



Universidad Autónoma de San Luis Potosí.



Facultad de Ciencias

Sincronización Estable en Redes de Mapeos  
Acoplados

TESIS

Que para obtener el Grado de

Maestro en Ciencias Aplicadas

PRESENTA:

Beatriz Carely Luna Olivera

ASESOR:

Dr. Edgardo Ugalde Saldaña

## **Agradecimientos**

*Un agradecimiento a CONACYT por el apoyo recibido.  
Al IICO y al IF de la UASLP.  
A mi asesor de tesis.  
A mis maestros y sinodales.  
A mi familia.  
Y a mis amigos.*

# Índice general

<b>1. Motivación</b>	<b>2</b>
<b>2. Redes de mapeos</b>	<b>5</b>
<b>3. Estabilidad</b>	<b>12</b>
3.1. Antecedentes . . . . .	12
3.2. Análisis de estabilidad del modo sincronizado . . . . .	15
3.3. Aplicación a redes homogéneas cíclicas . . . . .	20
3.4. Ejemplos . . . . .	24
<b>4. Comentarios Finales</b>	<b>30</b>
<b>A. Prueba del lema 1</b>	<b>32</b>
<b>B. Comentarios a la bibliografía</b>	<b>34</b>

# Capítulo 1

## Motivación

Muchos sistemas físicos y biológicos se suelen analizar descomponiéndolos en sub-sistemas en interacción. Un ejemplo claro de esto es el cerebro humano, en donde las neuronas individuales juegan el papel de sub-sistemas, y su acoplamiento se hace por medio de las conexiones sinápticas [12].

En física y matemáticas han sido extensivamente estudiadas las llamadas redes de mapeos acoplados, las que originalmente fueron introducidas como versiones discretizadas de ecuaciones de reacción-difusión, pero que naturalmente se prestan para modelar sistemas formados por sub-sistemas idénticos que se acoplan difusivamente [9].

Por otro lado, las redes genómicas y metabólicas son conceptualizaciones en donde los sub-sistemas son tipos moleculares que interaccionan bioquímicamente a través de sus productos [14].

Un ejemplo sencillo de este tipo de análisis y su modelización es el referente al movimiento de cuadrúpedos. En este caso podemos agrupar las piernas por pares: las piernas delanteras forman un par y las traseras otro. El par delantero se mueve primero y en sincronía, formando así un sub-sistema, mientras que el par trasero hace lo mismo pero con un cierto desfase, formando así un segundo subsistema. El grafo de la figura (1.1) es una esquematización de este sistema.

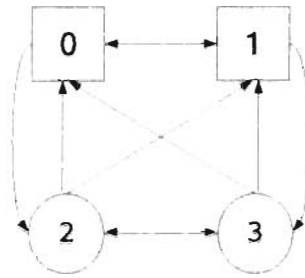


Figura 1.1: Modelo del movimiento de un cuadrúpedo. Los nodos representan cada una de las piernas, y las flechas la interacción entre ellas. Nodos con figuras iguales son elementos de un mismo sub-sistema.

En las redes de mapeos acoplados se han considerado varias maneras de parametrizar el estado de cada nodo o celda, y dos formas de parametrizar el tiempo de evolución de estos estados. Según estas parametrizaciones, sean continuas o discretas tenemos:

	Autómatas celulares	Mapeos acoplados	Ecuaciones Diferenciales Ordinarias acopladas
Variable de estado	discreta	continua	continua
Tiempo	discreto	discreto	continuo

En este trabajo nos ocuparemos del caso de los mapeos acoplados, es decir, las variables de estado van a tomar valores en un conjunto continuo (típicamente un intervalo compacto), mientras que el tiempo se incrementará de manera discreta.

Las redes de mapeos acoplados, o latices de mapeos acoplados, son un tema recurrente en la literatura especializada. Baste mencionar que la AMS le dedica a este tema todo un rubro (37L60) en su "Mathematics Subject Classification".

En ésta tesis sólo nos preocuparemos de un aspecto de la fenomenología que presentan estos sistemas, el cual también ha recibido enorme atención desde que fue reconocido por Huygens en 1665. Nos referimos a la sincronización de sistemas acoplados. Abundantes fenómenos de la naturaleza, la ingeniería y la vida

social exhiben una tendencia a operar en sincronía.

En nuestro caso, la sincronización se refiere al hecho de que la evolución de diferentes nodos en la red es idéntica, de modo que los nodos pueden agruparse en clases de nodos que toman siempre el mismo valor en cada tiempo. Esto hace que la dinámica de la red pueda ser descrita por un número de variables mucho menor que el número de nodos.

Retomando el movimiento de los cuadrúpedos, tendríamos dos clases de nodos, la primera formada por las piernas delanteras y la segunda por las traseras. Los elementos en cada clase evolucionan de manera idéntica.

Como antecedentes directos de este trabajo, debemos mencionar las contribuciones de Pecora y coautores [7], Ashwin y coautores [4], así como Rulkov y coautores [5], sobre sincronización de osciladores caóticos. Por otro lado están los trabajos de Golubitsky y coautores [10, 11], sobre las simetrías de la red, en relación con la existencia de patrones de simetría. Estas dos líneas de investigación forman la base de esta tesis, en la cual consideraremos a la vez las simetrías de la red y la estabilidad de los modos sincronizados.

Cabe también mencionar algunos temas relacionados que hemos estudiado durante la preparación de esta tesis.

1. Un estudio de la sincronización usando el Laplaciano [16]. Esta es una alternativa adecuada para cierto tipo de acoplamientos lineales.
2. Sincronización por cúmulos en mapeos acoplados sobre redes regulares de una y dos dimensiones, y sobre árboles y redes aleatorias [1, 2]. Estos son estudios esencialmente numéricos.
3. Modelado de patrones centrales generadores para la locomoción de cuadrúpedos por sistemas de celdas acopladas de ecuaciones diferenciales y su análisis [6].

# Capítulo 2

## Redes de mapeos

Una red es un grafo dirigido  $G$  cuyos vértices representan variables de estado y cuyas aristas representan interacciones entre esas variables.

Formalmente definimos:

- $G = (V, A)$
- $V$  un conjunto de vértices o celdas.
- $A \subseteq V \times V$  un conjunto de flechas o aristas dirigidas, tal que la flecha  $(u, v)$  inicia en el vértice  $u$  y termina en el vértice  $v$ . Se considera que  $\{(v, v) : v \in V\}$  siempre está incluido en  $A$ .

Requerimos que  $G$  sea finito ( $\#V = n$ ), conexo (que para cada par de vértices hay una secuencia de vértices y aristas que nos lleva de uno a otro sin tomar en cuenta la dirección de las flechas) y tal que existe una partición  $P_V$  que divide a  $V$  en clases de equivalencia (Figura 2.1). Digamos que la cardinalidad de  $V$  es igual a  $n$ .

**Definición 1.** El conjunto de entrada de un vértice  $v$ , es la  $m$ -ada ordenada

$$I(v) = (u_1, u_2, \dots, u_m),$$

tal que  $(u_i, v) \in A \forall i = 1, \dots, n$ .  $\dim(I(v)) = m$

**Ejemplo 1.** Suponiendo  $n$  par, en la figura 2.1 el conjunto  $V$  de vértices se parte en dos clases de equivalencia,

$$[0] = \{0, 2, \dots, n-2\}$$

$$[1] = \{1, 3, \dots, n-1\}.$$

Los conjuntos de entrada para cada vértice están dados por:

$$I(0) = (0, n-1), I(i) = (i, i-1)$$

para  $i = 1, \dots, n-1$

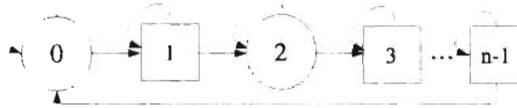


Figura 2.1: Grafo que representa una red de  $n$  vértices con 2 clases de equivalencia.

La partición  $P_V$  debe cumplir con la siguiente propiedad ( $p^*$ ):

Si  $v \in [v'] \Rightarrow \exists \beta_{v,v'} : V \rightarrow V$ , tal que  $\beta \cdot I(v) = I(v')$ , y tal que  $[\beta(u_i)] = [u_i]$

$\forall i = 1, \dots, m$ , donde si  $I(v) = (u_1, \dots, u_m)$ ,  $\beta \cdot I(v) = (\beta(u_1), \dots, \beta(u_m))$

En particular, dos vértices que están en la misma clase de equivalencia tienen la misma dimensión.

Considerando esta estructura podemos definir un mapeo  $F : J^V \rightarrow J^V$  donde  $J \subset \mathbb{R}$  es un compacto.



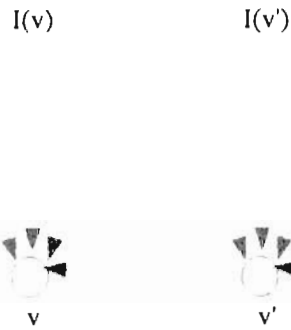


Figura 2.2: Conjuntos de entrada de  $v$  y  $v'$ .

$$(2.1) \quad (F(\mathbf{x}))_v = f_{[v]}(x_{u_1}, \dots, x_{u_m}) \equiv f_{[v]}(\mathbf{x}_{I(v)}).$$

donde  $\mathbf{x} = (x_0, \dots, x_{n-1})$  y para cada clase  $[v] \in P_V$ ,  $f_{[v]} : J^{dim(I(v))} \rightarrow J$  es un mapeo al menos dos veces diferenciable.

Dado que  $dim(I(v)) = dim(I(v'))$  para  $v \in [v']$ ,  $f_{[v]}$  está bien definida.

**Definición 2.** Definimos una red de celdas acopladas como el sistema dinámico

$$(J^V, F : J^V \rightarrow J^V).$$

con  $F$  definida como en la ecuación 2.1.

$J^V$  corresponde al espacio fase y  $F : J^V \rightarrow J^V$  a la transformación del espacio fase en si mismo, que define la evolución del sistema.

**Definición 3.** Usamos el término celda para indicar un mapeo

$$f_{[v]} : J^{dim(I(v))} \rightarrow J.$$

**Definición 4.** Una simetría de la red de celdas acopladas es una biyección  $\gamma: V \rightarrow V$ , tal que

$$\gamma(v) \in [v] \text{ y } \gamma \cdot I(v) = \gamma(I(v)) = I(\gamma(v)) \quad \forall v \in V.$$

donde si  $I(v) = (u_1, \dots, u_m)$ ,  $\gamma \cdot I(v) = (\gamma(u_1), \dots, \gamma(u_m))$

**Ejemplo 2.** En la siguiente figura puede observarse el grafo que define una red de dos celdas acopladas que están en la misma clase de equivalencia (fig.2.3).

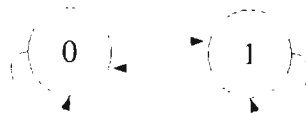


Figura 2.3: Grafo que representa una red de dos celdas acopladas,  $[0] = [1]$ .

En este caso, la permutación  $\sigma(x_0, x_1) = (x_1, x_0)$  (fig. 2.4) es una simetría del sistema.

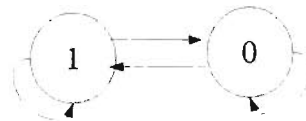


Figura 2.4: Grafo que representa a la red de la figura 2.3 después de una permutación.

Los mapeos para el sistema acoplado están dados por:

$$(F(\mathbf{x}))_0 = f(x_0, x_1),$$

$$(F(\mathbf{x}))_1 = f(x_1, x_0).$$

Sus respectivos conjuntos de entrada son los siguientes:

$$I(0) = (0, 1),$$

$$I(1) = (1, 0).$$

De manera que podemos construir una biyección de  $I(0)$  en  $I(1)$ .

**Definición 5. Polidiagonal**

Sea  $(J^V, F : J^V \rightarrow J^V)$  una red de celdas acopladas.

Se define la polidiagonal como:

$$\Delta = \{ \mathbf{x} \in J^V : \text{si } v \in [v'] \Rightarrow x_v = x_{v'} \}.$$

Denotamos  $d = \dim \Delta$ .

**Ejemplo 3.** Consideremos la red de la figura 2.5. Podemos observar dos clases de equivalencia.

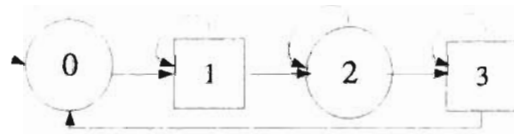


Figura 2.5:  $[0] = [2], [1] = [3]$

En este caso  $\Delta = \{ \mathbf{x} \in J^4 : \mathbf{x} = (x_0, x_1, x_0, x_1) \}$  y  $d = 2$ .

Entonces, la polidiagonal es el conjunto de configuraciones donde todos los vértices equivalentes tienen variables de estado con el mismo valor. En seguida vamos a probar que la polidiagonal es invariante de la dinámica, es decir, que si en un momento dado todos los vértices equivalentes tienen el mismo valor, entonces tendrán el mismo valor en el instante siguiente.

**Proposición 1.**  $F(\Delta) \subset \Delta$ .

*Demostración.* Tomamos  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \Delta$ ,

$$F(\mathbf{x}) = ((F(\mathbf{x}))_1, (F(\mathbf{x}))_2, \dots, (F(\mathbf{x}))_n) = (f_{[1]}(\mathbf{x}_{I(1)}), f_{[2]}(\mathbf{x}_{I(2)}), \dots, f_{[n]}(\mathbf{x}_{I(n)})).$$

Hay que probar que:  $f_{[v]}(\mathbf{x}_{I(v)}) = f_{[v']}(\mathbf{x}_{I(v')})$  si  $v \in [v']$ .

Como  $\mathbf{x} \in \Delta$ ,  $x_v = x_{v'}$  si  $v \in [v']$ , así que  $[v] = [v']$  y, por la propiedad  $(p^*)$   
 $\mathbf{x}_{I(v)} = \mathbf{x}_{I(v')}$ .  
 Entonces,  $f_{[v]}(\mathbf{x}_{I(v)}) = f_{[v]}(\mathbf{x}_{I(v')}) = f_{v'}(\mathbf{x}_{I(v')})$ .

□

**Definición 6.** Una red de celdas acopladas  $(J^V, F : J^V \rightarrow J^V)$  es homogénea si y sólo si  $P_V = \{V\}$  (Figura 2.6).

Observaciones:

- Una red es homogénea si y sólo si tiene solamente una clase de equivalencia  $[v]$ .
- En terminos de  $f_{v'}$ , en una red homogénea se cumple que  $f_v = f_u \forall v, u \in V$ .
- $d = 1$  para el caso de las redes homogéneas.

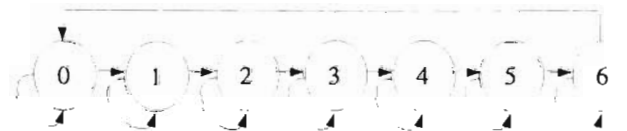


Figura 2.6: Red homogénea,  $P_V = \{V\}$ ,  $n = 7$ ,  $\dim(I(v)) = 2$

**Definición 7.** Sea  $F : J^V \rightarrow J^V$ . La órbita de un punto  $\mathbf{x}_v^0 \in J^V$  bajo  $F$ , es la secuencia de puntos  $\{\mathbf{x}_v^t\}_0^\infty$ , tal que  $\mathbf{x}_v^{t+1} = F(\mathbf{x}_v^t)$ .

**Definición 8.** Decimos que una red de celdas acopladas está sincronizada si para  $u \in [v]$ ,  $x_u^t = x_v^t \forall t \geq 0$ .

**Definición 9.** Decimos que una red de celdas acopladas está sincronizada de manera exacta si  $\forall u, v \in V$ ,  $x_v^t = x_u^t \forall t \geq 0$ .

En el caso de las redes homogéneas sincronización coincide con sincronización exacta, debido a que tenemos una sola clase de equivalencia.

Como vimos, una simetría es una permutación de los vértices que preserva clases de equivalencia y transforma conjuntos de entrada en conjuntos de entrada (definición 4 ). Entonces, si consideramos un grupo de simetrías, la órbita de un vértice bajo el grupo determinará una polidiagonal, de esta forma la simetría asegura la existencia de modos sincronizados. Sin embargo, los modos sincronizados pueden existir aún en ausencia de simetrías [10]. Por otro lado, la pura existencia de modos sincronizados, no implica de ninguna manera su estabilidad, es decir, su resistencia a pequeñas perturbaciones. Esto será el motivo del resto de nuestro estudio.

# Capítulo 3

## Estabilidad

### 3.1. Antecedentes

Una red de celdas acopladas tal como la definimos, tiene un conjunto invariante por la evolución, al que llamamos polidiagonal. La polidiagonal debe entenderse como un modo sincronizado del sistema, ya que celdas equivalentes toman el mismo valor en todo instante. Ahora bien, el modo sincronizado es en si un comportamiento atípico, pues requiere que la evolución de diferentes nodos en la red sea idéntica, esta condición puede perderse bajo pequeñas perturbaciones. Entonces, en el caso general, aún cuando la red admita un modo sincronizado, este no será observable. Tal modo se vuelve observable si el conjunto que lo define, la polidiagonal, es estable ante pequeñas perturbaciones fuera de ella.

Cuando se tratan problemas de estabilidad local, es decir, cuando el conjunto invariante es un punto o una órbita periódica, entonces se utiliza el criterio de estabilidad lineal, el cual asegura la estabilidad no-lineal (ver Teorema 5.1, página 150, [15]). Más aún, el teorema de Grobman (demostrado independientemente por Hartman), establece que para un punto fijo (una órbita periódica) que tiene la propiedad de ser hiperbólico(a), la dinámica no-lineal es topológicamente equivalente a su versión linearizada, esto en una vecindad de tal punto (órbita).

En este capítulo proponemos una extensión del teorema “Estabilidad lineal implica estabilidad no-lineal”, para el caso en que el conjunto invariante es la polidiagonal y ya no un punto o una órbita periódica. Cabe hacer notar que un enfoque tradicional para establecer la estabilidad de un subespacio (no necesariamente lineal), es por medio de la construcción de una función de Lyapunov, una aplicación de esta técnica al caso particular de redes de mapeos acoplados se puede encontrar en [13].

Para el caso de redes de ecuaciones diferenciales acopladas, Pecora y coautores [8, 7] han explotado el criterio del máximo exponente de Lyapunov para determinar estabilidad y pérdida de estabilidad de los modos sincronizados. Sin embargo, hay situaciones en las que el hecho de que el máximo exponente de Lyapunov sea negativo no garantiza la estabilidad asintótica del modo sincronizado [3], de modo que este tipo de criterios sólo deben tomarse como indicadores de estabilidad. En [4] Ashwin y coautores hacen un estudio riguroso de la relación “Exponente de Lyapunov-Estabilidad asintótica”. Ahí se prueba que si el mayor de los exponentes transversales a la polidiagonal es negativo, esto para cualquier medida invariante, entonces, la polidiagonal será asintóticamente estable.

En este capítulo presentamos un teorema relacionado con el resultado de Ashwin y coautores, directamente inspirado por el teorema de estabilidad local que enunciamos más adelante. Las siguientes definiciones, así como el teorema 1 se utilizan como en [15].

Consideramos un mapeo  $f : \mathbb{R}^V \rightarrow \mathbb{R}^V$  de clase  $C^2$ .

**Definición 10.** Un punto  $\mathbf{p}$  es un punto fijo de  $f$  si  $f(\mathbf{p}) = \mathbf{p}$ . Es un punto periódico de período mínimo  $k$  si  $f^k(\mathbf{p}) = \mathbf{p}$  pero  $f^j(\mathbf{p}) \neq \mathbf{p}$  para  $0 < j < k$ .

**Definición 11.** Un punto periódico  $\mathbf{p}$  es llamado *Lyapunov estable* si dado cualquier  $\varepsilon > 0$ , existe un  $\delta > 0$  tal que  $|f^j(\mathbf{x}) - f^j(\mathbf{p})| < \varepsilon$  para todo  $|\mathbf{x} - \mathbf{p}| < \delta$  y  $j \geq 0$ .

Un punto periódico  $\mathbf{p}$  es llamado *asintóticamente estable*, o atractor si es Lyapunov estable y hay un  $\delta_0 > 0$  tal que si  $|\mathbf{x} - \mathbf{p}| < \delta_0$ , entonces  $|f^t(\mathbf{x}) - f^t(\mathbf{p})|$  tiende a 0, cuando  $t$  tiende a infinito.

Denotamos  $D_{\mathbf{p}}f = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{p})\right)$ .

**Teorema 1. Estabilidad lineal implica estabilidad no-lineal**

Sea  $\mathbf{p}$  un punto periódico para  $f : \mathbb{R}^V \rightarrow \mathbb{R}^V$  con periodo mínimo  $k$ . Asuma que hay una constante  $0 < \mu < 1$  tal que todos los valores propios  $\lambda$  de  $D_{\mathbf{p}}f^k$  cumplen que  $|\lambda| \leq \mu$ .

1. Entonces hay una norma  $|\cdot|_*$  en  $\mathbb{R}^V$  y una vecindad  $U \subset \mathbb{R}^V$  de  $\mathbf{p}$  tal que para cada condición inicial  $\mathbf{x} \in U$ , la iteración satisface

$$|f^t(\mathbf{x}) - f^t(\mathbf{p})|_* \leq \mu^t |\mathbf{x} - \mathbf{p}|_* \quad \forall t \geq 0$$

2. Para cualquier norma  $|\cdot|'$  en  $\mathbb{R}^V$  existe una vecindad  $U \subset \mathbb{R}^V$  de  $\mathbf{p}$  y una constante  $C \geq 1$  tal que para cualquier condición inicial  $\mathbf{x} \in U$ , la iteración satisface

$$|f^t(\mathbf{x}) - f^t(\mathbf{p})|' \leq C\mu^t |\mathbf{x} - \mathbf{p}|' \quad \forall t \geq 0$$

Ver la prueba en [15], página 151.

**Definición 12.** A la colección de valores propios de una matriz  $A$  la denotaremos  $\text{spec}(A)$  y la llamaremos el espectro de  $A$ .

Con base en este teorema, si tenemos un mapeo  $f : \mathbb{R}^V \rightarrow \mathbb{R}^V$  no lineal, podemos estudiar la estabilidad asintótica de una órbita periódica de  $f$ , analizando los valores propios de  $A = D_{\mathbf{p}}f^k$ .



### 3.2. Análisis de estabilidad del modo sincronizado

Consideramos  $F : J^V \rightarrow J^V$  como se definió en el capítulo anterior y la polidiagonal  $\Delta = \{\mathbf{x} \in J^V : \text{si } v \in [v'] \Rightarrow x_v = x_{v'}\}$ .

**Definición 13.** Decimos que la polidiagonal es asintóticamente estable si  $\exists \delta > 0$  tal que si  $d(\mathbf{x}, \Delta) \leq \delta$ , entonces  $d(F^t(\mathbf{x}), \Delta) \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$ .

Aquí  $d(\mathbf{x}, \Delta) := \inf\{|\mathbf{x} - \mathbf{y}| : \mathbf{y} \in \Delta\}$ ,  $\mathbf{x} \in J^V$ .

Nota: La estabilidad asintótica aquí se define en los mismos terminos que en [15].

Sea  $\Delta$  la polidiagonal y  $\Delta^\perp$  su complemento ortogonal, de modo que

$$J^V \subset \Delta \oplus \Delta^\perp.$$

Entonces, para cada  $\mathbf{x} \in J^V$  existen  $\mathbf{x}_\Delta \in \Delta$  y  $\mathbf{x}_\perp \in \Delta^\perp$ , tales que  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_\Delta + \mathbf{x}_\perp$ . La evolución de la red de celdas acopladas  $F : J^V \rightarrow J^V$ , tal que

$$(F(\mathbf{x}))_v = f_{[v]}(\mathbf{x}_{I(v)}),$$

puede escribirse como:

$$F(\mathbf{x}_\Delta + \mathbf{x}_\perp) = H_{\mathbf{x}_\perp}(\mathbf{x}_\Delta) + G_{\mathbf{x}_\Delta}(\mathbf{x}_\perp),$$

donde  $H_{\mathbf{x}_\perp}(\mathbf{x}_\Delta)$  es la proyección en la polidiagonal del vector  $F(\mathbf{x})$ , es decir,

$$H_{\mathbf{x}_\perp}(\mathbf{x}_\Delta) = P_\Delta F(\mathbf{x}),$$

mientras que  $G_{\mathbf{x}_\Delta}(\mathbf{x}_\perp)$  es el complemento ortogonal de este último. Nótese que, dado que la polidiagonal es  $F$ -invariante, entonces  $G_{\mathbf{x}_\Delta}(0) = 0$ , para todo  $\mathbf{x}_\Delta \in \Delta$ , de modo que  $H_0 : \Delta \rightarrow \Delta$  determina la evolución del modo sincronizado. La estabilidad asintótica del modo sincronizado es equivalente entonces al siguiente hecho:

Existe  $\delta > 0$  tal que si  $|\mathbf{x}_+^0| < \delta$ , entonces  $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}_+^t = 0$ .

Aquí  $\mathbf{x}^0 = \mathbf{x}$  y para cada  $t \geq 0$ ,  $\mathbf{x}^{t+1} = F(\mathbf{x}^t) = F(\mathbf{x}_\Delta^t + \mathbf{x}_+^t)$ , y  $G_{\mathbf{x}_\Delta^t}(\mathbf{x}_+^t) = (Id - P_\Delta)F(\mathbf{x}_\Delta^t + \mathbf{x}_+^t)$ .

Con base en el teorema 1 se puede esperar estabilidad asintótica en el caso en que los Jacobianos  $D_0 G_{\mathbf{x}_\Delta}$  tengan siempre valores propios de norma menor que 1.

**Teorema 2.** Sea  $F : J^V \rightarrow J^V$  de clase  $C^2$ , y  $\Delta \subset J^V$  su polidiagonal. Dada la descomposición  $J^V \subset \Delta \oplus \Delta^\perp$ , definimos para cada  $\mathbf{x}_\Delta \in \Delta$ , el mapeo  $G_{\mathbf{x}_\Delta} : \Delta \rightarrow \Delta^\perp$ , tal que

$$G_{\mathbf{x}_\Delta}(\mathbf{x}_+) = (Id - P_\Delta)F(\mathbf{x}_\Delta + \mathbf{x}_+)$$

donde  $P_\Delta$  es la proyección ortogonal sobre  $\Delta$ . Supongamos que:

1. Existe  $\rho \in (0, 1)$  tal que para cada  $\mathbf{x}_\Delta \in \Delta$ , y para cada  $\lambda \in \text{spec}(D_0 G_{\mathbf{x}_\Delta})$ , tenemos que  $|\lambda| < \rho$ .
2. Todos los Jacobianos  $D_0 G_{\mathbf{x}_\Delta}$ , con  $\mathbf{x}_\Delta \in \Delta$ , comparten una base canónica común  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  de vectores propios generalizados.

Entonces  $\Delta$  es asintóticamente estable.

Comentarios:

- Este teorema se puede formular de manera alternativa para  $\mathbb{R}^V$  donde  $\Delta$  es cualquier subespacio invariante, en ese caso, se tendría que incluir una condición de homogeneidad además de las condiciones ya planteadas.
- En el caso en que los Jacobianos  $D_0 G_{\mathbf{x}_\Delta}$  son invertibles para cada  $\mathbf{x}_\Delta$ , este teorema es un caso particular del teorema 2.12 en [4]. En nuestro caso no

se requiere esa invertibilidad y tampoco se hace referencia a los exponentes de Lyapunov. Además nuestra prueba usa sólo argumentos elementales. De hecho, es una adaptación-generalización de la prueba del teorema “Estabilidad lineal implica estabilidad no-lineal”, tal como se presenta en [15] página 151.

- Con base canónica común nos referimos a que

$\exists \{v_{1,1}, v_{1,2}, \dots, v_{1,n_1}, v_{2,1}, v_{2,2}, \dots, v_{2,n_2}, \dots, v_{m,1}, \dots, v_{m,n_m}\}$  base de  $\mathbb{R}^V$   $d$   
 $\forall \mathbf{x}_\Delta \in \Delta$  tal que  $\text{spec}(D_0 G_{\mathbf{x}_\Delta}) = \{\lambda_{\mathbf{x}_\Delta}^{(1)}, \dots, \lambda_{\mathbf{x}_\Delta}^{(m)}\}$  y el subespacio propio generalizado de  $\lambda_{\mathbf{x}_\Delta}^{(i)} = \text{span}\{v_{i,1}, \dots, v_{i,n_i}\}$ . Donde además se cumple que

$$(D_0 G_{\mathbf{x}_\Delta})v_{ij} = \begin{cases} v_{i,j-1} + \lambda_{\mathbf{x}_\Delta}^{(i)} v_{i,j} & j > 1 \\ \lambda_{\mathbf{x}_\Delta}^{(i)} v_{i,1} & j = 1. \end{cases}$$

Esta condición es necesaria, porque el hecho de que  $\max |\lambda| < 1$ , para dos matrices  $A$  y  $B$  no garantiza que  $\max(\text{spec}(AB)) < 1$ , a menos que tengan una base canónica común. Esto lo demuestra el siguiente ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_A & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & \lambda_B \end{pmatrix}.$$

Se observa que  $\text{spec}(A) = \lambda_A$  y  $\text{spec}(B) = \lambda_B$ , podemos tomar  $|\lambda_A|, |\lambda_B| < 1$ .

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & \lambda_B \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

por lo que  $\text{spec}(AB) = 1$ .

- Si hay una simetría  $\gamma^*$  con  $n - d$  valores propios diferentes en  $\mathbb{C}$  tal que  $\gamma^* D_0 G_{\mathbf{x}_\Delta} = D_0 G_{\mathbf{x}_\Delta} \gamma^* \forall \mathbf{x}_\Delta$ , entonces todos los Jacobianos  $D_0 G_{\mathbf{x}_\Delta}$  comparten una base canónica común. Es por esto que en las redes de celdas acopladas con simetrías, la condición 2 se satisface de forma natural. Será de utilidad

recordar esto en la sección siguiente, donde de manera más específica se trabaja con un grupo de simetrías.

Requerimos algunos lemas antes de realizar la prueba del teorema.

**Lema 1.** *Dado  $\eta > \rho$  existe una norma adaptada  $|\cdot|_*$  en  $\Delta^+$ , tal que para toda secuencia  $\mathbf{x}_\Delta^{i_1}, \mathbf{x}_\Delta^{i_2}, \dots, \mathbf{x}_\Delta^{i_n} \subset \Delta$ , tenemos*

$$\left| \prod_{k=1}^n D_0 G_{\mathbf{x}_\Delta^{i_k}}(\mathbf{x}_\perp) \right|_* \leq \eta^n |\mathbf{x}_\perp|_*$$

para todo  $\mathbf{x}_\perp \in \Delta^+$ .

### Idea de la prueba

Este lema se prueba usando fuertemente el hecho de que hay una base común de vectores propios generalizados (condición 2), y usando también que los espectros de los Jacobianos están uniformemente acotados por  $\rho$  (condición 1). Primero se prueba que para  $\eta > \rho$  dado, existe  $n_0$  tal que para toda secuencia  $\mathbf{x}_\Delta^{i_1}, \mathbf{x}_\Delta^{i_2}, \dots, \mathbf{x}_\Delta^{i_n} \subset \Delta$ , con  $n \geq n_0$ , tenemos

$$\left| \prod_{k=1}^n D_0 G_{\mathbf{x}_\Delta^{i_k}}(\mathbf{x}_\perp) \right| \leq \eta^n |\mathbf{x}_\perp|$$

para todo  $\mathbf{x}_\perp \in \Delta^+$ . Enseguida se define

$$|\mathbf{x}_\perp|_* = \sum_{k=1}^{n_0} \eta^{-k} \left( \max_{\mathbf{x}_\Delta^j, j=1, \dots, k} \left| \prod_{j=1}^k D_0 G_{\mathbf{x}_\Delta^j}(\mathbf{x}_\perp) \right| \right).$$

Y resulta que esta métrica satisface la tesis del lema. Nótese que el máximo entre parentesis se refiere a todas las secuencias en  $\Delta^k$ , el cual es un conjunto compacto.

Comentario:

- La compacidad de  $\Delta$  permite escoger, para todo  $\eta \in (\rho, 1)$ , donde  $\rho = \max_{\mathbf{x}_\Delta \in J}(\max(|\text{spec}(D_0 G_{\mathbf{x}_\Delta})|)) < 1$ , un mismo  $n_0$  tal que

$$\left| \prod_{k=1}^n D_0 G_{\mathbf{x}_\Delta^k} \mathbf{x}_\perp \right| \leq \eta^n |\mathbf{x}_\perp| \quad \forall n \geq n_0.$$

**Lema 2.** Para cada  $\mathbf{x}_\Delta \in \Delta$  definimos el mapeo  $g_{\mathbf{x}_\Delta} : \Delta^\perp \rightarrow \Delta^\perp$  tal que

$$g_{\mathbf{x}_\Delta}(\mathbf{x}_\perp) := G_{\mathbf{x}_\Delta}(\mathbf{x}_\perp) - D_0 G_{\mathbf{x}_\Delta}(\mathbf{x}_\perp).$$

Dado  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que para todo  $\mathbf{x}_\Delta \in \Delta$ . Tenemos que

$$|g_{\mathbf{x}_\Delta}(\mathbf{x}_\perp)|_* \leq \varepsilon |\mathbf{x}_\perp|_*, \text{ para todo } \mathbf{x}_\perp \in \Delta^\perp \text{ tal que } |\mathbf{x}_\perp| < \delta.$$

*Demostración.* Aquí se usa el hecho de que  $F$  es de clase  $C^2$ . Nótese que la derivada de  $g_{\mathbf{x}_\Delta}$  es 0 para todo  $\mathbf{x}_\Delta$ , entonces

$$\frac{|g_{\mathbf{x}_\Delta}(\mathbf{x}_\perp)|_*}{|\mathbf{x}_\perp|_*} \rightarrow 0, \text{ cuando } |\mathbf{x}_\perp| \rightarrow 0.$$

La continuidad de la segunda derivada y el hecho de que  $\Delta$  es compacto, aseguran que esta convergencia sea uniforme, y entonces podemos encontrar un mismo  $\delta$  para  $\varepsilon > 0$  dado y  $\forall \mathbf{x}_\Delta \in \Delta$ .  $\square$

*Demostración. (Teorema 2)*

Sea  $\mathbf{x}^0 = \mathbf{x}_\Delta^0 \oplus \mathbf{x}_\perp^0$ . Para  $\eta \in (\rho, 1)$  definimos la norma adaptada  $|\cdot|_*$ , como en el Lema 2. Sea  $\varepsilon > 0$  arbitrario.

Ahora, para cada  $t \geq 0$  tenemos que

$$\mathbf{x}_\perp^{t+1} = G_{\mathbf{x}_\Delta^t}(\mathbf{x}_\perp^t) := D_0 G_{\mathbf{x}_\Delta^t}(\mathbf{x}_\perp^t) + g_{\mathbf{x}_\Delta^t}(\mathbf{x}_\perp^t),$$

de modo que iterando tenemos,

$$\mathbf{x}_\perp^{t+1} = \left( \prod_{k=0}^t D_0 G_{\mathbf{x}_\Delta^k} \right) \mathbf{x}_\perp^0 + \sum_{s=1}^t \left( \prod_{k=0}^{s-1} D_0 G_{\mathbf{x}_\Delta^k} \right) g_{\mathbf{x}_\Delta^{t-s}}(\mathbf{x}_\perp^{t-s}) + g_{\mathbf{x}_\Delta^t}(\mathbf{x}_\perp^t).$$

Sea  $\varepsilon > 0$ , por el momento arbitrario, supongamos que para todo  $0 \leq s \leq t$  se cumple que  $|\mathbf{x}_\perp^s|_* < \delta$ , de modo que, por el Lema 2,

$$|g_{\mathbf{x}_\perp}(\mathbf{x}^s)|_* < \varepsilon |\mathbf{x}_\perp^s|_*.$$

Entonces, usando la desigualdad del triángulo y el Lema 1 tenemos,

$$|\mathbf{x}_\perp^{t+1}|_* \leq \eta^{t+1} |\mathbf{x}_\perp^0|_* + \varepsilon \sum_{s=0}^t \eta^s |\mathbf{x}_\perp^{t-s}|_*,$$

de manera equivalente

$$\eta^{-(t+1)} |\mathbf{x}_\perp^{t+1}|_* \leq |\mathbf{x}_\perp^0|_* + \left(\frac{\varepsilon}{\eta}\right) \sum_{s=0}^t \eta^{-(t-s)} |\mathbf{x}_\perp^{t-s}|_*.$$

Si definimos  $\zeta_0 = |\mathbf{x}_\perp^0|_*$  y recursivamente  $\zeta_s = (1 + \frac{\varepsilon}{\eta})\zeta_{s-1}$ , para  $s = 1, \dots, t+1$ , entonces tenemos que  $\zeta_s \geq \eta^{-s} |\mathbf{x}_\perp^s|_*$  para todo  $s = 0, \dots, t+1$ . Además,  $\zeta_s$  se calcula fácilmente y tenemos también que  $\zeta_s = (1 + \frac{\varepsilon}{\eta})^s \zeta_0$ , de modo que  $\eta^{-(t+1)} |\mathbf{x}_\perp^{t+1}|_* \leq (1 + \frac{\varepsilon}{\eta})^{t+1} |\mathbf{x}_\perp^0|_*$ .

Si desde el principio escogemos  $\varepsilon$  tal que  $\eta(1 + \frac{\varepsilon}{\eta}) = \eta + \varepsilon < 1$ , entonces se cumple que

- $|\mathbf{x}_\perp^{t+1}|_* < |\mathbf{x}_\perp^0|_* < \delta$ ,
- para  $\xi := \eta + \varepsilon < 1$  y para todo  $t \geq 0$  tenemos que  $|\mathbf{x}_\perp^{t+1}|_* \leq \xi^{t+1} |\mathbf{x}_\perp^0|_*$ , de donde

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}_\perp^t = 0.$$

□

### 3.3. Aplicación a redes homogéneas cíclicas

Recordemos que una red homogénea es aquella en que todos los vértices son equivalentes, es decir, la partición consiste en un solo conjunto que es  $\{V\}$ . Lun-

que una red homogénea no necesariamente admite un grupo de simetrías, consideremos aquí solo casos en donde sí lo admite.

Notemos que para las redes homogéneas, la polidiagonal es el conjunto  $\Delta := \{\mathbf{x} \in J^V : \mathbf{x}_u = \mathbf{x}_v, \forall u, v \in V\}$  de modo que  $\Delta^\perp$  es de dimensión  $n - 1$ .

Para cada  $\gamma$  en el grupo de simetrías de la red, la transformación inducida  $\gamma^* : J^V \rightarrow J^V$  tal que  $\gamma^*(x)_v = x_{\gamma(v)}$ , conmuta con los Jacobianos  $D_0 G_{x_\Delta}$ , para todo  $x_\Delta \in \Delta$ . Si además  $\gamma^*$ , que en la base natural de  $\mathbb{R}^V$  es una matriz permutación, tiene  $n = \#V$  valores propios complejos diferentes, entonces la condición 3 del teorema 2 se satisface automáticamente.

En esta sección vamos a revisar varios ejemplos concretos de redes homogéneas con simetrías que cumplen esta propiedad, y vamos a analizar la estabilidad asintótica de la polidiagonal en términos del teorema 2.

Estudiaremos la aplicación del teorema en redes cíclicas (Figura 3.1).

De aquí en adelante  $V \equiv \{0, 1, \dots, n - 1\}$ .

**Definición 14.** Una red homogénea es cíclica de rango  $m$  si

$$I(v) = (v, (v - (m - 1))_{(mod\ n)}, (v - (m - 2))_{(mod\ n)}, \dots, (v - (m - (m - 1)))_{(mod\ n)})$$

$\forall v \in V$ . Aquí  $dim(I(v)) = m$ .

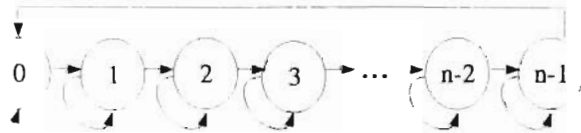


Figura 3.1: Red homogénea cíclica,  $\#V = n, m = 2$

$F$  es consistente con la red cíclica si  $(F(\mathbf{x}))_v = f_{[v]}(\mathbf{x}_{I(v)})$ .

El Jacobiano  $J_{\mathbf{x}}$  de  $F$  está dado por:

$$J_{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} f_{x_0} & f_{x_1} & \cdots & \cdots & \cdots & f_{x_{n-1}} \\ f_{x_{n-1}} & f_{x_0} & \cdots & \cdots & \cdots & f_{x_{n-2}} \\ f_{x_{n-2}} & f_{x_{n-1}} & f_{x_0} & \cdots & \cdots & f_{x_{n-3}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{x_1} & f_{x_2} & \cdots & \cdots & \cdots & f_{x_0} \end{pmatrix}$$

Donde  $f_{x_i} = \frac{\partial(F(\mathbf{x}))_i}{\partial x_i}(\Delta) = \frac{\partial(F(\mathbf{x}))_i}{\partial x_i}(x, \dots, x)$ .

Las redes cíclicas siempre admiten como grupo de simetrías al grupo  $\Gamma$  generado por  $\gamma: V \rightarrow V$ , tal que  $\gamma(v) = (v+1)_{(mod n)}$ . La transformación lineal  $\gamma$  tiene  $n$  valores propios diferentes en  $\mathbb{C}$ .

El cálculo de los valores propios de  $J_{\mathbf{x}}$  se realizó directamente, resolviendo las ecuaciones que se obtienen de  $J_{\mathbf{x}}v = \lambda v$  como ecuaciones de recurrencia, así obtenemos que:

para  $k = 0 \dots n-1$

$$(3.1) \quad \lambda_k = f_{x_0} + \sum_{j=1}^{m-1} f_{x_{n-j}} e^{\frac{2\pi k j}{n}(n-j)}.$$

donde  $\lambda_0$  es el valor propio que está asociado al modo diagonal, es decir a  $\mathbf{x}_{\Delta}$ , de manera que el espectro de  $D_0 G_{\mathbf{x}_{\Delta}}$  coincide con los valores propios de  $J_{\mathbf{x}}$  excluyendo el primer valor propio.

Se puede notar que  $\lambda_i = \lambda_{n-i}$ .

**Corolario 1.** Sea  $F: J^V \rightarrow J^V$  un mapeo consistente con la red cíclica de rango  $m$  en  $V$ , entonces si

$$|f_{x_0} + \sum_{j=1}^{m-1} f_{x_{n-j}} e^{\frac{2\pi k j}{n}(n-j)}| < 1$$

para todo  $k = 1, \dots, n-1$ , tenemos que  $\Delta$  es asintóticamente estable.



*Demostración.* Tenemos que

$$\max(|\text{spec}(D_0 G_{\mathbf{x}_\Delta})|) \leq \alpha = \max_{\mathbf{x}_\Delta \in \Delta} (\max_k (|\lambda_k(\mathbf{x}_\Delta)|)),$$

y debido a que en este caso  $\Delta$  es compacto,  $\alpha < 1$ , por lo que se satisface la condición 1 del teorema 2. Como ya mencionamos, las redes cíclicas admiten como grupo de simetrías al grupo  $\Gamma$ , por lo que la base de vectores propios es común, lo que satisface la condición 2 del mismo teorema, como consecuencia,  $\Delta$  es asintóticamente estable. □

Comentarios:

- Cuando para todo  $\mathbf{x}_\Delta \in \Delta$  tenemos que  $\text{sign}(f_{x_0}) = \text{sign}(\sum_{j=1}^{m-1} f_{x_{n-j}})$ , entonces  $|\lambda_k(x_\Delta)| \leq |\lambda_1(x_\Delta)|$  para todo  $k = 1, \dots, n-1$ , y en tal caso basta que  $|f_{x_0} + \sum_{j=1}^{m-1} f_{x_{n-j}} e^{\frac{2\pi i}{n}(n-j)}| < 1$  para todo  $\mathbf{x}_\Delta \in \Delta$ , para asegurar la estabilidad asintótica de  $\Delta$ .

- Cuando para todo  $\mathbf{x}_\Delta \in \Delta$  tenemos que  $\text{sign}(f_{x_0}) = -\text{sign}(\sum_{j=1}^{m-1} f_{x_{n-j}})$ , entonces

$$|\lambda_k(x_\Delta)| \leq |\lambda_{\frac{n}{2}}(x_\Delta)| \quad \text{para } n \text{ par}$$

$$|\lambda_k(x_\Delta)| \leq |\lambda_{\frac{n+1}{2}}(x_\Delta)| \quad \text{para } n \text{ impar}$$

$\forall k = 1, \dots, n-1$ , y en tal caso basta que

$$|f_{x_0} + \sum_{j=1}^{m-1} f_{x_{n-j}} e^{\pi i(n-j)}| < 1 \quad \text{para } n \text{ par}$$

$$|f_{x_0} + \sum_{j=1}^{m-1} f_{x_{n-j}} e^{\frac{\pi(n+1)j}{n}(n-j)}| < 1 \quad \text{para } n \text{ impar}$$

$\forall \mathbf{x}_\Delta \in \Delta$ , para asegurar la estabilidad asintótica de  $\Delta$ .

### 3.4. Ejemplos

A continuación construimos un mapeo consistente con una red cíclica de rango  $n$  en  $n$  vértices, para el cual la polidiagonal sea globalmente atractiva. Definimos  $F : [0, 1]^V \rightarrow [0, 1]^V$  en la base  $(\mathbf{x}_\Delta, \mathbf{x}_-)$ , de modo que ahí se verifique trivialmente que  $\Delta$  es un atractor global, y luego hacemos un cambio de variables para escribir  $F$  en la base usual.

**Ejemplo 4.** Definimos  $G : \Delta \times \Delta \rightarrow \Delta \times \Delta$  como sigue:

$$G(\mathbf{x}_\Delta, \mathbf{x}_-) = \left( \left( T - \frac{n}{n-1} \|\mathbf{x}_-\|^2 \right) \mathbf{x}_\Delta \left( 1 - \frac{\mathbf{x}_\Delta}{\sqrt{n}} \right), \alpha \mathbf{x}_- \right)$$

con  $\alpha \in (0, 1)$ .

Entonces, en la base natural de  $\mathbb{R}^V$  tenemos  $F = \Pi^{-1} G \Pi$ , donde  $\Pi$  es la matriz unitaria de cambio de base que se escribe así:

$$\Pi = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{n}} & \frac{1}{\sqrt{n}} & \cdots & \cdots & \frac{1}{\sqrt{n}} \\ \frac{1}{\sqrt{(n)(n-1)}} & \frac{1}{\sqrt{(n)(n-1)}} & \cdots & \cdots & \frac{1}{\sqrt{(n)(n-1)}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & \cdots & \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

con

$$\Pi_{ij} = \begin{cases} \frac{(n-i+1)}{\sqrt{(n-i+1)(n-i+2)}} & i = j \neq 1 \\ \frac{1}{\sqrt{n}} & i = 1, \forall j \\ \frac{1}{\sqrt{(n-i+1)(n-i+2)}} & i < j, i \neq 1 \\ \frac{1}{\sqrt{(n-i+1)(n-i+2)}} & j = 1, \forall i \neq 1 \\ 0 & j < i, i \neq 1 \end{cases}$$

Resulta que  $\Pi(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}_\Delta, \mathbf{x}_\perp)$ , donde  $\mathbf{x}_\Delta = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{\sqrt{n}}$  y  $\mathbf{x}_\perp = (d_1, \dots, d_{n-1})$ .

Comentarios:

- Como

$$G(\mathbf{x}_\Delta, 0) = \left( T \mathbf{x}_\Delta \left( 1 - \frac{\mathbf{x}_\Delta}{\sqrt{n}} \right), 0 \right)$$

$\forall \mathbf{x}_\Delta \in \Delta$ , entonces,  $G$  deja invariante la polidiagonal  $\Delta$ .

- 

$$F(\mathbf{x}) = \left( \left( T - \frac{n}{n-1} |\mathbf{x}_\perp|^2 \right) \left( \frac{\mathbf{x}_\Delta}{\sqrt{n}} \right) \left( 1 - \frac{\mathbf{x}_\Delta}{\sqrt{n}} \right) \right) + \alpha \sum_{i=1}^{n-1} \frac{d_i}{\sqrt{(n-i+1)(n-i+2)}}.$$

Si evaluamos  $F$  en la polidiagonal, cada  $d_i = 0$ , por lo que  $F$  es el mapeo logístico.

- Un sistema dinámico caótico está generalmente caracterizado por:

1. Tiene dependencia sensitiva a las condiciones iniciales del sistema (esto es, puntos inicialmente cercanos pueden evolucionar a estados muy diferentes).
2. Son topológicamente transitivos. Una función  $f$  es topológicamente transitiva si, dados dos intervalos cualesquiera  $U$  y  $V$ , hay algún entero positivo  $k$  tal que  $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$ .

Para la mayoría de los valores de  $T$  entre 3.57 y 4, el mapeo logístico se comporta como un sistema caótico.

El siguiente es un caso particular de las redes de mapeos acoplados de los que hablamos en la introducción. En este ejemplo lo interesante es ver cómo la estabilidad de la polidiagonal básicamente depende de la intensidad del acoplamiento, que viene dada por el parámetro  $\varepsilon$ .

**Ejemplo 5.** Para  $m = 2$  para todo  $v$ , tomamos  $F : [0, 1]^V \rightarrow [0, 1]^V$  con

$$F(\mathbf{x})_v = f(x_v, x_{v-1 \bmod n}) = (1 - \varepsilon)g(x_v) + \varepsilon g(x_{v-1 \bmod n}),$$

y  $\varepsilon \in (0, 1)$ . Aquí  $g : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  es un mapeo caótico de clase  $C^2$ . En este caso

$$J = \begin{pmatrix} (1 - \varepsilon)g_{x_0} & 0 & \dots & \dots & \dots & \varepsilon g_{x_{n-1}} \\ \varepsilon g_{x_{n-1}} & (1 - \varepsilon)g_{x_0} & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \varepsilon g_{x_{n-1}} & (1 - \varepsilon)g_{x_0} & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \varepsilon g_{x_{n-1}} & (1 - \varepsilon)g_{x_0} \end{pmatrix}$$

Si calculamos los valores propios de  $J$ , según lo obtenido en 3.1 obtenemos que:

$$\lambda_k = f_{x_0} + f_{x_{n-1}} e^{\frac{2\pi k i}{n}(n-1)}$$

para  $k = 0 \dots n-1$ , de donde

$$\lambda_k = (1 - \varepsilon)g_{x_0} + \varepsilon g_{x_{n-1}} e^{\frac{2\pi k i}{n}(n-1)}$$

Como  $g_{x_0} = g_{x_{n-1}}$

$$\lambda_k = (g_{x_0})(1 + \varepsilon(e^{\frac{2\pi k i}{n}(n-1)} - 1))$$

Según los resultados obtenidos, para tener estabilidad asintótica necesitamos que:

$$|(g_{x_0})(1 + \varepsilon(e^{\frac{2\pi k i}{n}(n-1)} - 1))| < 1$$

Entonces, tenemos lo siguiente:

$$|(g_{x_0})(1 + \varepsilon(e^{-\frac{2\pi t}{n}} - 1))| < 1$$

$$|1 + \varepsilon(e^{-\frac{2\pi t}{n}} - 1)| < \frac{1}{|g_{x_0}|}$$

$$|1 + \varepsilon(\cos(\frac{-2\pi}{n}) + i \operatorname{sen}(\frac{-2\pi}{n}) - 1)| < \frac{1}{|g_{x_0}|}$$

$$\sqrt{1 + (2\varepsilon - 2\varepsilon^2)(\cos(\frac{-2\pi}{n}) - 1)} < \frac{1}{|g_{x_0}|}$$

de donde:

$$\left( \varepsilon - \frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{1}{|g_{x_0}|} \sqrt{|g_{x_0}|^2 + \frac{2(|g_{x_0}|^2 - 1)}{\cos(\frac{-2\pi}{n}) - 1}} \right] \right) \left( \varepsilon - \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{1}{|g_{x_0}|} \sqrt{|g_{x_0}|^2 + \frac{2(|g_{x_0}|^2 - 1)}{\cos(\frac{-2\pi}{n}) - 1}} \right] \right) < 0$$

Si hacemos:

$$H = \frac{1}{|g_{x_0}|} \sqrt{|g_{x_0}|^2 + \frac{2(|g_{x_0}|^2 - 1)}{\cos(\frac{-2\pi}{n}) - 1}}$$

La región de estabilidad está dada por  $(1 - H)/2 < \varepsilon < (1 + H)/2$ , lo que implica una cota superior para  $|g_{x_0}|$  en función de  $n$ .

$$|g_{x_0}| < \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\eta}{2}}}$$

donde  $\eta := \cos(2\pi/n) - 1$ . Entonces, la región de estabilidad depende de la dimensión de la red, y tiende a cero cuando  $n$  tiende a infinito.

En seguida analizamos un caso particular:

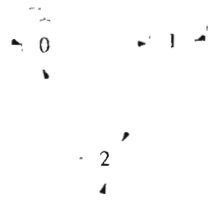
**Ejemplo 6.** Para  $\#V = 3$  y  $m = 2$  para todo  $v$ .

Tomamos:

$$(F(\mathbf{x}))_0 = f(x_0, x_2)$$

$$(F(\mathbf{x}))_1 = f(x_1, x_0)$$

$$(F(\mathbf{x}))_2 = f(x_2, x_1)$$

Figura 3.2: Red  $n=3$ ,  $m = 2$ 

$$F(\mathbf{x})_v = f(x_v, x_{v-1 \bmod n}) = (1 - \varepsilon)g(x_v) + \varepsilon g(x_{v-1 \bmod n})$$

donde  $x_v \in [0, 1] \subset \mathbb{R}$ .

$$g(x) = \begin{cases} \mu x & 0 \leq x \leq 1/2 \\ \mu(1-x) & 1/2 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

es conocido como el mapeo tienda, si  $\mu$  es más grande que 1 el sistema tiene dos puntos fijos, uno en 0 y otro en  $\mu/(\mu+1)$ . Ambos puntos fijos son inestables. En este caso tomaremos  $\mu = 1.6$ .

$$g(x) = \begin{cases} 1.6x & 0 \leq x \leq 1/2 \\ 1.6(1-x) & 1/2 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Para todos los puntos donde  $g(x)$  es diferenciable, obtenemos

$\varepsilon$ :

$$H = \frac{1}{|g_{x_0}|} \sqrt{|g_{x_0}|^2 + \frac{2(|g_{x_0}|^2 - 1)}{\cos(\frac{-2\pi}{n}) - 1}} =$$

$$\frac{1}{1.6} \sqrt{|1.6|^2 + \frac{2(1.6^2 - 1)}{\cos(\frac{-2\pi}{3}) - 1}} =$$

$$\sqrt{0.1875}$$

como  $\frac{1}{2}(1 - H) < \varepsilon < \frac{1}{2}(1 + H)$

obtenemos que  $\frac{1}{2}(1 - \sqrt{0.1875}) < \varepsilon < \frac{1}{2}(1 + \sqrt{0.1875})$

tomamos  $\varepsilon = 0.5$ , luego

$$|(g_{v_0})(1 + \varepsilon(e^{\frac{-2\pi i}{n}} - 1))| = |(1.6)(1 + 0.5(e^{\frac{-2\pi i}{3}} - 1))| = 0.8 < 1$$

Usando el corolario 1 vemos que la polidiagonal es asintóticamente estable.

## Capítulo 4

### Comentarios Finales

En este trabajo consideramos sistemas dinámicos definidos sobre una red de celdas acopladas. La dinámica es generada por mapeos de clase  $C^2$  que son consistentes con la estructura de la red, y por lo tanto dejan invariante un subespacio lineal al que llamamos polidiagonal y que identificamos con el modo sincronizado.

Estudiamos la estabilidad asintótica de la polidiagonal, partiendo de la linealización de la dinámica en las direcciones transversales a ella. Probamos que para una red homogénea que admite simetrías con ciertas características, la estabilidad de la linealización implica la estabilidad asintótica de la polidiagonal. Además presentamos una familia de ejemplos, las redes cíclicas, para las cuales las condiciones de estabilidad se pueden verificar de forma explícita.

Un teorema análogo al teorema 2 de este trabajo, permite asegurar la estabilidad asintótica de la polidiagonal a partir de una condición sobre los exponentes de Lyapunov transversales [4]. Aunque el teorema en [4] no requiere que la red admita simetrías especiales, supone en cambio un conocimiento de los exponentes de Lyapunov para todas las medidas invariantes, lo cual es difícil en la práctica. En nuestro caso las condiciones sobre el espectro de la linealización de la dinámica pueden en principio verificarse.



Aquí cabe la extensión de nuestros resultados a redes que admiten simetrías parciales, como las que suponen en [10]. En esos casos se tendría que probar directamente la existencia de una base canónica común para todas las derivadas transversales, o remplazar esta hipótesis por una menos restrictiva. Este trabajo puede también ampliarse a otros tipos de redes homogéneas, así como a redes no homogéneas, como pasos preliminares para el estudio de redes infinitas.

# Apéndice A

## Prueba del lema 1

Tomamos  $\eta > \rho$ .  $\forall \lambda_{\mathbf{x}_\Delta}^{(i)} \in \text{spec}(D_0 G_{\mathbf{x}_\Delta})$ , tenemos que  $|\lambda_{\mathbf{x}_\Delta}^{(i)}| < \rho$ .

Escribimos  $\mathbf{x}_\perp = \sum_a \alpha_a(\mathbf{x}_\perp) v_a$ .

$$\begin{aligned} & |\prod_{k=1}^n D_0 G_{\mathbf{x}_\Delta}^k \mathbf{x}_\perp| \\ &= |\prod_{k=1}^n D_0 G_{\mathbf{x}_\Delta}^k \sum_a \alpha_a(\mathbf{x}_\perp) v_a| \\ &= |\sum_a \alpha_a(\mathbf{x}_\perp) \prod_{k=1}^n D_0 G_{\mathbf{x}_\Delta}^k v_a| \\ &\leq \sum_a |\alpha_a(\mathbf{x}_\perp)| \rho^{n-d} |v_a| \end{aligned}$$

Normalizando los vectores propios, se tiene:

$$\begin{aligned} & \sum_a |\alpha_a(\mathbf{x}_\perp)| \rho^{n-d} |v_a| \\ &= \sum_a |\alpha_a(\mathbf{x}_\perp)| \rho^{n-d} \leq \sum_a \max |\alpha_a(\mathbf{x}_\perp)| \rho^{n-d} \end{aligned}$$

Ya que las normas  $l_1$  y  $\max$  son equivalentes,  $|\mathbf{x}_\perp| = C \max |\alpha_a(\mathbf{x}_\perp)|$ , donde  $C$  no depende de  $\mathbf{x}_\perp$ .

Entonces,  $\exists N$  tal que

$$NC \max |\alpha_a(\mathbf{x}_\perp)| \rho^{n-d} \leq \eta^n |\mathbf{x}_\perp|$$

$\forall n \geq n_0$ .

de donde

$$\left| \prod_{k=1}^n D_0 G_{\mathbf{x}_\Delta}^{i_k} \mathbf{x}_\perp \right| \leq \eta^n |\mathbf{x}_\perp|$$

para todo  $\mathbf{x}_\perp \in \Delta^\perp$ .

Se define

$$|\mathbf{x}_\perp|_* = \sum_{k=1}^{n_0} \eta^{-k} \left( \max_{\mathbf{x}_\Delta^j, j=1, \dots, k} \left| \prod_{j=1}^k D_0 G_{\mathbf{x}_\Delta}^{i_j} \mathbf{x}_\perp \right| \right).$$

$$\begin{aligned} \left| \prod_{k=1}^n D_0 G_{\mathbf{x}_\Delta}^{i_k}(\mathbf{x}_\perp) \right|_* &= \sum_{k=1}^{n_0} \eta^{-k} \left( \max_{\mathbf{x}_\Delta^j, j=1, \dots, k} \left| \prod_{j=1}^k D_0 G_{\mathbf{x}_\Delta}^{i_j} \left( \prod_{k=1}^n D_0 G_{\mathbf{x}_\Delta}^{i_k}(\mathbf{x}_\perp) \right) \right| \right) \\ &\leq \sum_{k=1}^{n_0} \eta^{-k} \left( \max_{\mathbf{x}_\Delta^j, j=1, \dots, k} \left| \prod_{j=1}^k D_0 G_{\mathbf{x}_\Delta}^{i_j}(\mathbf{x}_\perp) \right| \left| \prod_{k=1}^n D_0 G_{\mathbf{x}_\Delta}^{i_k} \right| \right) \\ &\leq \sum_{k=1}^{n_0} \eta^{-k} \left( \max_{\mathbf{x}_\Delta^j, j=1, \dots, k} \left| \prod_{j=1}^k D_0 G_{\mathbf{x}_\Delta}^{i_j}(\mathbf{x}_\perp) \right| \right) \eta^n \\ &= \eta^n |\mathbf{x}_\perp|_*. \end{aligned}$$

## Apéndice B

### Comentarios a la bibliografía

- En [1] y [2] se estudia la sincronización de mapeos acoplados en una variedad de redes que incluyen redes uno y dos dimensionales, redes de escala libre, árboles y redes aleatorias. Se define sincronización de fase y sincronización exacta, se clasifican los nodos según su evolución, así como los acoplamientos, y se estudia la formación de cúmulos de nodos sincronizados en relación con el tamaño de la red. En la primera parte [1] se presentan resultados numéricos y en la segunda [2] se estudia la sincronización en redes globalmente acopladas y redes bipartitas. Se determinan condiciones de estabilidad para los modos sincronizados mediante el uso de exponentes de Lyapunov y funciones de Lyapunov.
- En [4] se supone la existencia de un sistema dinámico con una subvariedad invariante, tal que la restricción del sistema a su subvariedad tiene un atractor caótico  $\Lambda$ . Se busca conocer bajo que condiciones  $\Lambda$  es un atractor para el sistema original y en qué sentido. En este trabajo se observan todos los exponentes de Lyapunov para todas las medidas invariantes de la dinámica y se presenta una caracterización de la dinámica transversal de un atractor en un espacio invariante, considerando el conjunto de los exponentes

de Lyapunov transversales. Los resultados dan condiciones para identificar estabilidad asintótica e inestabilidad. Finalmente se realizan experimentos numéricos y se indican algunas aplicaciones.

- En [5] Se estudia el movimiento sincronizado en sistemas caóticos acoplados. La cuestión central es diseñar un esquema de acoplamiento que garantice un movimiento de sincronización estable para dos sistemas dinámicos idénticos, dados arbitrariamente. En este trabajo se enfatiza el rol de las trayectorias individuales dentro de la dinámica del sistema, sin embargo, no se usan explícitamente exponentes de Lyapunov o funciones de Lyapunov para examinar la estabilidad lineal del movimiento sincronizado. Se obtienen principalmente dos resultados. El primero es un criterio riguroso, que si se satisface, garantiza la sincronización estable en la trayectoria dada. Este criterio está basado en normas de desviaciones para el comportamiento sincronizado, por esto es un criterio suficiente. El segundo, es un criterio menos riguroso que puede ser usado para estimar la fuerza del acoplamiento. Para ambos casos la estabilidad lineal es con respecto a las perturbaciones que son transversas a la variedad de la sincronización. Una ventaja es que ambos criterios tienen una interpretación geométrica, la desventaja es que debido a que los resultados son obtenidos de una linealización, no pueden utilizarse completamente cuando se introducen efectos no lineales. Ambos criterios son dependientes de la medida usada, por lo que pueden obtenerse diferentes resultados de estabilidad para diferentes trayectorias. Finalmente se realizan experimentos numéricos en diferentes sistemas dinámicos.
- En [8] se demuestra que muchas configuraciones de osciladores acoplados pueden expresarse en una forma simple y determinar a partir de ella la estabilidad del estado sincronizado, la función obtenida se denomina función maestra de estabilidad, esta permite establecer cuando cualquier acopla-

miento lineal puede producir una dinámica sincronizada y estable. Para esto se utiliza el signo del máximo exponente de Lyapunov.

- En [10] se define una celda y una red de celdas acopladas. Se introduce la representación de una red por medio de un grafo dirigido. Y se demuestra que la simetría no es el único mecanismo para crear sincronización. Esto se realiza remplazando al grupo de simetrías por un grupoide de simetrías, el cual incluye información acerca de los conjuntos de entrada. También se introducen las redes cociente, que se obtienen restringiendo el espacio al subespacio polidiagonal y que pueden tener simetrías y por lo tanto sincronización, aunque la red original no las tenga.

## Bibliografía

- [1] R. Amritkar, C. Hu, and S. Jalan. Synchronized clusters in coupled map networks. i. numerical studies. *Physical Review*, E 72:016211, 2005.
- [2] R. Amritkar, C. Hu, and S. Jalan. Synchronized clusters in coupled map networks. ii. stability analysis. *Physical Review*, E 72:016212, 2005.
- [3] P. Ashwin, J. Buescu, and I. Stewart. Bubbling of attractors and synchronization of chaotic oscillators. *Phys. Lett. A*, 193:126–139, 1994.
- [4] P. Ashwin, J. Buescu, and I. Stewart. From attractor to chaotic saddle: a tale of transverse instability. *Nonlinearity*, 9:703–737, 1996.
- [5] R. Brown and N. Rulkov. Synchronization in chaotic systems: transverse stability of trajectories in invariant manifolds. *Chaos*, 7:395–413, 1997.
- [6] Pietro-Luciano Buono and Martin Golubitsky. Models of central patterns generators for quadruped locomotion: I. primary gaits. *Journal of Mathematical Biology*, 42:291–326, 2001.
- [7] T. Carroll, K. Fink, G. Johnson, D. Mar, and L. Pecora. Synchronization stability in coupled oscillatory arrays: Solution for arbitrary configurations. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 10:273–290, 2000.
- [8] T. Carroll and L. Pecora. Master stability functions for synchronized coupled systems. *Phys. Rev. Lett.*, 80, 1998.

- [9] J. Chazottes and B. Fernandez. *Dynamics of Coupled Map Lattices and of Related Spatially Extended Systems*. Springer, 2005.
- [10] M. Golubitsky, M. Pivato, and I. Stewart. Symmetry groupoids and patterns of synchrony in coupled cell networks. *SIAM J. Applied Dyn. Sys.*, 2:609–646, 2003.
- [11] M. Golubitsky, I. Stewart, and A. Torok. Patterns of synchrony in coupled cell networks with multiple arrows. *SIAM J. Applied Dyn. Sys.*, 4:78–100, 2005.
- [12] J. Hopfield. Neural networks and physical systems with emergent collective computational abilities. *Proc. Natl Acad. Sci., USA* Vol. 79, April 1982.
- [13] Wen-Wei Lin and Yi-Qian Wang. Chaotic synchronization in coupled map lattices with periodic boundary conditions. *SIAM J. APPLIED DYNAMICAL SYSTEMS*, 1 No.2, 2002.
- [14] M. Mackey and J. Tyson. Molecular, metabolic, and genetic control. *Chaos*, 11, March 2001.
- [15] C. Robinson. *Dynamical Systems*. ACM Monograph Series. CRC Press, Boca Raton, Florida 33431, 1995.
- [16] Chai-Wah Wu. Synchronization in networks of nonlinear dynamical systems coupled via a directed graph. *Nonlinearity*, 18:1057–1064, 2005.



