Universidad Autónoma de San Luis Potosí.

Facultad de Ciencias

Medidas de Complejidad Métrica

TESIS

Que para obtener el Grado de

Maestro en Ciencias Aplicadas

PRESENTA:

Rosendo Vázquez Bañuelos

ASESOR:

Dr. Valentín Afraimovich

SAN LUIS POTOSÍ, S.L.P   SEPTIEMBRE DE 2008

Agradecimientos

Mi más sincero y gran agradecimiento a mis increíbles padres, Luisa Bañuelos y Rosendo Vázquez, así como a mis hermanos: Ezequiel,Bety, Joel y Vanessa; a mi tía Josefina, a mi primo Jorge Alberto, a mi cuñada Sagrario y a mis sobrinos.

Agradezco a mi asesor: Dr. Valentín Afraimovich, por su tiempo y paciencia invaluables.

Agradezco también a los investigadores: Dr. Álvaro Pérez Raposo, Dr Antonio Morante Lezama y Dr. Edgardo Ugalde Saldaña por el tiempo que dedicaron a la revisión de este trabajo.

También mi más sincero agradecimiento a Delia Santoyo, por todo su apoyo, por sus consejos y por la paciencia que mostro en todo este tiempo.

No puedo no mencionar a mis amigos: Osiris, David, Eduardo, Rodrigo, Efrain y Ricardo, por todo su apoyo: Gracias.

Finalmente, agradezco al IICO-UASLP y al CONACYT, instituciones que me permitieron realizar mis estudios de maestría.

MEDIDAS DE COMPLEJIDAD MÉTRICA

Rosendo Vázquez Bañuelos

Índice general

Capítulo 1

INTRODUCCIÓN

La inestabilidad de las órbitas en sistemas dinámicos es cuantitativamente reflejada por las funciones de complejidad. La complejidad topológica refleja puros rasgos topológicos de la dinámica, la complejidad simbólica se caracteriza con los sistemas simbólicos, y la (ϵ, n)-complejidad depende de la distancia en el plano fase. Si un sistema dinámico es generado por un mapeo $f : X \to X$ donde X es un espacio métrico con una distancia d, uno puede introducir la sucesión de distancias

$$d_n(x, y) = \max_{0 \leq i \leq n-1} d(f^i x, f^i y), n \in \mathbb{N},$$

y estudiar la ϵ-complejidad con respecto a la distancia d_n como función del tiempo n. Ésta función describe la evolución de la inestabilidad de las órbitas en el tiempo n. Ésta función no solo depende de n sino que también depende de ϵ.

En realidad, la (ϵ, n)-complejidad $C_{\epsilon,n}$[1] es el máximo número de piezas de trayectorias de longitud temporal n que son ϵ-distinguibles. Es claro que este número va aumentando conforme ϵ va decreciendo. Si un sistema posee una cantidad de inestabilidad entonces este número también aumenta cuando n es creciente. La oportunidad

[1]Dado $A \subset X \setminus D$, la cantidad $C_{\epsilon,n}(A) = max\{ |Y| : Y \subset A$ es un conjunto (ϵ, n)-separado$\}$ donde $|Y|$ es cardinalidad del conjunto Y es llamada (ϵ, n)-complejidad del conjunto A.

para que las trayectorias divergan en más de la distanca ϵ durante el intervalo temporal $n+1$ es mayor que la de diverger durante las n unidades temporales. Es conocido en [2] que

$$b := \lim_{n\to\infty} \limsup_{\epsilon\to 0} \frac{\ln C_{\epsilon,n}}{-\ln \epsilon}$$

es la dimension fractal de X. Además también podemos ver en [2] que

$$h := \lim_{\epsilon\to 0} \limsup_{n\to\infty} \frac{\ln C_{\epsilon,n}}{n}$$

es la entropía topológica del sistema dinámico (X, f). Siguiendo a Takens la gente dice que el sistema (X, f) es determinista y posee dinamica caotica si $0 < b < \infty$, $0 < h < \infty$. Las propiedades de esta complejidad pueden ser estudiadas en [2].

Pero hay otro camino para definir una función de complejidad que es basado en la cobertura de X por medio de conjuntos abiertos. A ésta se le llama función de complejidad métrica $(R_{\epsilon,n})$.La cantidad $R_{\epsilon,n}$ es igual al mínimo número de bolas de radio ϵ (en la métrica d_n) necesarias para cubrir al espacio X. En algún sentido, la cantidad $R_{\epsilon,n}$ es el dual de $C_{\epsilon,n}$. En este trabajo de tesis vamos a estudiar las propiedades de ésta complejidad métrica $R_{\epsilon,n}$. El resultado principal de este trabajo es que la medida relacionada a $R_{\epsilon,n}$ también existe (en [1] y [2] se mostró que la medida relacionada a $C_{\epsilon,n}$ existe), pero las condiciones bajo las cuales ésta es invariante son diferentes a las de $C_{\epsilon,n}$.

Este trabajo es, en realidad, una continuación de los artículos [1] y [2].

Capítulo 2

DEFINICIONES Y ORGANIZACIÓN

Sean (X, d) un espacio métrico compacto con métrica d, $S \subset X$ y $f : X \setminus S \to X$ un mapeo continuo. Si $S = \emptyset$, el mapeo es continuo sobre X, si no, este puede ser discontinuo. Nosotros asumimos que $X \setminus S$ es abierto y denso en X. Más propiedades de S son especificadas abajo.

Sea $D = \bigcup_{i=0}^{\infty} f^{-i}S$, el conjunto de todas las preimágenes de S. El sistema dinámico $(f^i, X \setminus D)$ y la distancia d_n están bien definidos.

Dado $x \in X$ sea $O_{\epsilon,n}(x) = \{y : d_n(x, y) < \epsilon\}$, la bola abierta de radio ϵ centrada en x. Dado $Y \subseteq X$ sea $O_{\epsilon,n}(Y) = \bigcup_{x \in Y} O_{\epsilon,n}(x)$ la ϵ vecindad de Y en la métrica d_n

Definición 1 *(i) Dado $\epsilon > 0$, un conjunto $Y \subset X \setminus D$ es una (ϵ, n)-red si y sólo si $O_{\epsilon,n}(Y) = X$.*

(ii) Dado $A \subset X \setminus D$, la cantidad $R_{\epsilon,n}(A) = min \{ |Y| : Y \subset A$ es una (ϵ, n)-red$\}$ es llamada función de complejidad métrica del conjunto A

(vii) Dado $Z \subset X \setminus D$, una (ϵ, n)-red $Y \subset Z$ es llamada (ϵ, n)-optimal en Z si $|Y| = R_{\epsilon,n}(Z)$

Proposición 1. *Dados $D_1, D_2 \subset X \setminus D$ y $\epsilon > 0$, la siguiente desigualdad se cumple*

$$R_{\epsilon,n}(D_1 \cup D_2) \leq R_{\epsilon,n}(D_1) + R_{\epsilon,n}(D_2).$$

Demostración. Sea $Y_i \subseteq D_i$, $i = 1, 2$ una (ϵ, n)-red optimal en D_i. Entonces $Y = Y_1 \cup Y_2$ es una (ϵ, n)-red en $D_1 \cup D_2$ y $R_{\epsilon,n}(D_1 \cup D_2) \leq |Y| \leq |Y_1| + |Y_2| = R_{\epsilon,n}(D_1) + R_{\epsilon,n}(D_2)$
■

Esta propiedad de sub aditividad nos permite tratar de construir una medida relacionada a $R_{\epsilon,n}$

Capítulo 3

MEDIDAS DE COMPLEJIDAD MÉTRICA

Dado $\epsilon > 0$, $n \in \mathbb{Z}$, consideremos un conjunto (ϵ, n)-red optimal $A_{\epsilon,n}$. Permitiendo que $n \to \infty$ fijamos una sucesión de conjuntos (ϵ, n)-red. Introducimos el siguiente funcional

$$\widetilde{I}_{\epsilon,n}(\phi) = \frac{1}{R_{\epsilon,n}} \sum_{x \in A_{\epsilon,n}} \phi(x)$$

donde $\phi : X \to \mathbb{R}$ es una función continua. El funcional $\widetilde{I}_{\epsilon,n}$ es continuo, positivo y acotado en $C(X)$. Además, para algún ϵ fijo la sucesión $\widetilde{I}_{\epsilon,n}$ es acotada. Fijando un ultrafiltro no propio arbitrario F(ver definiciones en el Apéndice), consideremos

$$\widetilde{I}_{\epsilon}(\phi) = \lim_{F} \widetilde{I}_{\epsilon,n}(\phi)$$

$\widetilde{I}_{\epsilon}$ es un funcional lineal, positivo y acotado en $C(X)$ que puede depender de la elección de ϵ, el ultrafiltro F y los conjuntos optimales $A_{\epsilon,n}$. Nosotros denotamos por $\nu = \nu_{\epsilon,F,A_{\epsilon,n}}$ a la correspondiente medida regular de Borel sobre X.

Observación. Como uno puede ver, el funcional $\widetilde{I}_{\epsilon}(\cdot)$ esta definido para cualquier función continua, pero también lo podemos definir para funciones discontinuas, en particular, para la función característica χ_Y de un conjunto Y. Generalmente $\widetilde{I}_{\epsilon}(\chi_Y) \neq$

$\nu(Y)$. Pero si C es un conjunto compacto y W es un conjunto abierto entonces $\widetilde{I}_\epsilon(\chi_C) \leq \nu(C)$ y $\widetilde{I}_\epsilon(\chi_W) \geq \nu(W)$, ver [5], [6]

Definición 2 *La medida ν es llamada medida relacionada a la complejidad métrica*

Proposición 2. *Si $\nu(S) = 0$ entonces para cualquier sucesión de números positivos $\delta_n, \delta_n \to 0$ cuando $n \to \infty$, uno tiene*

$$\lim_F \frac{1}{R_{\epsilon,n}} |A_{\epsilon,n} \setminus O_{\delta_n}(S)| = 1. \tag{1}$$

donde $A_{\epsilon,n}$ son los conjuntos optimales usados en la definición de ν y O_{δ_n} es la δ_n-vecindad (en la métrica d) de el conjunto S

Demostración. En realidad, la validez de (1) se sigue directamente de la definicion de ν. En verdad, para cualquier $\delta > \alpha > 0$

$$\lim_F \frac{1}{R_{\epsilon,n}} |A_{\epsilon,n} \cap O_\alpha(S)| = \widetilde{I}_\epsilon(\chi_{O_\alpha(S)}) \leq \widetilde{I}_\epsilon(\chi_{\overline{O_\alpha(S)}}) \leq \nu(\overline{O_\alpha(S)}) \leq \nu(O_\delta(S))$$

y $\nu(O_\delta(S)) \to 0$ cuando $\delta \to 0$ (ν es una medida regular). Además, $\delta_n < \delta$ si n es suficientemente grande. Por lo tanto,

$$\lim_F \frac{1}{R_{\epsilon,n}} |A_{\epsilon,n} \cap O_{\alpha_n(S)}| \leq \nu(O_\delta(S))$$

Esto implica el resultado deseado. ■

Proposición 3. *Sean A y B conjuntos (ϵ, n)-red con A optimal. Entonces existe un mapeo inyectivo $\alpha_n : A \to B$ tal que $d_n(x, \alpha_n(x)) < 2\epsilon$ para cualquier $x \in A$. Si $|B| = |A|$ entonces α_n es biyectivo.*

Demostración. Para la demostración de ésta proposición usamos el Lema de Marriage (ver Apéndice). Para $x \in A$ sea

$$B_x = \{y \in B | O_{\epsilon,n}(y) \cap O_{\epsilon,n}(x) \neq \emptyset\} \subseteq O_{2\epsilon,n}(x) \cap B$$

Para $S \subseteq A$ sea

$$B_S = \bigcup_{x \in S} B_x$$

Si mostramos que para cualquier $S \subset A$ la siguiente desigualdad se cumple

$$|B_S| \geq |S| \tag{3}$$

entonces la proposición se sigue del Lema de Marriage.

Primero que todo, $O_{\epsilon,n}(x) \subseteq O_{\epsilon,n}(B_x)$, $x \in A$. Debido a que $O_{\epsilon,n}(B) = X$ obtenemos que

$$O_{\epsilon,n}(x) = O_{\epsilon,n}(x) \cap O_{\epsilon,n}(B) = O_{\epsilon,n}(x) \cap O_{\epsilon,n}(B_x)$$

Así, $O_{\epsilon,n}(S) \subseteq O_{\epsilon,n}(B_S)$

Ahora, suponemos que $|B_S| < |S|$ en contradicción a (3). Entonces

$$|(A \setminus S) \cup B_S| < |A|$$

Además, $O_{\epsilon,n}(A \setminus S) \supseteq O_{\epsilon,n}(A) \setminus O_{\epsilon,n}(S)$. Esto es cierto, debido a que si $z \in O_{\epsilon,n}(A)$ y $z \notin O_{\epsilon,n}(S)$ entonces existe un $a \in A$ tal que $d_n(a, z) < \epsilon$; a no puede estar en S porque $z \notin O_{\epsilon,n}(S)$. Por lo tanto, $a \in A \setminus S$, y $z \in O_{\epsilon,n}(A \setminus S)$. Así

$$O_{\epsilon,n}((A \setminus S) \cup B_S) = O_{\epsilon,n}(A \setminus S) \cup O_{\epsilon,n}(B_S) \supseteq O_{\epsilon,n}(A) \setminus O_{\epsilon,n}(S) \cup O_{\epsilon,n}(B_S)$$

$$= X \setminus O_{\epsilon,n}(S) \cup O_{\epsilon,n}(B_S) = X,$$

en contradicción con la minimalidad de A

■

Para un mapeo arbitrario f la validez de la desigualdad $d_n(x, \alpha_n(x)) < 2\epsilon$, $n \in \mathbb{N}$, no implica que $d(x, \alpha_n(x)) \to 0$. Como un corolario, tenemos el desagradable hecho de que el funcional $\widetilde{I}_\epsilon$ y la correspondiente medida ν pueden depender de la elección de los conjuntos optimales. Ahora introducimos una clase de mapeos para los cuales esto no ocurre.

Definición 3 *(i) Decimos que el mapeo f es ϵ-expansivo si para cada $\delta > 0$ y cualquier par $x, y \in X, x \neq y$, existe $N = N(x, y, \delta) \in \mathbb{N}$ tal que la desigualdad $d_n(x, y) \leq \epsilon, n \geq N$, implica que $d(x, y) \leq \delta$.*

(ii) El mapeo f es uniformemente ϵ-expansivo si existe una sucesión de números no negativos $\delta_n \to 0$, cuando $n \to \infty$ tal que para cualquier par $x, y \in X$ con $d_n(x, y) \leq \epsilon$ uno tiene $d(x, y) \leq \delta_n, n = 1, 2$.

Lema 1 *Un mapeo ϵ-expansivo continuo ($S = \emptyset$) es uniformemente ϵ-expansivo.*

Demostración. Asumamos que esto no es cierto, es decir, existe una sucesión $n_k \to \infty$ cuando $k \to \infty$ y una susesión de pares $x_k \neq y_k$ tal que $d_{n_k}(x_k, y_k) \leq \epsilon$, $d(x_k, y_k) > \beta > 0$. Como X es compacto, entonces sin pérdida de generalidad podemos asumir que existe $x_0 = \lim_{k \to \infty} x_k$, $y_0 = \lim_{k \to \infty} y_k$ (en la métrica d) y $d(x_0, y_0) > \beta$. Como $d_{n_k}(x_k, y_k) \leq \epsilon$, entonces $d(x_k, y_k) \leq \epsilon$ y $d(x_0, y_0) \leq \epsilon$. También, $d(fx_k, fy_k) \leq \epsilon$, así, $d(fx_0, fy_0) \leq \epsilon$, por la continuidad de f. Por el mismo camino, podemos mostrar que $d(f^{m-1}x_0, f^{m-1}y_0) \leq \epsilon$ (si elegimos $n_k > m$), de esta manera $d_m(x_0, y_0) \leq \epsilon$ para cualquier $m \in \mathbb{N}$. Como f es ϵ-expansivo $x_0 = y_0$, lo que es una contradicción

■

Para mapeos uniformemente ϵ-expansivos tienen lugar los siguientes hechos.

Proposición 4 *Si f es uniformemente ϵ_0-expansivo entonces para todo $\epsilon < \epsilon_0$ f es uniformemente ϵ-expansivo.*

Demostración. Como f es uniformemente ϵ_0-expansivo entonces existe una sucesión de números no negativos $\delta_n = \{\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots\} \to 0$, $n \to \infty$ tal que para cualquier par $x, y \in X$ con $d_n(x, y) \leq \epsilon_0$ uno tiene $d(x, y) < \delta_n$. Como δ_n es convergente a 0, entonces nosotros tenemos que existe $K(\epsilon_0) \in \mathbb{N}$ tal que, para toda $n > K(\epsilon_0)$ se cumple $|\delta_n| < \epsilon_0$. Ahora consideremos la sucesión $\delta'_n = \{\delta_{m+1}, \delta_{m+2}, \ldots\}$ con $m \in \mathbb{N}$ y $m > K(\epsilon_0)$, es claro que esta es una subsucesión de δ_n por lo tanto, $\delta'_n \to 0$, $n \to \infty$. Por lo que para todo $\epsilon < \epsilon_0$ nosotros vamos a tener que $|\delta_{m+n}| < \epsilon$ de aquí $d(x, y) \leq \delta'_n$ implica que $d_n(x, y) \leq \epsilon$ y con esto f es uniformemente ϵ-expansivo

■

Teorema 1 *Si f es uniformemente ϵ_0-expansivo con $\epsilon_0 > 2\epsilon$ entonces el funcional $\widetilde{I}_\epsilon$ (y la correspondiente medida) es independiente de la elección de los conjuntos (ϵ, n)-red optimales $A_{\epsilon,n}$*

Demostración. Sean $A_{\epsilon,n}$, $B_{\epsilon,n}$ conjuntos (ϵ,n)-red optimales, $n \in \mathbb{N}$. De la Proposición 3, tenemos que existe una biyección $\alpha_n : A_{\epsilon,n} \to B_{\epsilon,n}$ tal que $d_n(x, \alpha_n(x)) < 2\epsilon$. Asumiendo que $\epsilon < \frac{\epsilon_0}{2}$, entonces por la Proposición 4 tenemos que $d_n(x, \alpha_n(x)) < \epsilon_0$. Esto implica la existencia de $\delta_n \geq 0$ tal que $d(x, \alpha_n(x)) \leq \delta_n$. De ésta manera

$$\frac{1}{R_{\epsilon,n}} \Big| \sum_{x \in A_{\epsilon,n}} \phi(x) - \sum_{x \in B_{\epsilon,n}} \phi(x) \Big| \leq \frac{1}{R_{\epsilon,n}} \sum_{x \in A_{\epsilon,n}} |\phi(x) - \phi(\alpha_n(x))| \leq \omega_{\delta_n}(\phi)$$

donde

$$\omega_{\delta_n}(\phi) = \sup_{d(x,y) \leq \delta_n} |\phi(x) - \phi(y)|,$$

es el modulo de la continuidad de ϕ.

Como X es compacto y ϕ es continua, entonces $\omega_{\delta_n}(\phi) \to 0$ cuando $\delta_n \to 0$ ■

Capítulo 4

INVARIANZA DE LAS MEDIDAS

Decimos que $R_{\epsilon,n}$ es subexponencial si $\frac{R_{\epsilon,n}}{e^{\alpha n}} \to 0 \forall \alpha > 0$. Para muchas funciones subexponenciales $R_{\epsilon,n}$, la siguiente igualdad se cumple

$$\lim_{n\to\infty} \frac{R_{\epsilon,n} - R_{\epsilon,n-1}}{R_{\epsilon,n}} = 0 \tag{4}$$

Por ejemplo si $R_{\epsilon,n} = n^2$, tenemos que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2-(n-1)^2}{n^2} = 0$. Pero también tenemos que para muchas funciones subexponenciales $R_{\epsilon,n}$ el límite (4) podría no existir, por ejemplo supongamos que $R_{\epsilon,n} = 2^{[\sqrt{n}]}$, donde $[\cdot]$ es la parte entera del número. Entonces tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{R_{\epsilon,n} - R_{\epsilon,n-1}}{R_{\epsilon,n}} = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } n = m^2, \\ 0, & \text{si } n \text{ no es un cuadrado completo.} \end{cases}$$

Lo que si podemos decir es que, para cualquier subexponencial $R_{\epsilon,n}$ el límite inferior existe:

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{R_{\epsilon,n} - R_{\epsilon,n-1}}{R_{\epsilon,n}} = 0.$$

Esto implica que existe un ultrafiltro tal que el correspondiente límite con respecto a este ultrafiltro es 0. De esta manera, nosotros remplazamos (4) por la siguiente suposición mas débil

$$\lim_F \frac{1}{R_{\epsilon,n}}(R_{\epsilon,n} - R_{\epsilon,n-1}) = 0. \tag{5}$$

donde F es un ultrafiltro no propio.

La suposición (5) implica.

Proposición 5 *Sea*

$$\{n|\ R_{\epsilon,n-1} \leq b_n \leq R_{\epsilon,n}\} \subset F$$

entonces

$$b_n = R_{\epsilon,n}(1 - q_n)$$

donde $\lim_F q_n = 0$.

Demostración. Definimos a q_n como $q_n = 1 - \frac{b_n}{R_{\epsilon,n}}$, de aquí necesitamos mostrar solo que $\lim_F q_n = 0$. Asumamos que esto no es cierto, es decir que $\lim_F q_n = \rho > 0$. Entonces

$$R_{\epsilon,n} - b_n = q_n R_{\epsilon,n} = R_{\epsilon,n}(\rho + \xi_n)$$

con $\lim_F \xi_n = 0$. Así,

$$b_n = R_{\epsilon,n} - q_n R_{\epsilon,n} = R_{\epsilon,n}(1 - \rho - \xi_n) \geq R_{\epsilon,n-1}$$

Por lo tanto,

$$\frac{R_{\epsilon,n} - R_{\epsilon,n-1}}{R_{\epsilon,n}} \geq \rho + \xi_n$$

lo cual contradice a (5). ■

Corolario 5.1 *En particular si*

$$\{n|\ R_{\epsilon,n-1} = R_{\epsilon,n}(1 - q_n)\} \in F$$

entonces $\lim_F q_n = 0$.

Proposición 6 *Si $A_{\epsilon,n}$ es una (ϵ, n)-red y f es un mapeo sobreyectivo entonces $f(A_{\epsilon,n})$ es una $(\epsilon, n-1)$-red en $f(X)$*

Demostración. Consideremos $x \in f^{-1}y$, con $y \in X$, entonces existe $a \in A_{\epsilon,n}$ tal que $y \in O_{\epsilon,n}(a)$, es decir $d_n(y,a) \leq \epsilon$. Por otra parte como $d_{n-1}(fx, fa) = \max_{0\leq i\leq n-2} d(f^{i+1}x, f^{i+1}a)$ entonces $d_{n-1}(fx, fa) \leq d_n(y,a) < \epsilon$, así $d_{n-1}(y, fa) < \epsilon$ y por lo tanto $y \in O_{\epsilon,n-1}(fA_{\epsilon,n})$

■

Observemos que $|f(A_{\epsilon,n})| \leq R_{\epsilon,n}$

Corolario 6.1 *La proposición anterior implica que* $|f(A_{\epsilon,n})| \geq R_{\epsilon,n-1}$

Los principales resultados de este capítulo son los siguientes teoremas.

Teorema 2 *Si* $f : X \setminus S \to X$ *es un mapeo biyectivo, uniformemente ϵ_0-expansivo (asumiendo que $\epsilon < \frac{\epsilon_0}{2}$) y ν la medida relacionada a la complejidad métrica correspondiente a $R_{\epsilon,n}$ y a el ultrafiltro F satisfaciendo la ecuación (5), entonces ν es f-invariante.*

Demostración. Para probar el teorema es suficiente mostrar que $\tilde{I}_\epsilon(\phi) = \tilde{I}_\epsilon(\phi \circ f)$ para $\phi \in C(X)$ donde

$$\tilde{I}_\epsilon(\phi \circ f) = \lim_F \frac{1}{R_{\epsilon,n}} \sum_{x \in A_{\epsilon,n}} \phi(fx)$$

Dada una (ϵ,n)-red optimal $A_{\epsilon,n}$ sea $A_{\epsilon,n-1}$ una $(\epsilon,n-1)$-red optimal arbitraria

Entonces

$$\frac{1}{R_{\epsilon,n}} \left| \sum_{x\in A_{\epsilon,n}} \phi(x) - \sum_{x\in A_{\epsilon,n}} \phi(fx) \right| \leq$$

$$\frac{1}{R_{\epsilon,n}} \left\{ \left| \sum_{x\in A_{\epsilon,n}} \phi(x) - \sum_{x\in A_{\epsilon,n-1}} \phi(x) \right| + \left| \sum_{x\in A_{\epsilon,n-1}} \phi(x) - \sum_{x\in A_{\epsilon,n}} \phi(fx) \right| \right\}$$

Primera suma. Como $A_{\epsilon,n}$ es una (ϵ,n)-red optimal, entonces $A_{\epsilon,n}$ es una $(\epsilon,n-1)$-red. La Proposición 3 implica que existe un mapeo inyectivo $\alpha_{n-1} : A_{\epsilon,n-1} \to A_{\epsilon,n}$ tal que $d_{n-1}(x, \alpha_{n-1}(x)) \leq 2\epsilon$ es decir $d(x, \alpha_{n-1}(x)) \leq \delta_{n-1}$ para cualquier $x \in A_{\epsilon,n-1}$. De aquí,

$$\Delta^{(1)} := \frac{1}{R_{\epsilon,n}}\left|\sum_{x\in A_{\epsilon,n-1}}\phi(x) - \sum_{x\in A_{\epsilon,n}}\phi(x)\right| \leq$$

$$\frac{1}{R_{\epsilon,n}}\left\{\sum_{x\in A_{\epsilon,n-1}}|\phi(x)-\phi(\alpha_{n-1}(x))| + \sum_{x\in A_{\epsilon,n}\setminus\alpha_{n-1}(A_{\epsilon,n-1})}|\phi(x)|\right\}$$

Como $|A_{\epsilon,n}\setminus\alpha_{n-1}(A_{\epsilon,n-1})| \leq R_{\epsilon,n}-R_{\epsilon,n-1}$, obtenemos que

$$\Delta^{(1)} \leq \frac{R_{\epsilon,n-1}}{R_{\epsilon,n}}\cdot\omega_{\delta_{n-1}}(\phi) + \frac{R_{\epsilon,n}-R_{\epsilon,n-1}}{R_{\epsilon,n}}\cdot||\phi||$$

donde $\omega_{\delta_{n-1}}(\phi)$ es el modulo de la continiudad de ϕ. Como ϕ es continua, entonces $\omega_{\delta_{n-1}}(\phi)\to 0$, $\delta_{n-1}\to 0$.

Segunda suma. Como f es uno a uno entonces,

$$\sum_{x\in A_{\epsilon,n}}\phi(fx) = \sum_{y\in fA_{\epsilon,n}}\phi(y)$$

Así,

$$\Delta^{(2)} = \frac{1}{R_{\epsilon,n}}\left|\sum_{x\in A_{\epsilon,n-1}}\phi(x) - \sum_{x\in A_{\epsilon,n}}\phi(fx)\right| = \frac{1}{R_{\epsilon,n}}\left|\sum_{x\in A_{\epsilon,n-1}}\phi(x) - \sum_{y\in fA_{\epsilon,n}}\phi(y)\right|$$

Por la Proposición 6 tenemos $f(A_{\epsilon,n})$ es una $(\epsilon,n-1)$-red, entonces existe un mapeo inyectivo $\beta_{n-1}: A_{\epsilon,n-1}\to f(A_{\epsilon,n})$, tal que $d_{n-1}(x,\beta_{n-1}(x))\leq 2\epsilon$, es decir $d(x,\beta_{n-1}(x))<\delta_{n-1}$ para cualquier $x\in A_{\epsilon,n-1}$. Por lo tanto,

$$\Delta^{(2)} \leq \frac{1}{R_{\epsilon,n}}\left\{\sum_{x\in A_{\epsilon,n-1}}|\phi(x)-\phi(\beta_{n-1}(x))| + \sum_{x\in f(A_{\epsilon,n})\setminus\beta_{n-1}(A_{\epsilon,n-1})}|\phi(x)|\right\}$$

Como ya se observo arriba, tenemos que $|f(A_{\epsilon,n})|\leq R_{\epsilon,n}$, entonces $|f(A_{\epsilon,n})\setminus\beta_{n-1}(A_{\epsilon,n-1})|\leq R_{\epsilon,n}-R_{\epsilon,n-1}$. De ésta manera,

$$\Delta^{(2)} \leq \frac{R_{\epsilon,n-1}}{R_{\epsilon,n}}\cdot\omega_{\delta_{n-1}}(\phi) + \frac{R_{\epsilon,n}-R_{\epsilon,n-1}}{R_{\epsilon,n}}\cdot||\phi||$$

Así,

$$\Delta^{(1)} + \Delta^{(2)} \leq 2\frac{R_{\epsilon,n-1}}{R_{\epsilon,n}} \cdot \omega_{\delta_{n-1}}(\phi) + 2\frac{R_{\epsilon,1} - R_{\epsilon,n-1}}{R_{\epsilon,n}} \cdot ||\phi||$$

y

$$\lim_{F} \left(\Delta^{(1)} + \Delta^{(2)}\right) = 0$$

■

Teorema 3 *Si $f : X \setminus S \to X$ es un mapeo sobreyectivo, uniformemente ϵ_0-expansivo (asumiendo que $\epsilon < \frac{\epsilon_0}{2}$) y ν la medida relacionada a la complejidad métrica correspondiente a $R_{\epsilon,n}$ y a el ultrafiltro F satisfaciendo la ecuación (5), entonces ν es f-invariante.*

Demostración. Al igual que en el Teorema 2, es suficiente mostrar que $\widetilde{I}_\epsilon(\phi) = \widetilde{I}_\epsilon(\phi \circ f)$ para $\phi \in C(X)$ donde

$$\widetilde{I}_\epsilon(\phi \circ f) = \lim_{F} \frac{1}{R_{\epsilon,n}} \sum_{x \in A_{\epsilon,n}} \phi(fx)$$

Dada una (ϵ, n)-red optimal $A_{\epsilon,n}$, sea $A^{o}_{\epsilon,n-1} = f(A_{\epsilon,n})$ una $(\epsilon, n-1)$-red

Entonces

$$\frac{1}{R_{\epsilon,n}} \left| \sum_{x \in A_{\epsilon,n}} \phi(x) - \sum_{x \in A_{\epsilon,n}} \phi(fx) \right| \leq$$

$$\frac{1}{R_{\epsilon,n}} \left\{ \left| \sum_{x \in A_{\epsilon,n}} \phi(x) - \sum_{x \in A^{o}_{\epsilon,n-1}} \phi(x) \right| + \left| \sum_{x \in A^{o}_{\epsilon,n-1}} \phi(x) - \sum_{x \in A_{\epsilon,n}} \phi(fx) \right| \right\}$$

Primera suma. Sea $B_{\epsilon,n-1}$ una $(\epsilon, n-1)$-red optimal, entonces

$$\Delta^{(1)} := \frac{1}{R_{\epsilon,n}} \left| \sum_{x \in A_{\epsilon,n}} \phi(x) - \sum_{x \in A^{o}_{\epsilon,n-1}} \phi(x) \right| \leq$$

$$\frac{1}{R_{\epsilon,n}} \left\{ \left| \sum_{x \in A_{\epsilon,n}} \phi(x) - \sum_{x \in B_{\epsilon,n-1}} \phi(x) \right| + \left| \sum_{x \in B_{\epsilon,n-1}} \phi(x) - \sum_{x \in A^{o}_{\epsilon,n-1}} \phi(x) \right| \right\}$$

De aquí

$$\Delta^{(10)} := \frac{1}{R_{\epsilon,n}}\left|\sum_{x\in B_{\epsilon,n-1}} \phi(x) - \sum_{x\in A_{\epsilon,n}} \phi(x)\right|$$

Como $B_{\epsilon,n-1}$ es una $(\epsilon, n-1)$-red optimal y $A_{\epsilon,n}$ es una $(\epsilon, n-1)$-red, entonces, existe un mapeo inyectivo $\alpha_{n-1} : B_{\epsilon,n-1} \to A_{\epsilon,n}$ tal que $d_{n-1}(x, \alpha_{n-1}(x)) \leq 2\epsilon$ es decir $d(x, \alpha_{n-1}(x)) \leq \delta_{n-1}$ para cualquier $x \in B_{\epsilon,n-1}$. Así,

$$\Delta^{(10)} \leq \frac{1}{R_{\epsilon,n}}\left\{\sum_{x\in B_{\epsilon,n-1}} |\phi(x) - \phi(\alpha_{n-1}(x))| + \sum_{x\in A_{\epsilon,n}\setminus\alpha_{n-1}(B_{\epsilon,n-1})} |\phi(x)|\right\}$$

Como $|A_{\epsilon,n} \setminus \alpha_{n-1}(B_{\epsilon,n-1})| \leq R_{\epsilon,n} - R_{\epsilon,n-1}$, obtenemos que

$$\Delta^{(10)} \leq \frac{R_{\epsilon,n-1}}{R_{\epsilon,n}} \cdot \omega_{\delta_{n-1}}(\phi) + \frac{R_{\epsilon,n} - R_{\epsilon,n-1}}{R_{\epsilon,n}} \cdot ||\phi||$$

donde $\omega_{\delta_{n-1}}(\phi)$ es el modulo de la continiudad de ϕ.

y

$$\Delta^{(11)} = \frac{1}{R_{\epsilon,n}}\left|\sum_{x\in B_{\epsilon,n-1}} \phi(x) - \sum_{x\in A^{\circ}_{\epsilon,n}} \phi(x)\right|$$

Como $A^{\circ}_{\epsilon,n-1}$ es una $(\epsilon, n-1)$-red, entonces, existe un mapeo inyectivo $\beta_{n-1} : B_{\epsilon,n-1} \to A^{\circ}_{\epsilon,n}$ tal que $d_{n-1}(x, \beta_{n-1}(x)) \leq 2\epsilon$ es decir $d(x, \beta_{n-1}(x)) \leq \delta_{n-1}$ para cualquier $x \in B_{\epsilon,n-1}$. De ésta manera

$$\Delta^{(11)} \leq \frac{1}{R_{\epsilon,n}}\left\{\sum_{x\in B_{\epsilon,n-1}} |\phi(x) - \phi(\beta_{n-1}(x))| + \sum_{x\in A^{\circ}_{\epsilon,n}\setminus\beta_{n-1}(B_{\epsilon,n-1})} |\phi(x)|\right\}$$

$$\Delta^{(11)} \leq \frac{R_{\epsilon,n-1}}{R_{\epsilon,n}} \cdot \omega_{\delta_{n-1}}(\phi) + \frac{R_{\epsilon,n} - R_{\epsilon,n-1}}{R_{\epsilon,n}} \cdot ||\phi||.$$

Segunda suma. Partiendo de la igualdad

$$f^{-1}(f(A_{\epsilon,n})) = A_{\epsilon,n} \cup \widetilde{A}_{\epsilon,n}$$

y suponiendo que $\widetilde{A}_{\epsilon,n} \subseteq A_{\epsilon,n}$ tal que $f(\widetilde{A}_{\epsilon,n}) = A^{\circ}_{\epsilon,n-1}$ con $\widetilde{A}_{\epsilon,n} = |A^{\circ}_{\epsilon,n-1}|$ obtenemos que

$$\sum_{x\in A_{\epsilon,n}} \phi(fx) = \sum_{y\in A^{\circ}_{\epsilon,n-1}} \phi(y) + \sum_{x\in A_{\epsilon,n}\setminus A^{\circ}_{\epsilon,n-1}} \phi(fx)$$

de aquí

$$\Delta^{(2)} := \frac{1}{R_{\epsilon,n}}\left|\sum_{x\in A^{\circ}_{\epsilon,n-1}} \phi(x) - \sum_{x\in A_{\epsilon,n}} \phi(fx)\right| \leq$$

$$\frac{1}{R_{\epsilon,n}} \sum_{x\in A_{\epsilon,n}\setminus A^{\circ}_{\epsilon,n-1}} |\phi(fx)|$$

Como tenemos que $|A_{\epsilon,n}| = |A^{\circ}_{\epsilon,n-1}| + |A_{\epsilon,n} \setminus A^{\circ}_{\epsilon,n-1}| = R_{\epsilon,n}$ y $R_{\epsilon,n-1} \leq |A^{\circ}_{\epsilon,n-1}|$, entonces $|A_{\epsilon,n} \setminus A^{\circ}_{\epsilon,n-1}| = R_{\epsilon,n} - |A^{\circ}_{\epsilon,n-1}|$ y $|A_{\epsilon,n} \setminus A^{\circ}_{\epsilon,n-1}| \leq R_{\epsilon,n} - R_{\epsilon,n-1}$, por lo tanto,

$$\Delta^{(2)} \leq \frac{R_{\epsilon,n} - R_{\epsilon,n-1}}{R_{\epsilon,n}}$$

De ésta manera

$$\Delta^{(10)} + \Delta^{(11)} + \Delta^{(2)} \leq 2\frac{R_{\epsilon,n-1}}{R_{\epsilon,n}} \cdot \omega_{\delta_{n-1}}(\phi) + 2\frac{R_{\epsilon,n} - R_{\epsilon,n-1}}{R_{\epsilon,n}} \cdot ||\phi|| + \frac{R_{\epsilon,n} - R_{\epsilon,n-1}}{R_{\epsilon,n}}$$

y

$$\lim_{F} \left(\Delta^{(10)} + \Delta^{(11)} + \Delta^{(2)}\right) = 0$$

■

Capítulo 5

CONCLUSIONES

En el trabajo realizado se obtuvo que la complejidad métrica cumple muchas de las propiedades que cumple la (ϵ, n)-complejidad $C_{\epsilon,n}$ en [2]

- Una propiedad muy importante que cumple la complejidad métrica es que cuando f es uniformemente ϵ-expansivo el funcional $\widetilde{I}_\epsilon$ es independiente de la elección de los conjuntos (ϵ, n)-red optimales. en [2] podemos ver que esto se cumple tambien para $C_{\epsilon,n}$. solo que los conjuntos optimales $A_{\epsilon,n}$ son (ϵ, n)-separados

- En [2] se puede ver que las medidas relacionadas a la (ϵ, n)-complejidad son f-invariantes. cuando f es un mapeo casi uniformemente continuo y ϵ-expansivo. de manera similar se demostró que las medidas relacionadas a la complejidad métrica son f-invariante. primero cuando f es un mapeo biyectivo y ϵ-expansivo y despues cuando f es un mapeo sobreyectivo y ϵ-expansivo.

- Como un posible trabajo a futuro quedaría mostrar la relación que existe entre la complejidad métrica y la (ϵ, n)-complejidad, en particular encontrar y estudiar ejemplos donde ν es invariante y μ sea no invariante.

Apéndice A

ULTRAFILTROS Y LEMA DE MARRIAGE

Ahora daremos algunos resultados conocidos y definiciones que pueden ser encontrados, en [7]

Definición A4 *Un conjunto $F \subset 2^{\mathbb{N}}$ es llamado filtro sobre $\mathbb{N}$ si y solo si este satisface las siguientes condiciones.*

(i) Si $A \in F$ y $B \in F$, entonces $A \cap B \in F$.

(ii) Si $A \in F$ y $A \subset B$ entonces $B \in F$

(iii) $\emptyset \notin F$

Sea a_n una sucesión de números reales. a es llamado límite de la sucesión a_n con respecto a el filtro F, $a = \lim_F a_n$, si para cualquier $\epsilon > 0$ tenemos $\{n | \, |a_n - a| < \epsilon\} \in F$. De la definición de filtro se sigue que $\lim_F a_n$ es único, si existe.

Ejemplo. Sea $F_f = \{A \subseteq \mathbb{N} | \, \mathbb{N} \setminus A \text{ es finito}\}$. F_f es llamado filtro de Frechet. Uno puede checar que esto en verdad es un filtro.

Definición A5 *Un filtro F es llamado ultrafiltro si y sólo si para cualquier con* *junto* $A \subset \mathbb{N}$ *tenemos que* $A \in F$ *o* $\mathbb{N} \setminus A \in F$

Teorema A4. *Si una sucesión acotada tiene límite con respecto a un ultrafiltro, este límite es único.*

Proposición A7 *Un ultrafiltro* F *es propio (para algún* $i \in \mathbb{N}$*) si y sólo si este contiene un conjunto finito.*

Esta proposición implica que un ultrafiltro es no propio si y sólo si este es una extensión del filtro de Frechét F_f. Por otra parte, esto se sigue del lema de Zorn que cualquier filtro puede ser extendido a un ultrafiltro.

Proposición A8 Si existe un ultrafiltro F tal que $F \supset F_t$, entonces este ultrafiltro es no propio.

El lema de Marriage de P. Hall es formulado como sigue (ver [4])

Lema A2 *Para una colección de índices* $\{1, 2, \ldots, k\}$ *de conjuntos finitos* $F_1, F_2, \ldots, F_k$ *las siguientes condiciones son equivalentes.*

(i) Existe una función inyectiva $\alpha : \{1, 2, \ldots, k\} \to \bigcup_{i=1}^{k} F_i$ *tal que* $\alpha(i) \in F_i$.

(ii) Para todo $S \subseteq \{1, 2, \ldots, k\}$ *uno tiene* $|\bigcup_{i \in S} F_i| \geq |S|$

Bibliografía

[1] V.Afraimovich and L.Glebsky. *Measures of ϵ-complexity*, Taiwanese J. of Math 9(2005), 397-409.

[2] V.Afraimovich and L.Glebsky. *Measures related to (ϵ, n)-complexity functions*, Discrete and Continuous Dynamical System 22(2008), 23-34.

[3] R.Bowen. Topological entropy for noncompact sets, Trans. AMS 84 (1973), 125-136.

[4] W.A Veech, The metric theory of interval exchange transformations III, The Sah Arnoux Fathi invariant, Amer. J. Math 106 (1984), 1389-1422.

[5] L.Yu. Glebsky, E.I. Gordon and C.J. Rubio. On approximation of unimodular groups by finite quasigroups, Illinois Journal of Mathematics 49 (2005), 17-31

[6] P.R. Halmos, Measure theory, Springer-Verlag, New York, 1974. MR 0033869

[7] N. Bourbaki, Elements of mathematics, General topology. Part 1. Hermann Paris, 1966.

Universidad Autónoma de San Luis Potosí.

Facultad de Ciencias

Medidas de Complejidad Métrica

TESIS

Que para obtener el Grado de

Maestro en Ciencias Aplicadas

P R E S E N T A :

Rosendo Vázquez Bañuelos

ASESOR:

Dr. Valentín Afraimovich

San Luis Potosí, S.L.P. Septiembre de 2008

Agradecimientos

Mi más sincero y gran agradecimiento a mis increíbles padres, Luisa Bañuelos y Rosendo Vázquez, así como a mis hermanos, Ezequiel,Bety, Joel y Vanessa; a mi tía Josefina, a mi primo Jorge Alberto, a mi cuñada Sagrario y a mis sobrinos.

Agradezco a mi asesor: Dr. Valentín Afraimovich, por su tiempo y paciencia invaluables.

Agradezco también a los investigadores, Dr. Álvaro Pérez Raposo, Dr Antonio Morante Lezama y Dr. Edgardo Ugalde Saldaña por el tiempo que dedicaron a la revisión de este trabajo.

También mi más sincero agradecimiento a Delia Santoyo, por todo su apoyo, por sus consejos y por la paciencia que mostro en todo este tiempo.

No puedo no mencionar a mis amigos: Osiris, David, Eduardo, Rodrigo, Efrain y Ricardo, por todo su apoyo: Gracias.

Finalmente, agradezco al IICO-UASLP y al CONACYT, instituciones que me permitieron realizar mis estudios de maestría.