



Universidad Autónoma de San Luis Potosí.

Facultad de Ciencias



Sobre Extensiones de Automorfismos Parciales
en Gráficas Finitas

TESIS

Que para obtener el Grado de

Maestro en Ciencias Aplicadas

P R E S E N T A :

Luis Manuel Rivera Martínez

ASESOR:

Dr. Lev Yu Glebski



Universidad Autónoma de San Luis Potosí.

Facultad de Ciencias



Sobre Extensiones de Automorfismos Parciales
en Gráficas Finitas

Luis Manuel Rivera Martínez

SINODALES:

Dr. Lev Yu Glebski
(Asesor)

Dr. Gelasio Salazar Anaya

Dr. Álvaro Pérez Rapozo

Dr. Valentín Afraimovich

Agradecimientos

A DIOS.

A mi familia.

A mi asesor de tesis, a mis profesores, a mis sinodales.

A mis compañeros y amigos.

A todas las personas que me apoyaron y acompañaron en la realización de este proyecto.

San Luis Potosí, 2005

Índice general

1. Introducción	3
2. Marco teórico	9
3. La propiedad EPPA para digráficas	13
4. Extensiones en gráficas	21
4.1. Extendiendo una gráfica finita G a una gráfica regular finita H . . .	21
4.2. Gráficas con aristas coloreadas	29
4.3. EPPA para gráficas finitas	33
4.4. EPPA para gráficas con aristas coloreadas	38
5. Conclusiones	43
A. Ejemplos	45
A.1. Gráficas $\Gamma(X, k)$ y $\Gamma(X, k, 1)$	45
A.2. Extensión de Automorfismos Parciales	45
B. Códigos de los programas	51
B.1. Programa para $\Gamma(X, k)$ y $\Gamma(X, k, 1)$	51
B.2. Programa para extender automorfismos parciales	53
B.2.1. Procedimientos usados en el programa principal	56

Índice de figuras

4.1. Gráfica general	34
A.1. Gráfica $\Gamma(X, 3)$ con $X = \{1, \dots, 5\}$	46
A.2. Gráfica $\Gamma(X, 3, 1)$ con $X = \{1, \dots, 5\}$	47
A.3. Gráfica G con grado máximo $k = 3$	48
A.4. Isomorfismos f_1 y f_2 entre subgráficas inducidas de G	48
A.5. Gráfica $H \supseteq G$, 3 - regular	49
A.6. Gráfica $\Gamma(\{1, \dots, 6\}, 3, 1)$	50

Capítulo 1

Introducción

Una pregunta que se ha hecho en varios contextos de las matemáticas es determinar cuando una estructura finita A puede ser extendida a una estructura finita B de tal modo que cada automorfismo parcial de A (isomorfismos entre subestructuras de A) se extiende a un automorfismo (total) de B . Aquellas clases de estructuras que cumplen con lo anterior se dice que tienen la propiedad de extensión para automorfismos parciales (EPPA por sus siglas en inglés).

Hrushovsky [13] demostró que la clase de gráficas finitas tienen la propiedad EPPA; para ello usó teoría de grupos y combinatoria. Anterior a él, John Truss [17] probó que dada una gráfica finita A y un automorfismo parcial p , existe una gráfica finita $B \supseteq A$ y un automorfismo de B que extiende a p .

Para explicar el origen de la pregunta se presenta la definición de gráfica genérica: Sea \mathcal{G} la clase de todas las gráficas finitas. La gráfica genérica es la única gráfica contable R que satisface:

1. Todo elemento de \mathcal{G} encaja en R
2. Dadas funciones de encaje $f : M \rightarrow N$ en \mathcal{G} y $g : M \rightarrow R$, existe $h : N \rightarrow R$

con $hf = g$.

Esta gráfica (también conocida como la gráfica Rado o la gráfica aleatoria contable) tiene la propiedad de ser isomorfa a casi todas las gráficas sobre un conjunto contable de vértices (las aristas se escogen independientemente con probabilidad de $1/2$).

Un resultado debido a Fraïssé [5] establece que un objeto genérico existe no solamente para la clase de gráficas, también para cualquier clase similar de estructuras cerradas bajo subestructuras y que satisfagan la propiedad de amalgamación. — Una clase de \mathcal{L} -estructuras S tiene la propiedad de *amalgamación* si cualquiera $A, B_1, B_2 \in S$ y $f_i : A \mapsto B_i$ son encajes elementales para $i \in \{1, 2\}$ entonces existe algún $C \in S$ y algún encaje elemental $g_i : B_i \mapsto C$ para $i \in \{1, 2\}$ tal que $g_1(f_1(x)) = g_2(f_2(x))$ para todo $x \in A$. — Información más detallada sobre estos conceptos se puede consultar en [4].

La pregunta “¿la clase de las gráficas finitas tienen la EPPA?” surgió en un trabajo de Hodges, Hodkinson, Lascar y Shelah sobre la propiedad del índice pequeño para la gráfica aleatoria R [10]. La conjetura del índice pequeño de R dice que un subgrupo de $\text{Aut}(R)$ (conjunto de automorfismos de R) es de índice contable si y sólo si contiene el estabilizador de un conjunto finito. Ellos encontraron que esta pregunta es importante para entender el grupo de automorfismos de la gráfica aleatoria como un grupo topológico. De forma más precisa: La propiedad de extensión para automorfismos parciales en las gráficas muestra que la mayoría de los n -tuplas de automorfismos de la gráfica aleatoria (en el sentido de la Categoría Baire) son localmente finitos — Si $G = \text{Aut}(R)$, la n -tupla $(g_1, \dots, g_n) \in G$ es llamada *localmente finita*, si para cada $a \in R$ la órbita de a bajo $\langle g_1, \dots, g_n \rangle$ es finita —. Hodges et al, usaron el teorema de Hrushovsky para demostrar en [10]

que la gráfica genérica tienen la propiedad de índice pequeño.

Bernhard Herwing en el año 1995 [7] generalizó este resultado para la clase de estructuras con un lenguaje relacional finito, así como para las gráficas finitas K_3 -libres; su demostración usa las mismas ideas que Hrushovsky pero de una forma más general. Como corolario de uno de sus teoremas se obtiene que la clase de las hipergráficas tienen la EPPA. Este tipo de resultados son importantes porque al probar que una clase de estructuras tiene la EPPA entonces se puede probar la propiedad del índice pequeño para el grupo de automorfismos de su respectiva estructura genérica contable.

En 1998 Herwing generalizó su demostración para el caso de las gráficas finitas K_n -libres (con $n \geq 3$) [8]; también probó que las digráficas finitas que no contienen subdigráficas isomorfas a un torneo en \mathcal{T} , donde \mathcal{T} es una clase arbitraria de torneos finitos, tienen la EPPA (a este tipo de digráficas se les conoce como digráficas de Henson).

Andréka, Hodkinson y Németi [1] usaron los teoremas de Herwing [8], [7] sobre la EPPA en estructuras finitas con lenguaje relacional para demostrar de una forma simple que algunos tipos de álgebras, incluyendo CRS_n , polyadic CRS y WA tienen la “propiedad de base finita”, y que tienen teorías universales decidibles; además, demuestran que cualquier álgebra finita en estas clases es representable sobre un conjunto finito.

En el año 2000, Herwing y Lascar [9] publican dos demostraciones diferentes del teorema de Hrushovsky, una de las demostraciones mejora ampliamente la dada en [13], además de que es puramente combinatoria (esta demostración se debe

a Lascar); a la otra demostración Herwing y Lascar le llaman la prueba sofisticada, porque en ella se usa un teorema debido a Ribes y Zalesskii [15] relativo a grupos libres, además de indicar la manera de generalizar esta técnica para probar otros resultados del mismo estilo. También muestran en su artículo la manera de usar los teoremas sobre extensión de automorfismos parciales para probar teoremas sobre la topología profinita en grupos libres, en particular dan una generalización del Teorema de Ribes y Zalesskii. Por último proporcionan nuevas generalizaciones de EPPA en estructuras con lenguaje relacional finito.

Ian Hodkinson [11] usó una adaptación de la construcción de Herwing [9, 7] para probar que los fragmentos libremente protegidos de lógica de primer orden tienen la propiedad de modelo finito (Un conjunto de fórmulas tiene la propiedad de modelo finito si se cumple lo siguiente: Si cada fórmula del conjunto es satisfacible entonces es satisfacible en un modelo finito).

Hodkinson y Otto [12] prueban resultados sobre cubiertas de hipergráficas, y usan estos resultados para probar que las gráficas K_n -libres y las digráficas de Henson tienen la propiedad de extensión de automorfismos parciales, teoremas ya demostrados por Herwing [8] usando teoría de grupos. Lo anterior lo hace por medio de un teorema en el cual establece una variante de EPPA para estructuras con lenguaje relacional finito. Este teorema tiene como corolarios que las gráficas K_3 -libres, las gráficas K_n -libres ($n \geq 3$), las digráficas de Henson y la clase de τ -estructuras conformes finitas, para cualquier tipo relacional τ , tienen la EPPA. La importancia del trabajo de Hodkinson y Otto, además de la generalidad de su teorema, es que proporciona una prueba alternativa de que los fragmentos protegidos de camarilla de lógica de primer orden tienen la propiedad de modelo finito.

Recientemente, Solecki [16] y Vershik probaron (independientemente) que la propiedad análoga es cierta para espacios métricos, en concreto prueban que un espacio métrico finito A admite una extensión a un espacio métrico B , de tal modo que cada isometría parcial de A se extiende a una isometría de B . Solecki usó uno de los teoremas de Herwing y Lascar[9] como parte de su demostración.

Actualmente la extensión de automorfismos parciales se está usando ampliamente en Teoría de Modelos Finitos; además están surgiendo variantes de ella: tal es el caso de la extensión para permutaciones de una pseudo variedad de grupos, en donde aún existen problemas abiertos cuyas soluciones son importantes por sus diversas aplicaciones. Para obtener más detalles sobre esta variante consultar [2].

El objetivo de esta tesis es proporcionar una demostración detallada de que las digráficas finitas tienen la propiedad EPPA, las gráficas con las aristas coloreadas tiene una variante de la propiedad EPPA y, por último, presentar algoritmos para extender una gráfica G a una gráfica k -regular H . En seguida se menciona brevemente el contenido de cada capítulo.

En el capítulo 2 se presenta el marco teórico; se dan los conceptos básicos de teoría de gráficas que son necesarios en este trabajo.

En el capítulo 3 se da la demostración detallada de que las digráficas finitas tienen la propiedad de extensión de automorfismos parciales. El autor de este trabajo no conoce ningún artículo en donde aparezca la demostración de este teorema. En la demostración se sigue la misma técnica que utilizó Hrushovsky en [13].

En el capítulo 4 se presenta un algoritmo para extender una gráfica G a una gráfica k -regular H . Este algoritmo mejora el propuesto por Milliet en [14] ya que él asume que el grado máximo de G es un número impar, sin embargo, en el algoritmo presentado en este trabajo no se requiere de esta suposición y, además se puede generalizar para extender gráficas con aristas coloreadas (sección 4.2).

En la sección 4.3 se da la demostración de Herwing y Lascar [9] de que las gráficas finitas tienen la EPPA. Se presenta a detalle porque se realizaron dos programas en Maple9[©] que siguen la construcción utilizada en la demostración del teorema (uno para extender la gráfica y otro para extender los automorfismos parciales).

En la sección 4.4 se presenta la demostración de que las gráficas con aristas coloreadas tienen un tipo de extensión de automorfismos parciales. Se adaptó la técnica de Herwing y Lascar para esta demostración. Milliet menciona en [14] este teorema pero no presenta la demostración.

En el Apéndice A se dan algunos ejemplos de los resultados obtenidos con los programas que sigue la construcción de Herwing-Lascar y en el Apéndice B aparece sus respectivos códigos.

Capítulo 2

Marco teórico

El objetivo de este capítulo es el de presentar los conceptos básicos de teoría de gráficas que se utilizan en este trabajo. Las definiciones que aparecen en este capítulo están basadas en [3].

Una *gráfica* es una terna ordenada $(V(G), E(G), \psi_G)$ constituida por un conjunto $V(G)$ de elementos llamados vértices, un conjunto $E(G)$, disjunto de $V(G)$, de elementos llamados aristas, y una función de incidencia que asocia a cada arista de G un par no ordenado de vértices de G (no necesariamente distintos). Si $\psi_G(e) = \{u, v\}$ se usará únicamente $\{u, v\}$ o uv para representar a la arista asociada con u y v .

Si la función ψ_G asocia a cada arista un par ordenado de vértices se llama gráfica dirigida o *digráfica*, una arista dirigida (o *arco*) entre los vértices u y v se representará por (u, v) .

Una gráfica es finita si su conjunto de vértices y su conjunto de aristas son finitos. Si e es un arista, y u, v son vértices tales que $\psi_G(e) = uv$, se dice que la arista e une a los vértices u y v (llamados los extremos de e). Dos vértices que

son extremos de un arista se dice que son *incidentes* a la arista, y viceversa. Dos vértices que son incidentes con una arista en común son *adyacentes* entre sí.

Un *lazo* es un arista que tiene extremos idénticos. $e = uu$. Se llaman *aristas múltiples* aquellas aristas que tienen el mismo par de vértices como extremos (por ejemplo: $e_1 = uv$, $e_2 = uv$). Se llama *multigráfica* a la gráfica que contiene lazos y (o) aristas múltiples. Una *gráfica simple* es aquella que no contiene lazos ni aristas múltiples.

En una gráfica $G = (V, E, \psi_G)$, el número de vértices $n = |V|$ se conoce como el orden de G y el número de aristas $m = |E|$ es el tamaño de G . Al conjunto de todos los vértices adyacentes a un vértice v es conocido como la vecindad de v y se denota por $N(v)$.

En una gráfica dirigida el conjunto de vértices adyacentes *desde* el vértice v es el conjunto $N_+(v) = \{x \in V(G) : (v, x) \in E(G)\}$. El conjunto de vértices adyacentes *hacia* el vértice v es el conjunto $N_-(v) = \{x \in V(G) : (x, v) \in E(G)\}$.

Una *subgráfica* H de una gráfica G ($H \subseteq G$) es una gráfica tal que $V(H) \subseteq V(G)$, $E(H) \subseteq E(G)$, y ψ_H es la restricción de ψ_G a $E(H)$. Una *supergráfica* de H es una gráfica G tal que $H \subseteq G$ y decimos que G contiene a H .

Una *subgráfica inducida* de G es una subgráfica H de G tal que su conjunto de aristas $E(H)$ consiste en todas las aristas $e = uv$ de G tales que $u, v \in V(H)$. Se denota por $H = G[S]$ donde $S = V(H)$.

La subgráfica inducida $G[V(G) \setminus V'(G)]$ se denota por $G - V'(G)$; es la sub-

gráfica obtenida de G al quitar todos los vértices en $V'(G)$ junto con sus aristas incidentes.

Dos gráficas G y H son *isomorfas* ($G \cong H$) si existen biyecciones $\theta : V(G) \rightarrow V(H)$ y $\phi : E(G) \rightarrow E(H)$ tales que $\psi_G(e) = uv$ si y sólo si $\psi_H(\phi(e)) = \theta(u)\theta(v)$.

Si G y H son gráficas simples, $G \cong H$ si y sólo si existe una biyección $\theta : V(G) \rightarrow V(H)$ tal que $uv \in E(G)$ si y sólo si $\theta(u)\theta(v) \in E(H)$. Si $H = G$ el isomorfismo de G en G se conoce como *automorfismo*

Una gráfica H es “*encajada*” en G si existe una función $\phi : V(H) \rightarrow V(G)$ tal que ϕ es un isomorfismo entre H y $G[\phi(V(H))]$.

El *grado* de un vértice v es el número de aristas incidentes a v , se denota por $\deg(v)$. El grado mínimo y máximo de una gráfica G se denota por $\delta(G)$ y $\Delta(G)$, respectivamente. El siguiente teorema será de gran utilidad en los capítulos posteriores.

Teorema 1. *Sea G cualquier gráfica con m aristas entonces se cumple que*

$$\sum_{v \in V(G)} \deg(v) = 2m.$$

Una gráfica G es k -regular si todos sus vértices tienen grado k ; Una gráfica regular es aquella que es k -regular para alguna k .

Una coloración de aristas de una gráfica G es una función $\varphi : E(G) \rightarrow U$ de su conjunto de aristas a un conjunto U , cuyos elementos son llamados colores. Los números enteros son usados comúnmente como colores.

Para cualquier entero positivo k , una k -coloración de aristas es una coloración de aristas que usa exactamente k diferentes colores.

Las definiciones anteriores son equivalentes para digráficas,; sólo hay que tomar en cuenta que las propiedades son para parejas ordenadas.

Capítulo 3

La propiedad EPPA para digráficas

El objetivo de este capítulo es el de presentar una demostración detallada de que las digráficas finitas tienen la propiedad de extensión para automorfismos parciales (EPPA). Para la prueba se utiliza la técnica que utiliza Hrushovsky en [13]. En la construcción de Hrushovsky se utiliza fuertemente el conjunto de los vecinos de los vértices de la gráfica, por este motivo la demostración para digráficas no sigue de la demostración para gráficas, puesto que en las digráficas existen dos tipos de vecinos de un vértice: El conjunto de vértices vecinos hacia el vértice v , y el conjunto de vértices vecinos desde el vértice v . En la demostración se utiliza la siguiente definición.

Definición. Una familia F de subconjuntos de un conjunto finito Y es independientemente estadísticamente si para todos los subconjuntos distintos $A_1, \dots, A_m, B_1, \dots, B_k$ en F , $\text{card}(A_1 \cap \dots \cap A_m - B_1 - \dots - B_k) = \text{card}(Y) \cdot 2^{-m-k}$.

Ejemplo.

Sea $S = \{0, 1\}^k$ el conjunto de las secuencias de ceros y unos de longitud k , entonces $|S| = 2^k$, se define $A_i = \{(x_1, \dots, x_i, \dots, x_k) \in \{0, 1\}^k : x_i = 1\}$, claramente $|A_i| = 2^{k-1}$ y $|\bar{A}_i| = 2^{k-1}$. Para todos los subconjuntos distintos A_{a_1}, \dots, A_{a_m} .

$\bar{A}_{b_1}, \dots, \bar{A}_{b_j}$ en S con todos los subíndices $a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_j$ diferentes, el conjunto de intersecciones $A_{a_1} \cap \dots \cap A_{a_m} \cap \bar{A}_{b_1} \dots \cap \bar{A}_{b_j}$ es el conjunto $\{ \langle x_1, \dots, x_k \rangle \in \{0, 1\}^k : x_{a_i} = 1, x_{b_r} = 0, i = 1, \dots, m, r = 1, \dots, j \}$, entonces $\text{card}(A_{a_1} \cap \dots \cap A_{a_m} \cap \bar{A}_{b_1} \dots \cap \bar{A}_{b_j}) = 2^{k-m-j} = \text{card}(S) \cdot 2^{-m-j}$, por lo que la familia de subconjuntos A_i es independientemente estadísticamente.

Se usará la letra X para denotar el conjunto de vértices de la digráfica X y E^X para denotar el conjunto de aristas. $X_+(a) = \{b : (a, b) \in E^X\}$ es el conjunto de vecinos desde el vértice a y $X_-(a) = \{b : (b, a) \in E^X\}$ es el conjunto de los vecinos hacia el vértice a .

Teorema 2. *Sea X una digráfica finita. Entonces existe una digráfica finita Z que contiene a X como una subdigráfica inducida, tal que cada isomorfismo entre subdigráficas inducidas de X se extienden a un automorfismo de Z .*

Demostración. La demostración de este teorema requiere de tres clamores. Para los casos en que sea necesario, dentro de la demostración de una clama, se probarán proposiciones auxiliares.

Clama 1. Toda digráfica finita X puede ser “encajada” en una digráfica finita Y tal que $\{Y_-(a) : a \in X\}$ es una colección independiente estadísticamente de subconjuntos de Y

Demostración. Podemos asumir que el mapeo $a \mapsto X_+(a)$ es uno a uno en X . Si no es así, es fácil encajar X en una digráfica finita ligeramente mayor que tenga esta propiedad. Sea Y el conjunto de todos los subconjuntos de X , se define una

estructura de digráfica sobre Y por: $(y_1, y_2) \in E^Y$ sii $y_2 = X_+(a)$ para algún $a \in y_1$.

Proposición 1. Si $y_1 = X_+(a_1)$ y $y_2 = X_+(a_2)$ entonces $(y_1, y_2) \in E^Y$ si y sólo si $(a_1, a_2) \in E^X$.

Demostración. Sean $y_1 = X_+(a_1)$ y $y_2 = X_+(a_2)$. Por un lado, si $(y_1, y_2) \in E^Y$ entonces $a_2 \in y_1 = X_+(a_1)$, así $a_2 \in X_+(a_1)$, entonces $(a_1, a_2) \in E^X$. Para el otro lado, si $(a_1, a_2) \in E^X$ entonces $a_2 \in X_+(a_1) = y_1$ y como $y_2 = X_+(a_2)$, por definición, sigue que $(y_1, y_2) \in E^Y$. Así, X es encajada en Y por la función $\phi: X \rightarrow Y$ que mapea $a \mapsto a^* = X_+(a)$. □

Por la definición de un arco en la digráfica Y tenemos que $Y_-(a^*) = \{y: a \in y\}$.

Proposición 2. El conjunto $\{Y_-(a^*): a \in X\}$ es independiente estadísticamente.

Demostración. El conjunto $A_a = Y_-(a^*)$ está formado por los subconjuntos de Y que contienen al elemento a . Sea $n = \text{card } X$. Considere $F = \{A_a: a \in X\}$ entonces para todos los conjuntos (distintos) $A_{a_1}, \dots, A_{a_m}, \bar{A}_{b_1}, \dots, \bar{A}_{b_j}$ en F , con todos los subíndices $a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_j$ diferentes, $A_{a_1} \cap \dots \cap A_{a_m} \cap \bar{A}_{b_1} \dots \cap \bar{A}_{b_j}$ consta de subconjuntos de Y que contienen a los elementos a_1, \dots, a_m y que no contienen a los elementos b_1, \dots, b_j . Así $\text{card}(A_{a_1} \cap \dots \cap A_{a_m} \cap \bar{A}_{b_1} \dots \cap \bar{A}_{b_j}) = 2^{n-m-j} = \text{card}(Y) \cdot 2^{-m-j}$. Por lo tanto, F es independiente estadísticamente. □

La clama 1 sigue de las proposiciones 1 y 2. □

Sea U un conjunto de isomorfismos entre subdigráficas inducidas de X (no necesariamente todos), con la condición de que si $f \in U$ entonces $f^{-1} \in U$. Sea

Y la digráfica construida en la Clama 1.

De aquí en adelante se usara a en lugar de a^* y todo lo referente a la gráfica X en realidad es la imagen de X "encajada" en Y por la función ϕ . La notación $Sym(Y)$ denota al grupo de todas las permutaciones de los elementos del conjunto Y .

Clama 2. Sea $f \in U$. Existe $f^* \in Sym(Y)$ tal que f^* extiende f , y $f^*[Y_-(a)] = Y_-[f(a)]$ para $a \in \text{dom}(f)$. Si $\text{dom}(f) = \text{range}(f)$ y $f^2 = e$ entonces f^* puede elegirse de tal manera que $f^{*2} = e$

Demostración. Sea $D = \text{dom}(f)$, $R = \text{rango}(f)$. Para cualquier función $v : D \rightarrow \{0, 1\}$, sea $A_v = \{x \in D : v(x) = 1\}$ y sea $D_v = \{y \in Y : Y_+(y) \cap D = A_v\}$.

Proposición 3. $D_v = \bigcap_{a \in D} Y_-^{v(a)}(a)$ donde $Y_-^1(a) = Y_-(a)$ si $v(a) = 1$ y $Y_-^0(a) = \bar{Y}_-(a)$ si $v(a) = 0$.

Demostración. Primero, $D_v \subset \bigcap_{a \in D} Y_-^{v(a)}(a)$. Para todo elemento $y \in D_v$ tenemos que $Y_+(y) \cap D = A_v$. Entonces para cualquier $a \in D$, $a \in Y_+(y)$ sii $a \in A_v$, como $y \in Y_-(a)$ entonces se tiene que $y \in \bigcap_{a \in D} Y_-^{v(a)}(a)$.

Para demostrar que $D_v \supset \bigcap_{a \in D} Y_-^{v(a)}(a)$, sea y cualquier elemento en $\bigcap_{a \in D} Y_-^{v(a)}(a)$. Si $y \in Y_-(a)$ entonces $v(a) = 1$ para $a \in D$ y el elemento a pertenece a A_v . Pero $a \in Y_+(y)$ y sigue que $Y_+(y) \cap D = A_v$ por lo que $y \in D_v$, y finaliza la prueba de la proposición. □

Sea $R_v = \{y \in Y : Y_+(y) \cap f(D) = f(A_v)\}$. Con la misma notación que la usada para D_v , se puede probar que $R_v = \bigcap_{a \in D} Y_-^{v(a)}(f(a))$ de manera similar que para D_v .

Por la Clama 1, $|D_v| = |R_v| = |Y| \cdot 2^{-|D|}$. Como f es un isomorfismo de D con R como digráficas, $R \cap R_v = f(D \cap D_v)$ entonces se tiene que $|D \cap D_v| = |R \cap R_v|$, por lo tanto $|D_v - D| = |R_v - R|$.

Sea f^* cualquier permutación de Y extendiendo f y mapeando $D_v - D$ a $R_v - R$ para cada v .

Como D_v es una partición de Y y $Y_-(a) = \bigcup_{v(a)=1} D_v$, $Y_-(f(a)) = \bigcup_{v(a)=1} R_v$ entonces $f^*[Y_-(a)] = f^*[\bigcup_{v(a)=1} D_v] = \bigcup_{v(a)=1} f^*(D_v) = \bigcup_{v(a)=1} R_v = Y_-(f(a))$.

Proposición 4. Si $D = R$ y $f^2 = e$, entonces $R_v = D_v f$.

Demostración. Como $f^2 = e$, $x = f(a)$ y $f(x) = a$ entonces $R_v = \bigcap_{a \in D} Y_-^{v(a)}(f(a)) = \bigcap_{f(x) \in D} Y_-^{v(f(x))}(x) = D_v f$.

□

Para la segunda parte de la clama, tenemos dos casos:

1) Si $v \neq v f$, entonces $D_v \cap D_{v f} = \emptyset$ por lo que es posible elegir cualquier permutación f^* que extienda f mapeando $D_v - D$ a $D_{v f} - D$, y $D_{v f} - D$ a $D_v - D$, con lo que se obtiene que $f^{*2} = e$.

2) Si $v = v f$, elegir $f^* = e$ en el mapeo de $D_v - D$ a $D_v - D$ y de esta manera se obtiene que $f^{*2} = e$.

□

Elegir f^* para $f \in U$ de tal forma que $f^{-1*} = f^{*-1}$, esto puede hacerse porque $f^{-1} \in U$ así, elegir f^{-1*} de modo que extienda f^{-1} y sea igual a la inversa de f^* .

Sea G el grupo de permutaciones de Y generado por $U^* = \{f^* : f \in U\}$.

Se usará la siguiente notación: $f_n \dots f_1 x = y$ (con $x, y \in Y$, $f_1, \dots, f_n \in U$) signifi-

ca: existe $x_0, \dots, x_n \in Y$ con $x_0 = x, x_n = y, x_i \in \text{dom}(f_{i+1})$, y $f_{i+1}x_i = x_{i+1}$ para $i < n$.

Se define una relación \approx en $G \times Y$ por

$(g, x) \approx (g', x')$ si existe $h_1 \dots h_n \in U$ con

(i) $h_n \dots h_1 x = x'$

(ii) $g = g' h_n^* \dots h_1^*$ en G .

Clama 3.

(a) \approx es una relación de equivalencia sobre $G \times Y$

(b) La acción de G sobre $G \times Y$ dada por $g(h.x) = (gh, x)$ respeta \approx .

Demostración. Para la parte (a), sea $e \in U$ donde $ex = x$. Elíjase $e^* \in G$ de tal forma que $g = e^*g$ entonces $(g, x) \approx (g, x)$ y la relación es reflexiva. Si $(g, x) \approx (g', x')$ entonces existe $h_n \dots h_1 x = x'$ y $g = g' h_n^* \dots h_1^*$ en G . Tomando inversas $x = h_1^{-1} \dots h_n^{-1} x', g h_1^{-1*} \dots h_n^{-1*} = g'$ en G . Por la elección de $h^* \cdot h^{-1*} = h^*^{-1}$ así tenemos que $g h_1^{-1*} \dots h_n^{-1*} = g'$ en G entonces $(g', x') \approx (g, x)$ y la relación es simétrica. Finalmente si $(g, x) \approx (g', x')$ y $(g', x') \approx (g'', x'')$ entonces hay $h_1 \dots h_n \in U$ y $h'_1 \dots h'_m \in U$ con h y h' no necesariamente todos diferentes, tal que $h_n \dots h_1 x = x', g = g' h_n^* \dots h_1^*$ en G , y $h'_m \dots h'_1 x' = x'', g' = g'' h_m^* \dots h_1^*$ así tenemos que $x'' = h'_m \dots h'_1 x' = h'_m \dots h'_1 (h_n \dots h_1 x) = h'_m \dots h'_1 \cdot h_n \dots h_1 x$, y equivalentemente $g = g' h_n^* \dots h_1^* = (g'' h_m^* \dots h_1^*) h_n^* \dots h_1^* = g'' h_m^* \dots h_1^* \cdot h_n^* \dots h_1^*$. De aquí $(g, x) \approx (g'', x'')$, y la relación es transitiva.

Para la parte (b). Si $(g, x) \approx (g', x')$ tenemos que existe $h = h_n \dots h_1 \in U$ con $hx = x'$ y $g = g' h^*$. Para cualquier $f \in G$ podemos hacer $fg = fg' h^*$ de aquí $(fg, x) \approx (fg', x')$ y $f(g.x) \approx f(g', x')$.

□

Sea $Z = G \times Y / \approx$; por la Clama 3 (b) hay una acción inducida de G sobre Z .

Si $(e, x) \approx (e, y)$ entonces hay h_1, \dots, h_n con $h_n \dots h_1 x = y$ y $h_n^* \dots h_1^* = e$; así $x = y$. Por lo que Y encaja en Z (como conjunto). Podemos hacer Z como una digráfica definiendo los arcos por $\{((g, a)/\approx, (g, b)/\approx) : (a, b) \text{ es un arco de } Y, g \in G\}$. Sobre esta digráfica G actúa por automorfismo, para cualquier $f \in U$, $f(x) = y$ y para $f^* \in G$ la acción $f^*(e, x) = (f^*, x)$ y por la definición de la relación, $(f^*, x) \approx (e, y)$ entonces cada elemento de U se extiende a uno de G .

Para la prueba de que Y es una subdigráfica inducida de Z se necesitan algunas proposiciones.

Proposición 5. Si $(g, y') \approx (e, y)$ entonces $g(y') = y$.

Demostración. Como $(g, y') \approx (e, y)$, por la definición de la relación existen h_1, \dots, h_l en U tales que $y = h_l \dots h_1(y')$ y $g = h_l^* \dots h_1^*$. Como h^* extiende h se cumple que $y = h_l^* \dots h_1^*(y')$ y entonces $y = g(y')$.

□

Proposición 6. Si $(e, y) \approx (g, y')$, $x = g(x')$ y existe un arco (x', y') en Y entonces (x, y) es un arco de Y .

Demostración. Si $(e, y) \approx (g, y')$ como es una relación de equivalencia tenemos que $(g, y') \approx (e, y)$ por la definición de la relación existe f_1, \dots, f_m en U , tal que $f_m \dots f_1 y' = y$ y $g = f_m^* \dots f_1^*$. Sea $y_0 \dots y_m \in Y$ tal que $y_0 = y'$, $y_m = y$, $y_i \in \text{dom}(f_{i+1})$, y $f_{i+1} y_i = y_{i+1}$. Entonces $f_{i+1}^* [Y_-(y_i)] = Y_-(f_{i+1}(y_i)) = Y_-(y_{i+1})$, así $f_m^* \dots f_1^* [Y_-(y')] = Y_-(y)$ y $g[Y_-(y')] = Y_-(y)$. Como $x' \in Y_-(y')$, así $g(x') \in Y_-(y)$. Pero $g(x') = x$, entonces (x, y) es un arco de Y .

□

En seguida se prueba que Y es una subdigráfica inducida de Z . Supongamos que $x, y \in Y$ y $((e,x)/\approx, (e,y)/\approx)$ es un arco de Z . Entonces para algún $g \in G$, y algún arco (x',y') de Y , se tiene que $(e,x) \approx (g,x')$, $(e,y) \approx (g,y')$. Por la Proposición 5 se cumple que $g(x') = x$ y entonces por la Proposición 6 se concluye que (x,y) es un arco de Y . Entonces Y es una subdigráfica inducida de Z , y termina la prueba del teorema. \square

Capítulo 4

Extensiones en gráficas

El objetivo de este capítulo es presentar algoritmos para extender una gráfica G a una gráfica regular H , así como un algoritmo para extender una gráfica con las aristas coloreadas a una multigráfica regular con aristas coloreadas. Se presenta la prueba de Herwing y Lascar de que las gráficas tienen la propiedad de extensión de automorfismos parciales (EPPA) y por último se prueba que las gráficas con aristas coloreadas tienen una variante de la propiedad EPPA.

4.1. Extendiendo una gráfica finita G a una gráfica regular finita H

Notación. Se usará la misma letra G para denotar a la gráfica como estructura o a su conjunto de vértices dependiendo del contexto. Se usará $E(G)$ para el conjunto de aristas de G .

La secuencia de grados de una gráfica es la lista de los grados de sus vértices, usualmente en orden decreciente, $d_1 \geq \dots \geq d_n$. A pesar de que toda gráfica tiene una secuencia de grados, no toda secuencia entera no negativa corresponde a la secuencia de una gráfica.

Si para una lista de enteros no negativos existe una gráfica para la cual esta lista

corresponde a su secuencia de grados entonces decimos que la secuencia es graficable o que es realizable. Se presentan dos teoremas que nos dicen cuando una secuencia es realizable. Las demostraciones de estos teoremas se pueden consultar en [6].

Teorema 3. (Havel, Hakimi). Para $n > 1$, la secuencia de enteros no negativos en orden decreciente $d : d_1, d_2, \dots, d_n$ es graficable si, y sólo si, la secuencia $d' : d_2 - 1, d_3 - 1, \dots, d_{d_1+1} - 1, d_{d_1+2}, \dots, d_n$ es graficable.

Este teorema proporciona un algoritmo para construir una gráfica a partir de una secuencia de enteros dada, en caso de que la misma exista. Si no existe una gráfica el algoritmo no se puede aplicar en alguno de sus pasos.

Corolario 1. (Algoritmo) Una secuencia de enteros no negativos en orden decreciente $d : d_1, d_2, \dots, d_n$, con $n - 1 \geq d_1$ es graficable si, y sólo si el siguiente procedimiento da como resultado en una secuencia de ceros.

1. Determine la secuencia d' del teorema 3.
2. Reordenar los terminos de d' en orden decreciente y llamar d^1 a la secuencia resultante.
3. Determinar la secuencia d'' de d^1 como en el paso 1, y la secuencia reordenada d^2 como en el paso 2.
4. Continuar el proceso hasta que se obtenga una secuencia de ceros.

Para construir la gráfica que tiene a la secuencia d como su secuencia de grados, primero construir una gráfica con todos sus vértices de grado cero, de modo que su secuencia de grados sea igual a d^j (última secuencia obtenida por el algoritmo de Havel-Hakimi). Agregar un vértice, que sea adyacente a los vértices

que sean necesarios para obtener la secuencia d^{j-1} . Continuar hasta obtener una gráfica que tenga a d como su secuencia de grados.

Teorema 4. (Erdős - Gallai). *Una secuencia no negativa de enteros en orden decreciente $d : d_1, d_2, \dots, d_n$ es graficable si, y sólo si,*

1. $\sum d_i$ es par.
2. $\sum_{i=1}^k d_i \leq k(k-1) + \sum_{j=k+1}^n \min\{k, d_j\}$ para $1 \leq k \leq n$.

Con la ayuda de este último teorema podemos probar lo siguiente.

Proposición 7. *La secuencia $d := d_1, \dots, d_n$, con $d_i = \Delta$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$, es realizable si, y solo si,*

1. Δn es par.
2. $n \geq \Delta + 1$.

Demostración. La demostración consiste en mostrar que estas condiciones corresponden a las del teorema de Erdős y Gallai.

Para la condición 1.

$\sum_{i=1}^n d_i = \Delta n$ es par.

Para la segunda condición, la desigualdad

$$\sum_{i=1}^k d_i \leq k(k-1) + \sum_{j=k+1}^n \min\{k, d_j\} \text{ para } 1 \leq k \leq n,$$

se convierte en

$$k\Delta \leq k(k-1) + (n-k)\min\{k, \Delta\} \text{ para } 1 \leq k \leq n.$$

El estudio de esta desigualdad lo dividimos en tres casos.

Caso 1: Para $1 \leq k < \Delta$ tenemos que

$$\begin{aligned} k\Delta &\leq k(k-1) + (n-k)k \\ k\Delta &\leq k(n-1) \\ \Delta &\leq n-1 \\ \Delta+1 &\leq n. \end{aligned}$$

Caso 2: Para $k = \Delta$

$$\begin{aligned} \Delta^2 &\leq \Delta(\Delta-1) + (n-\Delta)\Delta \\ \Delta^2 &\leq \Delta(n-1) \\ \Delta &\leq n-1 \\ \Delta+1 &\leq n. \end{aligned}$$

Caso 3: Para $\Delta < k \leq n$ se tiene que cumplir que $k\Delta \leq k(k-1) + (n-k)\Delta$, partiendo de

$$\begin{aligned} \Delta &< k \\ \Delta+1 &\leq k \\ \Delta &\leq k-1 \\ k\Delta &\leq k(k-1). \end{aligned}$$

Por lo que la condición $k\Delta \leq k(k-1) + (n-k)\Delta$ se cumple si $(n-k)\Delta \geq 0$, lo que nos lleva a que $n \geq k \geq \Delta + 1$. \square

Por su gran utilidad en proposiciones posteriores se presenta la siguiente proposición.

Proposición 8. *Toda gráfica finita G con n vértices, m aristas y con grado máximo Δ , es una subgráfica inducida de una gráfica finita H de n' vértices y m' aristas en donde se cumple que para todo $x \in H$, $\deg(x) = \Delta$ si $x \in G$ o $\deg(x) = 1$ si $x \notin G$. Además*

$$\begin{aligned}n' &= n(\Delta + 1) - 2m \\m' &= n\Delta - m.\end{aligned}$$

Demostración. Sea Δ el grado máximo de la gráfica G , a cada vértice $x \in G$ agregar $\Delta - \deg(x)$ nuevas aristas con su respectivo vértice de tal modo que $\deg(x') = \Delta$, donde x' es la imagen en H del vértice x . El grado de cada nuevo vértice es igual a uno.

Para la segunda parte de la proposición se utilizara el conocido teorema

$$\sum_{x \in G} \deg(x) = 2m.$$

En la construcción de la gráfica H a cada vértice $x \in G$ se le agregan $\Delta - \deg(x)$ aristas (vértices), entonces el número total de aristas nuevas es igual a

$$(4.1.1) \quad s = \sum_{x \in G} (\Delta - \deg(x)) = \sum_{x \in G} \Delta - \sum_{x \in G} \deg(x) = n\Delta - 2m$$

que es también el número de vértices nuevos. Por consiguiente

$$(4.1.2) \quad n' = n + n\Delta - 2m = n(\Delta + 1) - 2m$$

y

$$(4.1.3) \quad m' = m + n\Delta - 2m = n\Delta - m.$$

□

Con todo lo anterior estamos en condiciones de probar la siguiente proposición.

Proposición 9. *Sea G una gráfica finita de grado máximo $k = \Delta(G)$, entonces existe una gráfica finita H tal que G es una subgráfica inducida de H , y H es k -regular*

Demostración. Por la proposición 8, el número de aristas nuevas unidas a los vértices de G necesarias para que todo vértice $x \in G$ tengan grado k en H es

$$s = nk - 2m.$$

Podemos suponer que $s \geq k$, porque siempre podemos agregar $k - 1$ aristas nuevas a los vértices de grado 1 que sean necesarios para que esto se cumpla. Construimos inicialmente la gráfica de la proposición 8. Para que esta gráfica sea k regular, a los s vértices de grado uno les faltan $k - 1$ aristas. Para colocar estas aristas en los s vértices de grado uno, construir la secuencia

$$d : \underbrace{k - 1, \dots, k - 1}_s \text{ elementos}$$

Por la proposición 7 esta secuencia es realizable si, y sólo si,

1. $(k - 1)s$ es par.
2. $s \geq k$.

La segunda condición se cumple por la suposición hecha sobre el valor de s . Únicamente es necesario comprobar que $(k - 1)s$ es par. Esto lo hacemos considerando dos casos:

caso 1. Si k es par, entonces por la formula 4.1.1, s es par y $(k - 1)s$ es par por lo que la secuencia es realizable.

caso 2. Para k número impar, $(k - 1)s$ es par, y entonces la secuencia es realizable.

Colocar las $k - 1$ aristas en los vértices de grado uno usando el algoritmo de Havel - Hakimi que se presenta en el corolario 1. De esta manera se obtiene a la gráfica k - regular H que contiene a G como subgráfica inducida y, además, si H tiene n' vértices y m' aristas entonces, por la proposición 8.

$$n' = n(k + 1) - 2m$$

y

$$m' = nk - m.$$

□

Pueden existir casos en que el tamaño de la gráfica H se puede reducir, en la siguiente proposición consideraremos uno de ellos.

Proposición 10. De la proposición anterior, sea $\delta(G)$ el grado mínimo de la gráfica G . Si $k \mid s$ y $c \geq k - \delta(G)$, donde $c = s/k$, entonces se puede construir la gráfica H con $n + c$ vértices.

Demostración. Se usará $s_{x_i} = k - \deg(x_i)$ para denotar el número de aristas que requiere el vértice $x_i \in G$ para que tenga grado k y $s = \sum s_{x_i}$. La gráfica H se construye de la siguiente manera:

Poner c nuevos vértices alrededor de la gráfica G , al conjunto de estos vértices lo denotaremos por Y . En esta demostración un paso quiere decir: poner un arista entre un vértice de G y un vértice de Y .

1) Tómesese cualquier vértice $x_i \in G$, y únense s_{x_i} aristas entre este vértice y s_{x_i} vértices distintos en Y ; esto se puede hacer porque $c \geq k - \delta(G)$.

2) Continúese con otro vértice $x_j \in G$ y únense s_{x_j} aristas entre este vértice y s_{x_j} vértices distintos de Y , de tal manera que en cada paso se cumpla que para $y_i, y_j \in Y$, $|\deg(y_i) - \deg(y_j)| \leq 1$ para todo $i, j \in \{1, \dots, c\}$.

3) Repítase el punto 2 hasta terminar con todos los vértices de G .

Cuando el proceso termina, a cada vértice $x_i \in G$ se le han agregado s_{x_i} aristas conectadas con los vértices de Y ; es decir, la suma de los grados de los vértices de Y es igual a s . Por el punto 2, estos vértices tienen grado k o $k - 1$. Sean a el número de vértices de grado k y b el número de vértices de grado $k - 1$, entonces $c = a + b$ y como $s = kc$, tenemos que

$$s = ka + (k - 1)b,$$

$$kc = k(a + b) - b,$$

$$kc = kc - b,$$

$$b = 0.$$

Por lo tanto, todos los vértices en Y tienen grado k .



4.2. Gráficas con aristas coloreadas

El algoritmo que aparece en la demostración de la proposición 9 se puede usar para gráficas con aristas coloreadas, la notación $deg_i(x)$ significa el número de aristas del color i que son incidentes a x , y se le llamara el grado del color i en x .

Teorema 5. *Sea G una gráfica con aristas coloreadas con l colores, n vértices y m aristas. Sea k_i el grado máximo del color i , con $i \in \{1, \dots, l\}$ entonces existe una multigráfica H con aristas coloreadas con l colores tal que G es una subgráfica inducida de H , y en H se cumple que para todo vértice $x \in H$, $deg_i(x) = k_i$ para todo $i \in \{1, \dots, l\}$*

Demostración. Sea m_i es el número de aristas de color i , de modo que $m = \sum m_i$. Por la proposición 8 se requieren de $s_i = nk_i - 2m_i$ aristas de color i para que cada vértice $x \in G$ tenga grado k_i en H . Sea $k = \sum k_i$, $s = \sum s_i$. Podemos suponer que $s_i > k_i - 1$ para cada color i y, podemos suponer que $s > k - 1$ por lo que $s \geq s_i$. Usando la misma idea que en la proposición 9, para cada color i construiremos la secuencia $d_i : s_i, k_{i_1}, k_{i_2}, \dots, k_{i_s}$, con $k_{i_j} = k_i$ para todo $j \in \{1, \dots, s\}$, esta secuencia será realizable si la suma $\sum_i = s_i + sk_i$ de los elementos de la secuencia d_i es par y si cumple con la segunda condición del teorema de Erdős y Gallai. Se comienza probando la segunda condición.

Tenemos que $s \geq s_i$, $s_i \geq k_i$ y $s \geq k_i$. Para la secuencia d_i , la segunda condición de Erdős y Gallai es igual a

$$(4.2.1) \quad s_i + \sum_{l=2}^j k_l \leq j(j-1) + \sum_{m=j+1}^{s+1} \min\{j, k_m\} \quad \text{para } 1 \leq j \leq s+1.$$

Para $1 \leq j \leq k_i$ la desigualdad se convierte en

$$\begin{aligned} s_i + (j-1)k_i &\leq j(j-1) + (s-j+1)j, \\ s_i + (j-1)k_i &\leq j(j-1) + js - (j-1)j, \\ s_i + (j-1)k_i &\leq js. \end{aligned}$$

Para demostrar que se cumple la desigualdad anterior partimos de

$$\begin{aligned} k_i &\leq s, \\ (j-1)k_i &\leq s(j-1) = sj - s. \end{aligned}$$

Como $s_i \leq s$ nos queda que

$$s_i + (j-1)k_i \leq js.$$

Para el caso en que $k_i < j \leq s+1$ la desigualdad 4.2.1 se convierte en:

$$s_i + (j-1)k_i \leq j(j-1) + (s-j+1)k_i.$$

Para demostrar la desigualdad anterior partimos de

$$\begin{aligned} k_i &< j, \\ k_i + 1 &\leq j, \\ (j-1)(k_i + 1) &\leq j(j-1), \\ (j-1)k_i + j - 1 &\leq j(j-1), \\ (j-1)k_i &\leq j(j-1) - j + 1. \end{aligned}$$

Como $s_i \leq s$ nos queda que

$$s_i + (j-1)k_i \leq j(j-1) + s - j + 1,$$

$$s_i + (j-1)k_i \leq j(j-1) + (s-j+1)k_i.$$

Probaremos que la suma de los enteros en la secuencia d_i , $\Sigma_i = s_i + sk_i$, es par. De la proposición 8, $s_i = nk_i - 2m_i$ y $s = nk - 2m$. Consideramos los siguientes cuatro casos.

1. Si k es par, n par o impar entonces s es par y tendremos los siguientes sub-casos
 - a) Si k_i es par, n par o impar entonces s_i es par y Σ_i es par.
 - b) Si k_i es impar, n par entonces s_i es par por lo que Σ_i es par.
 - c) Si k_i es impar, n impar entonces s_i es impar y Σ_i es impar.

En el caso 1-c, la secuencia no sería realizable, pero se puede agregar un nuevo elemento con valor k_i a la secuencia d_i , llevándonos al caso 1-b que es realizable.

2. Si k es impar, n par entonces s es par. Como n es par entonces s_i es par para k_i par o impar. Por lo tanto Σ_i es par.

3. Si k es impar, n impar entonces s es impar.
 - a) Si k_i es par, n impar entonces s_i es par, y Σ es par
 - b) Si k_i es impar, n impar entonces s_i es impar lo que nos lleva a que Σ sea par

Por lo anterior todas las secuencias d_i son realizables de manera independiente.

La multigráfica H que pide la proposición se construye de la siguiente manera: Comenzar con un color i , realizar la gráfica de la secuencia d_i usando la algoritmo de Havel-Hakimi, considerando a la gráfica G como el “vértice” de grado s_i (el número de aristas de color i que vienen de G), una vez hecho esto continuar con la secuencia del color j y realizar la gráfica de la secuencia d_j usando los mismos vértices que en el color anterior, y la gráfica G como el vértice de grado s_j , continuar de igual manera hasta terminar con todos los colores. Con lo anterior se obtiene una multigráfica tal que para todo vértice x en H , $\deg_i(x) = k_i$ para cada color i , y G es subgráfica inducida pues basta quitar los s nuevos vértices en H para obtener G .

□

Pregunta: ¿El teorema anterior es valido si se pide que la multigráfica H sea una gráfica simple?.

Considero que la respuesta a la pregunta es afirmativa, incluso que se puede utilizar una construcción muy similar a la del teorema anterior. Solo faltaría garantizar que con el algoritmo presentado no se obtiene una multigráfica .

4.3. EPPA para gráficas finitas

En esta sección se presenta la prueba detallada que proporcionan Herwing y Lascar [9], ya que una parte del trabajo fue el de programar computacionalmente este algoritmo.

Notación. Para un conjunto finito X de tamaño m y un entero positivo k , C_k^X denota el conjunto de todos los subconjuntos de X de cardinalidad k . $C_{\leq k}^X$ denota el conjunto de todos los subconjuntos de X de tamaño menor o igual que k . El tamaño del conjunto C_k^X se denota por C_k^m que es igual al coeficiente binomial $\binom{m}{k}$.

Definición. La gráfica $\Gamma(X, k)$ es una gráfica que tiene como vértices a los elementos de C_k^X y las aristas E se definen por: para $a, b \in C_k^X$, $ab \in E$ si, y sólo si, $a \cap b \neq \emptyset$. Este tipo de gráficas son muy interesantes porque son r -regulares y, además, cada permutación de los elementos de X induce un automorfismo sobre las gráficas $\Gamma(X, k)$.

Definición. La gráfica $\Gamma(X, k, 1)$ es una gráfica que tiene como vértices a los elementos de C_k^X y las aristas E se definen por: para $a, b \in C_k^X$, $ab \in E$ si, y sólo si, $|a \cap b| = 1$.

La gráfica $\Gamma(X, k)$ es usada por Herwing y Lascar en su demostración. En este trabajo se utilizará la gráfica $\Gamma(X, k, 1)$ porque tiene las propiedades que nos interesan y además tiene menor cantidad de aristas que la gráfica $\Gamma(X, k)$.

Debido a su utilidad, en este trabajo se da una definición alternativa de gráfica.

Definición. Una *gráfica general* G es una terna ordenada $(V(G), E(G), \psi_G)$

constituida por un conjunto $V(G)$ de elementos llamados vértices, un conjunto $E(G)$ disjunto de $V(G)$, de elementos llamados aristas, y una función de incidencia $\psi_G : E(G) \rightarrow \mathcal{C}_{\leq 2}^{V(G)}$ que para cada arista se cumple alguna de las siguientes tres condiciones:

1. ψ_G asocia la arista e a un subconjunto de $V(G)$ de tamaño dos, $\psi_G(e) = \{u, v\}$. Decimos que la arista e tiene dos vértices extremos y la llamaremos simplemente arista.
2. ψ_G asocia la arista e a un subconjunto de un elemento de $V(G)$, $\psi_G(e) = \{u\}$, la llamaremos arista con un extremo.
3. ψ_G asocia la arista e al conjunto vacío. La llamaremos arista sin extremos.

En la figura 4.3 se observa un ejemplo de gráfica general.

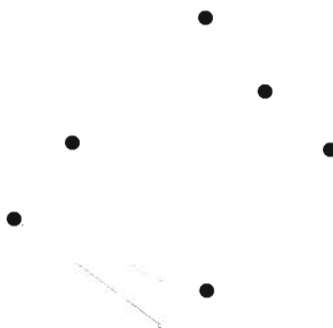


Figura 4.1: Gráfica general

Proposición 11. *El grado de cualquier vértice a de la gráfica $\Gamma(X, k, 1)$ con $|X| = m$ es*

$$\deg(a) = k \binom{m-k}{k-1}$$

Demostración. Sea $a = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ cualquier elemento de los vértices de $\Gamma(X, k, 1)$. El grado de a es, por definición, la cardinalidad del conjunto de sus vecinos, que en este caso es

$$N(a) = \{b : |a \cap b| = 1, b \in C_k^X\}.$$

Para determinar el número de elementos que tiene este conjunto primero calcularemos el número de conjuntos $b \in C_k^X$ tales que $a \cap b = x_1$, para esto fijamos el elemento x_1 como un elemento en b , al conjunto X le quitamos todos los elementos en a , obteniendo el conjunto $X' = X - a$ con cardinalidad $|X'| = m - k$. Para que se cumpla $a \cap b = x_1$, los $k - 1$ elementos de b que faltan se seleccionan del conjunto X' , esto se puede hacer de C_{k-1}^{m-k} formas, que es el número buscado. Como el vértice a tiene k elementos entonces la cardinalidad del conjunto $N(a)$ es igual a

$$k \binom{m-k}{k-1}.$$

□

De aquí en adelante se usará Γ en lugar de $\Gamma(X, k, 1)$ a menos que se preste a confusión.

Proposición 12. *Toda permutación σ de X induce un automorfismo natural σ^* sobre Γ .*

Demostración. Sea σ cualquier permutación de X , sean $a, b \in V(\Gamma)$, definimos $\sigma^*(a) = \{\sigma(e) : e \in a\}$. Es claro que $\sigma^*(a)$ y $\sigma^*(b)$ pertenecen a $V(\Gamma)$, lo único que es necesario demostrar es que si $ab \in E(\Gamma)$ entonces $\sigma^*(a)\sigma^*(b) \in E(\Gamma)$, es decir, que $|\sigma^*(a) \cap \sigma^*(b)| = 1$. Por la definición de un arista en la gráfica Γ , $a \cap b = \{x\}$ para algún $x \in X$. Sea x' el elemento en X al cual es enviado x al aplicar la permutación σ , como $x \in a$ y $x \in b$ entonces $x' \in \sigma(a)$ y $x' \in \sigma(b)$ por lo que

$x' \in \sigma(a) \cap \sigma(b)$. Falta probar que es el único elemento en la intersección de $\sigma(a)$ y $\sigma(b)$. Supongamos que existe $y' \in \sigma(a) \cap \sigma(b)$ con $y' \neq x'$, entonces $y' \in \sigma(a)$ y $y' \in \sigma(b)$. Si y es la preimagen de y' con la permutación σ se tiene que $y \in a$ y $y \in b$, por lo tanto $y \in a \cap b$ lo cual contradice el que $a \cap b = \{x\}$.

□

Definición. Una subgráfica Γ_0 de $\Gamma(X, k, 1)$ es pobre si cumple las siguientes condiciones:

1. Para todo $x \in X$, $\text{card}\{a \in \Gamma_0 : x \in a\} \leq 2$.
2. Para todo $a, b \in \Gamma_0$, si $a \neq b$ entonces $\text{card}(a \cap b) \leq 1$.

Lo que nos dicen estas condiciones es que cualquier $x \in X$ pertenece a lo más a dos elementos diferentes de Γ_0 y cualquier pareja $a \neq b$ en Γ_0 tiene a lo más un elemento en común en X . Con esta definición podemos obtener la siguiente proposición.

Proposición 13. *Cualquier isomorfismo entre dos subgráficas pobres Γ_1 y Γ_2 de Γ se extiende a un automorfismo de Γ .*

Demostración. Sea $f : \Gamma_1 \rightarrow \Gamma_2$ un isomorfismo entre Γ_1 y Γ_2 . Se construirá una permutación σ de X tal que σ^* (automorfismo inducido por σ) extiende f . Sea $x \in X$. Existen tres casos:

- i) x pertenece a dos elementos a y b en Γ_1 . Entonces se elige $\sigma(x)$ igual al único elemento de $f(a) \cap f(b)$.

ii) x pertenece a un único elemento a en Γ_1 . Entonces sea σ una biyección entre ésta x en a y una y que únicamente está en $f(a)$.

iii) x no está en ninguno de los elementos de Γ_1 . Sea σ una biyección entre ésta x y una y que no está en ninguno de los $f(a)$.

Siguiendo el procedimiento anterior para todo $x \in X$ se obtiene una permutación σ de X . □

Proposición 14. *Sea G una gráfica finita, entonces existe un conjunto finito X , un entero positivo k y una subgráfica pobre Γ_0 de $\Gamma(X, k, 1)$ que es isomorfa a G .*

Demostración. Sea X_0 el conjunto de aristas de la gráfica G (con n vértices y m aristas). Para cada vértice $x \in G$, sea $f(x) = \{e \in X_0; e \text{ es incidente a } x\}$. Si $|f(x)| = k$ con $k > 1$ para todo $x \in G$, hemos terminado porque f es un isomorfismo de G a una subgráfica pobre de $\Gamma(X_0, k, 1)$. En caso de que G no sea k -regular, a cada vértice $x \in G$ agrégense $k - \text{deg}(x)$ aristas. Sea X_1 el conjunto de las nuevas aristas en G , por la proposición 8 el tamaño de este conjunto es $s = nk - 2m$. El conjunto X se construye con la unión disjunta de X_0 y X_1 . De esta forma es posible definir un isomorfismo f de G a $\Gamma(X, k, 1)$, y es fácil probar que la imagen de G en $\Gamma(X, k, 1)$ es una subgráfica pobre de $\Gamma(X, k, 1)$. □

Dado que cada subgráfica de una subgráfica pobre de $\Gamma(X, k, 1)$ es pobre entonces, como consecuencia inmediata de las proposiciones 13 y 14, se obtiene el teorema siguiente.

Teorema 6. *(Hrushovski) Sea G una gráfica finita. Entonces existe una gráfica finita Z conteniendo G como una gráfica inducida, tal que cada isomorfismo entre subgráficas inducidas de G se extienden a un automorfismo de Z .*

Donde Z es la gráfica $\Gamma(X, k, l)$. La cardinalidad del conjunto X de la proposición 14 es $nk - m$ (proposición 8). Por la construcción de $\Gamma(X, k, l)$ y como $C_k^{nk-m} \leq (kn)^k$, tenemos que el orden de la gráfica $Z \leq (kn)^k$. La construcción de Hrushovski [13], da una gráfica de orden $Z \leq (2n2^n)!$, notándose claramente la mejoría que se obtiene con la construcción de Herwing y Lascar.

Se realizó un programa en Maple9[©] siguiendo la construcción presentada en esta sección. Se ha incluido como paso intermedio el de expandir la gráfica G a una gráfica regular G' el cual se basa en un algoritmo dado por Milliet en [14]. En el apéndice A se presentan algunos resultados obtenidos con este programa y en el Apéndice B aparece su código.

4.4. EPPA para gráficas con aristas coloreadas

Definición. Sean dos gráficas G y H con sus aristas coloreadas por el conjunto de colores $U = \{1, \dots, l\}$, con funciones $\varphi_G : E(G) \rightarrow U$ y $\varphi_H : E(H) \rightarrow U$, decimos que la función $f_\phi : G \rightarrow H$ es un ϕ -**isomorfismo** con $\phi \in \text{Sym}(U)$, si existe un isomorfismo entre las gráficas G y H (sin coloración) y además se cumple que $\phi(\varphi_G(uv)) = \varphi_H(f_\phi(uv))$.

Definición. Un ϕ -**automorfismo** de G es un ϕ -**isomorfismo** de G en G .

Definición. Sea X un conjunto finito cuyos elementos son coloreados por el conjunto U de tamaño l , $\varphi_X : X \rightarrow U$, donde φ_X es una función suprayectiva. X^i denota el subconjunto de X que contiene a todos los elementos de X del color i . $\Gamma(X, k, l, 1)$ denota la gráfica con aristas coloreadas definida de la siguiente manera: Como conjunto de vértices $\Gamma = \{a : a = \bigcup_{i=1}^l a^i, a^i \in C_k^{X^i}\}$. Para $a, b \in \Gamma$, con $a \neq b$ existe un arista entre a y b si, y sólo si, $|a \cap b| = 1$. A esta arista se le asigna

el color del elemento $x^i \in a \cap b$, de aquí en adelante por simplicidad se usará Γ en lugar de $\Gamma(X, k, l, 1)$ cuando se considere conveniente.

La importancia de esta gráfica es que toda ϕ -permutación σ de X (permutación de los elementos de X que respetan ϕ), con $\phi \in \text{Sym}(U)$, induce un ϕ -automorfismo σ^* de Γ .

Se puede observar que todo $a \in \Gamma$ tiene k elementos de X de color i para todo $i \in U$. El siguiente teorema se aplica a la clase de gráficas con aristas coloreadas que tienen ϕ -isomorfismos entre subgráficas inducidas (ϕ -automorfismos parciales). Podemos probar el siguiente teorema.

Teorema 7. *Sea G una gráfica finita con aristas coloreadas. Entonces existe una gráfica finita con aristas coloreadas H que contiene a G como gráfica inducida tal que cada ϕ -automorfismo parcial de G puede ser extendido a un ϕ -automorfismo de H*

Demostración. Se usará $\text{deg}_i(u)$ para denotar el número de aristas de color i incidentes a u (grado del color i en u), $\text{deg}(u)$ denota el número total de aristas incidentes al vértice u (sin importar el color), y $\{uv\}^i$ denota la arista de color i con vértices extremos u y v .

Clama 1. Sea G una gráfica finita con aristas coloreadas, entonces existen enteros positivos k, l , un conjunto finito X con sus elementos coloreados y una subgráfica pobre Γ_0 de $\Gamma(X, k, l, 1)$ isomorfa a G .

Demostración. Sea $U = \{1, \dots, l\}$ el conjunto de los colores de las aristas de G , sea X_0^i el conjunto de aristas de G de color i , y $X_0 = \bigcup X_0^i$ el conjunto de todas

las aristas de G . Para cada color $i \in U$ definimos $k_i = \max\{deg_i(x) : x \in G\}$ como el grado máximo del color i , y sea $k = \max\{k_i : i \in U\}$. Primero construir una gráfica general G' de la siguiente manera:

A cada vértice $x \in G$ agrégense $k - deg_i(x)$ aristas de color i para todo $i \in U$. Denótese con X_1 al conjunto de todas las aristas que se agregaron (aristas con un solo extremo). El conjunto de aristas de G' será $X = X_0 \cup X_1$. Si tenemos que $\phi \in \text{Sym}(U)$, $\phi(i) = j$ para $i, j \in U$, colóquense las aristas independientes que sean necesarias para que se cumpla que $|X^i| = |X^j|$, donde X^i y X^j son respectivamente, el conjunto de todas las aristas de color i y de color j , en la gráfica G' . Denotaremos con X_2 al conjunto de todas las aristas independientes (sin vértices en los extremos). El conjunto total de aristas de G' será $X = \bigcup_{j=0}^2 X_j$. Con esta construcción se obtiene que G es una subgráfica de G' con $V(G) = V(G')$, $E(G) \subseteq E(G')$ y para todo $x \in G$, $deg_i(x) = k$, $deg(x) = kl$.

Con el conjunto X , el valor de k y l podemos construir la gráfica $\Gamma(X, k, l, 1)$ usando la definición dada anteriormente.

Se probará que G puede encajarse en Γ por la siguiente función: para todo $x \in G$, $\pi : x \mapsto \{e \in X; e \text{ es incidente a } x\}$. Para todo $x \in G$, $\pi(x) \in \Gamma$ porque x tiene grado k para cada $i \in U$ y aparecen todos los colores, $\pi(x)$ es inyectiva porque $kl > 1$; y para todo $x \neq y$, $x, y \in G$ se cumple que:

$$\pi(x) \cap \pi(y) = \begin{cases} \{xy\}^i, & \text{si } \{xy\}^i \text{ es un arista de } G \text{ de color } i, \\ \emptyset, & \text{cualquier otro} \end{cases}$$

Por lo que $\{xy\}^i$ es un arista de G si, y sólo si, $|\pi(x) \cap \pi(y)| = 1$, si, y sólo si, $\{\pi(x)\pi(y)\}^i$ es un arista de Γ de color i . Por lo anterior π proporciona una función que encaja G en Γ .

Sea Γ_0 la imagen de G en $\Gamma(X, k, I)$ dada por π . Se demuestra que la subgráfica Γ_0 es pobre.

La segunda condición que debe cumplir una subgráfica pobre ($\forall a, b \in \Gamma_0$, si $a \neq b$ entonces $\text{card}(a \cap b) \leq 1$) se cumple por la construcción de la gráfica Γ . Para la primera condición debemos probar que $\forall x \in X$, $\text{card}\{a \in \Gamma_0 : x \in a\} \leq 2$. Si $a \in \Gamma_0$ entonces existe $u \in G$ tal que $\pi(u) = a$, y tenemos que $x \in \pi(u) = a$ si x es un arista incidente a u . Como toda arista puede ser incidente a lo más a dos vértices entonces se cumple que $\text{card}\{a \in \Gamma_0 : x \in a\} \leq 2$.

□

Clama 2. Todo ϕ -isomorfismo entre dos subgráficas pobres Γ_1 y Γ_2 de Γ se extiende a un ϕ -automorfismo de Γ

Demostración. Si f_ϕ es un ϕ -automorfismo parcial de G , $\text{dom}(f_\phi)$ y $\text{ran}(f_\phi)$ denotarán su dominio y rango respectivamente, el complemento del dominio de f_ϕ se definirá por $\overline{\text{dom}(f_\phi)} = X - \text{dom}(f_\phi)$ y para el rango $\overline{\text{ran}(f_\phi)} = X - \text{ran}(f_\phi)$. Por la construcción de X es fácil ver que $|\overline{\text{dom}(f_\phi)}| = |\overline{\text{ran}(f_\phi)}|$ y aun más si $\phi(i) = j$ se tiene que $\text{card}\{e^i : e^i \in \overline{\text{dom}(f_\phi)}\} = \text{card}\{e^j : e^j \in \overline{\text{ran}(f_\phi)}\}$.

Sea $f_\phi : \Gamma_1 \rightarrow \Gamma_2$ un ϕ -isomorfismo entre Γ_1 y Γ_2 . Se construirá una ϕ -permutación σ de X tal que σ^* (ϕ -automorfismo inducido por σ) extiende f_ϕ . Sea $x \in X$. Como Γ_1 y Γ_2 son subgráficas pobres de Γ entonces existen tres casos:

1) x^i pertenece a dos elementos a y b en Γ_1 . Entonces se elige $\sigma(x^i) = x^j$ tal que $x^j \in f_\phi(a) \cap f_\phi(b)$, esto se puede hacer porque f_ϕ es un ϕ -isomorfismo.

2) x^i pertenece a sólo un elemento a en Γ_1 . Entonces se elige $\sigma(x^i) = x^j$ como una biyección entre aquella x^i en a y la x^j que únicamente está en $f_\phi(a)$ y que cumpla que $\phi(i) = j$. Esto se puede hacer porque el número de aristas del color i en a es igual al número de aristas del color j en $f_\phi(a)$.

3) x^i no pertenece a ninguno de los elementos de Γ_1 . Sea $\sigma(x^i)$ una biyección entre la x^i y la x^j en ninguno de los $f_\phi(a)$. Esto se puede hacer porque el número de las aristas de color i en $\overline{dom(f)}$ es igual al número de aristas de color j en $\overline{ran(f)}$.

Siguiendo este procedimiento para todo $x \in X$, σ define una ϕ -permutación de X que induce un ϕ -automorfismo de Γ que extiende a f_ϕ .

□

Por la clama 1 toda gráfica G es encajada en una subgráfica pobre de Γ . Es fácil ver que una subgráfica de una subgráfica pobre también es pobre entonces por la clama 2 obtenemos la conclusión del teorema.

□

Capítulo 5

Conclusiones

El concepto de extensión de automorfismos parciales en estructuras finitas, es de gran importancia en algunos campos de las matemáticas, tales como la teoría de gráficas, teoría de modelos finitos y teoría de grupos.

Uno de los objetivos del trabajo fué el demostrar que las digráficas finitas tienen la propiedad de extensión para automorfismos parciales (EPPA). En la demostración se utiliza la técnica que Hrushovsky introduce en [13]. A pesar de seguir el mismo procedimiento, la demostración no es trivial puesto que la construcción se adaptó en muchas partes en las que era necesario trabajar con el conjunto de los vecinos de un vértice.

Parte del trabajo consistió en dar un algoritmo para extender una gráfica G a una gráfica k -regular H . Ésto se hizo porque en una parte de la demostración que presentan Herwing-Larcar [9] del teorema de Hrushovsky [13] (las gráficas finitas tienen la propiedad EPPA), resulta más fácil si la gráfica original es k -regular. La ventaja del algoritmo que se presenta en este trabajo sobre el de Milliet [14] es que no es necesaria la suposición de que el grado máximo de la gráfica G es impar y además se puede generalizar para extender una gráfica con aristas coloreadas a

una multigráfica k -regular.

Otra parte del trabajo fué el demostrar que las gráficas con aristas coloreadas tienen un tipo de extensión de automorfismos parciales, para ello se adaptó la técnica de Herwing-Lascar, pero se introduce el concepto de gráfica general para facilitar la demostración y, además se construye una variante de la gráfica Γ presentada por ellos.

Gracias a los trabajos de Herwing, Lascar, Hodkinson, Otto, et al., se puede apreciar que los problemas de extensión de automorfismos parciales se atacan de mejor manera si se trabaja con estructuras con lenguaje relacional finito. De esta manera se obtienen resultados más generales que pueden aplicarse a problemas de este tipo en la clase de las gráficas, de esta manera Herwing demostró que las hipergráficas tienen la propiedad EPPA [7]. Pero también, es interesante buscar demostraciones puramente combinatorias, que fue lo que se hizo en la demostración para gráficas con aristas coloreadas.

Un problema que queda pendiente de esta tesis es el de demostrar que el teorema 5 es válido si la multigráfica H se sustituye por una gráfica simple. Además se podría intentar una variante del problema considerando "casi" automorfismos parciales.

Apéndice A

Ejemplos

A.1. Gráficas $\Gamma(X, k)$ y $\Gamma(X, k, 1)$

Se realizó un programa en Maple9[©] para dibujar gráficas $\Gamma(X, k)$ y gráficas $\Gamma(X, k, 1)$, donde $X = \{1, \dots, n\}$ es el conjunto de los enteros de uno hasta n , y k es un número entero positivo (ver la sección 4.3 para una descripción detallada de estas gráficas). El código del programa se presenta en la sección B.1 del Apéndice B.

La figura A.1 muestra la gráfica $\Gamma(X, 3)$ con $X = \{1, \dots, 5\}$, esta gráfica es 9-regular, el número de vértices es $n = 10$ y el número de aristas es $m = 45$.

La figura A.2 muestra la gráfica $\Gamma(X, 3, 1)$ con $X = \{1, \dots, 5\}$, esta gráfica es 3-regular, tiene diez vértices y quince aristas. Esta gráfica es conocida como la gráfica de Petersen.

A.2. Extensión de Automorfismos Parciales

Se realizó un programa en Maple9[©] (expanding.mw) que hace lo siguiente: Dada una gráfica G con grado máximo k (impar), encuentra una gráfica H k -regular con m aristas que contiene a G como subgráfica inducida. Además, dado



Figura A.1: Gráfica $\Gamma(X, 3)$ con $X = \{1, \dots, 5\}$

un conjunto de automorfismos parciales de G el programa calcula los automorfismos (totales) en la gráfica $\Gamma(X, k, 1)$ tales que extienden a los automorfismos parciales de G , siendo X el conjunto de las aristas de la gráfica H .

Como datos de entrada se da una gráfica G , y los dominios y rangos de un conjunto de isomorfismos entre subgráficas inducidas de G . Como salida el programa entrega una gráfica H k -regular y un conjunto de permutaciones que inducen automorfismos en la gráfica Γ y que extienden los automorfismos parciales.

La figura A.3 muestra una gráfica G con cuatro vértices, cinco aristas y con grado máximo igual a tres, esta gráfica se utilizará como dato de entrada al programa “expanding” (el código del programa se presenta en la sección B.1 del Apéndice B).

Como automorfismos parciales se consideran los isomorfismos f_1 y f_2 entre subgráficas inducidas de G que se muestran en la figura A.4. El isomorfismo f_1



Figura A.2: Gráfica $\Gamma(X, 3.1)$ con $X = \{1, \dots, 5\}$

tiene como dominio $dom(f_1) = \{1, 2\}$ y como rango $ran(f_1) = \{2, 3\}$ y el isomorfismo f_2 tiene $dom(f_2) = \{2, 3\}$ y $ran(f_2) = \{2, 4\}$.

La figura A.5 muestra la gráfica 3-regular H obtenida por el programa. Es claro que esta gráfica contiene a G como subgráfica inducida. La gráfica H tiene ocho vértices y doce aristas.

Los conjuntos de aristas incidentes a cada uno de los vértices son los siguientes:

$$Y(1) = \{e_3, e_5, e_6\}$$

$$Y(2) = \{e_2, e_3, e_4\}$$

$$Y(3) = \{e_1, e_4, e_7\}$$

$$Y(4) = \{e_1, e_2, e_8\}$$

$$Y(5) = \{e_5, e_9, e_{12}\}$$

$$Y(6) = \{e_6, e_9, e_{10}\}$$

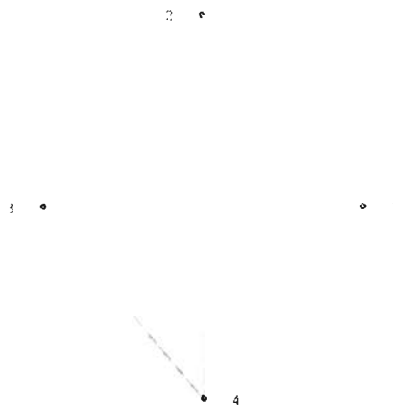


Figura A.3: Gráfica G con grado máximo $k = 3$

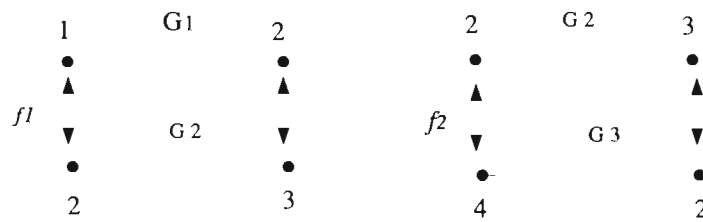


Figura A.4: Isomorfismos f_1 y f_2 entre subgráficas inducidas de G

$$Y(7) = \{e_7, e_{10}, e_{11}\}$$

$$Y(8) = \{e_8, e_{11}, e_{12}\}$$

Los isomorfismos f_1 y f_2 en la imagen de G en Γ quedan de la siguiente manera

$$f_1: Y(1) = \{e_3, e_5, e_6\} - Y(2) = \{e_2, e_3, e_4\}$$

$$Y(2) = \{e_2, e_3, e_4\} - Y(3) = \{e_1, e_4, e_7\}$$

$$f_2: Y(3) = \{e_1, e_4, e_7\} - Y(2) = \{e_2, e_3, e_4\}$$

$$Y(2) = \{e_2, e_3, e_4\} - Y(4) = \{e_1, e_2, e_8\}$$



Figura A.5: Gráfica $H \supseteq G$, 3 - regular

Las permutaciones que obtiene el programa en notación cíclica son:

$$f1^* = (e1\ e5\ e2)\ (e3\ e4\ e7\ e6)$$

$$f2^* = (e1\ e3\ e8\ e7\ e4\ e2)$$

Estas permutaciones extienden a los automorfismos parciales f_1 y f_2 e inducen un automorfismo en la gráfica $\Gamma(X, 3, 1)$ que se muestra en la figura A.6. El conjunto X está formado por el conjunto de las aristas de G , más el número de aristas de la gráfica H que son necesarias para que los vértices de G tengan grado tres (en total ocho aristas). El número de vértices de la gráfica $\Gamma(X, 3, 1)$ es $n = 56$, el número de aristas es $m = 840$, y tiene grado máximo $\Delta = 30$.

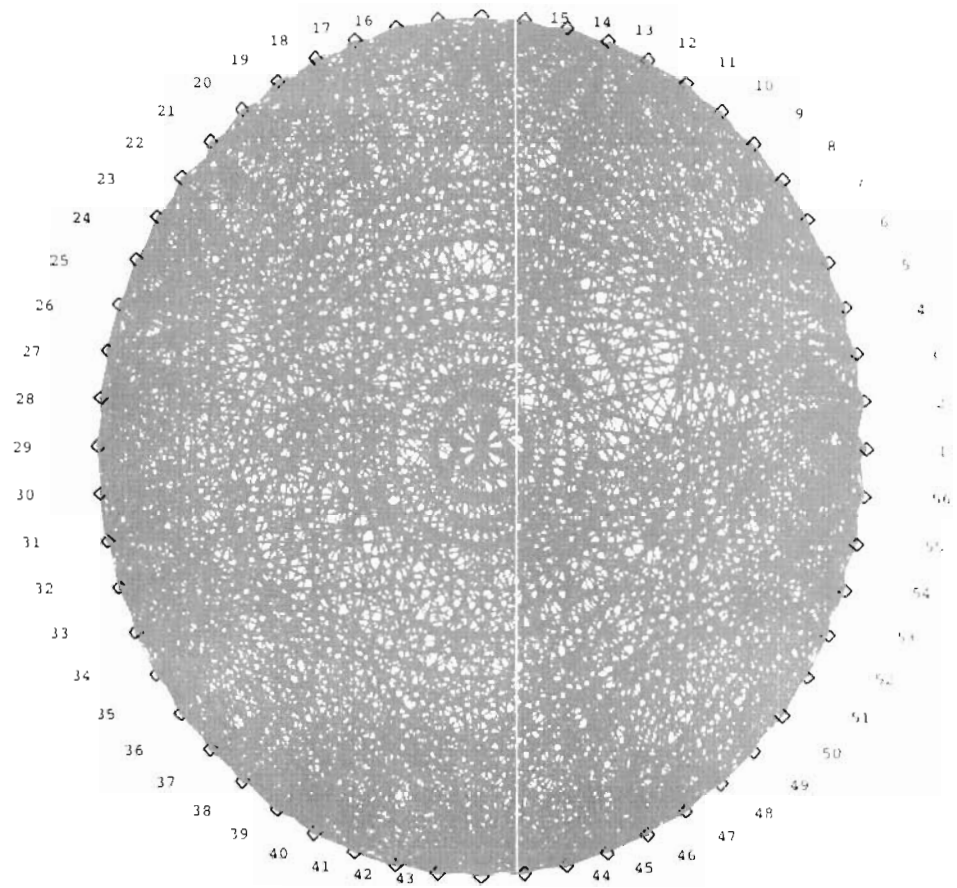


Figura A.6: Gráfica $\Gamma(\{1, \dots, 6\}, 3, 1)$

Apéndice B

Códigos de los programas

Código del programa en Maple9[©] para dibujar gráficas $\Gamma(X,k)$ y gráficas $\Gamma(X,k,1)$.

B.1. Programa para $\Gamma(X,k)$ y $\Gamma(X,k,1)$

```
restart:
#grafoGX1.mw
#programa para construir Gamma(X,k) y Gamma(X,k,1)
with(combinat, choose):
  m:=5; #CONJUNTO X={1,...,5}
  n:=3; #VALOR DE k
#calcula los vertices (subconjuntos de X tamaño k)
vert:=choose(m, n):
numerov:=nops(vert); # numero de vertices
#CALCULA LAS ARISTAS DE G(X,n,1)
  for i from 1 to numerov do; #arreglo para los vertices
    v(i):={op(op(i,vert))};
  end do;
```

```
k:=0:
#ciclo para realizar todas las intersecciones
for i from 1 to numerov do;
  for j from i+1 to numerov do;
    j;
    inter:= v(i) intersect v(j);# interseccion
#numero de elementos en la interseccion
    ninter:=nops(inter);
# si la interseccion es diferente del vacio
    if ninter <> 0 then
      # si la interseccion es igual a uno forma un arista
#if ninter = 1 then
      k:=k+1;
arista(k):=[v(i),v(j)];#arista como pareja de subconjuntos
aristan(k):={i,j}; #arista como pareja de numeros
      end if;
    end do;
  end do;
  #calculos por formula
#grado maximo del nuevo grafo
  gm:=binomial(n,1)*binomial(m-n,n-1);
  nvertices:=binomial(m,n); #numero de vertices
  naristas:=gm*nvertices/2;
k;          # numero de aristas
#ciclo para formar un arreglo con las aristas
AGREGAR:={}: #para formar las aristas
for j from 1 to k do;
```

```

    AGREGAR:={op(AGREGAR),aristan(j)};
  end do:
AGREGAR:
agregar:=op(AGREGAR): #todas las aristas en un arreglo
with (networks): #paquete para graficas
G := graph( {$1..nvertices},{agregar}): #$.
draw(G);

```

B.2. Programa para extender automorfismos parciales

Código del programa en Maple9[©] que, dada una gráfica G , encuentra una gráfica H k -regular que contiene a G como subgráfica inducida. Además, dados automorfismos parciales f de G , el programa encuentra f^* automorfismos en la gráfica homogénea $\Gamma \supseteq G$ que extienden a f . El programa requiere de varios procedimientos los cuales aparecen en la siguiente sección.

```

restart:
#####
#PROGRAMA USANDO ALGORITMO EN ARTICULO DE MILLIET
#expanding.mw
#usa procedimientos numearista.m,nuevografo.m,gkregular.m
#extensión.m, se encuentran en procedimientos.mw
#INTRODUCIR DATOS DEL GRAFO
  with(networks):
  #Datos de entrada: grafo X
  G := graph( {1,2,3,4},{1,2},{2,3},{3,4},{4,1}}):
#ciclo para diferentes funciones

```



```
numerof:=1: #numero de funciones (ejemplo f_11)
dominio(1):=[1,2]: #elementos del dominio de f_1
rango(1):=[2,3]: #elementos del rango de f_1
#termina el ingreso de los datos
ka:=0;
n:=nops(vertices(G)); # Numero de vertices
valencia:=maxdegree(G); # Grado maximo
ne:=nops(edges(G));
draw(G); #dibuja la grafica G
degreeseq(G);
#Ciclo que checa si tiene grado diferente
for im from 1 to n do;
gradox:=vdegree(im,G):# grado del vertice j (x)
#diferencia entre el grado maximo y deg(x)
dif:=valencia - gradox:
# condicional principal:
#Si algun deg(x) es dif. al grado maximo- construir Y'
if dif <> 0 then
#llama procedimiento para construir gráfica H k regular
read "gkregular.m":
gkregular(G,n);
break; #sale del ciclo
end if; # fin condicional principal
end do:
draw(G); #dibuja el grafo k regular
gm:=maxdegree(G);
#obtiene datos de gráfica G (k regular)
```

```
nvertices:=nops(vertices(G));#num. de vertices
naristas:=nops(edges(G)); #num. de aristas
nverticesn:=nvertices-n; #num. vert. extras
nverticesnf:=gm*n-2*ne;
naristasex:=naristas-ne;
naristasexf:=(gm+1)*(gm*n/2-ne);
n;
aristas:=nops(edges(G));
m:=nops(aristas);
degreeseq(G);
#ciclo para checar las incidencias
for i from 1 to nvertices do;
    iny(i):=incident(i,G);
end do;
#ciclo para iniciar la extensión de isomorfismos
for ci from 1 to numerof do
    Dom:=dominio(ci); #valor del dominio
    Ran:=rango(ci); #valor del rango
    #Llama a procedimiento para
    #encontrar una permutacion que extiende al isomorfismo
    # a un automorfimo
    read "extension.m";
    #procedimiento para llamar a permutacion
    ya:=extension(G,Dom,Ran); #imprime el automorfismo
end do;
```

B.2.1. Procedimientos usados en el programa principal

El programa de la sección anterior requiere de dos procedimientos; uno para construir la gráfica k -regular H ("gkregular.m") y otro para extender los automorfismos parciales de G a automorfismos de $\Gamma \supseteq G$ ("extension.m"). Estos procedimientos se presentan a continuación.

Procedimiento para construir la gráfica k -regular H que contenga a G de grado máximo k (impar) como subgráfica inducida. Este procedimiento requiere del procedimiento "gkregular.m".

```
#Procedimiento para gráfica K-regular
gkregular:=proc(G,nver) #cam 1
local no,gm,nuvcir,n,nvertices,circ:
local pverticen,limite,valmod,i,j,val;
n:=nver:
read "nuevografo.m":
#LLAMA AL PROCEDIMIENTO PARA CREAR GRAFO Y aumentado'
#El procedimieno nuevografo aumenta los vertices y aristas
#necesarios para que todos los vertices de G sean k regulares
#pero no coloca aristas entre los vertices nuevos
nuevografo(G,n);
degreeseq(G);
no:=nops(vertices(G)): #número de vertices del grafo Y
gm:=maxdegree(G); #grado maximo en el nuevo grafo
nuvcir:=no-n: #número de vertices en el circulo
#checa cuando el numero de vert. en el circulo
#es menor al grado maximo
# si es menor se agregan nuevos vertices
```

```
if nuvcir < gm then
n:=no:
  #LLAMA AL PROCEDIMIENTO PARA CREAR NUEVO GRAFO Y'
  nuevografo(G,no);
  degreeseq(G):
  no:=nops(vertices(G)):
  gm:=maxdegree(G);
end if;
#ciclo para formar las aristas
#con los nuevos vertices en el circulo;
#cuando numero de vert. en cir >= grado maximo
nvertices:=no: #numero de vertices
circ:=(gm-1)/2: #valor para conectar los nuevos vertices
pverticen:=n+1: # valor del primer nuevo vertice
limite:=nvertices - circ:#ultimo vertice que se conecta
valmod:=nvertices+1: #valor del modulo
  for i from pverticen to nvertices do;
    for j from 1 to circ do;
      #vertice al que se conecta el vertice i
      val:=(j + i) mod valmod;
      #condicional para vert. mayores al ultimo vert
      if val < j then val:=val + n + 1 end if;
      addedge({i,val},G);
    end do:
  end do:
G; #resultado del procedimiento
end proc:
```

```
#Fin del procedimiento para grafo K regular
save gkregular, "gkregular.m";
```

Procedimiento "nuevografo.m".

```
##PROCEDIMIENTO PARA CONSTRUIR UN GRAFO AUMENTADO ##
#El procedimiento nuevografo aumenta los vertices y aristas
#necesarios para que todos los vertices de G sean k regulares
#pero no coloca aristas entre los vertices nuevos
nuevografo:=proc(G,nv)
  local j,i,gradx,dif,val,valencia,gm:
  local final,no,AGREGAR,k,numvertnu:
  #   nv numero de vertices del grafo
  #   gm grado maximo impar
  valencia:=maxdegree(G): #grado maximo del grafo
  val:=valencia mod 2: #para checar si el gm es par o impar
  if val = 0 then gm:=valencia +1 else gm:=valencia end if;
  #si es par gm se aumenta en 1
  no:=nv: #variable para incrementar el numero de vertices
  #ciclo para agregar los vertices y las aristas que restan
  for j from 1 to nv do;
    gradx:=vdegree(j,G): #grado del vertice j (x)
    dif:=gm-gradx: #diferencia entre el maximo grado y deg(x)
    if dif <> 0 then #si existe diferencia agregar vertices
      final:=no+dif; #número final del ultimo vertice a agregar
      addvertex({$no+1..final},G): #agregar vertices
    #CICLO PARA AGREGAR LAS ARISTAS
    AGREGAR:=[]; #
    for k from 1 to dif do;
```

```

    AGREGAR:=[op(AGREGAR),{j,no+k}];
    end do:
    no:=no+k-1;
    addedge(AGREGAR,G);
    end if
    end do:
    numvertnu:=no-n:
    G; #resultado del procedimiento
    end proc:
## FIN DEL PROCEDIMIENTO (nuevografo) ##
    #salvar el procedimiento en MAPLE
    save nuevografo, "nuevografo.m";

```

Procedimiento "extension.m". Este procedimiento requiere del procedimiento "nuevografo.m".

```

## INICIO DEL PROCEDIMIENTO extension ##
#procedimiento para encontrar permutacion que
#extienda a un isomorfismo dado.
#como datos recibe el dominio y rango de la funcion
extension:=proc(G,Dom,Ran)
local m,nv,n,i,j,k,e,iny,numfun,h,F,RA,nu,nuc,p,compa;
local po,compad,ra,im,dom,nada,a,b,jo,jor,bnu,permutan;
local permuta,permutacion,aristas,pe,compar;
global r,d;
# nv numero de vertices del grafo
# gm grado maximo impar
aristas:=edges(G);
m:=nops(aristas); #numero de aristas

```

```
nv:=nops(vertices(G));          #numero de vertices
n:=nops(incident(1,G));         #Valencia del vertice
  for h from 1 to m do;
e(h):=op(h,aristas);
end do;
F:=Dom;
RA:=Ran;
numfun:=nops(F); # Numero de elementos en la funcion
#incidencias en los vertices de la funcion
for j from 1 to numfun do;
  dom:=incident(op(j,F),G);    #elementos del dominio
  ra:=incident(op(j,RA),G);    #elementos del rango
  #llama al proc. para obtener el numero de la arista
read "numearista.m";
d(j):=numearista(dom);
r(j):=numearista(ra);
end do;
#Ciclo para ubicar la posicion de los elementos
#Ejemplos de la notacion:
#el elemento 1 de X esta en los elem. del dominio 2 y 3
#[1,2,3]
#el elemento 2 de X esta en el elemento 3 del dominio
#[2,0,3]
#el elemento 4 de X esta en ningun elemento del dominio
#[4,0,0]
for i from 1 to m do          #inicio c-1
  nu:=1:
```

```
nuc:=1:
p(1):=0: #posicion para elementos del dominio
p(2):=0:
po(1):=0: # posicion para elementos del rango
po(2):=0:
for j from 1 to numfun do: #inicio c-2
if has (i,d(j)) = true then
#si el elem. i esta en d(j)
#el resultado lado izquierdo es "true"
p(nu):=j;#El elemento i esta en el elemento j del dominio
nu:=nu+1;
end if: #fin con-1
if has (i,r(j)) = true then
po(nuc):=j; #elemento i esta en el elemento j del rango
nuc:=nuc+1;
end if #fin con-2
end do: #fin c-2
#arreglo para acomodar elemento y su pos:con en el dominio
a(i):=[i,p(1),p(2)];
#arreglo para acomodar elemento y su pos:con en el rango
b(i):=[i,po(1),po(2)];
end do: #fin c-1
# Fin del ciclo
# ciclo para formar las permutaciones siguiendo -
# el algoritmo en la demostracion de MILLIET
for i from 1 to m do: #inicio c-4
p(1):=op(2,a(i));#obtiene las posiciones
```



```
#del elemento i en el dominio
p(2):=op(3,a(i));
for j from 1 to m-i+1 do;           #inicio c-5
# obtiene las posiciones del elemento i en el rango
  po(1):=op(2,b(j));
  po(2):=op(3,b(j));
#Si las posiciones en el dominio y en rango son iguales
#se toma como permutacion
if p(1) = po(1) and p(2) = po(2) then  #inicio con-3
  pe(i):=[op(1,a(i)),op(1,b(j))];
  #reenumerar los elementos del rango para no repetir
  k:=1:
  for jo from 1 to m-i+1 do #inicio c-6
    if j = jo then           #inicio con-4
      nada:=1:
      else
        bnu(k):=b(jo):
        k:=k+1:
      end if           #fin con-4
    end do:           #fin c-6
    for jor from 1 to k do:           #inicio c-7
      b(jor):=bnu(jor):
    end do:           #fin c-7
    break;
  end if;           #fin con-3
end do:           #fin c-5
end do:           #fin c-4
```

```
with(group):
#ACOMODAR PERMUTACION EN FORMA DE LISTA
permuta:=[]:
  for i from 1 to m do;          #inicio c-8
    permuta:=[op(permuta),op(2,pe(i))] end do: #fin c-8
  #convertir permutacion en notacion ciclica;
  permutacion:=convert(permuta,'disjycyc')
permutacion; #resultado del procedimiento
end proc:
##      FIN DEL PROCEDIMIENTO (extension)  ##
save extension, "extension.m";
```

Procedimiento "numearista.m".

```
#subprocedimiento usado en procedimiento extension
#Procedimiento para extraer el numero de un arista
#se requiere porque Maple9 da como resultado
#al pedir las aristas incidentes a un vértice
# la cadena `e#..'
#necesitamos únicamente el número
#como daos recibe un conjunto de aristas
#como salida entrega el número de estas aristas
# ejemplo e23 se convierte en 23
numearista:=proc(D)
#D = [e12,e3,e234]
local aris,i,elem,dom,ne,nel,nely,que,numdom;
  aris:=[]:
  dom:=D:
  numdom:=nops(dom):#numero de elementos en dominio
```

```
for i from 1 to numdom do;
elem:=op(i,dom);
#ejemplo: ``que`` convierte e23 en un string "e23"
que:=convert(elem,string);
#se extraen caracteres a partir del seg. caracter ("23")
ne:=que[2..-1];
#conv. el string "23" en numero base 10 (23)
nel:=convert(ne,decimal,10);
aris:={op(aris),nel}; # acomoda en su posicion
    end do;
aris;
end proc;
save numearista, "numearista.m";
```

Bibliografía

- [1] ANDRÉKA, H., HODKINSON, I., AND NÉMETI, I. Finite algebras of relations are representable on finite sets. *Journal of Symbolic Logic* 64,1 (1999), 243–267.
- [2] AUINGER, K., AND STEINBERG, B. On the extension problem for partial permutations. *Proc. Amer. Math. Soc.* 131 (2003), 2693–2703.
- [3] BONDY, J. A., AND MURTY, U. S. R. *Graph Theory with Applications*. American Elsevier Publishing, New York, 1975.
- [4] CAMERON, P. J. *Oligomorphic permutation groups*. London Math. Soc. Lecture Notes 152, Cambridge University Press, 1990.
- [5] FRAÏSSÉ, R. Sur l'extension aux relations de quelques propriétés des ordres. *Ann. Sci. l'École Norm. Sup.* 71 (1954), 361–388.
- [6] HARARY, F. *Graph Theory*. Addison-Wesley, Reading, MA, 1969.
- [7] HERWING, B. Extending partial isomorphism on finite structures. *Combinatorica* 15 (1995), 365–371.
- [8] HERWING, B. Extending partial isomorphism for the small index property of many ω -categorical structures. *Isr. J. Math* 107 (1998), 93–123.

- [9] HERWING, B., AND LASCAR, D. Extending partial automorphism and the profinite topology on the free groups. *Trans. Amer. Math. Soc.* 352 (2000), 1985–2021.
- [10] HODGES, HODKINSON, LASCAR, AND SHELAH. The small index property for ω -stable, ω -categorical structures and for the random graph. *Journal of the LMS.* 48 (1993), 204–218.
- [11] HODKINSON, I. Loosely guarded fragment of first-order logic has the finite model property. *Studia Logica* 70 (2002), 205–240.
- [12] HODKINSON, I., AND OTTO, M. Finite conformal hypergraphs covers, with two applications. *Bull. Symbolic Logic* 9 (2003), 387–405.
- [13] HRUSHOVSKI, E. Extending partial isomorphisms of graphs. *Combinatorica* 12 (1992), 411–416.
- [14] MILLIET, C. Extending partial isomorphisms of finite graphs. Séminaire de Master 2ème année (2004), <http://igd.univ-lyon1.fr/altinel/milliet.pdf>.
- [15] RIBES, L., AND ZALESKIÏ, P. A. On the profinite topology on a free group. *Bull. London Math. Soc.* 25 (1993), 37–43.
- [16] SOLECKI, S. Extending partial isometries. <http://www.math.uiuc.edu/ssolecki/papers/isometry4.pdf>.
- [17] TRUSS, J. K. Generic automorphisms of homogeneous structures. *Proceedings of the LMS (Ser. III)* 65 (1992), 121–141.