p \cdot y_j$ define una función continua de y_j en Y_j y puede aplicarse el Teorema A.9. del Anexo A. Por consiguiente $p \cdot Y_j$ tiene un máximo. En otros términos, $T_j^{'} = \mathbb{R}^\ell$.

De hecho, se tiene que $p \cdot y_j$ define una función continua de (p, y_j) en $\mathbb{R}^\ell \times Y_j$ y puede aplicarse la Proposición C.1. (en el presente caso la correspondencia $\varphi : \mathbb{R}^\ell \to Y_j$ se define por $\varphi(p) = Y_j$, para todo $p \in \mathbb{R}^\ell$; y por lo tanto es constante y continua). Así η_j, la correspondencia de oferta del $j - \textit{ésima}$ productor, es s.c.s. en $\mathbb{R}^\ell$, y π_j, la función de beneficios es continua en $\mathbb{R}^\ell$.

La Figura 2.6. da una idea intuitiva de las propiedades de continuidad de η_j y π_j. Considerando un vector p girando alrededor de cero, de p^1 a p^3. Si p es el interior del angulo $p^1, 0, p^2$, entonces $\eta_j(p)$ consiste en el único punto a^1. Si p es igual a p^2, entonces $\eta_j(p)$ consiste en el segmento cerrado $[a^1, a^2]$. Si p es interior al angulo $p^2, 0, p^3$, entonces $\eta_j(p)$ consiste en el único punto a^2.

De acuerdo con la Proposición C.1. del Apéndice C, cuando cada Y_j es compacto, η, la correspondencia de oferta total, es s.c.s. en $\mathbb{R}^\ell$, y, en virtud de (3) de las hipótesis de la función de beneficios, π, la función de beneficio total, es continua en $\mathbb{R}^\ell$ [Debreu:1959:48].

Resumiendo: Si Y_j es compacto, entonces $T_j^{'} = \mathbb{R}^\ell$, η_j es s.c.s. en $\mathbb{R}^\ell$, y π_j es continua en $\mathbb{R}^\ell$. Si cada Y_j es compacto entonces η es s.c.s. en $\mathbb{R}^\ell$ y π es continua en $\mathbb{R}^\ell$.

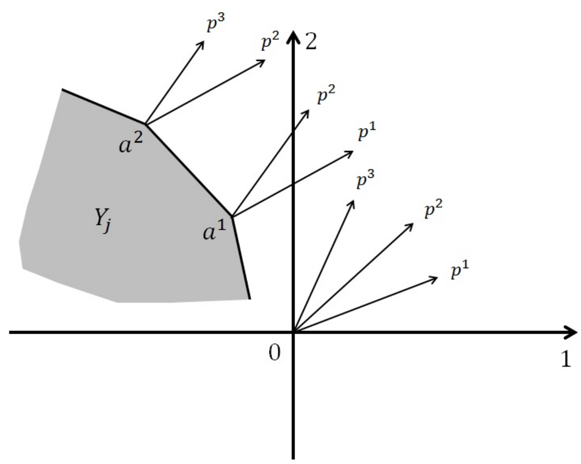


Figura 2.6: Variación de precios.

Capítulo 3

Teoría del consumidor.

3.1. Introducción.

De esta manera, en este capítulo se definen los conceptos referentes al consumidor tales como: plan de consumo, conjunto de planes de consumo posibles, preferencias y sus propiedades; para posteriormente analizar la restricción de presupuestal, para finalmente exhibir los planes de consumo óptimos que dependen de los precios y el ingreso.

3.2. Conjuntos de Consumo y Preferencias.

El siguiente concepto, corresponde a la formalización del consumidor. Un consumidor es parcialmente descrito por un conjunto de consumo, el cual es un subconjunto del espacio de bienes, formalmente:

Definición 3.1. El **conjunto de consumo** es un subconjunto del espacio de mercancías $\mathbb{R}^\ell$ denotado por X_i, i.e. $X_i \subset \mathbb{R}^\ell$.

Definición 3.2. Un **plan de consumo** para el consumidor i, es un elemento $x_i \in X_i \subset \mathbb{R}^\ell$, para cada $i = 1, ..., m$.

Definición 3.3. Dado un consumo x_i, para cada consumidor,

$$x = \sum_{i=1}^{m} x_i$$

se denomina el **consumo total** o **demanda total.**

Definición 3.4. El conjunto

$$X = \sum_{i=1}^{m} X_i$$

se llama el **conjunto de consumo total.**

Definición 3.5. Se considera la relación **no es un sucesor de** en $\mathbb{N}$ y se designa por $\leqq$.
Esta relación corresponde al orden natural de los elementos de $\mathbb{N}$. Para definir con toda generalidad una relación de orden es un conjunto se conservan ciertas propiedades de $\leqq$ en $\mathbb{N}$.

Después de que el conjunto de consumo, i.e. X_i, ha sido identificado, el consumidor debe de comparar los diferentes planes que existen para él. Esto requiere establecer una ordenación entre todos los elementos $x_i \in X_i$. Esta ordenación se lleva a cabo mediante una operación binaria $\succeq_i$ sobre X_i, es decir, comparando todos los planes de consumo en pares, cuya interpretación es que ante dos planes de consumo x_i^1 y x_i^2, suponemos que se cumple alguna de las alternativas conforme a la siguiente definición.

3.3. Hipótesis sobre los conjuntos de consumo.

En general, se supondrá que el conjunto de consumo $X_i = \mathbb{R}_+^\ell \subset \mathbb{R}^\ell$, satisface las siguientes propiedades.

a) Hipótesis de continuidad. X_i es cerrado.
Es decir, sea $\{x_i^q\}$ una sucesión infinita de consumos, si todos los elementos x_i^q son factibles para el $i-$*ésimo* consumidor, y si $\{x_i^q\} \to x_i^0$, entonces x_i^0 es factible.

b) X es cerrado.
Se intuye que por la hipótesis de continuidad (a), i.e. X es cerrado. Sin embargo la sumatoria de conjuntos cerrados X_i, no necesariamente es cerrado en X, i.e. $\sum_{i=1}^m X_i = X_1 + ... + X_m = X$, no es necesariamente cerrado para X. Ver Ejemplo B.2.

Se sabe que en $\mathbb{R}^\ell$ la suma de una cantidad finita de conjuntos compactos es un conjunto compacto y por tanto cerrado [Debreu:1959:20]; y también que la suma de un conjunto compacto y de un cerrado es un cerrado. Una de las formas de asegurar entonces que el conjunto de consumo total va a ser cerrado, consiste en tomar los conjuntos de consumo individuales compactos, o al menos algunos de ellos. Sin embargo la condición de acotación no es necesaria para asegurar la propiedad de continuidad de los conjuntos suma.

Debreu proporciona condiciones con las que sin necesidad de tomar conjuntos de consumo individuales compactos, puede asegurarse la continuidad para el conjunto de consumo total. En este caso, Debreu [1959:22] utiliza la condición matemática (semi independencia positiva de los conos asintóticos) sobre los conjuntos cerrados X_i, $i = 1, ..., m$. Para asegurar que $X = \sum_{i=1}^{m} X_i$ es un conjunto cerrado. Esta condición ha sido probada a partir del Teorema B.1.

c) Hipótesis de cota inferior ($\leqq$).
Si $x_i^{'} \in \mathbb{R}^{\ell}$ tal que $x_i^{'} \leqq x_i$ para todo x_i en X_i, o análogamente tal que $X_i \subset \{x_i^{'}\} + \Omega$. La justificación de la teoría económica para esta hipótesis es la siguiente:

Si la mercancía $h - ésima$ es un input, x_{ih} tiene una cota inferior en cero. Si la $h - ésima$ mercancía es un output, existe una cota superior (en valor absoluto) para la producción.

d) X tiene una cota inferior para $\leqq$.
La hipótesis de (c) es similar para el conjunto de consumo total.
Si (c) cumple para cada X_i, entonces $x^{'} = \sum_{i=1}^{m} x_i^{'}$ es una cota inferior de X para $\leqq$. Recíprocamente se dice que si X esta acotado inferiormente para $\leqq$, se puede observar que para todo X_i existe una cota inferior para $\leqq$.

Sin embargo, si cada X_i es cerrado, X no es necesariamente cerrado y se recurre a la siguiente proposición.

Proposición 3.1. Si cada X_i es cerrado y ademas tiene una cota inferior $\leqq$, entonces X es cerrado.

Demostración Proposición 3.1.
De acuerdo al Teorema B.1., (Anexo B.1.), basta probar que los conos asintóticos son positivos semiindependientes.

Paso 1. Se demostrara que $\sum_j \mathbf{A}X_i \subset X$, donde $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Dado $0 \in X_i$, existe para cada i, un vector $x_i^0 \in X_i$ tal que $\sum x_i^0 = 0$.

En virtud de la evidencia de la traslación de los conos asintóticos (Ver Anexo B.1., sección B.1.2.), se tiene que $\mathbf{A}X_i \subset X_i - \{x_i^0\}$. El resultado se deduce sumando sobre i.

$$\mathbf{A}X_i \subset X_i - \{x_j^0\}$$

Aplicando sumatoria sobre i,

$$\textstyle\sum_i \mathbf{A}X_i \subset \sum X_i - \{\sum x_i^0\}$$

como $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ y $\sum x_i^0 = 0$, se tiene que

$$\textstyle\sum_i \mathbf{A}X_i \subset X$$

donde concluye la primera parte de la demostración.

Paso 2. Finalmente se demostrara que $x_i \in \mathbf{A}X_i$ para cada i, y $\sum_i x_i = 0$ implica $x = 0$ para todo i, por ser positivos semiindependientes. Considérese uno de ellos, $x_{i'}$. El vector $\sum_{i\neq i'} x_i$ esta en $\sum_i \mathbf{A}X_i$, por lo tanto en X; para $-x_{i'}$ que, similarmente esta en $-X$. Si $x_{i'}$ fuese distinto de cero, resultaría una contradicción de $X \cap (-X) = \{0\}$. ⊠

e) Hipótesis de conectividad del consumo. X_i es conexo
Esto de acuerdo a la Lema A.2., significa que X_i está hecho en un solo conjunto de consumo.

f) Hipótesis de convexidad de X_i.
Sean $x_1, x_2 \in X_i$, entonces la cesta de consumo $x_3 = \alpha x_1 + (1-\alpha)x_2$ es también un elementos de X_i para cada $\alpha \in [0,1]$.

3.3.1. Preferencias.

Después de que el conjunto de consumo, i.e. X_i, ha sido identificado, el consumidor debe de comparar los diferentes planes que existen para él. Esto requiere establecer una ordenación entre todos los elementos $x_i \in X_i$. Esta ordenación se lleva a cabo mediante una operación binaria $\succeq_i$ sobre X_i, es decir, comparando todos los planes de consumo en pares, cuya interpretación es que ante dos planes de consumo x_i^1 y x_i^2, suponemos que se cumple alguna de las alternativas conforme a la siguiente definición.

Definición 3.10. Sea $\succeq_i$ una operación binaria sobre X_i, si se cumple solamente una de las siguientes alternativas para el consumidor i,

i) x_i^1 es preferido a x_i^2.

ii) x_i^1 es indiferente a x_i^2.

iii) x_i^2 es preferido a x_i^1.

La operación binaria $\succeq_i$ se denomina **preferencia del consumidor**.

En términos generales la relación de preferencia $x_i^1 \succeq_i x_i^2$, del $i-esimo$ consumidor se lee: *para el consumidor* i, *el plan de consumo* x_i^1 *es la menos tan preferido como el plan de consumo* x_i^2. [Mas-Colell: 1995:6]

Propiedades fundamentales de las preferencias.

Las preferencias $\succeq_i$ satisfacen las tres propiedades siguientes.

- Completitud. $\forall (x_i^1, x_i^2) \in X_i$, o bien $x_i^1 \succeq_i x_i^2$, o $x_i^2 \succeq_i x_i^1$, o ambos. Este axioma garantiza que dos planes de consumo cualesquiera pueden ser comparados.
- Reflexividad. $\forall x_i \in X_i$, $x_i^1 \succeq_i x_i^1$. Cualquier elemento del conjunto X_i es tan preferido como si mismo.
- Transitividad. $\forall (x_i^1, x_i^2, x_i^3) \in X_i$, si $x_i^1 \succeq_i x_i^2$ y $x_i^2 \succeq_i x_i^3$, entonces $x_i^1 \succeq_i x_i^3$. Elimina ciclos y genera coherencia en el proceso de decisión del $i-$ *ésimo* consumidor.

Definición 3.11. Una relación binaria $\succeq_i$, que satisface las propiedades de completitud, reflexividad y transitividad se denomina un **preorden completo.**

A partir de un preorden completo, se pueden definir dos relaciones binarias adicionales: la relación de indiferencia y la relación de preferencia estricta.

Definición 3.12. La **relación de indiferencia** se presenta como $\sim_i$. Donde, dados dos planes de consumo $(x_i^1, x_i^2 \in X_i)$, si se verifica que $x_i^1 \succeq_i x_i^2$ y $x_i^2 \succeq_i x_i^1$, entonces

$$x_i^1 \sim_i x_i^2,$$

y se dice que x_i^1 es indiferente a x_i^2. Dicho de otra manera, ambos planes de consumo son igualmente valorados por el consumidor i.

Dada una relación de indiferencia, resulta obvia que es reflexiva y transitiva; sin embargo, también es *simétrica*, es decir, $x_i^1 \sim_i x_i^2$ implica $x_i^2 \sim_i x_i^1$.

Definición 3.13. Dado un consumo $x_i^{'} \in X_i$, el conjunto

$$\{x_i \in X_i \mid x_i \sim_i x_i^{'}\},$$

es decir el conjunto de consumos en X_i que son indiferentes a $x_i^{'}$, se llama la **clase de indiferencia** de $x_i^{'}$. El conjunto de clases de indiferencia forma una partición de X_i.

Definición 3.14. La relación de **preferencia estricta** se representa por $\succ_i$. Dados dos planes de consumo $(x_i^1, x_i^2) \in X_i$, si se verifica que $x_i^1 \succeq x_i^2$ y no $x_i^2 \succeq x_i^1$, entonces se dice que $x_i^1 \succ_i x_i^2$, i.e. x_i^1 es estrictamente preferido a x_i^2. La relación $\succ_i$ no es reflexiva ni simétrica.

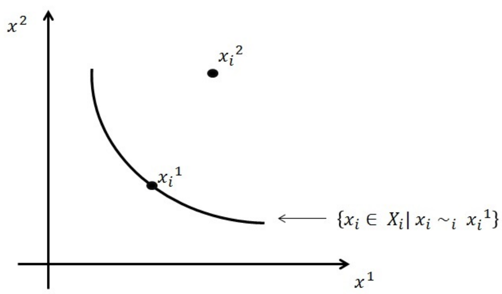


Figura 3.1: Clase de indiferencia.

La Figura 3.1., ilustra el caso de una economía con 2 bienes. La curva que pasa por el punto $x_i^1 \in X_i$ representa la clase de indiferencia de $x_i^1 \in X_i$, todos los puntos $x_i^2 \in X_i$ situados por encima de la curva, representan planes de consumo estrictamente preferidos a $x_i^1 \in X_i$.

Hipótesis de continuidad, convexidad y monotonía de las preferencias. [1]

Para poder complementar la teoría de elección del consumidor, es necesario introducir una estructura analítica que permita asociar a cada

[1]Algunas de las siguientes hipótesis son tomadas de las notas de clase del curso Equilibrio General dictadas por el Dr. Elvio Accinelli, a excepción de las que se haga referencia a otros autores.

clase de indiferencia un número real. Se dirá que una clase de indiferencia es preferida a otra si el número real asociado a la primera es mayor que el de la segunda.

Continuidad.
La idea de continuidad puede ser ilustrada bajo el siguiente argumento.

Dados dos planes de consumo $(x_i, x_i^{'}) \in X_i$ tales que $x_i \succ_i x_i^{'}$ se pueden definir entornos para estos puntos de tal forma que $\epsilon(x_i)$ y $\delta(x_i^{'})$ tales que

$$\begin{array}{rl} \forall z \in \epsilon(x_i), & z \succ_i x_i^{'}, \text{ y} \\ \forall s \in \delta(x_i^{'}), & x_i \succ_i s \end{array}$$

Supuesto 1.1. Para todo $x_i^0 \in X_i$, los conjuntos

$$\begin{array}{rl} M_i(x_i^0) & = \{x_i \in X_i \mid x_i \succeq_i x_i^0\} \\ P_i(x_i^0) & = \{x_i \in X_i \mid x_i^0 \succeq_i x_i\} \end{array}$$

son cerrados.

El conjunto $M_i(x_i^0)$ describe los planes de consumo que son mejores que x_i^0 y el conjunto $P_i(x_i^0)$ describe los planes de consumo peores que x_i^0.

Convexidad.

La convexidad de las preferencias, puede formularse a partir de diferentes grados de generalidad. Se establece que la convexidad débil es el grado más general establecido para esta propiedad, mientras que la convexidad estricta es la definición que contiene el menor grado de generalidad. Entre ambas generalidades, se encuentra la definición de convexidad.

La noción general de convexidad establece que en un consumidor con preferencias convexas prefiere un plan de consumo que contenga una combinación da cada unos de los bienes en la economía, a otros planes que no los contengan en alguna cantidad mínima, máxima o nula. En otras palabras, un consumidor con preferencias convexas *gusta de la variedad de bienes*. Adicionalmente, la convexidad implica el supuesto de la perfecta divisibilidad de bienes. A continuación, se enuncian las distintas definiciones axiomáticas de convexidad.

Supuesto 1.2. Convexidad débil. Para todo $(x_i, x_i^{'}) \in X_i$, y para todo $\lambda \in [0,1]$,

$$x_i \succeq_i x_i^{'} \Longrightarrow \left[\lambda x_i + (1-\lambda)x_i^{'}\right] \succeq_i x_i^{'}$$

Bajo el Supuesto 1.2., ademas de dada la reflexibilidad, completitud y transitividad, equivale a suponer que los conjuntos $M_i(x_i)$ y $M_i I_i(x_i)$ son convexos. Adicionalmente junto a la continuidad de las preferencias, implica que para todo $x_i^{'}$, el conjunto $M_i(x_i^{'})$ es abierto y convexo y tiene como frontera al conjunto $I_i(x_i^{'})$ que es cerrado y conexo. El Supuesto 1.2. admite la posibilidad de que el conjunto $I_i(x_i^{'})$ sea *ancho* es decir que contenga puntos interiores.

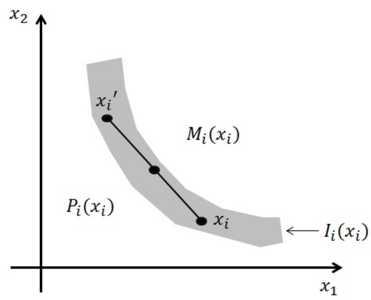


Figura 3.2: Clase de indiferencia bajo el Supuesto 1.2.

Supuesto 1.3. Convexidad. Para todo $(x_i, x_i^{'}) \in X_i$, y para todo $\lambda \in (0,1]$,

$$x_i \succ_i x_i^{'} \Longrightarrow \left[\lambda x_i + (1-\lambda)x_i^{'}\right] \succ_i x_i^{'}$$

El Supuesto 1.3, junto a la continuidad en las preferencias, implica que si $x_i^{'}$ no es un punto máximo en relación $\succeq_i$, el conjunto $I_i(x_i^{'})$ no mantiene puntos interiores. Sin embargo, es accesible la posibilidad de que el conjunto $I_i(x_i^{'})$ este formado por una serie de segmentos.

Supuesto 1.4. Convexidad estricta. Para todo $(x_i, x_i^{'}) \in X_i$, y para todo $\lambda \in (0,1)$,

$$x_i \succeq_i x_i^{'} \Longrightarrow \left[\lambda x_i + (1-\lambda)x_i^{'}\right] \succ_i x_i^{'}$$

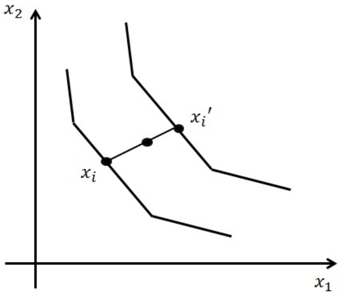


Figura 3.3: Clase de indiferencia bajo el Supuesto 1.3.

El Supuesto 1.4. elimina la posibilidad de tramos lineales en el conjunto $I_i(x_i^{'})$ garantizando así que cualquier tangencia de un hiperplano con una clase de indiferencia solo puede ocurrir en un solo punto, sin embargo este supuesto no garantiza la diferenciabilidad del conjunto $I_i(x_i^{'})$ en todos sus puntos.

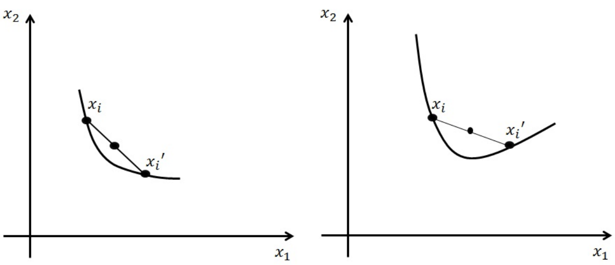


Figura 3.4: Clase de indiferencia bajo el Supuesto 1.4.

Monotonía.

Para finalizar las hipótesis que se introducen sobre las preferencias se formularan los supuestos de no saciabilidad. Al igual que el caso de la convexidad, se pueden definir, tomando en cuentas diferentes grados de generalidad. La no saciabilidad es la definición mas general, mientras que la monotonía es la definición que contiene el menor grado de generalidad. En medio de las definiciones anteriores, se puede encontrar de no saciabilidad local y de semimonotonía.

Supuesto 1.5. No-saciabilidad. Para todo $x_i \in X_i$ existe un $x_i^{'} \in X_i$ tal que $x_i^{'} \succeq_i x_i$.

El Supuesto 1.5., recoge la idea de que un consumidor, dado un plan, siempre puede encontrar algún otro mejor. Sin embargo, señalando la afirmación contraria, se puede establecer que existe un punto x_i^0 en X_i que es preferible a cualquier otro punto en X_i. El punto x_i^0 es un punto de *máxima felicidad* y esta situación, es precisamente la que se trata de excluir.

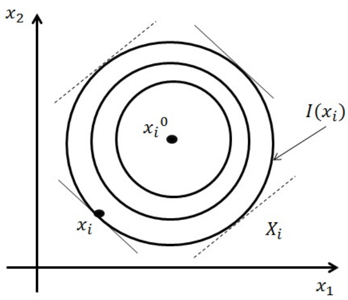


Figura 3.5: Preferencias bajo el Supuesto 1.5.

Suponiendo que el punto x_i^0 es un punto de *saciedad* o de *máxima felicidad*. Las clases de indiferencia del consumidor, son como se muestra en la Figura 3.5. El mejor punto siempre sera x_i^0 y todo punto que se aleje de él, se encuentra en clases de indiferencia más bajas. En este caso las clases de indiferencia, tiene pendientes *negativas*, cuando se tiene una cantidad *demasiado grande* o *demasiado pequeña* de ambos bienes, y una pendiente *positiva* cuando tiene *demasiado de uno de ellos*. Cuando tiene una cantidad demasiado grande de uno de los bienes, este queda convertido en un mal, por lo que la reducción del consumo del bien malo, lo aproxima al punto x_i^0. En cambio, si tiene una cantidad demasiado grande de ambos bienes, entonces ambos son males; por lo tanto una reducción en el consumo de cada uno de ellos, lo acerca a su punto x_i^0 [Varian:1995:45].

Supuesto 1.6. No-saciabilidad local. Sea $N_\alpha(x_i)$ un entorno de centro x_i y radio α. Para todo $x_i \in X_i$ y para todo escalar $\alpha > 0$ existe algún $x_i^{'} \in N_\alpha(x_i) \cap X_i$ tal que $x_i^{'} \succ_i x_i$.

El Supuesto 1.6., matiza la afirmación del Supuesto 1.5.; ya que para planes de consumo arbitrariamente cerca, existe otro plan de consumo arbitrariamente cerca que es mejor. Este supuesto implica que las curvas de indiferencia no pueden ser *anchas.*

Supuesto 1.7. Semimonotonía. Para todo $x_i \in X_i$, existe algún j (que puede depender de x_i) tal que $(x_i + e^j) \succ_i x_i$ para todo > 0 y donde $e^j \in \mathbb{R}^\ell$ representa un vector de ceros, excepto en la $j - \acute{e}sima$ posición donde hay un uno.

El Supuesto 1.7. establece que dado un plan de consumo, siempre es posible construir un plan mejor, aumentando la cantidad de alguno de los bienes.

Supuesto 1.8. Monotonía. Sean $(x_i, x_i^{'}) \in X_i$ tales que $x_i >> x_i^{'}$. Entonces x_i es preferido a $x_i^{'}$.

El Supuesto 1.8. establece que cuanto mas es mejor. Este supuesto es muy restrictivo, ya que exige que el individuo mejore consumiendo cantidades adicionales de mercancías, ver la Figura 3.4. Existen dos versiones para este supuesto: monotonía débil (menos exigente) y monotonía fuerte (mas exigente) [Varian:1995:115].

S.1.8$'$. M. débil. Si $x_i \geq x_i^{'}$, entonces $x_i \succeq_i x_i^{'}$.

Este supuesto establece que un plan de consumo x_i que contenga al menos la misma cantidad de mercancías que otro $x_i^{'}$. Entonces $x_i^{'}$ es al menos tan bueno que x_i.

S. 1.8$''$. M. fuerte. Si $x_i > x_i^{'}$, entonces $x_i \succ_i x_i^{'}$.

La monotonía fuerte, manifiesta que bajo un plan de consumo x_i que contenga por lo menos la misma cantidad de todos los bienes que otro plan $x_i^{'}$ y mas de alguno de ellos es estrictamente mejor que éste. Este supuesto establece que todos los bienes son deseables para el consumidor.

3.4. Función de utilidad.

El objetivo de presentar los supuestos anteriores, consiste en generar una estructura analítica que permite asociar a cada clase de indiferencia en número real; debido a que si una clase de indiferencia $I_i(x_i)$ es preferida a otra $I_i(x_i^{'})$, es debido a que el número real asociado a la primera, es superior a la segunda.

Si se tiene que un conjunto de preferencias completamente preordenado por $\succeq_i$, entonces el objetivo es encontrar una función creciente en este conjunto que sea expresión de las clases de indiferencia, si esta función existe, se denomina función de utilidad. [Debreu: 1959:56]

Definición 3.15. Una función $u_i : X_i \to \mathbb{R}$ representa el preorden de preferencias $\succeq_i$ si y sólo si, $\forall \quad (x_i, x_i^{'}) \in X_i$ se verifica que

$$u_i(x_i) \geq u_i(x_i^{'}) \Leftrightarrow x_i \succeq_i x_i^{'}$$

Donde la función u_i se denomina **función de utilidad** para el consumidor i.

Debreu, establece que no todas las preferencias pueden ser representadas por una función de utilidad, sin embargo puede demostrarse el siguiente resultado.

A continuación se estudia el problema de existencia de una función de utilidad. Para esto tomando en cuenta la continuidad sobre las preferencias, se tiene que para todo $x_i \in X_i$, los conjuntos $\{x_i \in X_i \mid x_i \succeq_i x_i^{'}\}$ y $\{x_i \in X_i \mid x_i \preceq_i x_i^{'}\}$ son cerrados en X_i. Como se supone que el Supuesto 1.1, satisface la hipótesis de continuidad, se enuncia el siguiente teorema,

Teorema 3.1. Sea $\succeq_i$ una relación de preferencias definida sobre un subconjunto conexo de $\mathbb{R}^{\ell}$. La relación $\succeq_i$ puede ser representada a través de una función de utilidad continua, si y sólo si, $\succeq_i$ es reflexiva, completa, transitiva y continua.

Demostración Teorema 3.1.
La demostración se basa en la existencia de un subconjunto numerable $D \subset X_i$ que es denso, para esto, nos apoyamos en el siguiente Lema

Definición 3.16. Sea (X_i, τ) un espacio topológico, $D \subset X_i$ se dice que es un **conjunto denso** en X_i, si y solamente si $\bar{D} = X_i$, es decir la clausura topológica del conjunto es todo el espacio.

Lema 1.8. Un conjunto es D denso en X_i si y sólo si para todo abierto no vacío $A \subset X_i$ se verifica que $A \cap D \neq \emptyset$.

Demostración Lema 1.8.
Sea $D \subset X_i$ y A un subconjunto abierto. Sea $x_i \in A$ y $E(x_i) \subset A$; puesto que $x_i \in \bar{D}$ se tiene que $E(x_i) \cap D \neq \emptyset$ y, por tanto,

$$D \cap A \neq \emptyset.$$

recíprocamente, se supone que todo abierto no vacío tiene intersección no vacía con D. Sea $x_i \in X_i$ y $E(x_i)$ un entorno de x_i; puesto que $E(x_i)$ es abierto

$$E(x_i) \cap D \neq \emptyset$$

y $x_i \in \bar{D}$, lo que prueba que D es denso. ⊠

La demostración para el Teorema 3.1. se planteara en cuatro etapas. En la primera etapa se muestra un resultado preliminar auxiliándose del Lema 1.8.; en el paso 2, se define en D una función de valor real creciente. En la etapa 3 esta función se extiende de D a X_i; finalizando el paso 4 con la demostración de que la función así definida es continua.

Paso 1. Si $x_i^{'}, x_i^{''} \in X_i$ satisfacen que $x_i^{''} \succ_i x^{'}$, existe un $x_i \in D$ tal que $x_i^{''} \succ_i x_i \succ_i x_i^{'}$.

Para proceder a demostrarlo, se consideran los dos conjuntos,

$$P_i(x_i) = \{x_i \in X_i \mid x_i \succeq_i x_i^{'}\} \text{ y } M_i(x_i) = \{x_i \in X_i \mid x_i^{''} \succeq_i x_i\}$$

Estos conjuntos, son disjuntos, no vacíos y por el Supuesto 1.1. cerrados en X_i. Puesto que X_i es conexo no puede ser su unión, de modo que

$$P_i(x_i) \cup M_i(x_i) \neq X_i$$

Procediendo por el método de contradicción. Suponiendo que no hubiera ningún $x_i \in D$ con la propiedad deseada; esto significa que $D \subset P_i(x_i) \cup M_i(x_i)$. En virtud de 2) del Apéndice A.1.3, se sabe que si $D \subset X_i$ o análogamente $D_i(x_i) \cup M_i(x_i)$. Sin embargo, el conjunto $P_i(x_i) \cup M_i(x_i)$ es cerrado, puesto que es la unión de dos conjuntos cerrados. Por lo tanto se tendría que $\bar{D} \subset P_i(x_i) \cup M_i(x_i)$, o, puesto que $\bar{D} = X_i$ (Lema 1.8.),

$$X_i = P_i(x_i) \cup M_i(x_i),$$

lo cual es una contradicción.

Paso 2. Función de utilidad en D.

La *función de utilidad* a ser definida en D (conjunto denso) se designara por $u^{'}(\cdot)$. Tomado dos números $a, b \in \mathbb{R}$, tales que $b > a$, se procederá de la siguiente manera si,

$$D \ni \begin{cases} \textit{mínimo} \quad x^{\alpha} \Longrightarrow u^{'}(x^{\alpha}) = a \\ \textit{máximo} \quad x^{\beta} \Longrightarrow u^{'}(x^{\beta}) = b \end{cases}$$

Extrayendo de D todos los elementos indiferentes a x^{α} y x^{β}, se llamara $D^{'}$ al conjunto restante. Por lo tanto, por el paso anterior $D^{'}$ no tiene elemento mínimo ni máximo.

Se define una función creciente de $D^{'}$ sobre el conjunto $Q^{'}$ de números racionales[2] en el intervalo $]a, b[$ como sigue.

Puesto que $D^{'}$ es numerable sus elementos pueden ser ordenados $(x^1, x^2, ..., x^p, ...)$; este ordenamiento no está relacionado con el preorden $\succeq$.

Similarmente $Q^{'}$ es numerable y sus elementos pueden ser ordenados $(r^1, r^2, ...r^q, ...)$; este ordenamiento no esta relacionado con el orden $\leqq$.

Los elementos de D' serán considerados como x^p, donde se asociara con un elemento de $Q^{'}$ de tal forma que se genera un elemento r^{q_p}, de tal forma que el pre-orden se conserve y que todo elemento $Q^{'}$ acabe de ser tomado.

Considérese x^1; y tómese $q_1 = 1$, entonces evaluando en $u^{'}(\cdot)$, tenemos que $u^{'}(x^1) = r^{q_1}$.

Considérese x^2; efectuando la partición de $D^{'}$ es los siguientes conjuntos: la clase de indiferencia de x^1, los intervalos $] \leftarrow, x^1[$ y $]x^1, \rightarrow [$. Donde pueden ocurrir dos casos:

1. Si $x^2 \sim x^1$, tómese $q_2 = q_1$, entonces, evaluando en $u^{'}(\cdot)$ tenemos que $u^{'}(x^2) = r^{q2}$.
2. Si x^2 esta en uno de los dos intervalos, digamos por ejemplo $] \leftarrow, x^1[$, entonces si es así, consideramos el intervalo correspondiente a $]a, r^1[$, de $Q^{'}$ y se selecciona el número racional

[2] $Q^{'} = \{r = \dfrac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z}; \quad q \neq 0\}$

mas inmediato de *menor rango*, $q_2 = 2$ de tal forma que r^{q_2}, de tal forma que evaluando en $u^{'}(\cdot)$, se tiene que $u^{'}(x^2) = r^{q_2}$.

En general si se considera x^p, se efectúa la partición de $D^{'}$ en los siguientes conjuntos: las clases de indiferencia de $x^1, x^2, ..., x^{p-1}$, los intervalos de la forma $]\leftarrow, x^{p_1}[$, o $]x^{p_m}, x^{p_{m+1}}[$, o $]x^{p_{p-1}}, \rightarrow[$ donde $m < n$ implica que $x^{p_n} \succeq x^{p_m}$ (el número de intervalos no vacíos así obtenido es a lo mucho p). Donde también pueden existir dos casos.

1) Si $x^p \sim x^{p^{'}}$ donde $p > p^{'}$, tómese $q_p = q_{p^{'}}$, evaluando, se tiene que $u^{'}(x^p) = r^{q_p}$.
2) Si x^p esta en alguno de los intervalos, tomando por ejemplo $]x^{p^{'}}, x^{p^{''}}[$, considerando el intervalo correspondiente $]r^{q_{p^{'}}}, r^{q_{p^{''}}}[$ de $Q^{'}$ y se selecciona en él el número racional de menor rango inmediato, siendo este r^{q_p}, evaluando en $u^{'}(\cdot)$ se tiene que $u^{'}(x^p) = r^{q_p}$.

Por lo tanto, bajo estos argumentos es evidente que la función $u^{'}(\cdot)$ es creciente, con el procedimiento de selección del número racional de menor rango, todo esto valido para todo elemento de $Q^{'}$ que acaba de ser tomado.

Paso 3. Extensión de D a X_i.
La función de utilidad a ser definida en X_i se designara por $u(\cdot)$. Si $x^{'}$ es un elemento de X_i, se escribe $D_{x^{'}} = \{x \in D \mid x^{'} \succeq x\}$ y $D^{x^{'}} = \{x \in D \mid x \succeq x^{'}\}$.

Si x es un elemento mínimo de X_i, tómese $u(x) = a$. Si x es un elemento máximo de X_i, tómese $u(x) = b$. En los casos restantes, considérense $Sup(u^{'}(D_x))$ e $Inf(u^{'}(D^x))$.

Se demostrara que estos dos números son iguales.

1) Si $x^{'}$ es un elemento de D_x y $x^{''}$ un elemento de D^x, se tiene $x^{''} \succeq x^{'}$. Por lo tanto si $r^{'} \in u^{'}(D^x)$ y $r^{'''}(D_x)$ se tiene $r^{''} \geqq r^{'}$. De esto se deduce fácilmente que $Sup(u^{'}(D_x)) \leqq Inf(u^{'}(D^x))$.
2) $Sup(u^{'}(D_x)) < Inf(u^{'}(D^x))$, sin embargo, este caso no puede ser posible, debido a que cualquier número racional que se encuentre entre ambos valores, no seria un valor tomado por $u^{'}(x)$.

Tomando $u(x)$, como el valor común del $Sup(u^{'}(D_x))$ e $Inf(u^{'}(D^x))$. Resultara evidente que si $x \in D$, entonces se tiene que $u(x) =$

$u^{'}(x)$; y por lo tanto $u(\cdot)$ es una extensión de $u^{'}(\cdot)$ de D a X_i; en particular

$$Q^{'} \subset u(X_i) \subset [a, b],$$

donde se puede comprobar que por el Paso 2, $u(\cdot)$ es creciente.

Paso 4. Continuidad de $u(\cdot)$

Se demostrara que si $c \in \mathbb{R}$ cualquiera, la imagen inversa de $[c, \rightarrow[$ dada por $u(\cdot)$ es cerrada en X_i. En virtud de la definición de continuidad, se habrá demostrado que $u(\cdot)$ es continua en X_i. Si $t \in \mathbb{R}$, se escribirá

$$X_t = \{x \in X_i \mid t \geqq u(x)\} \text{ y } X^t = \{x \in X_i \mid u(x) \geqq t\}.$$

Evidentemente, basta considerar el caso en que c pertenece a $]a, b[$. Entonces el intervalo $[c, \rightarrow[$ es la intersección de los intervalos $[r, \rightarrow[$, donde $r \in Q^{'}$ y $c \geqq r$. Tomando las imágenes inversas dadas por $u(\cdot)$, se obtiene $X_i^c = \cap^r_{r \in Q^{'} c} X_i$. Sea x un punto de X_i tal que,

$$u(x) = r; \quad X_i^r = \{x^{'} \in X_i \mid x^{'} \succeq x\}$$

que es cerrado en X_i en virtud del Supuesto 1.1. Por lo tanto X_i^c, como intersección de conjuntos cerrados en X_i, es cerrado en X_i. Esto concluye la demostración. ⊠

A continuación, siguiendo a Varian [1992:116] se formula un resultado que es equivalente al Teorema 3.1., el cual se demuestra en la Teorema 3.2., y el cual enuncia la existencia de la función de utilidad.

Teorema 3.2. Se supone que la relación de preferencia $\succeq_i$ definida sobre $X_i \subset \mathbb{R}^\ell$ es reflexiva, transitiva, completa, continua y satisface la monotonía fuerte. Entonces existe una función de utilidad continua $u_i : \mathbb{R}^\ell \rightarrow \mathbb{R}$ que representa esas preferencias.

Demostración Teorema 3.2.
Sea $e \in \mathbb{R}^\ell$ un vector $\ell - dimensional$ formado únicamente por unos. En este caso, dado un vector $x_i \in X_i$, sea $u(x_i)$ un número tal que $x_i \sim_i u(x_i)e$. Se tiene que demostrar que existe un número $y \in \mathbb{R}$ que es único.

Sea $B = \{t \in \mathbb{R} \mid te \succeq_i x_i\}$ y $W = (t \in \mathbb{R} \mid x_i \succeq_i te)$. En este caso la monotonía fuerte implica que B no es un conjunto vacío; W tampoco lo es, desde luego, ya que tiene al menos un elemento, 0. La continuidad implica que los dos conjuntos son cerrados. Dado que la linea real esta conectada, existe algún t_{x_i} tal que $t_{x_i}e \sim_i x_i$. Se procede a demostrar que esta función de utilidad representa, de hecho, las preferencias subyacentes. Sea.

$$u(x_i) = t_{x_i} \quad donde \quad t_{x_i}e \sim_i x_i, \quad y \quad u(y) = t_y \quad donde \quad t_y e \sim_i y$$

En este caso, si $t_{x_i} < t_y$. la monotonía fuerte demuestra que $t_y e \succ t_{x_i}e$ y la transitividad demuestra que

$$t_y e \sim y \succ x_i \sim_i t_{x_i}e$$

Del mismo modo si $x_i \succ y$, entonces $t_x e \succ t_y e$, por lo que t_{x_i} debe ser mayor que t_y. ⊠

3.5. Restricción presupuestal.

Dado un sistema de precios p y un plan de consumo x_i, el gasto del $i - \acute{e}simo$ consumidor es el producto $p \cdot x_i$. En razón de las convenciones de signo propuestas por Debreu sobre las coordenadas de x_i y p, el producto interior $p \cdot x_i$ es la suma de todos los desembolsos menos la suma de todos los ingresos. Evidentemente el gasto $p \cdot x_i$ debe ser a lo mucho igual al ingreso del $i - \acute{e}simo$ consumidor, un número real m_i. Este concepto de ingreso corresponde a la noción del valor presente de mercancías que el consumidor i posee, descontando las deudas de las que es objeto de cobro. La m-upla (m_i) se llama distribución del ingreso entre los consumidores, i.e. $m = (m_i) \in \mathbb{R}^m$, y $m_i \in \mathbb{R}$.

Antes de establecer la restricción presupuestal para el consumidor, se definirá las dotaciones iniciales privadas de cada mercancía.

3.5.1. Recursos de la economía.

Los recursos totales de la economía son las cantidades de mercancías dadas *a priori* que están a disposición de los agentes consumidores. Estas cantidades pueden ser representadas por números positivos o negativos. Bajo esta convención los recursos totales se representan por un punto ω de $\mathbb{R}^\ell$, el espacio de mercancías.

Definición 3.17. ω_i es un vector de mercancías para el $i - \acute{e}simo$ consumidor, **la dotación inicial privada** es un elemento del conjunto de consumo **del consumidor** i, i.e. $\omega_i \in X_i \subset \mathbb{R}^\ell$.

Definición 3.18. La **dotación inicial privada total** o **recursos totales** para los consumidores $i = 1, ..., m$, se denota por

$$\omega = \sum_{i=1}^{m} \omega_i$$

donde $\omega \in \mathbb{R}^m$.

Adicionalmente, debido a que se esta trabajando sobre una economía de propiedad, se establece la regla institucional de propiedad sobre la producción, esto es: se dice que el **consumidor** i, es accionista o **mantiene un grado de propiedad sobre la firma** j. De esta manera, θ_j^i es el porcentaje de participación en la firma j siendo propietario en este grado el consumidor i. Estas participaciones sobre la propiedad son no negativas y la suma es la unidad.

$$\theta_j^i \geqslant 0, \quad \forall i, j, \qquad y$$

$$\sum_{i=1}^{m} \theta_j^i = 1 \quad \forall j.$$

De esta manera, se esta en condiciones de poder definir el ingreso del consumidor de la forma siguiente:

Definición 3.19. Para todo consumidor $i = 1, ..., m$, se define

$$m_i(p) = p \cdot \omega + \sum_{j=1}^{m} \theta_j^i \pi_j(p)$$

como el **ingreso del consumidor** j en el vector de precios p. Ademas se asume que $\omega_i >> \hat{x}_i$, teniendo que $p \cdot \hat{x}_i < m_i(p)$ para p dados.

Resumiendo: Dado el sistema de precios p y su nivel de ingresos m_i, un número real, el $i - \acute{e}simo$ consumidor elige un consumo $x_i \in X_i$, de tal forma que su gasto $p \cdot x_i$ satisfaga la restricción de riqueza $p \cdot x_i \leqq m_i$.

Cuando $p \neq 0$ se tiene la siguiente situación geométrica. El hiperplano $\{a \in \mathbb{R}^\ell \mid p \cdot a = m_i\}$ se llama **hiperplano de riqueza**. La restricción $p \cdot x_i \leqq m_i$ expresa que x_i debe estar en el semiespacio cerrado debajo del hiperplano de riqueza.

Dado un par precio-riqueza (p, m) arbitrario, el conjunto $\{x_i \in X_i \mid p \cdot x_i \leqq m_i\}$ en el que el $i - \acute{e}simo$ consumidor debe elegir puede ser vacío; sin embargo se tomara como S_i como el conjunto (p, m) en $\mathbb{R}^{\ell+m}$ para el cual no es vacío.

Definición 3.20. S_i se define por

$$S_i = \{(p, m) \in \mathbb{R}^{\ell+m} \mid \exists x_i \in X_i \quad tal \quad que \quad p \cdot x_i \leqq m_i\}$$

De esta manera, se define la **correspondencia presupuestal** de la siguiente manera:

Definición 3.21. Así como cada par precio-riqueza (p, m) en S_i se asocia como el conjunto no vacío

$$\beta_i(p, m) = \{x_i \in X_i \mid p \cdot x_i \leqq m_i\}$$

Bajo las definiciones 3.20 y 3.21 queda definida una correspondencia $\beta_i : S_i \to X_i$.

De hecho $\beta_i(p, m_i)$ depende únicamente de p y m_i, es definida de esta manera para analizar más adelante la suma de demandas individuales.

3.5.2. Continuidad de la correspondencia presupuestal.

Las definiciones C.2. y C.4., son aplicadas únicamente en el caso en que X_i es compacto. Se vera más adelante, que bajo ciertas hipótesis más débiles, el conjunto de consumo puede reemplazarse por un cierto subconjunto de X_i no vacío y compacto.

Teorema 3.3. Si X_i es compacto, convexo y si (p^0, m^0) es un punto de S_i tal que $m_i^0 \neq Mín \quad p^0 \cdot X_i$, entonces β_i es continua en (p^0, m^0).

Se puede decir que dado un conjunto de consumo X_i compacto y convexo, y un par de precio-riqueza (p^0, m^0) en S_i, siempre que se excluya el caso donde $m_i^0 = Mín \quad p^0 \cdot X_i$, es decir, donde la riqueza es tan pequeña que no existiría ningún consumo posible que cumpliera con la restricción presupuestal, por lo tanto β_i será continua en el punto (p^0, m^0).

La Figura 3.6. ilustra cómo β_i puede no ser continua si $m_i^0 = Mín \quad p^0 \cdot X_i$. El conjunto X_i es el cuadrado cerrado de lado 2. Considerando $p^0 = (0,1)$ y $m_i^0 = 0$; el hiperplano correspondiente es la linea recta $0,1$. El caso, donde $m_i^0 = Mín \quad p^0 \cdot X_i$ se presenta, no existe ningún punto de X_i debajo del hiperplano de riqueza.

Sea a el punto $(1,0)$ y se hace tender $(p, m_i) \to (p^0, m_i^0)$ de tal forma que el hiperplano correspondiente gire alrededor de a como en la Figura 3.6. Sí $p \neq p^0$ el conjunto $\beta_i(p,m)$ es la región sombreada cuyo límite es el segmento cerrado $[0,a]$. Sin embargo, $\beta_i(p^0, m^0)$ es el segmento cerrado $[0, 2a]$.

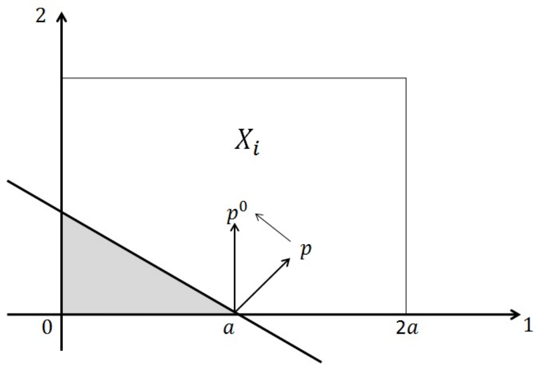


Figura 3.6: Continuidad de la correspondencia presupuestaria.

Demostración Teorema 3.3.
Se demostrara que (1) β_i es s.c.s. en (p^0, m^0), (2) es s.c.i. en (p^0, m^0).

(1) El gráfico de β_i es, por definición,

$$\{(p, m, x_i) \in S_i \times X_i \mid p \cdot x_i \leqq m_i\}$$

Es evidente que el conjunto es cerrado en $S_i \times X_i$. Por lo tanto en virtud de la Proposición C.4., β_i es s.c.s. en S_i.

(2) Sea $\{p^q, m^q\}$ una sucesión de puntos de S_i que tiende a (p^0, m^0), y sea x_i^0 un punto en $\beta_i(p^0, m^0)$, es decir, $x_i^0 \in X_i$ y $p^0 \cdot x_i^0 \leqq m_i^0$. Debe demostrarse la existencia de una sucesión $\{x_i^q\}$ de puntos de X_i tal que $x_i^q \to x_i^0$ y, para todo q, $x_i^q \in \beta_i(p^q, m^q)$, es decir, $p^q \cdot x_i^q \leqq m_i^q$. De esta manera, se consideran dos casos.

2.1) $p^0 \cdot x_i^0 < m_i^0$. En consecuencia, resulta que un entero q', $p^q \cdot x_i^0 < m_i^q$. De esta manera, la sucesión $\{x_i^q\}$ se define de la siguiente manera:

Si $q \leqq q'$, tómese como x_i^q un punto arbitrario de $\beta_i(p^q, m^q)$.

Si $q > q'$, tómese $x_i^q = x_i^0$. Por lo tanto se concluye que $\{x_i^q\}$ tiene las propiedades deseadas para la demostración.

2.2) $p^0 \cdot x_i^0 = m_i^0$. Por hipótesis $\exists x_i' \in X_i$ tal que $p^0 \cdot x_i' < m_i^0$. Por lo tanto para todos los q mayores que cierto entero q',

$$p^q \cdot x_i' < m_i^q \text{ y } p^q \cdot x_i' < p^q \cdot x_i^0$$

Considerando el punto a^q en el que la recta x_i', x_i^0 intersecta al hiperplano (p^q, m^q). Ver Figura 3.7.

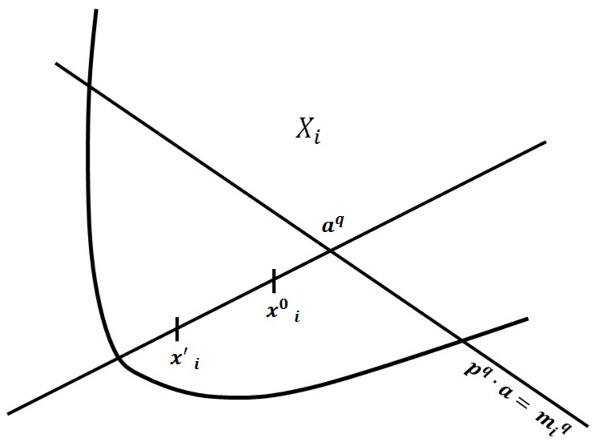


Figura 3.7: Continuidad de la correspondencia presupuestaria II.

Se comprueba que para todo q mayor que q', existe un punto a^q que es único y tiende a x_i^0. Se define, entonces la sucesión $\{x_i^0\}$ de la siguiente manera:

Si $q \leqq q'$, se toma a x_i^q como un punto de $\beta_i(p^q, m^q)$

Si $q > q'$ y $a^q \in [x_i', x_i^0]$, se toma $x_i^q = a^q$.

Si $q > q'$ y $a^q \notin [x_i', x_i^0]$, se toma $x_i^q = x_i^0$ (ya que a^q no necesariamente esta en X_i). ⊠

3.6. Optimización de las preferencias.

Dado un par precio-riqueza (p, m) en S_i, el $i-\acute{e}simo$ consumidor elige en el conjunto no vacío $\beta_i(p, m)$, un conjunto x_i es óptimo de acuerdo a sus propias preferencias, es decir, selecciona un plan de consumo que maximiza el preorden de preferencias $\succeq_i$.

Formalmente: Dado el par de precio-riqueza (p, m) en S_i, el $i-\acute{e}simo$ consumidor elige dentro del conjunto $\beta_i(p, m)$, un elemento máximo para su preorden de preferencias $\succeq_i$. La acción resultante se llama consumo de equilibrio del $i-\acute{e}simo$ consumidor relativo a (p, m). Cuando $p \neq 0$ se obtiene la siguiente situación geométrica. Si x_i^* es un elemento máximo de $\beta_i(p, m)$, el conjunto $\{x_i \in X_i \mid x_i \succ_i x_i^*\}$ no tiene un punto en común con el espacio cerrado debajo del hiperplano de riqueza H. La Figura 4.9. ilustra el caso donde X_i es el ortante no negativo. La clase de indiferencia de x_i^* se muestra como una linea quebrada que pasa por x_i^*.

El conjunto $\{x_i \in X_i \mid x_i \succ_i x_i^*\}$ es únicamente la región sombreada, solamente excluyendo la curva de indiferencia.

Si x_i^* es un consumo de equilibrio relativo a (p, w), entonces es un elemento máximo para $\succeq_i$ sobre

$$\{x_i \in X_i \mid p \cdot x_i \leqq p \cdot x_i^*\}$$

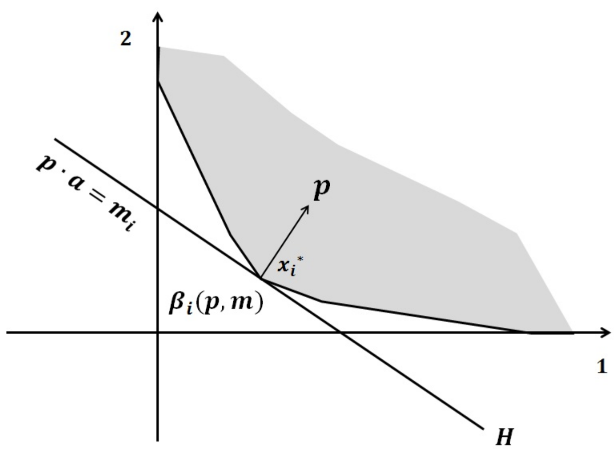


Figura 3.8: Plan de consumo óptimo.

Formalmente se definirá el consumo de equilibrio de la siguiente manera:

Definición 3.22. El plan de consumo x_i^* es un **consumo de equilibrio** del $i - \acute{e}simo$ consumidor relativo al sistema de precios p si es un elemento maximizador de $\{x_i \in X_i \mid p \cdot x_i \leqq p \cdot x_i^*\}$ para $\succeq_i$.

Dado un par arbitrario (p, m) en S_i, $\beta_i(p, m)$ puede no tener un elemento máximo. Sea por lo tanto, $S_i^{'}$ definido de la siguiente manera:

Definición 3.23.

$S_i^{'} = \{(p, m) \in S_i \mid \beta_i(p, m) \quad \textit{tiene un elemento maximizador para} \quad \succeq_i\}$

$S_i^{'}$ es el conjunto de (p, m) en S_i para los que el conjunto de elementos máximos de $\beta_i(p, m)$ no es vacío. Por evidencia se sabe que $S_i^{'}$ es un cono de vértice 0, excluyendo al punto 0, si y sólo si, el $i - \acute{e}simo$ consumidor es localmente no saciable.

Así cada par precio-riqueza (p, m) en $S_i^{'}$ se asocia el conjunto no vacío $\xi(p, m)$ de consumos posibles óptimos bajo la restricción de riqueza definida por (p, m). Ademas se establece que todos los puntos de $\xi_i(p, m)$ son indiferentes.

Definición 3.24. La correspondencia $\xi_i : S_i^{'} \to X_i$ se llama **correspondencia de demanda del** $i - \acute{e}simo$ **consumidor** y se define por

$$\xi_i(p, m) = \{x_i \in \beta_i(p, m) \mid x \succeq_i x_i^*, \quad x_i^* \in \beta_i(p, m)\}$$

Definición 3.25. La **correspondencia de demanda total**, $\xi : \bigcap_{i=1}^{m} S_i^{'} \to X$ se define por $\xi(p, m) = \sum_{i=1}^{m} \xi_i(p, m)$.

Dados dos pares precio-riqueza (p^1, m^1) y (p^2, m^2) en $S_i^{'}$, se dirá que (p^1, m^1) es preferido (o indiferente) a (p^2, m^2) para el $i-\acute{e}simo$ consumidor si un punto de $\xi_i(p^1, m^1)$ es preferido (o indiferente) a un punto de $\xi_i(p^2, m^2)$. Si hay una función de utilidad u_i en X_i, la utilidad máxima, cuando el par precio-riqueza es (p, m) en $S_i^{'}$ se designara por $u_i(p, m)$.

Definición 3.26. Si existe una función de utilidad u_i, la **función de utilidad indirecta** correspondiente del $i - \acute{e}simo$ consumidor,

$u_i : S_i^{'} \to \mathbb{R}$, la cual se define por $u_i(p, m) = Máx \quad u_i(\beta_i(p, m))$.

La analogía entre la Figura 2.4. y 3.8. sugiere que, dado (p, m) en $S_i^{'}$, de esta manera x_i^* es un elemento máximo de $\beta_i(p, m)$, si y sólo si x_i^* minimiza el gasto $p \cdot x_i$ en el conjunto $\{x_i \in X_i \mid x_i \succeq_i x_i^*\}$ de una serie de consumos posibles que son al menos tan deseados como x_i^*.

En el punto x_i^* se puede observar la unificación entre la teoría del consumo y la producción.

A continuación se reformula el problema del consumidor de una forma más precisa y más general.

En (a), $(a^{'})$, (b), $(b^{'})$, (p, m) designa a un punto dado de S_i, x_i^* un punto dado en X_i, y x_i un punto arbitrario de X_i.

Considérese en primer lugar la hipótesis:

(a) $p \cdot x_i \leqq m_i$ implica $x_i^* \succeq_i x_i$.

Esto corresponde a una generalización de la definición de x_i^* como un elemento maximizador de $\beta_i(p, m)$, debido a que esta ultima relación implicaría ademas que $p \cdot x_i^* \leq m_i$

El inciso (a) es equivalente a:

$(a^{'})$ $x_i \succ_i x_i^*$ implica $p \cdot x_i > m_i$

Se considera en segundo lugar la hipótesis siguiente:

$(b^{'})$ $x_i \succeq_i x_i^*$ implica $p \cdot x_i \geqq m_i$.

Es una generalización de la definición procedente de x_i^* como minimizador del gasto en el conjunto $\{x_i \in X_i \mid x_i \succeq_i x_i^*\}$ puesto que esta ultima implica que $p \cdot x_i^* = m_i$.

$(b^{'})$ es equivalente a:

(b) $p \cdot x_i < m_i$ implica $x_i^* \succ_i x_i$

La minimización del gasto implica la satisfacción de las preferencias siempre que el caso $m_i = Mín \quad p \cdot X_i$ sea excluido.

La Figura 3.9. muestra como la implicación puede no ser valida si $m_i = Mín \quad p \cdot X_i$. El conjunto X_i corresponde al cuadrante cerrado $1, 0, 2$. Se han establecido tres curvas de indiferencia. Considerando $p = (0, 1)$ y $m_i = 0$; el caso que se desea excluir aparece.

El conjunto $\beta_i(p, m)$ es la semirecta cerrada $0, 1$ y es evidente que el punto $x_i^* = (1, 0)$ no es un elemento máximo de $\beta_i(p, m)$ para $\succeq_i$. Sin embargo, x_i^* minimiza el gasto en el conjunto $\{x_i \in X_i \mid x_i \succeq_i x_i^*\}$ es representado por la región gris.

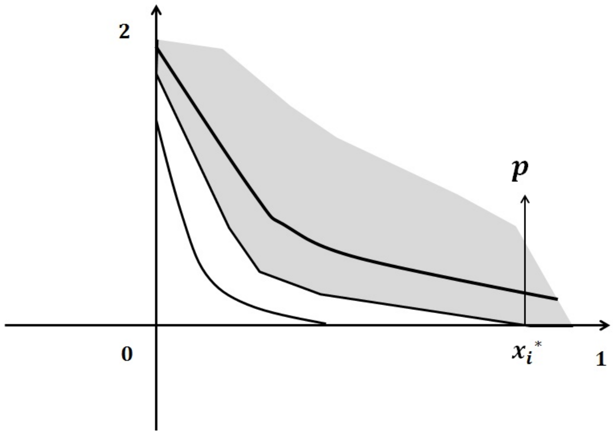


Figura 3.9: Plan de consumo óptimo.

Teorema 3.4. Si la hipótesis de continuidad es valida y se excluye $m_i = Mín \quad p \cdot X_i$, entonces (b) implica (a).

Demostración Teorema 3.4.
Puesto que se ha excluido $m_i = Mín \quad p \cdot X_i$ existe un punto $x_i^1 \in X_i$ para el que $p \cdot x_i < m_i$. Para demostrar el teorema es suficiente probar que si x_i^2 en X_i, satisface la igualdad $p \cdot x_i^2 = m_i$, entonces $x_i^* \succeq_i x_i^2$. Para esto se considera un punto cualquiera x_i en el segmento cerrado $[x_i^1, x_i^2]$ distinto de x_i^2. Por evidencia $p \cdot x_i < m_i$, por lo tanto, se establece que por (b), $x_i^* \succ_i x_i$. Por ello x_i^2 es adherente al conjunto $\{x_i \in X_i \mid x_i^* \succeq_i x_i\}$. Puesto que en virtud de la hipótesis de continuidad, este ultimo es cerrado, posee a x_i^2. ⊠

El preorden de preferencias $\succeq_i$ satisface la hipótesis de convexidad débil.

Dado un par precio-riqueza (p, m) en S_i' el conjunto $\xi_i(p, m)$ de consumos posibles óptimos para (p, m) es convexo. De esta manera si x_i^* es un elemento maximizador de $\beta_i(p,m)$ para $\succeq_i$, entonces $\xi_i(p,m)$ es la intersección de $\beta_i(p,m)$ y $\{x_i \in X_i \mid x_i \succeq_i x_i^*\}$, los cuales ambos son convexos.

Cuando la hipótesis de convexidad débil es valida para todo i, y cuando (p,m) está en $\bigcap_{i=1}^m S_i^{'}$, el conjunto $\xi(p,m)$, como suma de conjuntos convexos es convexo.

Teorema 3.5. Si las hipótesis de convexidad son validas para $\succeq_i$ y si x_i^* no es un consumo de saciedad, entonces $(a^{'})$ implica $(b^{'})$.

Demostración Teorema 3.5.
Puesto que x_i^* no es un consumo de saciedad, existe un punto x_i^1 en X_i para el que $x_i^1 \succ_i x_i^*$. Para demostrar el Teorema basta con probar que si x_i^2 en X_i satisface $x_i^2 \sim_i x_i^*$, entonces $p \cdot x_i^2 \geqq m_i$. Para esto se considera un punto cualquiera x_i del segmento cerrado $[x_i^1, x_i^2]$, distinto de x_i^2. Por la hipótesis de convexidad se tiene que $x_i \succ_i x_i^*$, por lo tanto, por $(a^{'})$. $p \cdot x_i > m_i$. En virtud de la continuidad de $p \cdot x_i$ se obtiene $p \cdot x_i^2 \geqq m_i$.

Corolario 1.6. Dado (p,m) en $S_i^{'}$, sea $x_i^{'}$ un elemento máximo de $\beta_i(p,m)$ para $\succeq$. Si la hipótesis de convexidad es válida para $\succeq_i$ y si x_i^* no es un consumo de saciedad, entonces $p \cdot x_i^{'} = m_i$.

Demostración corolario 1.6.
Por definición se tiene que $p \cdot x_i^* \leq m_i$. Puesto que $(b^{'})$ se cumple en virtud de el Teorema 3.5., y puesto que ademas se tiene que $x_i^{'} \succeq_i x_i^*$ se tiene que $p \cdot \geqq m_i$.
Si el objetivo del consumidor es satisfacer la desigualdad $p \cdot x_i \leqq m_i$, el consumo x_i^* que se selecciona, satisface la igualdad $p \cdot x_i^* = m_i$. Su gasto es igual a su riqueza. Por consiguiente, si $(p,m^{'})$ está en $S_i^{'}$, y si $m_i^{'} > m_i$, la riqueza $m^{'}$ es preferida a la riqueza m_i. ⊠

Capítulo 4

Existencia del equilibrio.

4.1. Introducción.

En esta sección se realizan una serie de definiciones sobre el tipo de economías que son necesarias para a demostración de la existencia del equilibrio, adicionalmente se formaliza el concepto de estados realizables de la economía y las respectivas propiedades que hereda a los conjuntos de producción y consumo. Se estudian las características de un resultado preliminar sobre la existencia del equilibrio auxiliándose del supuestos de la libre disposición de mercancías, para posteriormente finalizar con una demostración mucho más general que mantiene el objetivo del estudio de la existencia del equilibrio en una economía de propiedad privada. Las referencias básicas generadas en este capitulo pertenecen a Gérard Debreu [1959], con algunas adecuaciones generadas por el autor del presente documento.

4.2. Economías.

Definición 4.1. Una **economía** es definida por

$$E = \{(X_i, \succeq_i, \omega_i)_{i=1}^m ; (Y_j)_{j=1}^n\}$$

Mientras que un **estado** para la economía E es una $(m+n) - upla$ de puntos de $\mathbb{R}^\ell$; i.e. $(x_1, ..., x_m; y_1, ..., y_m) = ((x_i), (y_j))$ de $\left(\mathbb{R}^\ell\right)^{m+n}$ que satisface $x_i \in X_i$ para cada $i = 1, ..., m$ e $y_j \in Y_j$ para cada $j = 1, ..., n$.

Definición 4.2. Dado un estado $((x_i),(y_j))$ de E, el punto $x-y$ se llama **demanda neta.**

Donde en $x-y$ se cancelan todas las transferencias de mercancías de los agentes en la economía.

Si $x_i \in X_i$ para todo i e $y_j \in Y_j$ para todo j, la demanda neta $x-y$ pertenece al conjunto $X-Y$, i.e. $(x-y) \in (X-Y)$.

Definición 4.3. Dado un estado $((x_i),(y_j))$ de E, el punto $x-y-\omega$ se designa por z y se llama **demanda excedente**.

Si $x_i \in X_i$ para todo i e $y_j \in Y_j$ para todo j, entonces $z \in Z$ donde $Z = X - Y - \{\omega\}$.

Definición 4.4. Un estado $((x_i),(y_j))$ de E es un **equilibrio de mercado** si $z=0$, i.e. $x-y=\omega$.

Definición 4.5. El **conjunto de los equilibrios de mercado** se definen de la siguiente forma

$$M = \{((x_i),(y_j)) \quad de \quad E \mid z = 0\}$$

4.3. Estados realizables.

Definición 4.6. Se dice que un **estado** $((x_i)(y_j))$ de E es **realizable** si

a) $x_i \in X_i$ para todo i, $y_j \in Y_j$ para todo j, $x-y=\omega$

a') $A = (\prod X_i) \times (\prod Y_j) \bigcap M$.

Donde el conjunto de estados realizables de E es un subconjunto de $\mathbb{R}^{\ell(m+n)}$ designado por A.

Definición 4.7. Dada una economía E, se dice que un **consumo** x_i para el $i-\acute{e}simo$ consumidor es **realizable** si existe un estado realizable cuyo componente correspondiente a ese consumidor es x_i. El conjunto de sus consumos realizables se designa por $\hat{X}_i$. Análogamente se designa un conjunto para el $j-$*ésimo* productor.

$$\hat{X}_i : A \longrightarrow \mathbb{R}^\ell \supset X_i$$
$$\hat{Y}_j : A \longrightarrow \mathbb{R}^\ell \supset Y_j$$

4.3.1. Propiedades de los estados realizables.

Las propiedades del conjunto A de los estados realizables de una economía E serán estudiados.

Es claro que A es no vacío, si y solo si, $\omega \in X - Y$. Esto puede ser escrito como $0 \in Z$.

Proposición 4.1. Dada una economía E, si cada X_i y cada Y_j es cerrado, entonces A es cerrado .

Lema 1.1. La intersección de cualquier número de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado.

Demostración.
Sea $\{A_i\}$ una clase de conjuntos cerrados y sea $A = \cap_i A_i$, por Leyes de Morgan se tiene que,

$$\complement A = \complement\{\cap_i A_i\} = \cup_i \complement A_i$$

Donde $\complement$ denota el complemento,

Así, $\complement A$ es la unión de los conjuntos abiertos, consecuentemente $\complement\complement A = A$, el cual es cerrado. ⊠

Adicionalmente, se tiene que por α') la intersección de dos conjuntos cerrados, es cerrada.

Proposición 4.2. Si cada conjunto X_i y cada conjunto Y_j de una economía E son conjuntos convexos, entonces la intersección A es convexa.

Demostración.
Si se toman dos conjuntos convexos $(\prod_i X_i) \times \left(\prod_j Y_j\right)$ y M en $\mathbb{R}^\ell$. Se

procede a demostrar que A es un conjunto convexo.

Para demostrar esto, consideramos dos puntos, $x_i, y_j \in (\prod_i X_i) \times \left(\prod_j Y_j\right) \cap M$. Se tiene ademas que para todo número real $\lambda \in [0,1]$, donde $a = \lambda x_i + (1-\lambda)y_j$.

Ademas que satisface que $a \in A$. Sea entonces $t \in [0,1]$, puesto que $x_i, y_j \in A$, entonces $x_i, y_j \in (\prod_i X_i) \times \left(\prod_j Y_j\right)$, y como $(\prod_i X_i) \times \left(\prod_j Y_j\right)$ es convexo, entonces se tiene que $\lambda x_i + (1-\lambda)y_j \in (\prod_i X_i) \times \left(\prod_j Y_j\right)$. Pero lo mismo se obtiene, sustituyendo $(\prod_i X_i) \times \left(\prod_j Y_j\right)$ por M, por consiguiente, $\lambda x_i + (1-\lambda)y_j \in A$, con lo cual se concluye la demostración. $\boxtimes$

Bajo los mismos supuestos, los conjuntos $X - Y$ y Z son convexos, como suma de conjuntos convexos.

En el siguiente Teorema se enunciaran las condiciones sobre los conjuntos X_i y Y_j, las cuales aseguran que A es acotado. Como un resultado incidental, serán obtenidas las condiciones bajo las cuales el conjunto $X - Y$ es cerrado.

Teorema 4.1. Sea E una economía, tal que X esta acotado inferiormente para $\leqq$, Y es cerrado, convexo y $Y \cap \Omega = \{0\}$.

- Si $n = 1$, entonces $Y \cap (-Y) = \{0\}$, por lo tanto A es acotado.
- Si X es cerrado, entonces $X - Y$ es cerrado.

Antes de proceder a demostrar el Teorema 4.1, se enuncian una serie de observaciones y definiciones.

1. El ortante no negativo de $\mathbb{R}^\ell$ es el conjunto $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^\ell | x \geq 0\}$.
2. $Y \cap \Omega \subset \{0\}$. *Imposibilidad de producción libre.* Si todos los insumos son nulos, entonces toda la producción sera nula.
3. $Y \cap (-Y) \subset \{0\}$. *Irreversibilidad de la producción.* Esta propiedad, establece que no es posible cambiar el papel de los insumos y de los productos, excepto en el caso trivial de la inactividad. En otras palabras, si $y_j \in Y_j$ y $y_j \neq 0$, entonces $-y_j \notin Y_j$.
4. Definiciones importantes.

Definición 4.8. Dado un subconjunto C de $\mathbb{R}^\ell$ y un punto $x \in C$, se dice que es un **cono** con vértice en x, si este contiene las combinaciones de la forma $z = (1-t)x + ty$, donde $z \in \mathbb{R}^\ell$, y $t \in [0, 1]$.

Definición 4.9. Dados un par conos C_1 y C_2 con vértice 0, estos son **positivos semiindependientes**, si y solo si, $C_1 \cap (-C_2) = \{0\}$.

Considere un subconjunto $S \subset \mathbb{R}^\ell$. Sea k un número real no negativo, y se denota por S^k al conjunto $\{x \in S | \|x\| \geqq k\}$ de vectores en S los cuales su norma es mas mayor o igual que k. Ademas sea $\Gamma(S^k)$ el ultimo cono cerrado con vértice en 0 conteniendo a S^k (i.e. la intersección de todos los conos cerrados con vértice en 0 contienen a S^k).

Definición 4.10. El **cono asintótico** de S, denotado por $\mathbf{A}S$, es definido como la intersección de todos los $\Gamma(S^k)$, i.e., $\mathbf{A}S = \cap_{k \geqq 0} \Gamma(S^k)$, esto es claramente un cono cerrado con vertice en 0.

Propiedad 1. Si $T \neq \oslash$ y S son dos subconjuntos de $\mathbb{R}^\ell$, entonces $\mathbf{A}S \subset \mathbf{A}(S + T)$.

Propiedad 2. Si para cada $j = 1, ..., n$, S_j es un subconjunto de $\mathbb{R}^\ell$, entonces $\mathbf{A}(\prod_j S_j) \subset \prod_j \mathbf{A}S_j$.

Propiedad 3. Dada una colección de subconjuntos de $\mathbb{R}^\ell$, si la intersección de sus conos positivos es $\{0\}$, entonces la intersección es acotada.

Propiedad 4. Dados n subconjuntos cerrados de R^ℓ, si sus conos asintóticos son positivos semiindependientes, entonces su suma es cerrada.

Una vez enunciadas las definiciones y observaciones anteriores, se procede a dar una demostración al Teorema 4.1.

Demostración Teorema 4.1.
Para demostrar que A es acotado, basta demostrar que la intersección de los conos asintóticos,

$$\mathbf{A}\left(\left(\prod_{i=1}^{m} X_i\right) \times \left(\prod_{j=1}^{n} Y_j\right)\right) \cap \mathbf{A}M = \{0\}$$

de acuerdo a $\alpha^{'}$ y la Propiedad 3.

Por la Propiedad 2, se establece que el primer cono esta contenido en $(\prod_{i=1}^{m} X_i) \times \left(\prod_{j=1}^{n} Y_j\right)$, esto es por lo tanto, suficiente para mostrar que,

$$\left(\left(\prod_{i=1}^{m} \mathbf{A}X_i\right) \times \left(\prod_{j=1}^{n} \mathbf{A}Y_j\right)\right) \cap \mathbf{A}M = \{0\}. \tag{4.1}$$

El cono $\mathbf{A}M$ es la intersección de los estados $((x_i), (y_j))$ que satisfacen la igualdad $x - y = 0$.

La igualdad (4.1) es equivalente a:

Si $x_i \in \mathbf{A}X_i$ para cada i, $x_i \in \mathbf{A}Y_j$ para cada j y $\sum_i x_i - \sum_j y_j = 0$, implica que $x_i = y_j = 0$.

De acuerdo a la Propiedad 1, se tiene que $\mathbf{A}X_i \subset \mathbf{A}X$.

Para demostrar que $X - Y$ es cerrado, basta con probar que los conos asintóticos $\mathbf{A}X$ y $\mathbf{A}(-Y)$ son positivos semiindependientes. Pero esto es equivalente a $\mathbf{A}X \cap \mathbf{A}Y = \{0\}$, donde $\mathbf{A}X \subset \Omega$ y $\mathbf{A}Y \subset \Omega$, por lo tanto $Y \cap \Omega = \{0\}$. ⊠

Si A es acotado, o compacto o convexo; $\hat{X}_i$ y $\hat{Y}_j$ son entonces acotados, compactos o convexos.

4.4. Modelo.

Definición 4.11. Una **economía de propiedad privada** $\mathcal{E}$ se define de la siguiente manera:

$$\mathcal{E} = \left\{(X_i, \succeq_i, \omega_i)_{i=1}^{m}, (Y_j)_{j=1}^{n}, (\theta_j^i)_{j=1,\ldots,n}^{i=1,\ldots,m}\right\}$$

Donde:

1. $\mathbb{R}^\ell$: Espacio de bienes.
2. $X_i \subset \mathbb{R}^\ell$: Conjunto de consumo del $i-ésimo$ consumidor.
3. $\succeq_i$: Relación de preferencias del $i-ésimo$ consumidor.
4. $\omega_i \in \mathbb{R}^\ell$: Dotación inicial del $i-ésimo$ consumidor.
5. $Y_j \subset \mathbb{R}^\ell$: Conjunto de producción del $j-ésimo$ productor.
6. θ_j^i: Participación en los beneficios del $i-ésimo$ consumidor sobre la $j-ésima$ firma, donde:

$$\theta_j^i \geqslant 0, \quad \forall i, j \qquad y$$

$$\sum_{i=1}^{m} \theta_j^i = 1 \quad \forall j$$

Definición 4.12. Un **equilibrio walrasiano** es una economía de propiedad privada, existe si satisface las siguientes tres propiedades a un sistema de precios dado.

1) Cada firma maximiza sus beneficios, tomando los precios como dados. Para cada j:

$$y_j^* \in Y_j \quad \text{ y } \quad p \cdot y_j^* \geq p \cdot y_j \qquad \forall y_j \in Y_j.$$

2) Cada consumidor maximiza sus preferencias sujeto a su restricción presupuestaria.
Para cada i:

$$x_i^* \in \beta_i(p, m_i) = \left\{ x_i \in X_i \mid p \cdot x_i \leq p \cdot \omega_i + \sum_{j=1}^{n} \theta_j^i p \cdot y^* \right\},$$

donde $x_i^* \succeq_i x_i \quad \forall x_i \in \beta(p, m_i)$.

3) Todos los mercados se vacían.
$(x_1^*, ..., x_m^*; y_1^*, ..., y_n^*)$.

$$\sum_{i=1}^{m} x_i^* = \sum_{j=1}^{m} \omega_i + \sum_{j=1}^{n} y_j^*$$

Conservando la convención de signos sobre los insumos y los bienes, el beneficio generado por el plan y_j en el vector de precios p, es $p \cdot y_j$. Así, formalmente un equilibrio walrasiano es una lista,

$$(x_1^*, ..., x_m^*; y_1^*, ..., y_n^*; p)$$

4.4.1. Resultado preliminar sobre la existencia del equilibrio.

Considerando una economía $\mathcal{E}$ y sea C un conjunto de precios definido de la siguiente forma,

$$C = \left\{ p \in \mathbb{R}^{\ell} \mid \eta_j(p), \xi_i^{'}(p) \neq \emptyset \right\}$$

Donde $\eta : T_j^{'} \longrightarrow Y_j$, tal que $T_j^{'}$ se define como

$$T_j^{'} = \left\{ p \in \mathbb{R}^{\ell} \mid p \cdot Y_j \quad tiene \quad un \quad máximo \right\}$$

Adicionalmente

$$\eta_j(p) = \{ y_j \in Y_j \mid p \cdot y_j = Máx \quad p \cdot Y_j \}$$

Análogamente se define una proyección sobre el conjunto de consumo, de la forma $\xi_i : S_i^{'} \longrightarrow X_i$ definida por el conjunto,

$$S_i = \{ (p, m_i) \in \mathbb{R}^{\ell+m} \mid \exists x_i \in X_i \quad tal \quad que \quad p \cdot x_i \leqq m_i \}$$

Se establece un conjunto análogo a S_i, definido por

$$S_i^{'} = \{ (p, m_i) \in S_i \mid B_i(p, m_i) \quad tiene \quad un \quad max \quad sobre \quad \succeq_i \}$$

Se define ξ_i como

$$\xi_i(p, m_i) = \{ x_i \in B_i(p, m_i) \mid x_i^* \succeq_i x_i, \quad x_i^* \in B_i(p, m_i) \}$$

sin embargo, considerando que este conjunto depende únicamente de los precios, se establece que $\xi_i^{'}(p, m_i) = \xi_i^{'}(p)$. Siendo ademas, $\sum_{i=1}^{m} \xi_i^{'}(p) = \xi^{'}(p)$.

Definición 4.13. Tomando un $x_i \in \xi_i^{'}(p)$ para todo i, y un $\eta_j(p)$ para todo j, se establece la **correspondencia de demanda excedente** $\zeta : C \longrightarrow Z$, definida como

$$\zeta(p) = \xi^{'}(p) - \eta(p) - \{\omega\} \subset Z$$

El problema de equilibrio consiste en encontrar un $p \in C$ tal que $0 \in \zeta(p)$.

Si x_i e y_j satisfacen la reestricción

$$p \cdot x_i \leq p \cdot \omega_i + \sum_{j=1}^{n} \theta_i^j p \cdot y_j \qquad \forall i.$$

Recordando que $\sum_{i=1}^{m} \theta_i^j = 1$ para todo j, sumando sobre i, se obtiene

$$p \cdot \sum_{i=1}^{m} x_i \leq p \cdot \sum_{i=1}^{m} \omega_i + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \theta_i^j p \cdot y_j$$

$$p \cdot x \leq p \cdot \omega + p \cdot \sum_{i=1}^{m} \theta_i^j \cdot \sum_{j=1}^{n} y_j$$

$$p \cdot x \leq p \cdot \omega + p \cdot \sum_{i=1}^{m} \theta_i^j \cdot y$$

$$p \cdot x \leq p \cdot \omega + p \cdot y$$

Como $z = x - y - \omega$, se establece que

$$p \cdot x \leq p \cdot \omega + p \cdot y \Rightarrow p \cdot z \leq 0.$$

Para cualquier $p \in C$, se tiene que $p \cdot z \leq 0$ para todo $z \in \zeta(p)$, i.e. $p \cdot \zeta(p) \leq 0$. Cuando $p \neq 0$, el conjunto $\zeta(p)$ esta bajo el hiperplano H.

Intuitivamente de la Definición 4.2. (3), se sustituye $x^* - y^* \leq \omega$.

Bajo la condición del free-disposal, i.e. $Y \supset (-\Omega)$, es decir, es posible tener un conjunto total de producción Y, que contenga conjuntos nulos, i.e. todos los productores en conjunto pueden liberarse de mercancías.

Si $p \in C$, entonces se debe encontrar un $z \leq 0$ tal que $z \in (-\Omega)$, por lo tanto se puede formular la siguiente pregunta: ¿Hay un $p \in C$ tal que $\zeta(p) \bigcap (-\Omega) \neq \emptyset$?

Bajo el free-disposal $\eta_j(p)$ esta definido solo si los precios son no negativos, i.e. $p \geq 0$, por lo tanto $C \subset \Omega$.

Si 0 se excluye de C, para cada $p \in C$ se tiene que $\sum_{h=1}^{\ell} p_h > 0$, por lo tanto, bajo los precios positivos, se procede a sustituirlos en la correspondencia de demanda excedente, de tal forma que,

$$\zeta\left(\frac{1}{\sum_{h=1}^{\ell} p_h} \cdot p\right) = \zeta(p)$$

De esta manera, $p \in C$ puede reemplazarse por la semirrecta cerrada con origen en 0, por lo tanto p intersecta el conjunto

$$P = \{\ p \in \Omega \mid \sum_{h=1}^{\ell} p_h = 1\}$$

Posteriormente, se procede a establecer la correspondencia $\zeta : P \to Z$ es tal que para todo $p \in P$ se tiene que encontrar un $p \cdot \zeta(p) \leq 0$. Por lo tanto se formula la siguiente pregunta: ¿Existe un $p \in P$ tal que $\zeta(p) \bigcap(-\Omega) \neq \emptyset$?

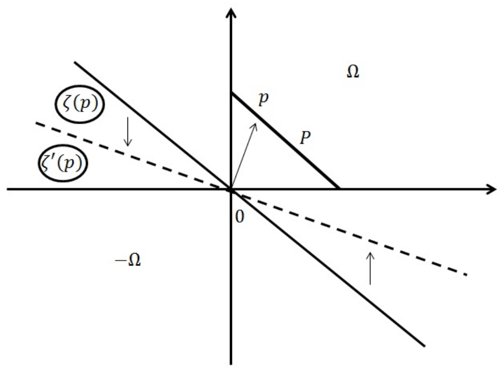


Figura 4.1: Equilibrio de la economía.

En la Figura 4.1, se puede observar gráficamente el equilibrio, i.e. $0 \in \zeta(p) \bigcap(-\Omega)$, el teorema del punto fijo es evidente, ya que al modificar la correspondencia de $\zeta(p)$ a $\zeta^{'}(p)$, el punto de equilibrio en el que la función exceso de demanda es $Z = 0$ y se cumple la Ley de Walras, continua siendo el punto cero; i.e. $0 \in \zeta^{'}(p) \bigcap(-\Omega)$

Para poder generar una respuesta a la pregunta planteada, se procede a enunciar el siguiente teorema.

Teorema 4.2. Sea Z un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^{\ell}$. Si ζ es una correspondencia de $P \to Z$ s.c.s. tal que para todo $p \in P$, el conjunto $\zeta(p)$ es (no vacío) convexo y satisface $p \cdot \zeta(p) \leq 0$, entonces existe un $p \in P$ tal que $\zeta(p) \bigcap (-\Omega) \neq \emptyset$.

Demostración Teorema 4.2.

Tomando en cuenta que p es distinto del vacío compacto y convexo, se procede bajo los siguientes pasos,

Paso 1. Se toma un $Z^{'} \subset Z$, donde $Z^{'}$ es ademas compacto y convexo.

Como $p \neq \emptyset$, entonces se establece que $Z^{'} \neq \emptyset$.

Paso 2. Tomando un $z \in Z^{'}$, se procede a definir el conjunto

$$\mu(z) = \{p \in P \mid p \cdot z = MaxP \cdot z\}$$

Puesto que $P \neq \emptyset$ y compacto, entonces $\mu(z) \neq \emptyset$.

Adicionalmete se establece que $\mu : Z^{'} \to P$ es s.c.s por exactamente las mismas razones que $\eta_j : \mathbb{R}^{\ell} \to Y_j$ era s.c.s en la sección 2.6.

Puesto que P es convexo, entonces $\mu(z)$ también lo es. De esta manera, pueden suceder dos casos.

$$Sí \quad z = 0 \Rightarrow \mu(z) = P$$

$$Sí \quad z \neq 0 \Rightarrow \mu(z) = P \bigcap H = \left\{p \in \mathbb{R}^{\ell} \mid p \cdot z = MaxP \cdot z\right\}$$

Paso 3. Sobre el punto fijo.

Tomando la correspondencia

$$\varphi : P \times Z^{'} \longrightarrow P \times Z^{'}$$

Definida por $\varphi(p, z) = \mu(z) \times \zeta(p)$.

El conjunto $P \times Z^{'}$ es no vacío, compacto y convexo, puesto que P y $Z^{'}$ lo son. La correspondencia φ es s.c.s puesto que μ y ζ lo son.

Paso 4. Finalmente, para todo $(p, z) \in P \times Z'$, el conjunto $\varphi(p, z)$ es convexo, puesto que $\mu(z)$ y $\zeta(p)$ lo son.

Así todas las condiciones del Teorema de Kakutani se cumplen y φ tiene un punto fijo (p^*, z^*). Es decir $(p^*, z^*) \in \mu(z^*) \times \zeta(p^*)$, esto es equivalente a

1) $p^* \in \mu(z^*)$ y $z^* \in \zeta(p^*)$

La primera relación de (1) implica que para todo $p \in P$ se tiene que $p \cdot z^* \leq p^* \cdot z^*$. La segunda relación de (1) implica que $p^* \cdot z^* \leq 0$. Por lo tanto para todo $p \in P$ se tiene $p \cdot z^* \leq 0$.

Sea k uno de los primeros ℓ enteros positivos y tomando el punto $p \in P$ definido por $(p_k = 1, \quad p_h = 0 \quad para \quad k \neq h)$ obteniendo $z_k^* \leq 0$. Por lo tanto $z^* \in (-\Omega)$, esto es, con $z^* \in \zeta(p^*)$, por lo tanto demuestra que p^* tiene la propiedad deseada. ⊠

4.4.2. Demostración sobre la existencia del equilibrio.

Teorema 4.3. Una economía de propiedad privada tiene un equilibrio walrasiano, si todas las siguientes condiciones son satisfechas.

1. Condiciones sobre los conjuntos de consumo.
   a) Cada X_i es cerrado.
   b) Cada X_i es convexo.
   c) Cada X_i es acotado inferiormente.
2. Condiciones sobre las preferencias.
   a) Cada $\succeq_i$ tiene la propiedad de la no saciedad.
   b) Cada $\succeq_i$ es continua.
   c) Las preferencias son convexas. Esto es, si $x \succ_i y$, entonces para cada $\lambda \in (0, 1)$ se tiene que $\lambda x + (1 - \lambda)y \succ_i y$, donde $\lambda x + (1 - \lambda)y \in X_i$.
3. Condiciones sobre las dotaciones iniciales.

   Para cada i, existe $\hat{x}_i \in X_i$, tal que $\omega_i \gg \hat{x}_i$.
4. Condiciones sobre los conjuntos de producción.

a) Existe la posibilidad de inacción. Esto es, $0 \in Y_j$ para cada j.
b) El conjunto de producción total $Y = \sum_{j=1}^{n} Y_j$ es cerrado.
c) El conjunto de producción total $Y = \sum_{j=1}^{n} Y_j$ es convexo.
d) La producción es irreversible. Esto es, $Y \cap (-Y) \subset 0$.
e) Existe el la libre disposición de mercancías (free disposal). Esto es, $Y \supset (-\Omega)$.

El Teorema 4.3. sera demostrado como una generalización del Teorema 4.2. Sin embargo, surgen dificultades por el hecho de que algunos conjuntos Y_j pueden no ser cerrados y convexos; ademas algunos de los conjuntos X_i, Y_j, pueden no ser necesariamente acotados, a fin de superar estos inconvenientes, se procede a organizar la notación de la forma siguiente.

Definición 4.14. $\bar{\dot{Y}}_j$ es la capsula convexa y cerrada de Y_j.

Definición 4.15. $\bar{\dot{\mathcal{E}}}$ es la economía de propiedad privada obtenida al sustituir Y_j por $\bar{\dot{Y}}_j$ en $\mathcal{E}$.

En la primera parte de la demostración, se procede a exhibir que $\mathcal{E} - \textit{equilibrio}$ es un $\bar{\dot{\mathcal{E}}} - \textit{equilibrio}$.

En la parte 2 se demuestra que los planes x_i^*, y_j^* de un $\bar{\dot{\mathcal{E}}} - \textit{equilibrio}$ pertenecen necesariamente a **subconjuntos convexos y compactos**. Estos conjuntos son denotados de la siguiente manera,

$$\hat{X}_i, \hat{Y}_j \quad de \quad X_i, \bar{\dot{Y}}_j.$$

Se designa una letra con el signo superior $\hat{\cdot}$, por ejemplo $\hat{\eta}_j$ es el objeto matemático derivado de $\hat{X}_i, \hat{Y}_j$.

En un caso particular $\hat{\mathcal{E}}$ designara la economía de propiedad privada obtenida al sustituir $\hat{X}_i$ y $\hat{Y}_j$ en $\mathcal{E}$, por lo tanto en la parte 2 se demostrara que $\bar{\dot{\mathcal{E}}} - \textit{equilibrio}$ es un $\hat{\mathcal{E}} - \textit{equilibrio}$; por lo tanto, se procede a comprobar que $\mathcal{E} - \textit{equilibrio}$ es un $\hat{\mathcal{E}} - \textit{equilibrio}$.

La parte 3 demuestra que un sistema de precios p, de un $\mathcal{E} - \textit{equilibrio}$ es, necesariamente el producto de un vector P por un número positivo, de esta manera, se analiza el problema del resultado preliminar, pero ahora adaptado para $\hat{\mathcal{E}} - \textit{equilibrio}$ en el que el sistema de precios se restringe a P.

La parte 4 establece la semicontinuidad superior en P de las correspondencias $\hat{\eta}_j$, $\hat{\xi}_i$.

La parte 5 muestra que $\hat{Z}$ y $\hat{\zeta}$ cumplen todas las condiciones del Teorema 4.2.; en consecuencia existe un p^* en P tal que $\hat{\zeta}(p^*)$ tiene una intersección no vacía con $-\Omega$. En las partes 6, 7, 8 consiste en demostrar que, p^* es un sistema de precios de equilibrio para $\mathcal{E}$.

Demostración Teorema 4.3.

1. Un $\mathcal{E} - equilibrio$ es un $\bar{\dot{\mathcal{E}}} - equilibrio$.

   Sea $\dot{Y}_j$ la cápsula convexa de Y_j; de esta manera $\bar{\dot{Y}}_j$ designa la cápsula convexa y cerrada de Y_j. La propiedad

   $$\sum_{j=i}^{m} \bar{\dot{Y}}_j = Y$$

   que se utilizara posteriormente; se demuestra a continuación. Por evidencia se tiene que $Y \subset \bar{\dot{Y}}_j$, por lo tanto $Y \subset \sum_{j=1}^{m} \bar{\dot{Y}}_j$. Por otro lado, por la Proposición B.1. (3) del Anexo B , $\sum_{j=1}^{m} \dot{Y}_j = \dot{Y}$; así en virtud de A.1.3. $\sum_{j=1}^{m} \bar{\dot{Y}}_j \subset \bar{\dot{Y}}$. Sin embargo, por 4.$b$ y 4.c, este ultimo resultado es igual a Y, y el resultado queda establecido.

   Si $(x_1^*, ..., x_m^*; y_1^*, ..., y_n^*, p^*)$ es un $\mathcal{E} - equilibrio$, es también un $\bar{\dot{\mathcal{E}}} - equilibrio$. Para verlo es suficiente en virtud de la Definición 4.12. (1), (2), (3), se procede a comprobar que si y^* maximiza $p^* \cdot y_j$ en Y_j, también maximiza $p^* \cdot y_j$ en $\bar{\dot{Y}}_j$. Pero esto se facilita si el conjunto cerrado y convexo $\{y_j \in \mathbb{R}^\ell \mid p^* \cdot y_j \leqq p^* \cdot y_j^*\}$ contiene Y_j también esta contenido $\bar{\dot{Y}}_j$.

2. Un $\bar{\dot{\mathcal{E}}} - equilibrio$ es un $\hat{\mathcal{E}} - equilibrio$.

   Puesto que 4.d y 4.e implica $Y \cap \Omega = \{0\}$, todas las condiciones del Teorema 4.1., se cumplen para $\bar{\dot{\mathcal{E}}}$, y el conjunto de sus estados realizables esta acotado. Por lo tanto se tiene que en $\bar{\dot{\mathcal{E}}}$, el conjunto de consumo realizable de cada productor están acotados.

Sea K[1] un cubo cerrado de centro 0 que contenga en su interior a estos $m+n$ conjuntos. Por definición:

$$\hat{X}_i = X_i \cap K \text{ y } \hat{Y}_j = \bar{\dot{Y}}_j \cap K.$$

Es claro que $\hat{X}_i$ es compacto, convexo, satisface 1.a y 1.b y posee a x_i^0, siendo x_i^0 un plan de consumo realizable para el $i-\acute{e}simo$ consumidor en $\bar{\dot{\mathcal{E}}}$. De manera análoga es claro que $\hat{Y}_j$ es compacto, convexo y posee a 0.

Si $(x_1^*, ..., x_m^*; y_1^*, ..., y_n^*, p^*)$ es un $\bar{\dot{\mathcal{E}}}-equilibrio$, el estado $(x_1^*, ..., x_m^*; y_1^*, ..., y_n^*)$ es realizable para $\bar{\dot{\mathcal{E}}}$, por lo tanto $x_i^* \in \hat{X}_i \subset X_i$ e $y_i^* \in \hat{Y}_j \subset \bar{\dot{Y}}_j$ en consecuencia $(x_1^*, ..., x_m^*; y_1^*, ..., y_n^*, p^*)$ es un $\hat{\mathcal{E}} - equilibrio$.

3. Un sistema de precios de un $\mathcal{E} - equilibrio$ es > 0.

   Sea p^* un sistema de precios de un $\mathcal{E} - equilibrio$. En virtud de 2.a, $p^* \neq 0$; en virtud de 4.e, $p^* \geqq 0$. Por lo tanto, $p^* > 0$ y la semirecta abierta 0, p^* corta el conjunto P. Así en la búsqueda de un $\mathcal{E} - equilibrio$, por lo tanto se puede imponer que el sistema de precios pertenece a P.

4. Semicontinuidad superior en P de $\hat{\eta}_j$ y $\hat{\xi}_i$.

   Puesto que $\hat{Y}_j$ es compacto, la correspondencia de oferta $\hat{\eta}_j : P \to \hat{Y}_j$ es semicontinua superior en P y la función de beneficios $\hat{\pi}$ es continua en P.

   Puesto que $\omega_i \gg x_i^0$, para todo $p \in P$ se tiene $\hat{\pi}_j(p) \geqq 0$. Por lo tanto, para todo $p \in P$, se cumple la desigualdad $p \cdot x_i^0 < p \cdot \omega_i + \sum_{i=1}^m \theta_j^i \hat{\pi}_j(p)$ y en virtud del Teorema 3.3. la correspondencia $\beta_i(p, m_i)$ es continua en el punto (p, m_i). Puesto que la función $\hat{\pi}_j$ es continua en P, también lo es la función que asocia con daca $p \in P$ la $m - upla$ de números reales $p \cdot \omega_i + \sum_{i=1}^m \theta_j^i \hat{\pi}_j(p)$. Estas observaciones demuestran que $\hat{\xi}_i$ es semicontinua superior en P.

5. Existe $p^* \in P$ y $z \in (-\Omega)$ tal que $z \in \hat{\zeta}(p^*)$.

   El conjunto $\hat{Z} = \sum_{i=1}^m \hat{X}_i - \sum_{j=1}^n \hat{Y}_j - \{\omega\}$ como suma de conjuntos compactos, es compacto. Puesto que cada $\hat{\xi}_i$ y cada $\hat{\eta}_j$ es

[1]Sea k un número real no negativo; el conjunto $K = \{x \in \mathbb{R}^\ell \mid \ \mid x \mid \leq k\}$ es un cubo cerrado de $\mathbb{R}^\ell$ con centro 0 y lado $2k$.

semicontinua superiormente en P, también lo es en virtud de la Definición C.2., la correspondencia $\hat{\zeta}$.

De la convexidad de $\hat{X}_i$, 1.a y 1.b; se sigue que $\hat{\xi}_i(p)$ es convexo para todo $p \in P$

6. Definición de los planes x_i^*, y_j^* del $\mathcal{E} - equilibrio$.

   Puesto que $z \in \hat{\zeta}(p^*)$, existe para cada i, un consumo x_i^* en $\hat{\xi}(p^*)$ y, para cada j, una producción y_j en $\hat{\eta}_j(p^*)$ tal que

$$\sum_i x_i^* - \sum_j y_j - \omega = z \tag{4.2}$$

   Sea $y = \sum_{j=1}^n y_j$; como $y_j \in Y_j$ para todo j, por lo tanto la producción total $y \in Y$. El conjunto Y es convexo y cerrado; por lo tanto $y \in Y$ y $z \in -\Omega$ implica por las propiedades de los conjuntos de producción que $y + z \in Y$. Así para cada j existe una producción $y_j^* \in Y_j$ tal que

$$\sum_j y^* = y + z \tag{4.3}$$

   Se demostrara que $(x_1^*, ..., x_m^*; y_1^*, ..., y_n^*, p^*)$ es un equilibrio de $\mathcal{E}$. Se observara que 4.2 y 4.3 implican

$$\sum_i x_i^* - \sum_j y_j^* - \omega = 0 \tag{4.4}$$

   El plan $(x_1^*, ..., x_m^*; y_1^*, ..., y_n^*)$ es, pues realizable $\dot{\bar{\mathcal{E}}}$, por lo tanto todos los x_i^* y todos los y_j^* están en el interior del cubo K.

7. Propiedades de x_i^*.

   Se define entonces, m_i por

$$m_i = p^* \cdot \omega_i + \sum_{i=1}^m \theta_j^i p^* y_j$$

   Puesto que x_i^* esta en $\hat{\xi}_i(p^*)$ el consumo x_i^* es, por definición de $\hat{\xi}_i$ un elemento máximo para $\succeq_i$ del conjunto

$$B_i(p^*, m) = \{x_i \in \hat{X}_i \mid p^* \cdot x_i \leqq m_i\}$$

En consecuencia:
(6) x_i^* es un elemento máximo para $\succeq_i$ de $B_i(p^*, m) = \{x_i \in X_i \mid p^* \cdot x_i \leqq m_i\}$.
Si no fuera así, existiría un consumo $x_i^{'} \in B_i(p^*, m)$ tal que $x_i^{'} \succ_i x_i^*$. Sea $x_i(t)$ el punto $(1-t)x_i^* + tx_i^{'}$, donde t es un número real en $]0, 1[$. Para cada t en este intervalo el punto $x_i(t)$ estaría en el conjunto $B_i(p^*, m)$ que es convexo y por la convexidad del conjunto de producción satisfaría la relación $x_i(t) \succ_i x_i^*$. Ademas para t lo suficientemente cercano a 0 el punto $x_i(t)$ estaría en el cubo K, por lo tanto en $B_i(\hat{p^*}, m) = K \cap B_i(p^*, m)$, y en consecuencia x_i^* no sería un elemento máximo de $\hat{B}_i(p^*, m)$ para $\succeq_i$.

8. Propiedades de y_j^*.

   (7) $p^* \cdot y^* = p^* \cdot y$

   Puesto que y_j está en $\hat{\eta}_j(p^*)$, la producción y_j maximiza el beneficio relativo a p^* en $\hat{Y}_j$ para todo j; así en virtud de la Definición 2.10. (1), y maximiza el beneficio total en Y, tal como y^*.

   (8) y^* maximiza el beneficio relativo a p^* en $\hat{Y}_j$ para todo j. En particular, $p^* \cdot y_j^* = p^* \cdot y_j$, por lo tanto

$$m_i = p^* \cdot \omega_i + \sum_j \theta_j^i p^* \cdot y_j^*$$

   Esto, con (6), corresponde a (1) de la Definición 4.12.; mientras (4.4) corresponde a (3) de la misma definición. Finalmente a (2) y_j^* maximiza el beneficio relativo a p^* en Y_j para todo j, de lo que inmediatamente se plantea que de (8): Debido a que y_j^* esta en el interior del cubo K, un argumento similar al utilizado para (6) demuestra que y_j^* maximiza el beneficio relativo a p^* en $\bar{\hat{Y}}_j$. (y consecuentemente también maximiza Y_j).

   Por lo tanto se concluye la existencia del equilibrio. ⊠

Capítulo 5

Conclusiones.

La contribución de Gérard Debreu en Teoría del Valor, fue brindar un concepto moderno de la teoría del equilibrio general; se pueden distinguir los avances en las herramientas propuestas por el matemático y economista francés, todo esto que a su vez, genero un cambio revolucionario en la visión de la teoría económica contemporánea.

En términos de estos avances se pueden distinguir al menos tres características básicas en la estructura de Teoría del Valor

1) Distinción de las mercancías, esto es; la descripción física, disponibilidad temporal, así como disponibilidad espacial.
2) La integración de las teorías de producción y consumo.
3) Utilizar métodos analíticos, que permiten generalizar los conceptos de la teoría económica.

Las aplicaciones del equilibrio general, pueden ser observadas en las matrices insumo-producto necesarias para implementar modelos de grandes dimensiones y gran detalle sectorial, herramienta habitual de los analistas públicos.

En la actualidad existen una serie de problemas y conceptos que pueden ser estudiados a la luz de las contribuciones del equilibrio general y en los cuales existe un amplio campo de investigación, ejemplo de esto son:

1) Teorema de Sonnenschein-Mantel-Debreu. El cual establece que las funciones de demanda y oferta, resultantes del modelo de equilibrio general de Debreu, pueden asumir cualquier forma.

2) Modelos en los cuales los agentes pueden negociar a precios que no están dentro del equilibrio, y tales negociaciones pueden afectar los equilibrios a los cuales tiende la economía.
3) Modelos en los cuales la existencia de dinero puede alterar las soluciones del equilibrio, considerando que la posición inicial de los agentes depende de precios monetarios.

Adicionalmente es importante establecer que los modelos de equilibrio general, mantienen aplicaciones en el modelado de comercio internacional, en especial en las relaciones de intercambio entre los distintos bloques económicos o países.

Se han desarrollado áreas tales como el Equilibrio General Computable (E.G.C.), que se pueden considerar aplicaciones practicas donde se han dado avances tales como como el desarrollo de algoritmos para el calculo de equilibrios en economías con un alto numero de consumidores y productores con funciones de consumo y producción heterogéneas.

Bajo estos hechos, se puede concluir que el estudio del equilibrio general ha sido la base, junto con la teoría de juegos, del desarrollo del pensamiento económico contemporáneo, y es importante incentivar su estudio y comprensión en áreas interdisciplinarias, tales como las finanzas, planificación, computación, biología, sistemas, optimización, etc.

Apéndice A

Espacios topológicos.

A.1. Espacios topológicos.

A.1.1. Conjuntos abiertos.

Definición A.1. Sea X un conjunto no vacío. Una clase τ de subconjuntos de X es una **topología** sobre X, si y solo si τ satisface los siguientes axiomas.

1) X y $\emptyset$ pertenecen a τ.
2) La unión de cualquier número de conjuntos en τ, pertenecen a τ.
3) La intersección de cualquiera dos conjuntos en τ, pertenecen a τ.

Un conjunto X para el que se ha definido una topología τ se llama **espacio topológico**. i.e. Un espacio topológico es un par ordenado (X, τ), el cual esta formado por un conjunto X y una topología τ sobre X.

Definición A.2. Si X es un espacio topológico con una topología τ, diremos que $U \subset X$ es un **conjunto abierto**, si U pertenece a la colección τ.

Ejemplo A.1. Cosidere las siguientes clases de subconjuntos de $X = \{a, b, c, d, e\}$.

- $\tau_1 = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}\}$
- $\tau_2 = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}\}$

- $\tau_3 = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{a, b, d, e\}\}$

Observese que τ_1 es una topología sobre X por lo tanto, esta satisface los axiomas 1, 2 y 3. Pero τ_2 no es una topología sobre X ya que la unión

$$\{a, c, d\} \cup \{b, c, d\} = \{a, b, c, d\}$$

de los dos miembros de τ_2 no pertenece a τ_2, i.e. τ_2 no satisface el axioma 2.
En el mismo sentido, τ_3 no es una topología sobre X, ya que la intersección

$$\{a, c, d\} \cap \{a, b, d, e\} = \{a, d\}$$

de los dos conjuntos en τ_3 no pertenece a τ_3, i.e. τ_3 no satisface el axioma 3.

A.1.2. Conjuntos cerrados.

Definición A.3 Un subconjunto A de un espacio topológico X se dice que es **cerrado** si el conjunto $X - A$ es abierto.

Teorema A.1. Sea Y un subconjunto de X. Entonces un conjunto A es cerrado en Y si, y sólo si, es igual a la intersección de un conjunto cerrado de X con Y. [Munkres:2000:107]

Demostración Teorema A.1.
Suponiendo que $A = C \cap Y$, donde C es cerrado en X (Ver Figura A.1. lado izquierdo). Entonces $X - C$ es abierto en X, por lo que $(X - C) \cap Y$ es abierto en Y. Pero $(X - Y) \cap Y = Y - A$. De aquí $Y - A$ es abierto en Y, por lo que A es cerrado en Y. Recíprocamente, se asume que A es cerrado en Y (Ver Figura A.1. lado derecho). Entonces $Y - A$ es abierto en Y, por lo que por definición es iguala la intersección de un conjunto abierto U de X con Y. El conjunto $X - U$ es cerrado en X, y $A = Y \cap (X - U)$, por lo que A es igual a la intersección de un conjunto cerrado de X con Y, como se deseaba probar. $\boxtimes$.

Un conjunto A que es cerrado en el subconjunto Y puede ser cerrado o no en el espacio más grande X.

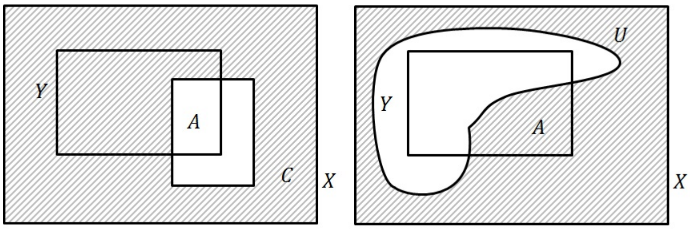


Figura A.1: Teorema 1.6.

A.1.3. Adherencia e interior de un conjunto.

Dado un subconjunto A de un espacio topologíco X, el **interior** del conjunto, se define como la unión de todos los conjuntos abiertos que se encuentran contenidos en A, y la **adherencia** en el subconjunto de A se define como la intersección de todos los conjuntos cerrados que contienen a A. El interior de A se denotara por $Int(A)$ y la adherencia de A se denota por $\bar{A}$. Sin $Int(A)$ es un conjunto abierto y $\bar{A}$ es un conjunto cerrado, de esta forma

$$Int(A) \subset A \subset \bar{A}.$$

Si A es abierto, $A = Int(A)$, mientras que, si A es cerrado, $A = \bar{A}$.

Con la información anterior se puede determinar que,

1) $A \subset \bar{A}$
2) $A \subset B \Longrightarrow \bar{A} \subset \bar{B}$

Si X es un espacio topológico X y un subconjunto Y, es necesario tener cuidado al tomar adherencia de conjuntos. Se tiene que si A es un subconjunto de Y, la adherencia de A en Y y la adherencia A en X son diferentes en general [Munkres:2000:107]; [Debreu, 1959:12-13].

Teorema A.2. Sean Y un subconjunto de X y A un subconjunto de Y. Se denota por $\bar{A}$ la adherencia de A en X. Entonces la adherencia de A en Y es $\bar{A} \cap Y$ [Lipschutz:1965:147)].

Demostración Teorema A.2.
Denotando por $\bar{B}$ la adherencia de A en Y. El conjunto $\bar{A}$ es cerrado en X, por lo que $\bar{A} \cap Y$ es cerrado en Y por el Teorema A.1. Puesto que $\bar{A} \cap Y$ contiene a A, y puesto que por definición $\bar{B}$ es igual a la

intersección de todos los subconjuntos cerrados de Y que contienen a A, debe ser $\bar{B} \subset (\bar{A} \cap Y)$.
Por otra parte, se sabe que $\bar{B}$ es cerrado en Y. De aquí el Teorema A.1., $\bar{B} = C \cap Y$ para algún C cerrado en X. Entonces C es un conjunto cerrado de X que contiene a A; como $\bar{A}$ es la intersección de todos los conjuntos cerrados, se concluye que $\bar{A} \subset C$. Entonces $(\bar{A} \cap Y) \subset (C \cap Y) = \bar{B}$. ⊠

Otro camino, para describir la adherencia de un conjunto, que resulta ser muy útil porque implica una base para la topología de X.

Teorema A.3. Sea A un subconjunto del espacio topológico X.

(a) Entonces $x \in \bar{A}$ si, y sólo si, cada conjunto abierto U que contiene a x intersecta a A.

(b) Suponiendo que la topología de X está dada por una base, entonces $x \in \bar{A}$ si, y sólo si, cada elemento básico B que contiene a x intersecta a A [Munkres:2000:109].

Demostración Teorema A.3.
Considerando el enunciado de (a). De esta manera se procede a demostrar de la forma $P \Leftrightarrow Q$. Transformando cada implicación en su opuesta, para de esta manera, obtener el resultado lógico equivalente a $no \quad P \Leftrightarrow no$. Su desarrollo se procede de la siguiente manera:
$x \notin \bar{A} \Leftrightarrow$ existe un conjunto abierto U que contiene a x y que no intersecta a A.
De este modo, el teorema es sencillo de probar. Si x no está en $\bar{A}$, el conjunto $U = X - \bar{A}$ es un conjunto abierto que contiene a x y que no intersecta a A, entonces $X - U$ es un conjunto cerrado que contiene a A. Por definición de clausura $\bar{A}$, el conjunto $X - U$ debe contener a $\bar{A}$; sin embargo, x no puede estar en $\bar{A}$.
Continuando con el enunciado (b). Si cada conjunto abierto que contiene al elemento x, el cual intersecta a A, análogamente lo hace cada elemento básico B que contenga a x, debido a B es un conjunto abierto. Recíprocamente, si cada elemento básico que contiene a x intersecta a A, también lo hace cada conjunto abierto U que contenga a x, porque U contiene un elemento básico que contiene a x. ⊠

A.1.4. Conjuntos compactos.

Definición A.4. Una colección $\mathcal{A}$ de subconjuntos del espacio X se dice que *cubre* X, o que es un **cubrimiento** de X, si la unión de los elementos de $\mathcal{A}$ coincide con X. Se dice que $\mathcal{A}$ es un **cubrimiento abierto** de X si es un cubrimiento de X formado por conjuntos abiertos de X. [Munkres:2000:186]

Definición A.5. Un conjunto X se dice que es **compacto** si de cada recubrimiento abierto $\mathcal{A}$ de X podemos extraer la subcolección finita que también cubre X.

Teorema A.4. Sea Y un subconjunto de X. Entonces Y es compacto si, y sólo si, cada cubrimiento de Y por abiertos de X contiene una subcolección finita que cubre Y.

Demostración Teorema A.4.
Suponiendo que Y es compacto y que $\mathcal{A} = \{A_\alpha\}_{\alpha \in J}$ es un cubrimiento de Y por abierto de X. Entonces la colección,

$$\{A_\alpha \cap Y \mid \alpha \in J\}$$

es un cubrimiento de Y por conjuntos abiertos en Y; como Y es compacto, existirá una subcolección finita de la forma

$$\{A_{\alpha_1} \cap Y, ..., A_{\alpha_n} \cap Y\}$$

cubriendo Y. Entonces $\{A_{\alpha_1}, ..., A_{\alpha_n}\}$ es una subcolección finita de $\mathcal{A}$ que cubre Y.
Recíprocamente, sea $\mathcal{A}' = \{A'_\alpha\}$ un cubrimiento de Y por abiertos de Y. Para cada α, podemos elegir un conjunto A_α abierto en X tal que

$$A'_\alpha = A_\alpha \cap Y.$$

La colección $\mathcal{A} = \{A_\alpha\}$ es un cubrimiento de Y por abiertos en X. Por hipótesis, alguna subcolección finita $\{A_{\alpha_1}, ..., A_{\alpha_n}\}$ cubre Y. Entonces $\{A'_{\alpha}1, ..., A'_{\alpha_n}\}$ es una subcolección finita de $\mathcal{A}$ que cubre Y. $\boxtimes$

Teorema A.6. Cada subconjunto cerrado de un conjunto compacto, es compacto.

Demostración Teorema A.6.
Sea Y un subconjunto cerrado del conjunto compacto X. Dado un cubrimiento A de Y por conjuntos abiertos en el compacto X, se puede considerar un cubrimiento abierto $\mathcal{B}$ de X uniendo $\mathcal{A}$ al conjunto abierto $X - Y$, esto es,

$$\mathcal{B} = \mathcal{A} \cup \{X - Y\}$$

Como X es compacto, existe alguna subcolección finita que cubre a X. Si esta subcolección contiene al conjunto $X - Y$, lo descartamos. Si no es así, la dejamos como se encuentra. La colección resultante, en cualquiera de los casos, es una subcolección finita de $\mathcal{A}$ que cubre a Y. ⊠

Teorema A.7. La imagen de un conjunto compacto bajo una aplicación continua es un conjunto compacto [Munkres:2000:189].

Demostración Teorema A.7.
Sea $f : X \to Y$ continua con X compacto. Sea $\mathcal{A}$ un cubrimiento del conjunto $f(X)$ por abiertos de Y. La colección

$$\{f^{-1}(A) \mid A \in \mathcal{A}\}$$

es un cubrimiento de X por conjuntos abiertos ya que f es continua. Por tanto, un número finito de ellos, por ejemplo

$$f^{-1}(A_1), ..., f^{-1}(A_n)$$

cubren X. Entonces los conjuntos $A_1, ..., A_n$ cubren $f(X)$. ⊠

Teorema A.8. El producto de un número finito de conjuntos compactos es compacto.

Demostración Teorema A.8.
Demostraremos que el producto de dos conjuntos compactos es compacto; el teorema se sigue entonces por construcción.

Paso 1. Sean X Y conjuntos, con Y compacto. Sea x_0 un punto de X, y sea N un conjunto abierto de $X \times Y$ que contiene el elemento, donde x_0 de $X \times Y$. Se probara el siguiente resultado:

Existe un entorno W de x_0 en X tal que N contiene al conjunto $W \times Y$.

El conjunto $W \times Y$ se denomina *tubo* sobre $x_0 \times Y$. En primer lugar, se cubre $x_0 \times Y$ por elementos $U \times V$, de modo que $U \times V \subset N$. El espacio $x_0 \times Y$ es compacto ya que es homeomorfo [1] a Y. De esta manera, podemos cubrir $x_0 \times Y$ con un número finito de tales elementos básicos:

$$U_1 \times V_1, ..., U_n \times V_n$$

Suponiendo que cada uno de los elementos $U_i \times V_i$ intersecta a $x_0 \times Y$. Definimos

$$W = U_1 \cap ... \cap U_n$$

El conjunto W es abierto, y contiene x_0 pues cada conjunto $U_i \times V_i$ intersecta a $x_0 \times Y$. Afirmamos que los conjuntos $U_i \times V_i$, que fueron elegidos para cubrir el elemento $x_0 \times Y$, también cubren el tubo $W \times Y$. Sea $x \times y$ un punto de $W \times Y$. Consideremos el punto $x_0 \times y$ del conjunto $x_0 \times Y$ que tiene la misma $y - coordenada$ en ese punto. Ahora, $x_0 \times y$ pertenece a algún $U_i \times V_i$ para algún i, así que $y \in V_i$. Pero $x \in U_j$ para todo j (ya que $x \in W$). Así, se tiene $x \times y \in U_i \times V_i$, tal y como se pretendía demostrar. Como todos los conjuntos $U_i \times V_i$ están contenidos en N, y como cubren al conjunto $W \times Y$, se tiene que el tubo $W \times Y$ también está N. Como se observa en la figura siguiente.

Paso 2. A continuación, se finaliza la demostración del teorema. Sean X e Y conjuntos compactos. Sea A un cubrimientos abierto de $X \times Y$. Dado $x_0 \in X$, el conjunto $x_0 \times Y$ es compacto y estará cubierto por un número finito de elementos $A_1, ..., A_m$ de $\mathcal{A}$.

La unión $N = A_1 \cup ... \cup A_m$ es un abierto que contiene al conjunto $x_0 \times Y$; por el Paso 1, el abierto N contiene un tubo $W \times Y$ sobre $x_0 \times Y$ donde W es un abierto de X. Entonces $W \times Y$ está cubierto

[1] Sea X e Y espacios topológicos, y f una función de X a Y; entonces, f es un homeomorfismo si se cumple que:

1) f es una biyección.
2) f es continua.
3) La inversa de f es continua.

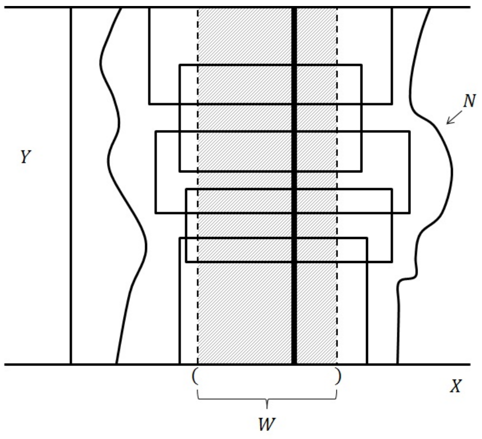


Figura A.2: Conjuntos compactos y tubo.

por un número finito de elementos $A_1, ..., A_m$ de $\mathcal{A}$.

De esta forma, cada $x \in X$, podemos elegir una vecindad W_x de x tal que el tubo $W_x \times Y$ puede ser cubierto por un número finito de elementos de $\mathcal{A}$. La colección de todos los entornos W_x es un cubrimiento abierto de X; por la compacidad de X, existe una subcolección finita

$$\{W_1, ..., W_k\}$$

cubriendo X. La unión de los tubos

$$W_1 \times Y, ..., W_k \times Y$$

es el espacio $X \times Y$ ya que cada uno de ellos puede ser cubierto por un número finito de elementos de $\mathcal{A}$, y así $X \times Y$ es compacto. ⊠

Teorema A.9. Weierstrass. Si f es una función continua en el intervalo $[a, b]$. Es decir $\exists \alpha \in [a, b]$ tal que $f(\alpha) \leq f(x)$, $\forall x \in [a, b]$ y $\exists \beta \in [a, b]$ tal que $f(x) \leq f(\beta)$, $\forall x \in [a, b]$.

Demostración del Teorema de Weierstrass.

Corolario A.1. Sea I un intervalo de $\mathbb{R}$ y $f : I \to \mathbb{R}$ continua en I, entonces $f(I)$ es también un intervalo de $\mathbb{R}$.

Demostración corolario A.1.
Suponiendo que $f(I)$ no esta acotado ni superior ni inferiormente. Entonces, para cada $y \in \mathbb{R}$ existe algún valor que resulta ser mayor, en $f(I)$, de tal forma que $y < f(b) \in f(I)$, y existe algún valor de $f(I)$ menor que él, $y > f(a) \in f(I)$, luego $f(a) < y < f(b)$. Como a y b son del intervalo I, el intervalo $[a, b] \subset I$, luego por el teorema del valor intermedio, existe un c entre a y b tal que $f(c) = y$, luego $y \in f(I)$ y $f(I) = \mathbb{R}$.

Suponiendo que $f(I)$ no esta acotado inferiormente pero si superiormente, y sea $\Gamma = Supf(I)$. Entonces por ser extremo superior, para cada $y < \Gamma$, existe un punto $f(b) \in f(I)$ tal que $y < f(b) \leq \Gamma$, y por no estar $f(I)$ acotado inferiormente, existe un $a \in I$, tal que $f(a) < y < f(b)$. Luego por el teorema del valor intermedio existe un c entre a y b tal que $f(c) = y$, y luego $y \in f(I)$, de donde $(-\infty, \Gamma) \subset f(I)$. Pero como Γ es el elemento superior del conjunto, $f(I) = (-\infty, \Gamma)$ o $f(I) = (-\infty, \Gamma]$ ⊠ [Lipschutz, 1965, 223].

Por el corolario A.1., como $J = [a, b]$ es un intervalo, su imagen $f(J)$ es un intervalo de $\mathbb{R}$.

Se observa primero, que el intervalo $f(J)$ está acotado. Suponiendo que es un intervalo no acotado superiormente, en cuyo caso el conjunto $\{n \in \mathbb{N}\} \subset f(J)$ y existen puntos $x_n \in [a, b]$ tales que $f(x_n) = n$. Los puntos son diferentes, pues tienen imágenes distintas por la aplicación f y son infinitos, luego el conjunto $T = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subset [a, b]$ es infinito y acotado por lo que tiene al menos un punto de acumulación ℓ (Teorema de Bolzano-Weierstrass). De esta manera se supondrá que ℓ es un punto de acumulación de todo el conjunto T; luego ℓ es el límite de todos los puntos de un subconjunto infinito de T.

Como $a \leq x_n \leq b$ se tiene que $a \leq lim_{n\to\infty} x_n < b$, luego $\ell \in [a, b]$. Entonces, por ser f continua en $[a, b]$, $lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(lim_{n\to\infty} x_n) = f(\ell) \in \mathbb{R}$; pero por su construcción $lim_{n\to\infty} f(x_n) = lim_{n\to\infty} = \infty \notin \mathbb{R}$, lo que es absurdo. En consecuencia $f(J)$ tiene que estar acotado superiormente.

Bajo el hecho de que $f(J)$ es un intervalo acotado de $\mathbb{R}$, luego de la forma $[c, d[$ o $[c, d)$ o $(c, d]$ o (c, d).

Se probara si d esta o no esta en el conjunto. Por ser $d = Supf(J)$,

para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $x_n \in [a, b]$ tal que $f(x_n) = d - \frac{1}{d} < d$, como las imágenes de los x_n son distintas, tenemos un conjunto $T = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ infinito y acotado que tiene un punto de acumulación ℓ. Con un razonamiento similar al de la parte anterior, sea $lim_{n\to\infty} x_n = \ell \in [a, b]$ y se verifica que $lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(lim_{n\to\infty} x_n) = f(\ell) \in \mathbb{R}$ por ser f continua y por otro lado , $lim_{n\to\infty} f(x_n) = lim_{n\to\infty} d - \frac{1}{n} = d$, luego $d = f(\ell)$ y $d \in f(J)$, por lo que $d = Máx f(J)$.
Análogamente, se prueba que $c = Mín f(J)$. Lo que concluye la prueba.
$\boxtimes$

A.1.5. Conjuntos conexos.

Definición A.6. Sea X un espacio topológico. Una separación de X es un par U, V de abiertos disjuntos de X cuya unión es X. El conjunto X se dice que es **conexo** si no existe una separación de X. i.e., $U, V \subset X$, $U \cap V = \emptyset$, $\quad U \cup V = X$.

Puede observarse que si A es un subconjunto propio distinto al vacío en X que es simultáneamente abierto y cerrado, entonces los conjuntos $U = A$ y $V = X - A$ constituyen una separación de X. Recíprocamente, si U y V forman una separación de X, entonces U es un subconjunto propio no vacío de X que es abierto y cerrado.

Para un subconjunto Y de un espacio topológico X existe otra manera alternativa de formular la definición de conexión [Mas-Colell:1995:946].

Lema A.1. Si Y es un subespacio de X, una separación de Y es un par A, B de conjuntos no vacíos y disjuntos cuya unión es Y de modo que ninguno de ellos contiene puntos límite del otro. El espacio Y es conexo sino existe una separación de Y.

Demostración Lema A.1.
Suponiendo primeramente que A, B es una separación de Y. Entonces A es abierto y cerrado en Y. La adherencia de A en Y es el conjunto $\bar{A} \cap Y$(donde $\bar{A}$ denota la adherencia de A en X). Como A es cerrado en Y, $A = \bar{A} \cap Y$, o lo que es igual, $\bar{A} \cap B = \emptyset$. Como $\bar{A}$ es la unión de A con sus puntos límite, B no contiene puntos límite de A. Un argumento análogo demuestra que A no contiene puntos límite de B.
Recíprocamente, supongamos que $A \cap B = \emptyset$, ademas son conjuntos no

vacíos cuya unión es Y, ninguno de los cuales contiene puntos límite del otro. Entonces se satisface que $\bar{A} \cap B = \emptyset$ y $A \cap \bar{B} = \emptyset$; de esta forma, concluimos que $\bar{A} \cap Y = A$ y $\bar{B} \cap Y = B$. Así, A y B son cerrados en Y y, como $A = Y - B$ y $B = Y - A$, también son abiertos en Y. $\boxtimes$

Ejemplo A.2. Sea Y el subconjunto $[-1, 0) \cup (0, 1]$ de la recta real $\mathbb{R}$. Los conjuntos $[-1, 0)$ y $(0, 1]$ son vacíos y abiertos en Y (aunque no en $\mathbb{R}$) y, de esta forma, constituyen una separación de Y. Por otra parte, observese que ninguno de estos conjuntos contiene puntos límite del otro.

De esta forma, aplicando estos dos teoremas para demostrar algunos espacios específicos, tales como los intervalos en $\mathbb{R}$, las bolas y cubos en $\mathbb{R}^n$, son conexos. En primer lugar, se enuncia el siguiente lema [Munkres:2000:195].

Lema A.2. Si los conjuntos C y D forman una separación de X, y además Y es un subconjunto conexo de X, entonces Y está contenido bien en C, bien en D.

Demostración Lema A.2.
Como C y D son abiertos en X, los conjuntos $C \cap Y$ y $D \cap Y$ son abiertos en Y. Estos dos conjuntos son disjuntos y su unión es Y; si fueran ambos distintos del vacío, constituirían una separación de Y. De esta forma, algunos de ellos es vacío. Por tanto Y esta contenido enteramente en C o en D. $\boxtimes$

Teorema A.10. La unión de una colección de subconjuntos conexos de X que tienen un punto en común es conexa.

Demostración Teorema A.10.
Sea $\{A_\alpha\}$ una colección de subconjuntos conexos de un espacio X y sea $p \in \cap A_\alpha$. Se probara que el conjunto $Y = \cup A_\alpha$ es conexo. Suponiendo que $Y = C \cup D$ es una separación de Y. El punto p está, bien en C o bien en D; suponiendo que $p \in C$. Como A_α es conexo, $A_\alpha \subset C$, ya $A_\alpha \subset D$, aunque esta ultima alternativa queda descartada pues $p \in A_\alpha$ y $p \in C$. Por tanto, $A_\alpha \subset C$ para cada α y así $\cup A_\alpha \subset C$, contradiciendo el hecho de que D es distinto del vacío. $\boxtimes$

Teorema A.11. Sea A un subconjunto conexo de X. Si $A \subset B \subset \bar{A}$, entonces B es también conexo.

Demostración Teorema A.11.
Sea A conexo y sea $A \subset B \subset \bar{A}$. Supongamos que $B = C \cup D$ es una separación de B. Por el Lema 1.5., el conjunto A verifica $A \subset C$ o $A \subset D$; suponiendo que $A \subset C$. Entonces $\bar{A} \subset \bar{C}$. Como $\bar{C}$ y D son disjuntos, B no puede intersectar a D. Esto contradice el hecho de que D es un subconjunto no vacío de B. ⊠

Teorema A.12. La imagen de un conjunto conexo bajo una aplicación continua es un conjunto conexo.

Demostración Teorema A.12.
Sea $f : X \to Y$ una aplicación continua y suponiendo que X es conexo. Se desea probar que el espacio imagen $Z = f(X)$ es conexo. Como la aplicación obtenida de f al restringir su espacio Z es también continua, es suficiente considerar el caso de una aplicación continua y sobreyectiva.

$$g : X \to Z.$$

Suponiendo que $Z = A \cup B$ es una separación de Z en dos conjuntos disjuntos no vacíos y abiertos en Z. Entonces se tiene que $g^{-1}(A)$ y $g^{-1}(B)$ son conjuntos disjuntos cuya unión es X. Ademas son abiertos en X, pues se tiene que g es continua, y no vacíos, porque g es sobreyectiva. De esta forma, constituyen una separación de X, contradiciendo la hipótesis de que X era conexo. ⊠

Proposición A.1. La totalidad del espacio $\mathbb{R}^n$ es conexo.

Demostración Proposición A.1.
Suponiendo que 2 conjuntos abiertos, disjuntos y distintos del vacío, A, B cuya unión es $\mathbb{R}^n$.
Sea $x \in A$ y $y \in B$ y considere el segmento S que une a x con y; es decir $S = \{x + t(y - x), \quad t \in [0, 1]\}$.
Sean $A_1 = \{t \in \mathbb{R} \mid x + t(y - x) \in A\}$, $B_1 = \{t \in \mathbb{R} \mid x + y(y - x) \in B\}$.
$A_1 \cap B_1 = \emptyset$, $A_1 \neq B_1 \neq \emptyset$ y por lo tanto es una contradicción ya que S no es una conexión, ya que el segmento S, se puede ver como un intervalo, y los intervalos son conjuntos conexos. ⊠

Apéndice B

Conjuntos convexos.

B.1. Conjuntos convexos.

Sean x e y dos puntos de $\mathbb{R}^n$, y λ_1, λ_2 dos números reales tales que $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$. El punto $\lambda_1 x + \lambda_2 y$ se denomina el **promedio ponderado** de x e y con ponderaciones λ_1 y λ_2.

Sean x e y dos puntos distintos de $\mathbb{R}^n$

La **recta** x, y es $\{z \in \mathbb{R}^n \mid \lambda \in \mathbb{R}, \quad z = (1-\lambda)x + \lambda y\}$.
La **semirrecta cerrada** x, y es

$$\{[x, y] \in \mathbb{R}^n \mid t \in \mathbb{R}, \quad 0 \leqq \lambda, \quad [x, y] = (1-\lambda)x + \lambda y\}$$

La **semirrecta abierta** x, y es

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^n \mid t \in \mathbb{R}, \quad 0 < \lambda, \quad (x, y) = (1-\lambda)x + \lambda y\}$$

Definición B.1. Un subconjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ se dice **convexo** si $\forall x, y \in A$, $[x, y] \subset A$.

En la Figura B.1., se presentan ejemplos de conjuntos convexo y no convexo.

Ejemplo B.1. Una bola abierta, $B(x, \epsilon) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|x - y\| < \epsilon\}$, centrada en $x \in \mathbb{R}^n$ y de radio $\epsilon > 0$ es convexo.

Definición B.2. Una función $f : A \to \mathbb{R}$ definida en un conjunto convexo $A \subset \mathbb{R}^n$ se dice **convexa** si

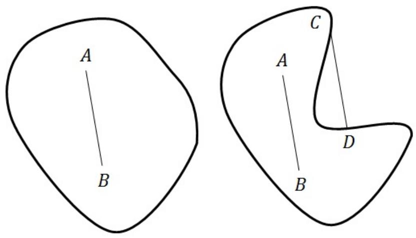


Figura B.1: Conjuntos convexos y no convexos.

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y), \qquad \forall x, y \in A, \quad \lambda \in [0,1]$$

f se dice **cóncava** si $-f$ es convexa, es decir, si la desigualdad anterior, se da para la desigualdad contraria.

Definición B.3. Sea S un subconjunto de $\mathbb{R}^n$. Su **cápsula convexa**, designada por $\dot{S}$, es el conjunto de puntos de $\mathbb{R}^n$ que puede escribirse como combinación lineal convexa de una cantidad finita de puntos de S [Debreu:1959:24].

Una forma intuitiva de observar la capsula convexa de un conjunto finito S de puntos en el plano, es imaginar una banda elástica, que encierra todos los elementos, como puede observarse en la Figura B.2.

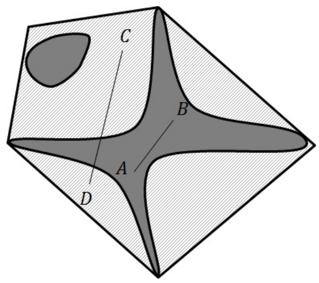


Figura B.2: Cápsula convexa.

Partiendo de la situación general, de la definición, se deriva lo siguiente:

- $S \subset \dot{S}$
- Si $S \subset T$,entonces $\dot{S} \subset \dot{T}$
- $\dot{S}$ es convexo.
  Dados $x, y \in \dot{S}$ y $\lambda \in [0,1]$, existen $x_i = x_1, ..., x_m \in S$, $y_j =$

$y_1, ..., y_n \in S$, $\lambda_1, ..., \lambda_m$, $\mu_1, ..., \mu_n \geq 0$ con $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = \sum_{j=1}^{n} \mu_j = 1$, $\sum_{i=1}^{m} {}_i x_i = x$, $\sum_{j=1}^{n} \mu_j y_j = y$. Por tanto,

$$\lambda x + (1-)y = \lambda \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i + (1-\lambda) \sum_{j=1}^{n} \mu_j y_j$$

basta ver que la combinación lineal anterior de $m+n$ sumandos es convexa, es decir, que sus coeficientes son no negativos y suman 1. Lo primero es evidente, y

$$\lambda \sum_{i=1}^{m} \lambda_i + (1-\lambda) \sum_{j=1}^{n} \mu_j = \lambda \cdot 1 + (1-\lambda) \cdot 1 = 1$$

Proposición B.1. Sean $A, B \subset \mathbb{R}^n$ no vacíos.

(1) Si A es convexo, entonces $A = \dot{A}$.

(2) $\dot{A}$ es la intersección de todos los conjuntos convexos de $\mathbb{R}^n$ que contienen a A.

(3) $\dot{A} + \dot{B} = (A \dot{+} B)$

Demostración Proposición B.1.
Para (1), se sabe por evidencia que $A \subset \dot{A}$. Recíprocamente, se supone que A es convexo y se observa que $\dot{A} \subset A$. Si $x \in \dot{A}$ entonces existen $x_1, ..., x_m \in A$, $\lambda_1, ..., \lambda_m \geq 0$ con $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$ y $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i = x$. Razonando por inducción sobre m:

- Si $m = 1$, es evidente que $x \in A$.
- Si $m = 2$, entonces $x \in [x_1, x_2] \subset A$ (por ser A convexo).
- Suponiendo por hipótesis de inducción que si $y \in \dot{A}$ se escribe como combinación lineal de *menos* de m puntos de A, entonces $y \in A$. Tomando $x \in \dot{A}$ como arriba. Si ${}_m = 0$, entonces se puede aplicar a x la hipótesis de inducción luego $x \in A$. Si ${}_m = 1$, entonces $\lambda_1, ..., \lambda_{m-1} = 0$ luego x es combinación lineal convexa de *un* sólo punto de A, luego $x \in A$. Supongamos ahora que $\lambda_m \in (0, 1)$. Entonces,

$$x = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i = (1-\lambda_m) \sum_{i=1}^{m-1} \frac{\lambda_i}{1-\lambda_m} x_i + \lambda_m x_m$$

. El miembro de la derecha es combinación lineal convexa de $\sum_{i=1}^{m-1} \frac{\lambda_i}{1-\lambda_m} x_i$ y de x_m. Como A es convexo, bastará probar que

$\sum_{i=1}^{m-1} \dfrac{\lambda_i}{1-\lambda_m} x_i \in A$ para que x esté en A. Pero $\sum_{i=1}^{m-1} \dfrac{\lambda_i}{1-\lambda_m} x_i$ es combinación lineal convexa de $x_1, ..., x_{m-1} \in A$, luego por hipótesis de inducción, $\sum_{i=1}^{m-1} \dfrac{\lambda_i}{1-\lambda_m} x_i \in A$. Esto prueba el apartado (1).

Para el apartado (2), llamando $\mathcal{D}(A)$ a la intersección de todos los convexos de $\mathbb{R}^n$ que contiene a A. Como $A \subset \dot{A}$ y $\dot{A}$ es convexo, entonces $\mathcal{D}(A) \subset \dot{A}$. Recíprocamente, sea $C \subset \mathbb{R}^n$ convexo con $A \subset C$. Tomando las capsulas convexas, $\dot{A} \subset \dot{C} = C$. Como C es cualquier convexo conteniendo a A, se concluye que $\dot{A} \subset \mathcal{D}(A)$, esto prueba el apartado (2).

Para (3), se observa que $(A \dot{+} B) = \dot{A} + \dot{B}$,
Dado $x \in (A \dot{+} B)$, existen $a_1, .., a_m \in A, b_1, ..., b_m \in B, \lambda_1, ..., \lambda_m \geq 0$ con $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$ y $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i (a_i + b_j) = x$. Así,

$$x = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (a_i + b_j) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_i + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i b_i \in \dot{A} + \dot{B}.$$

Recíprocamente, veamos $x + y \in (A \dot{+} B) \quad \forall x \in \dot{A}, \quad y \in \dot{B}$.
Existen $a_1, ..., a_m \in A$, $b_1, ..., b_m \in B$, $\lambda_1, ..., \lambda_m$, $\mu_1, ..., \mu_n \geq 0$ con $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = \sum_{i=1}^{n} \mu_i = 1$, $x = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_i$ e $y = \sum_{j=1}^{n} \mu_j b_j$. Así,

$$x+y = \left(\sum_{j=1}^{n} \mu_j \right) \left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_i \right) + \left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \right) \left(\sum_{j=1}^{n} \mu_j b_j \right) = \sum_{i \neq j} \lambda_i \mu_j (a_i + b_j)$$

El miembro de la derecha es una combinación lineal convexa de $a_i + b_j \in A + B$, ya que los coeficientes $\lambda_i \mu_j$ son no negativos y suman 1. Por tanto, $x + y \in (A \dot{+} B)$ y (3) queda probado. ⊠

B.1.1. Conos convexos.

Definición B.4. Un **cono** es un subconjunto no vació de $\mathbb{R}^n$, cerrado bajo el producto de escalares no negativos. Esto es, C es un cono, si para cualquier $x \in C$ y $\lambda \in \mathbb{R}_+$, entonces $\lambda x \in C$. Un cono es no trivial, si contiene otro punto distinto de cero.

Si ademas, C es cerrado bajo la adición , esto es $C + C \subseteq C$, i.e.,

$x + y \in C$, para cualquier $x, y \in C$, entonces es llamado un **cono convexo**.

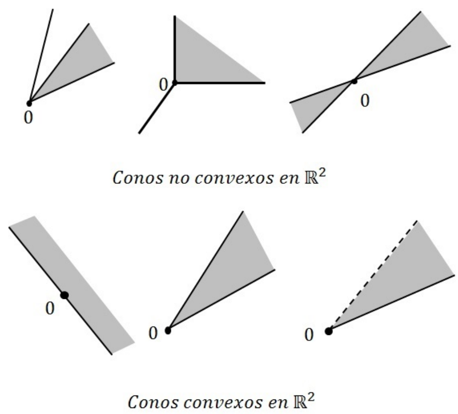


Figura B.3: Ejemplos de conos convexos y no convexos.

B.1.2. Conos asintóticos.

En esta sección, se proporciona una prueba de una condición utilizada por Debreu, en una economía compuesta por un número finito de agentes, para conseguir la continuidad de los conjuntos de producción (capitulo 2) y consumo (capitulo 3) totales, a partir de la condición de los conjuntos individuales.

Ejemplo B.2. La suma $E + F$ falla para ser cerrada, incluso si y sólo si, E y F son cerrados. Por ejemplo, el conjunto $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq \dfrac{1}{x}, x > 0\}$ y $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq \dfrac{-1}{x}, x < 0\}$

Entonces E y F son cerrados, pero

$$E + F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$$

es no cerrado.

Se presenta la definición enunciada por Debreu, para los conos asintóticos.

Sea $\mathbb{R}^n$, con su norma habitual, que se designa por $\|\cdot\|$, y sea S un subconjunto de $\mathbb{R}^n$. Para cada $k \in \mathbb{R}_+$, considerando el conjunto $S^k = \{x \in S \mid \|x\| \geq k\}$. Se llamara $\Gamma(S^k)$ al cono cerrado mas pequeño de vértice en el origen, que contiene a S^k [Debreu:1959:22].

Definición B.5. Dado $S \subset \mathbb{R}^n$, se llama **cono asintótico** de S, y es designado por

$$\mathbf{A}(S) = \bigcap_{k \geq 0} \Gamma(S^k)$$

Como consecuencia de la definición, pueden hacerse algunas observaciones inmediatas.

1) $\mathbf{A}S$ es un cono cerrado de vértice en el origen.
2) $\mathbf{A}S$ es cerrado, por serlo cada $\Gamma(S^k)$.
3) $\mathbf{A}S$ contiene las direcciones o rayos no acotados de S.
4) Si S es acotado, se tiene que $\mathbf{A}S = \{0\}$
5) Si $v \in \mathbb{R}^n$, se tiene que $\mathbf{A}S = \mathbf{A}(v + S)$.

Definición B.6. Sean A_i, $i = 1, ...r$ conos en $\mathbb{R}^n$, de vértice en el origen. Diremos que $\{A_i\}_{i=1,...r}$ son **positivos semiindependientes** si y sólo si de tener $\sum_{i=1}^r x_i = 0$, $x_i \in A_i$, $i = 1, ..., r$, se deduce que $x_i = 0$ para todo $i = 1, ..., r$.

Es inmediato observar que si los conos A_1, A_2 son positivos semiindependientes, esto significa geométricamente que no contienen semirectas opuestas.

La condición utilizada por Debreu para asegurar que la suma de cerrados en $\mathbb{R}^n$ es cerrada, viene expresada en el siguiente Teorema.

Teorema B.1. Sean S_i cerrados $i = 1, ..., r$, $S_i \subset \mathbb{R}^n$. Sean $\mathbf{A}S_i$, $i = 1, ..., r$ los conos asintóticos de S_i, respectivamente. Si los $\{\mathbf{A}S_i\}_{i=1,...r}$ son positivos semiindependientes, entonces el conjunto $S = \sum_{i=1}^r S_i$ es cerrado en $\mathbb{R}^n$.

Una observación inmediata que se puede hacer, es que el Teorema B.1. tiene los siguientes corolarios.

Corolario B.1. Sean S_i, $i = 1, ..., r$, compactos, $S_i \subset \mathbb{R}^n$; la suma $\sum_{i=1}^{r} S_i$ es cerrado en $\mathbb{R}^n$.

Puesto que si S_i es cerrado, $\mathbf{A}S_i = \{0\}$, y los conos $\{\mathbf{A}S_i\}_{i=1,...,r}$, son trivialmente positivamente semiindependientes.

Corolario B.2. Sean S_1 compacto, S_2 cerrado, $S_1, S_2 \subset \mathbb{R}^n$. Se tiene que $S = S_1 + S_2$ es cerrado en $\mathbb{R}^n$.

Puesto que al ser $\mathbf{A}S_1 = \{0\}$ los conos $\mathbf{A}S_1$ y $\mathbf{A}S_2$ son positivos semiindependientes.

Demostración del Teorema B.1.
Se realizara para el caso de dos conjuntos cerrados.

Sean S_1, S_2 cerrados en $\mathbb{R}^n$, tales que los conos asintóticos $\mathbf{A}S_1$, $\mathbf{A}S_2$ son positivos semiindependientes. Se probara que $S = S_1 + S_2$ es un subconjunto cerrado de $\mathbb{R}^n$.

Sea $\{z_n \subset S\}$ una sucesión convergente y sea z su limite. Cada $x_n \in S_1$ e $y_n \in S_2$. Pueden presentarse los siguientes casos:

a) La sucesión $\{x_n\}_{n \in N}$ es acotada. Entonces la sucesión $\{y_n\}_{n \in N}$ también sera acotada por ser $\{z_n\}_{n \in N}$ convergente y por tanto, acotada. Por ser ambas sucesiones $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ acotadas poseen subsucesiones convergentes $\{x_{n_s}\}$, $\{y_{n_s}\}$. Pero el límite de estas subsucesiones esta respectivamente en S_1 y S_2, por ser cerrados. Así,

$$\{x_{n_s}\} \to x \in S_1,\ \{y_{n_s}\} \to y \in S_2$$

Pero $\{x_{n_s} + y_{n_s}\}$ es una subsucesión de $\{z_n\}$. Su limite de $x + y = z$, por lo que $z \in S$ ya que $x \in S_1$ e $y \in S_2$.

b) La sucesión $\{x_n\}_{n \in N}$ es no acotada. Entonces la sucesión $\{y_n\}$ es también no acotada, pero $\{x_n + y_n\} \to z$. Se vera que este segundo argumento no puede darse, pues si se verificara, entonces los conos $\mathbf{A}S_1$, $\mathbf{A}S_2$ no serian positivos semiindependientes. Esto se obtiene del siguiente modo.

b.1) Existen dos sucesiones $\{x_n^*\}_{n \in N} \subset \mathbf{A}S_1$, $\{y_n^*\}_{n \in N} \subset \mathbf{A}S_2$, tales que ambas son divergentes en norma, pero $\{x_n^* + y_n^*\}$ convergen al origen.

Por lo tanto, la demostración procederá a considerar que la sucesión $\{x_n + y_n - z\}$ que converge a 0. Dado $\delta > 0$ existe un número natural N_0 tal que si $n > N_0$ se tiene

$$\|x_n + y_n - z\| < \frac{\delta}{3}$$

Tanto la sucesión $\{x_n\}_{n\in N}$ como la $\{y_n - z\}_{n\in N}$ son no acotadas. Por ser la sucesión $\{x_n\}_{n\in N}$ no acotada, posee una subsucesión divergente en norma $\{x_{n_s}\}$. Entonces existe una sucesión $\{x^*_{n_s}\} \subset \mathbf{A}S_1$ tal que, para todo $\delta > 0$ existe $N_1 \in N$ de modo que si,

$$n_s > N_1, \quad \|x^*_{n_s} - x_{n_s}\| < \frac{\delta}{3}.$$

Por ser $\{y_n - z\}_{n\in N}$ no acotada posee una subsucesión divergente en norma. Tomando los subíndices de la subsucesión idénticos que antes $\{y_{n_s} - z\}$. Existe entonces una sucesión $\{y^*_{n_s}\} \subset \mathbf{A}(S_2 - z)$ tal que, para todo $\delta > 0$ existe $N_2 \in N$ de modo que si

$$n_s > N_2, \quad \|y^*_{n_s} - y_{n_s+z}\| < \frac{\delta}{3}.$$

Así tomando $n_s > Max(N_0, N_1, N_2)$, se tiene

$$\begin{aligned} \|x^*_{n_s} + y^*_{n_s}\| &= \|x^*_{n_s} - x_{n_s} + x_{n_s} + y_{n_s} - y_{n_s} - z + z + y^*_{n_s}\| \\ &\leq \|x^*_{n_s} - x_{n_s}\| + \|x_{n_s} + y_{n_s} - z\| + \|y^*_{n_s} + y_{n_s} + z\| < \delta \end{aligned}$$

lo que significa que la sucesión $\{x^*_{n_s} + y^*_{n_s}\}$ converge también a 0, y se tiene que $\{x^*_{n_s}\} \subset \mathbf{A}S_1$; $\{y^*_{n_s}\} \subset \mathbf{A}(S_2 - z) = \mathbf{A}S_2$. Por lo tanto, se pueden encontrar sucesiones $\{x^*_n\} \subset \mathbf{A}S_1$, $\{y^*_n\} \subset \mathbf{A}S_2$ ambas divergentes en norma, pero tales que $\{x^*_n - y^*_n\} \to 0$.

b.2) Existen sucesiones $\{\bar{x}_n\}$, $\{\bar{y}_n\}$ en $\mathbf{A}S_1$, $\mathbf{A}S_2$ respectivamente, tales que

$$\|\bar{x}_n\| = \|\bar{y}_n\| = 1, \text{ y } \{\bar{x}_n + \bar{y}_n\} \to 0.$$

De esta manera, si se llama $\bar{x}_n = \dfrac{x_n^*}{\|x_n^*\|}$, $\bar{y}_n = \dfrac{y_n^*}{\|y_n^*\|}$ se tiene:

$$\begin{aligned}
\|\bar{x}_n + \bar{y}_n\| &= \|\frac{x_n^*}{\|x_n^*\|} + \frac{y_n^*}{\|y_n^*\|}\| = \|\frac{x^*\|y_n^*\| + \|x_n^*\|y_n^*}{\|x_n^*\|\|y_n^*\|}\| \\
&= \|\frac{x_n^*\|y_n^*\| + y_n^*\|y_n^*\| - y_n^*\|y_n^*\| + \|x_n^*\|y_n^*}{\|x_n^*\|\|y_n^*\|}\| \\
&= \|\frac{\|y_n^*\|(x_n^* + y_n^*) + y_n^*(\|x_n^*\| - \|y_n^*\|)}{\|x_n^*\|\|y_n^*\|}\| \\
&\leq \|\frac{x_n^* + y_n^*}{\|x_n^*\|}\| + \|\frac{y_n^*}{\|y_n^*\|} \cdot \frac{(\|x_n^*\| - \|y_n^*\|)}{\|x_n^*\|}\| \\
&\leq 2 \cdot \frac{\|x_n^* + y_n^*\|}{\|x_n^*\|}
\end{aligned}$$

b.3) Las sucesiones $\{\bar{x}_n\}_{n\in N}$, $\{\bar{y}_n\}_{n\in N}$ están contenidas en las bola unitaria de $\mathbb{R}^n$ la que se denota por B. $\{\bar{x}_n\} \subset B \cap \mathbf{A}S_1$ que es un compacto, por lo que posee una subsucesión convergente en un $\bar{x} \in B \cap \mathbf{A}S_1$. Del mismo modo la sucesión $\{\bar{y_n}\} \subset B \cap \mathbf{A}S_2$ que es también un compacto de $\mathbb{R}^n$ posee una subsucesión convergente a un $\bar{y} \in B \cap \mathbf{A}S_2$. Pero, entonces $\bar{x} + \bar{y}$ es el límite de la subsucesión de la $\{\bar{x}_n + \bar{y}_n\}$ por lo que $\bar{x} + \bar{y} = 0$, $\bar{x} \in \mathbf{A}S_1$ e $\bar{y} \in \mathbf{A}S_2$, donde $x \neq 0$ e $y \neq 0$, ya que $\|\bar{x}\| = \|\bar{y}\| = 1$. Se obtiene así una contradicción con la semiindependencia positiva de los conos $\mathbf{A}S_1$, $\mathbf{A}S_2$ lo que indica que el caso b) no puede darse, y $S = S_1 + S_2$ es cerrado en $\mathbb{R}^n$. ⊠ [Border:2013:3].

B.1.3. Separación de conjuntos convexos.

Definición B.7. El conjunto de soluciones de una ecuación lineal en el espacio numérico n dimensional se llama **hiperplano** en $\mathbb{R}^n$, es decir para todo vector $p \in \mathbb{R}^n$, $p \neq 0$, y para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, el conjunto

$$H(p, \alpha) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid p^1x^1 + p^2x^2 + ... + p^nx^n\}$$

es un hiperplano. El vector p es llamado la **normal** del hiperplano $H(p, \alpha)$. Decimos que el hiperplano $H(p, \alpha) \subset \mathbb{R}^n$ separa los dos conjuntos A y B en $\mathbb{R}^n$ si

$$p \cdot x \leqq \alpha \leqq p \cdot y$$

para todo $a \in A$ y todo $y \in B$. También se puede decir que los conjuntos A y B caen en diferentes semiespacios generados por el hiperplano $H(p, \alpha)$, como se ve en la figura siguiente.

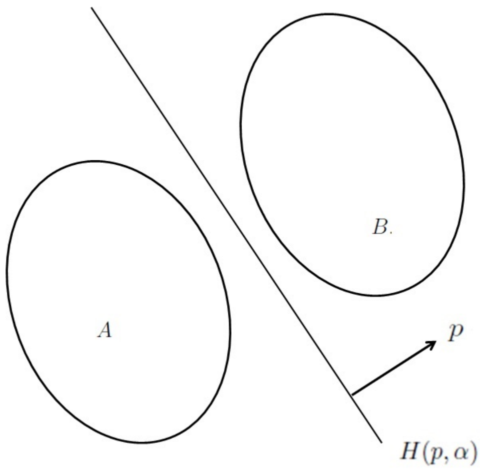


Figura B.4: Separación de conjuntos convexos.

Proposición B.2. Sea C un subconjunto no vacío, cerrado y convexo en $\mathbb{R}^n$ y $z \notin C$. Existe entonces un punto $y \in C$ y un hiperplano $H(p, \alpha)$ que pasa por y (o sea, $\alpha = y \cdot p$), tal que

$$p \cdot z < p \cdot y = inf_{x \in C} \quad p \cdot x,$$

es decir, el punto z cae por debajo del hiperplano, y el conjunto C cae en, o por encima del hiperplano [Hildenbrand y Kirman:1982:210].

Demostración de la Proposición B.2.
En primer lugar, existe un punto $y \in C$ que es el más próximo a z (ver Figura B.5.), atendiendo a la proximidad del concepto euclidiano de la distancia $\|z - y\|$. Claramente si se considera un punto $x \in C$. El conjunto es compacto (y no vacío). La función de distancia $x \rightarrow \|z - x\|$ es continua en B.

Propiedad A. Toda función continua de un conjunto compacto S sobre $\mathbb{R}$, admite un máximo y un mínimo, esto es, existen en S un punto x^* y x_* tales que $f(x^*) \geqq f(x) \geqq f(x_*)$ para todo $x \in S$.

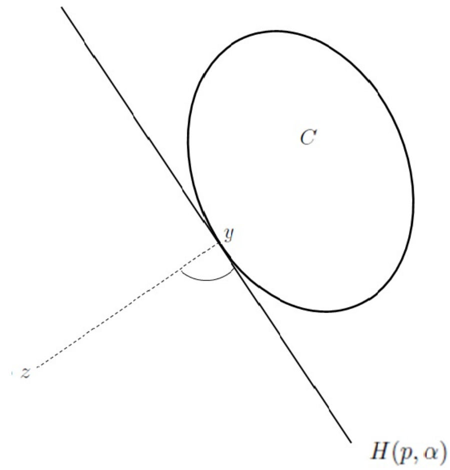


Figura B.5: Intersección del espacio e hiperplano.

Por tanto, por la Propiedad A, existirá un mínimo, esto es, un punto $y \in C$, tal que

$$0 < \|z - y\| \leqq \|z - x\| \text{ para todo } x \in C.$$

Definimos ahora $p = y - z$, $\alpha = p \cdot y$ y suponemos que $H(p, \alpha)$ es el hiperplano buscado. Lógicamente, z cae por debajo del hiperplano $H(p, \alpha)$ ya que

$$p \cdot z = p \cdot z - p \cdot y + p \cdot y = -p \cdot p + p \cdot y < p \cdot y = \alpha$$

Supongamos ahora que el conjunto C no cayera ni en el hiperplano, ni por encima de él, esto es, supongamos que existe un punto $x \in C$, siendo $p \cdot x < \alpha$. Sea $x_\lambda = \lambda x + (1 - \lambda)y$. Mediante una operación simple, se obtiene que

$$\|z - y\|^2 - \|z - x_\lambda\|^2 = \lambda[2p \cdot (y - x) - \lambda(y - x) \cdot (y - x)].$$

Pero, por supuesto, seria $p \cdot (y - x) > 0$, y, para un λ suficientemente pequeño tendríamos que

$$\|z - y\| > \|z - x_\lambda\|$$

Y ya sea que $x_\lambda \in C$ y que $0 < \lambda < 1$, hemos llegado a una contradicción, puesto que el punto y fue elegido como el punto de C más próximo a z. ⊠

Teorema B.2. Sea C un conjunto convexo de $\mathbb{R}^n$ y sea $z \notin C$. Existe entonces un hiperplano $H(p, \alpha)$ que pasa por el punto z y lo separa de C, esto es,

$$p \cdot z = \alpha \leqq p \cdot x \tag{B.1}$$

para todo $x \in C$

Demostración Teorema B.2.
Si $z \notin \bar{C}$, esto es, si z no pertenece a la cerradura del conjunto C. Entonces por la Proposición B.2., un vector $p \in \mathbb{R}^n$, $p \neq 0$, tal que $p \cdot x > p \cdot z$ para todo $x \in C$. Entonces el hiperplano correspondiente sera $H(p, p \cdot z)$. Si $z \in \bar{C}$, existe una sucesión (z_n) convergente a z, siendo $z_n \notin \bar{C}$ $(n = 1, ...)$. Por tanto, existen normales $p_n \in \mathbb{R}^n$, $p_n \neq 0$, tales que

$$p_n \cdot x > p_n \cdot z_n \text{ para todo } x \in \bar{C}$$

De esta forma sabemos que $q_n = p_n/|p_n|$ $(n = 1, ...)$. La sucesión de vectores q_n esta acotada (pertenece al simplex unitario) y, en consecuencia, existirá una subsucesión convergente, sea ésta $q_{n_t} \to_{t \to \infty} p$.

Esta claro que $p \neq 0$. Puesto que el producto escalar es continuo, de la ecuación (B.1) se obtiene que

$$p \cdot z \leqq p \cdot x \text{ para todo } x \in \bar{C}.$$

Por tanto, $H(p, p \cdot z)$ es el hiperplano buscado. ⊠

Teorema B.3. Teorema de Minkowski. Sea A y B subconjuntos convexos no vacíos de $\mathbb{R}^n$, siendo $A \cap B = \oslash$. Entonces, existirá un hiperplano que separe los conjuntos A y B [Hildenbrand y Kirman:1982:212].

Demostración del Teorema de Minkowski.
El conjunto $C = B - A$ es convexo y $0 \notin C$. Así pues, existe un $p \in \mathbb{R}^n$, $p \neq 0$, tal que $p \cdot x \geqq 0$ para todo $x \in C$. Por tanto, si $y \in A$ y $z \in B$, entonces $x = z - y \in C$, y tenemos que $p \cdot x \geqq 0$, esto es, $p \cdot z \geqq p \cdot y$ para todo $y \in A$ y todo $z \in B$. ⊠

Apéndice C

Correspondencias.

C.1. Correspondencias.

Definición C.1. Una **correspondencia** φ de un conjunto S sobre un conjunto T, es una función que asocia a todo elemento $x \in S$ un subconjunto no vacío $\varphi(x) \subset T$.

Tal correspondencia es simbolizada por $x \to \varphi(x)$. El conjunto S es el dominio de la correspondencia φ, mientras que T es la imagen. La Figura C.1. representa esta descripción [Hildenbrand y Kirman:1982:213].

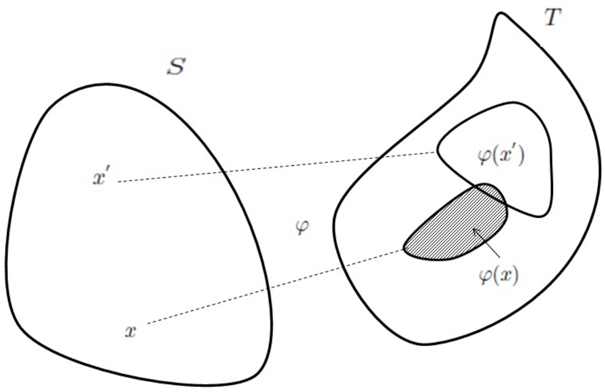


Figura C.1: Correspondencia.

Una función de S a T es una correspondencia particular, la cual asocia a cada elemento $x \in S$, un elemento $y \in T$. Al expresarlo así, se hace una distinción entre el elemento $y \in T$ y $\{y\} \subset T$ formado por un único elemento. Dada una correspondencia $\varphi : S \to T$, se toma el subconjunto $G_\varphi \subset S \times T$, definido como

$$G_\varphi := \{(x, y) \in S \times T \mid y \in \varphi(x)\}$$

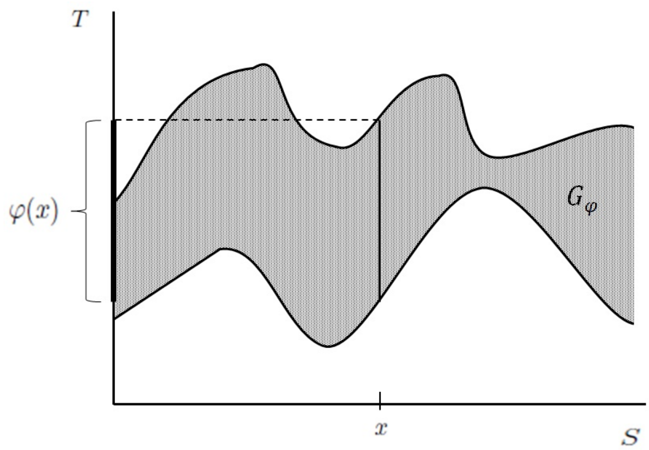


Figura C.2: Grafo de la correspondencia.

Tal conjunto G_φ es llamado el **grafo** de φ. De la misma manera, si $G \subset S \times T$ tal que para todo $x \in S$ el conjunto de elementos $y \in T$, siendo $(x, y) \in G$, no es un conjunto vacío, entonces G es el grafo de la correspondencia, el cual es representado en la Figura C.2. [Hildenbrand y Kirman:1982:214]

A continuación se procede a analizar la variación de $\varphi(x)$ cuando existe una variación en x. A partir de ahora, a menos que se indique lo contrario los conjuntos S y T serán subconjuntos de algún espacio euclídeo, esto es $S \subset \mathbb{R}^s$ y $T \subset \mathbb{R}^t$.

C.1.1. Correspondencia semicontinua superior.

Definición C.2. La correspondencia $\varphi : S \to T$ se dice que es **semicontinua superiormente (s.c.s.)** en x, si para todo conjuntos abierto W que contenga $\varphi(x)$, existe una vecindad V de x, tal que

$$\varphi(x') \subset W \text{ para todo } x' \in V$$

Esta situación, es representada en la Figura C.3. De esta forma la correspondencia se dice semicontinua superior si lo es en todo $x \in S$.

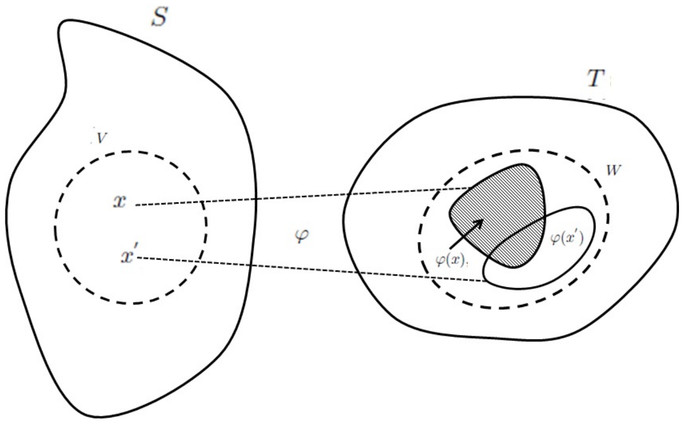


Figura C.3: Correspondencia semicontinua superior.

Esta correspondencia $\varphi : S \to T$ por definición se dice que es s.c.s. en el punto $x \in S$, si el conjunto $\varphi(x)$ *no aumenta bruscamente con una pequeña variación* del punto x. En otras palabras, se dice que el conjunto $\varphi(x)$ *no explota* si se da una pequeña variación en el argumento x.

En la Figura C.4., φ es s.c.s. en x_1, x_2 y x_4, habiendo una "*implosión*" en x_2. Sin embargo, φ no es s.c.s. en x_3 en el cual hay una "*explosión*" en φ. De hecho, siendo $x_3 > x^{'}$, existe un entorno W de $\varphi(x_3)$, suficientemente pequeño, tal que $\varphi(x^{'})$ no está contenido en él.

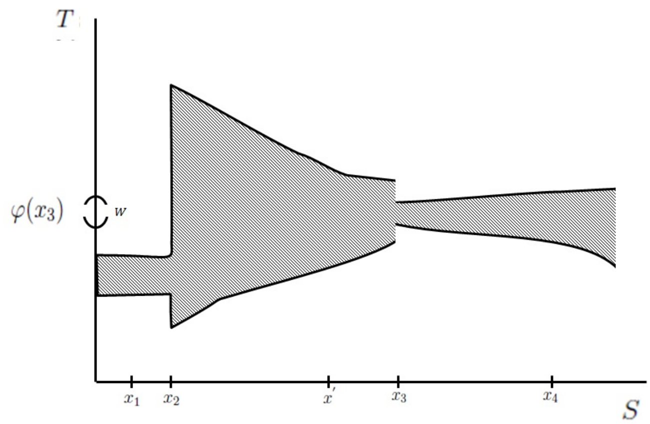


Figura C.4: Correspondencia semicontinua superior.

En la mayor parte de las aplicaciones, las correspondencias son de valor compacto, esto es, $\varphi(x)$ es un subconjunto compacto de T para todo $x \in S$. La definición general de correspondencias s.c.s., mediante vecindades o entornos, tiene una formulación equivalente mediante sucesiones. De ahí que el siguiente Teorema, corresponde a una definición alterna, pero caracterizada a través de sucesiones.

Teorema C.1. Caracterización de la correspondencia semicontinua superior mediante sucesiones. La correspondencia de valor compacto $\varphi : S \to T$, es s.c.s. en x, si y solo si, para toda sucesión (x_n) que es convergente a $x \in S$ y para toda sucesión (y_n) siendo $y_n \in \varphi(x_n)$, existe una subsucesión convergente de (y_n), cuyo limite pertenece a $\varphi(x)$ [Hildenbrand y Kirman:1982:217].

Demostración Teorema C.1.
$\Longrightarrow$ Sea φ s.c.s. en x, La demostración, consta de dos pasos; en primer lugar, se dice que la sucesión $\{y_n\}$ está acotada y tiene, por lo tanto, una subsucesión convergente. Se demostrara que el limite de dicha subsucesión pertenece a $\varphi(x)$.
Ya que $\varphi(x)$ esta acotado, existe un conjunto B, acotado y abierto, que contiene a $\varphi(x)$. Por la definición de s.c.s., se sabe que existe un entorno o vecindad V de x tal que, $\forall z \in V$, $\varphi(z) \subset B$. Como la sucesión $\{x_n\} \to x$, existe un entero $\bar{n}$, tal que $y_n \in B$ para todo $n \geqq \bar{n}$. Se tiene entonces que $\varphi(x_n) \subset B$, y, por lo tanto, que $y_n \in B$ para todo $n \geqq \bar{n}$. Luego la sucesión $\{y_n\}$ está acotada, y tendrá una subsucesión convergente $\{y_{n_q}\} \to y_q$.
Suponiendo ahora que $y \notin \varphi(x)$. Entonces, existirá un entorno cerrado $\varphi(x)$ que no contenga el punto y como por ejemplo, ocurre con la bola cerrada $\bar{B}_\epsilon(x)$ alrededor del conjunto $\varphi(x)$, de radio $\epsilon > 0$, siendo ϵ menor que la distancia de y a cualquier otro punto $z \in \varphi(x)$, Figura C.5., esto es,

$$\bar{B}_\epsilon(x) = \{v \in T \mid inf_{z \in \varphi(x)} \quad d(z, v) \leqq \epsilon\}$$

Entonces, ya que φ es s.c.s., se tendrá que para un n suficientemente grande $\varphi(x_n) \subset \bar{B}_\epsilon(x)$. Como la subsucesión $\{y_{n_q}\} \to y$, y bajo el supuesto de que $\bar{B}_\epsilon(x)$ es cerrado, se tiene que el punto limite es $y \in \bar{B}_\epsilon(x)$. Con lo cual se llega a una contradicción, ya que se partió de que $y \notin \bar{B}_\epsilon(x)$.

$\Longleftarrow$ Demostrando el inverso, suponiendo que φ no es s.c.s. en x, esto es, que existe un conjunto abierto θ que contiene a $\varphi(x)$ y tal que para todo entorno V de x contiene un punto z_v, siendo $\varphi(z_v) \not\subset \theta$. To-

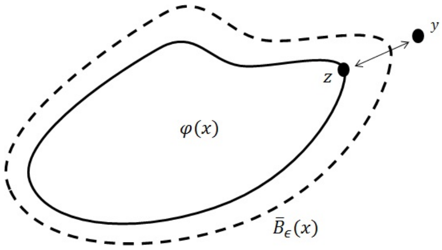


Figura C.5: Correspondencia semicontinua superior en sucesiones.

mando la siguiente sucesión de entornos, $B_{1/n}(x)(n = 1, ...)$, esto es, bolas de centro x y radio $1/n$, se obtiene una sucesión $\{x_n\} \to x$ y una sucesión $\{y_n\}$ en que $y_n \in \varphi(x_n)$, $y_n \not\subset \theta$. Por hipótesis, se sabe que existe una subsucesión convergente de $\{y_n\}$ cuyo límite pertenece a $\varphi(x)$. Sin embargo esto no es posible, ya que $y_n \in T \setminus \theta$ es cerrado. Por lo tanto, el que $y_n \in T \setminus \theta$ para todo n, implica que el limite de cualquier subsucesión convergente de $\{y_n\}$ no pertenece a θ ni a $\varphi(x)$, puesto que éste está contenido en φ. ⊠

Las siguientes proposiciones, son consecuencia inmediata de la definición de s.c.s. por medio de sucesiones. Se puede decir que, en términos generales, las operaciones de conjuntos, tales como la unión, el producto, la suma y cápsulas convexas aplicadas *punto por punto*, conservan la propiedad de ser s.c.s. [Hildenbrand y Kirman: 1982: 217-218]

Proposición C.1. Sea la correspondencia $\varphi : S \to T$, de valor compacto y s.c.s. Entonces la imagen

$$\varphi(K) = \cup_{x \in K} \varphi(x)$$

de un conjunto compacto K, es compacta.

Demostración Proposición C.1.
Se procede a demostrar que toda sucesión $\{y_n\}$ de la imagen $\varphi(K)$, tiene una subsucesión convergente cuyo límite pertenece a $\varphi(K)$. Tomando la sucesión $\{y_n\}$ de $\varphi(K)$. Para todo y_n existe un $x_n \in K$ tal que $y_n \in \varphi(x_n)$. Ya que K es compacto, existe una subsucesión convergente $\{x_{n_q}\}$ cuyo límite es $x = lim_q x_{n_q} \in K$. Por lo tanto, aplicando el Teorema C.1. a las dos subsucesiones $\{x_{n_q}\}$ y $\{y_{n_q}\}$ y obtener así la subsucesión convergente de $\{y_{n_q}\}$ buscada. ⊠

Proposición C.2. Semicontinuidad superior de la correspondencia producto. Sea las correspondencias $\varphi_i(i = 1, 2, ..., k)$ de S en T de valor compacto y s.c.s. Entonces, la correspondencia producto

$$x \to \varphi_1(x) \times \varphi_2(x) \times ... \times \varphi_k(x)$$

de S sobre el espacio producto $T \times ... \times T$ es de valor compacto y s.c.s. en x.

Demostración Proposición C.2.
Se tiene que demostrar que, para toda sucesión $\{x_n\}$ que converja a x y para toda sucesión $y_n = \{y_n^1, y_n^2, ..., y_n^k\}_{n=1,...}$ en que $y_n^i \in \varphi_i(x_n) \quad (i = 1, ..., k)$, existe una subsucesión convergente cuyo limite pertenece al producto $\varphi_1(x) \times ... \times \varphi_k(x)$. Una sucesión $\{y_n^1, y_n^2, ..., y_n^k\}_{n=1,...}$ del espacio producto converge a $(y^1, y^2, ..., y^k)$ si y solo si toda sucesión $\{y_n^i\}_{n=1,...}$ converge a y^i. Por lo tanto, aplicando el Teorema C.1. a cada coordenada, se obtiene la sucesión convergente buscada del espacio producto. ⊠ [Hildenbrand y Kirman:1982:219]

Proposición C.3. Semicontinuidad superior de la correspondencia suma. Sean las correspondencias $\varphi_i(i = 1, ..., k)$ de S en $\mathbb{R}^n$ de valor compacto y s.c.s. en x. Entonces la correspondencia suma

$$x \to \varphi_1(x) + \varphi_2(x) + ... + \varphi_k(x)$$

de S en $\mathbb{R}^n$ de valor compacto y s.c.s.

Demostración Proposición C.3.
Sea la sucesión $\{x_n\} \to x$, y sea

$$y_n \in \varphi_1(x_n) + \varphi_2(x_n) + ... + \varphi_k(x_n), n = 1, 2, ... \tag{C.1}$$

Siendo y_n un vector de la forma $y_n = y_n^1 + y_n^2 + ... + y_n^k$, donde $y_n^i \in \varphi_i(x_n)(i = 1, ..., k)$. Por el Teorema C.1, se sabe que toda sucesión de las $\{y_n^i\}_{n=1,...}$ $(i = 1, ..., k)$ tendrá una subsucesión convergente cuyo limite y^i pertenece a $\varphi_i(x)$. Por tanto, existirá una subsucesión $\{y_{n_q q=1,...}\}$ de la sucesión $\{y_n\} \to y$ tal que las sucesiones $y_{n_q}^i$ de sus coordenadas converjan a y^i. Entonces se tendrá que

$$lim_q y_{n_q} = y^1 + y^2 + ... + y^k \in \varphi_1(x) + ... + \varphi_k(x)$$

⊠

Proposición C.4. Semicontinuidad superior de la correspondencia de la cápsula convexa. Sea la correspondencia $\varphi : S \to \mathbb{R}^n$ de valor compacto y s.c.s. en x. Entonces, la correspondencia de la cápsula convexa

$$x \to \dot{\varphi(x)}$$

de S sobre $\mathbb{R}^n$ es de valor compacto y s.c.s. en x.

Demostración Proposición C.4.
Sea la sucesión $\{x_n\} \to x$ y sea $y_n \in \bar{\varphi(x_n)}$. Por el Teorema de Caratheodory, todo vector $y_n \in \mathbb{R}^n$ puede ser expresado como una suma convexa de $m+1$ vectores de $\varphi(x_n)$, esto es,

$$y_n = \lambda_n^0 \cdot z_n^0 + \lambda_n^1 \cdot z_n^1 + ... + \lambda_n^m \cdot z_n^m,$$

donde

$$z_n^i \in \varphi(x_n), \qquad \lambda_n^0 + \lambda_n^1 + ... + \lambda_n^m = 1 \quad y \quad \lambda_n^i \geqq 0.$$

Por el Teorema C.1., para cada $i = 0, ..., m$ existe una subsucesión convergente de $\{z_n^i\}_{n=1,...}$ cuyo limite pertenece a $\varphi(x)$. Aún más la sucesión $\{\lambda_n^i\}_{n=1,...}$ está acotada y tiene, por tanto, una subsucesión convergente. Por consecuencia, existirá una subsucesión convergente $\{y_{n_q}\}$ de $\{y_n\}$ tal que las subsucesiones correspondientes a $\{z_{n_q}^i\}_{q=1,...}$ y $\{\lambda_{n_q}^i\}_{q=1,...}$ son convergentes, o sea $z_{n_q}^i \to z^i$ y $\lambda_{n_q}^i \to \lambda^i$. Como ya se sabe, $\lambda^0 + \lambda^1 + ... + \lambda^n = 1$ y $\lambda^i \geqq 0$. Por consiguiente,

$$lim_q y_{n_q} = \lambda^0 z^0 + ... + \lambda^n z^n \in \dot{\varphi(x)}$$

⊠

C.1.2. Correspondencia semicontinua inferior.

Definición C.4. La correspondencia $\varphi : S \to T$ se dice que es **semicontinua inferior (s.c.i.)** en x si, para todo conjunto abierto $\theta \subset T$, siendo $\varphi(x) \cap \theta \neq \emptyset$, existe una entorno V de x tal que,

$$\varphi(x^{'}) \cap \theta \neq \emptyset \qquad \forall \quad x^{'} \in V$$

La correspondencia se dice s.c.i., si lo es en todos los puntos $x \in S$. Ver Figura C.6.

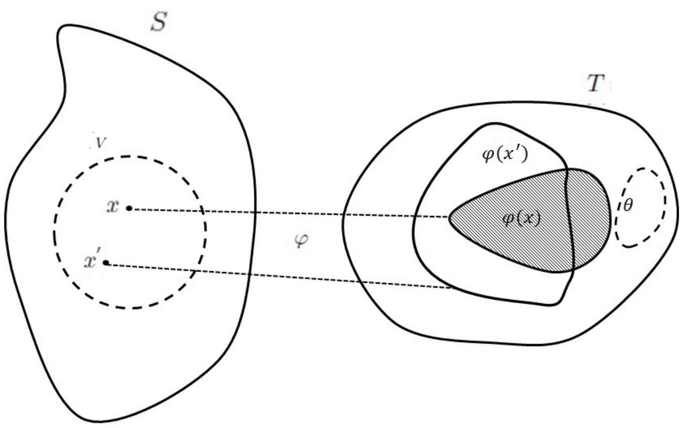


Figura C.6: Correspondencia semi-continua inferior.

La correspondencia presentada en la Figura C.7. es s.c.i. en x_1 y x_3, pero no lo es en x_2, donde φ es s.c.s. Como en el caso de la s.c.s., una función S en T es s.c.i., si y sólo si es continua. Por lo tanto, los dos conceptos de s.c.s., y s.c.i. que para el caso de correspondencias generales son diferentes entre sí, coinciden y resultan equivalentes al de continuidad cuando se trata de funciones [Hildenbrand y Kirman:1982:223].

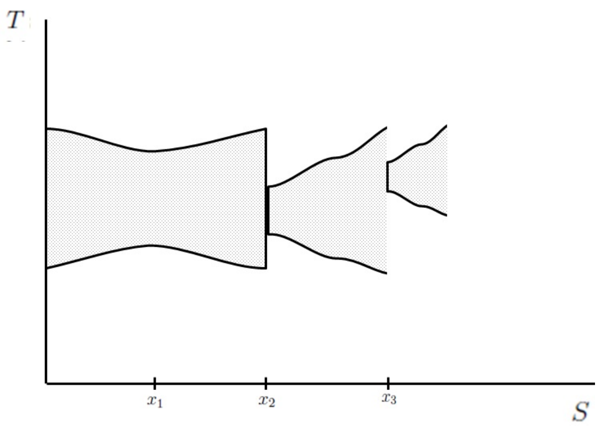


Figura C.7: Correspondencia semicontinua inferior.

Teorema C.2. Caracterización de la semicontinuidad inferior mediante sucesiones. La correspondencia $\varphi : S \to T$ es s.c.i. en x, si y sólo si para toda sucesión $\{x_n\}$ que converja a x y para todo $y \in \varphi(x)$, existe una sucesión $\{y_n\} \to y$, siendo $y_n \in \varphi(x_n)$.

En otras palabras, todo punto y que corresponda con x puede obtenerse como limite de los puntos y_n correspondientes con unos x_n cercanos a x.

Demostración Teorema C.2.
$\Longrightarrow$ Sea φ s.c.i. en x, $\{x_n\} \to x$ e $y \in \varphi(x)$. Sea $B_r(y)$, para todo subíndice r, la bola de radio $\frac{1}{r}$ y de centro y. Debido a que φ es s.c.i. en x, existirá un entorno V_r de x para todo x, tal que $z \in V_r$ implique $\varphi(z) \cap_r (y) \neq \emptyset$. Ya que $\{x_n\} \to x$, para todo r habrá un entero n_r tal que $n \geqq n_r$ implica $x_n \in V_r$, lo que simultáneamente implica que $\varphi(x_n) \cap B_r(y) \neq \emptyset$. La sucesión $\{y_n\}$ construida de esta manera, converge a y, ya que al aumentar n, el subíndice r también aumenta y por lo tanto la bola $B_r(y)$ se reduce.

$\Longleftarrow$ Suponiendo ahora, que φ no es s.c.i. en x, entonces existe un conjunto abierto θ para el que $\theta \cap \varphi(x) \neq \emptyset$, tal que para todo entorno V de x contenga un punto z_v, que cumpla $\varphi(z_v) \cap \theta = \emptyset$. Entonces, existirá una sucesión $\{x_n\}$ que converja a x_i siendo $\varphi(x_n) \cap \theta = \emptyset$. Suponiendo ahora que $y \in \theta \cap \varphi(x)$. Por hipótesis, existirá una subsucesión $\{y_{n_q}\}_{q=1,...}$ que converja a y, en la que $y_{n_q} \in \varphi(x_{n_q})$. Sin embargo, ya que θ es abierto y que $y \in \theta$, se tiene que para un q suficientemente grande $y_{n_q} \in \theta$. Por tanto, se llega a una contradicción: $\varphi(x_{n_q}) \cap \theta \neq \emptyset$. ⊠

Tal como ocurre en las Proposiciones C.2., C.3. y C.4., las operaciones producto, suma y obtención de la capsula convexa conservan la s.c.i. [Hildenbrand y Kirman:1982:224]

Proposición C.5. Semicontinuidad inferior del producto de correspondencias. Sean las correspondencias $\varphi_i : S \to T$ $(i = 1, 2, ...k)$ s.c.i. en x. Entonces las correspondencia producto,

$$x \to \varphi_1(x) \times \varphi_2(x) \times ... \times \varphi_k(x)$$

de S sobre el espacio producto $T \times ... \times T$, es s.c.i. en x.

Demostración Proposición C.5.
Sea la sucesión $\{x_n\}$ que converja a x y sea $y = (y^1, ..., y^k) \in \varphi_1(x) \times ... \times \varphi_k(x)$. Por el Teorema C.2., cada y^i puede obtenerse como límite de una sucesión $\{y_n^i\}_{n=1,...}$ siendo $y_n^i \in \varphi_i(x_n)$ $(i = 1, ..., k)$. Entonces, la sucesión buscaba será $y_n = (y_n^1, y_n^2, ..., y_n^k)$. ⊠

Proposición C.6. Semicontinuidad inferior de la correspondencia de la cápsula convexa. Sea la correspondencia $\varphi : S \to \mathbb{R}^n$, s.c.i. en x. Entonces la correspondencia de la cápsula convexa

$$x \to \dot{\varphi}(x)$$

es s.c.i.

Demostración Proposición C.6.
Sea la sucesión $\{x_n\}$ convergente a x. Sea $y \in \dot{\varphi}(x)$, esto es, $y = \lambda^0 y^0 + ... + \lambda^n y^n$, donde $y^i \in \varphi(x)$, $\lambda^i \geqq 0$ $(i = 0, ..., n)$ y $\sum_{i=0}^{n} \lambda^i = 1$. Ya que φ es s.c.i. en x, existirá una sucesión $\{y_n^i\} \to y^i$, siendo $y_n^i \in \varphi(x_n)$. Por tanto, $y_n = \lambda^0 y_n^0 + \lambda^1 y_n^1 + ... + \lambda^n y_n^n$ pertenece a la cápsula convexa i.e. $\dot{\varphi}(x_n)$ y converge a y. $\boxtimes$

C.1.3. Correspondencia continua.

Definición C.5. Una correspondencia $\varphi : S \to T$ se dice **continua** en x si φ es s.c.s. y s.c.i. en x.

Apéndice D

Teoremas de punto fijo.

D.1. Teoremas de Punto Fijo.

Definición D.1. Considere un conjunto S y una función $f : S \to S$, i.e. es decir una transformación de S en sí mismo. Si existe un elemento $x^{'}$ tal que $x^{'} = f(x^{'})$, es decir que coincida con su imagen, entonces tal elemento se denomina **punto fijo.**

En la Figura D.1. de el lado izquierdo, se puede observar gráficamente el enunciado de la definición anterior.

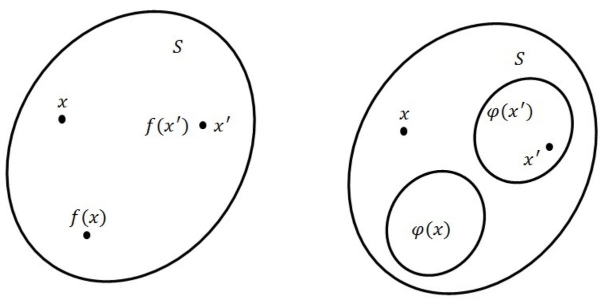


Figura D.1: Punto fijo.

D.1.1. Teorema de Brouwer.

Teorema D.1. Brouwer. Si S es un subconjunto distinto del vacío, compacto y convexo en $\mathbb{R}^n$, y si $f : S \to S$, entonces f tiene un punto fijo.

En el Teorema anterior, considerando un conjunto S y una correspondencia $\varphi : S \to S$. Un punto fijo en la correspondencia φ es un elemento $x^{'}$ tal que $x^{'} \in \varphi(x^{'})$, es decir, que pertenece a su propio conjunto imagen, como se observa en la Figura D.1. del lado derecho.

D.1.2. Teorema de Kakutani.

Shizou Kakutani [1941], realiza una generalización del Teorema de punto fijo de Brouwer, se puede encontrar una demostración en Hildenbrand y A.P. Kirman [1982:220].

En la teoría del equilibrio general, es utilizado para probar la existencia de un conjunto de precios el cual iguala la oferta con la demanda en todos los mercados. En este caso S es el conjunto de las tuplas de precios de las mercancías.

El reto aquí es construir una correspondencia $\varphi(x)$ que tenga esta propiedad y, al mismo tiempo que satisface las condiciones en el Teorema de Kakutani. Si esto se puede hacer entonces $\varphi(x)$ tiene un punto fijo de acuerdo con el teorema. Dada la forma en que fue construido, este punto fijo debe corresponder a un precio-tupla que iguale oferta con la demanda en todas partes.

Teorema D.2. Kakutani. Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ no vacío, compacto y convexo. Sea $f : A \to \mathcal{P}(A)$ una correspondencia de gráfico cerrado, y tal que $f(a)$ es convexo para todo $a \in A$, entonces f tiene un punto fijo.

Se puede observar la demostración original de Kakutani, en su articulo de 1941, consultando el enlace de la bibliográfía.

Bibliografía

[1] Accinelli, Elvio; *Elementos de topología y de la teoría de conjuntos en la teoría del equilibrio general*; Universidad Autónoma Metropolitana, Azcapotzalco, Eon-Sociales, México, D.F., 2005.

[2] Aliprantis, Charalambos D.; Florenzano, Monique; Tourky, Rabee. *Equilibria in productions economies*; University of California, Berkeley; Web [http://emlab.berkeley.edu/users/cshannon/debreu/florenzano.pdf]

[3] Arrow, Keneth; Debreu, Gérard; *Existence of an equilibrium for a competitive economimy*, Econometrica 22, pags 265-290, Web [http://cowles.econ.yale.edu/ gean/art/1987-newpalgrave1.pdf]

[4] Border, K.C.; *Sums of sets, etc.*, California Institute of Technology, Division of the Humanities and Social Sciences; 2013, Web [http://www.hss.caltech.edu/ kcb/Notes/AsymptoticCones.pdf]

[5] Border, K.C.; *Boundedness of allocations*, California Institute of Technology, Division of the Humanities and Social Sciences; 2012, Web [http://www.hss.caltech.edu/ kcb/Notes/Allocations.pdf]

[6] Debreu, Gérard; *Theory of value, an axiomatic analysis of economic equilibrium*, Cowles foundation monograph 17, Cowles foundation for research in economics at Yale University 1959.

[7] Debreu, Gérard; *Mathematical economics: Twenty papers of Gerard Debreu*; Econometric society monographs; Cambridge University Press, U.K. 1986.

[8] Hildenbrand, W. y Kirman, A.P.; *Introducción al análisis de equilibrio*; Antoni Bosh, editor, 1982.

[9] Horvát, Juan; *Introducción a la topología general* Universidad de Maryland, Organización de los Estados Americanos, Washington, D.C. 1969.

[10] KAKUTANI, ZHIZUO; *A generalization of Brouwer's fixed point theorem*; Duke Mathematical Journal 8 (1941), no. 3, 457–459. doi:10.1215/S0012-7094-41-00838-4. Web [http://projecteuclid.org/euclid.dmj/1077492791.]

[11] LIPSCHUTZ, SEYMOUR; *Theory and problems of general topology*; McGraw-Hill, 1965.

[12] MAS-COLELL, ANDREU; WHINSTON, MICHAEL D.; GREEN, JERRY *Microeconomic theory*, Oxford University Press; USA, New York; 1995.

[13] MAS-COLELL, ANDREU; *The theory of general economic equilibrium: a differentiable approach*; Econometric society monographs; Cambridge University Press, U.K. 1990.

[14] MUNKRES, JAMES R.; *Topolgy 2ed.*; Prentice Hall, USA 2000.

[15] VARIAN, HAL R.; *Análisis microeconómico*, Bosh editores; España, Madrid; 1992.