



Universidad Autónoma de San Luis Potosí



Facultad de Ciencias

**GRUPO DE BAUMSLAG-SOLITAR $BS(2, 3)$.
EJEMPLO DE GRUPO SÓFICO**

TESIS

Que para obtener el Grado de

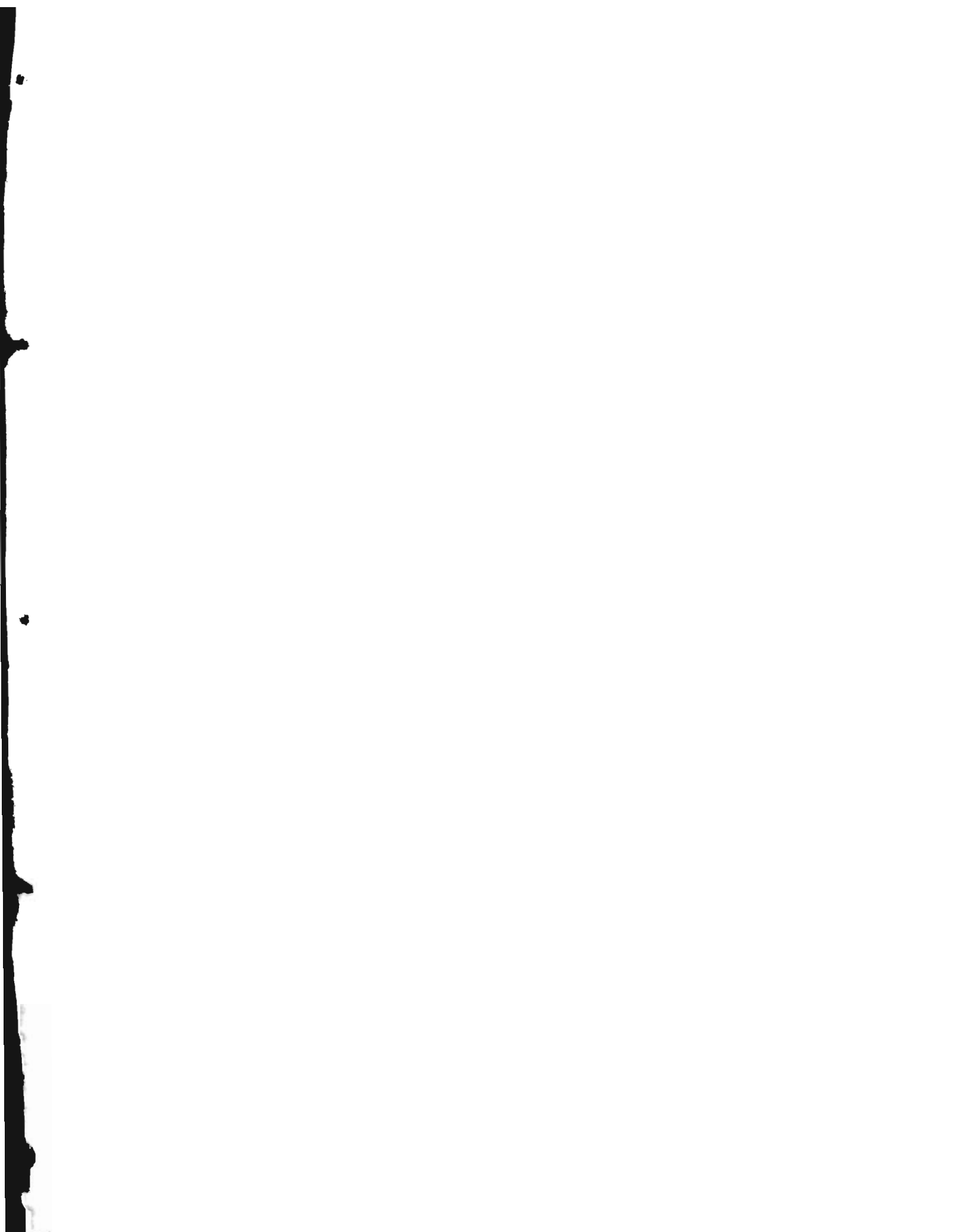
MAESTRO EN CIENCIAS APLICADAS

PRESENTA

Irma Alicia Tristán López

ASESOR:

Dr. Lev Yu Glebsky



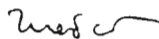
San Luis Potosí, S.L.P., a 14 de Diciembre de 2006

COMITÉ DEL POSGRADO EN CIENCIAS APLICADAS
P R E S E N T E

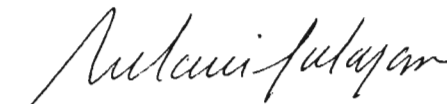
Por medio de la presente se hace constar que la alumna IRMA ALICIA TRISTÁN LÓPEZ ha concluido de manera satisfactoria su trabajo de Tesis en el área de Combinatoria: GRUPO DE BAUMSLAG SOLITAR BS(2,3), EJEMPLO DE GRUPO SÓFICO.

Por lo anterior, la alumna puede realizar los trámites correspondientes para que le sea autorizada la presentación de su Examen de Grado.

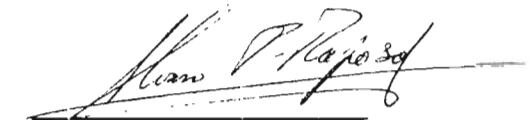
ATENTAMENTE



Dr. Lev Yu Glebsky
Asesor



Dr. Gelasio Salazar Anaya



Dr. Álvaro Pérez Raposo

San Luis Potosí, S.L.P 15 de Diciembre de 2006

M. C. Gustavo Pérez
Secretario Académico
Facultad de Ciencias
Universidad Autónoma de San Luis Potosí
PRESENTE

ASUNTO: Examen de Maestría
Irma Alicia Tristán López

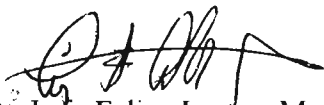
Estimado M. C. Gustavo Pérez:

Por la presente le solicito sus amables gestiones para efectuar todos los trámites conducentes para que se programe el examen de grado de Maestría (Ciencias Aplicadas) de la estudiante **Irma Alicia Tristán López** que se solicita para el día 11 de Enero de 2007. El Jurado propuesto es el siguiente:

1. Dr. Lev Yu Glebsky (Asesor)
2. Dr. Gelasio Salazar Anaya (Sinodal)
3. Dr. Álvaro Pérez Raposo (Sinodal)
4. Dr. José Antonio Vallejo Rodríguez (Sinodal)

Agradeciendo de antemano sus amables oficios para la ejecución de los trámites pertinentes, me despido de usted enviándole un cordial saludo.

Atentamente,



Dr. Luis Felipe Lastras Martínez
Coordinador del Posgrado en Ciencias Aplicadas

Universidad Autónoma de San Luis Potosí

San Luis Potosí, S.L.P., 15 de Diciembre de 2006

A quien corresponda

ASUNTO : Baja de Maestría

Irma Alicia Tristán López

Por medio de la presente le informo a usted que la alumna **Irma Alicia Tristán López** con registro **0079969** ha concluido el 100% de los créditos exigidos para la Maestría en Ciencias Aplicadas y su trabajo de tesis titulado "*Grupo de Baumslag-Solitar BS(2,3). Ejemplo de Grupo Sófico*" ha sido revisado y aprobado por los sinodales, por lo que el estudiante puede realizar su baja de Maestría para iniciar trámites de titulación.

Agradeciendo de antemano sus amables oficios para la ejecución de los trámites pertinentes, me despido de usted enviándole un cordial saludo.

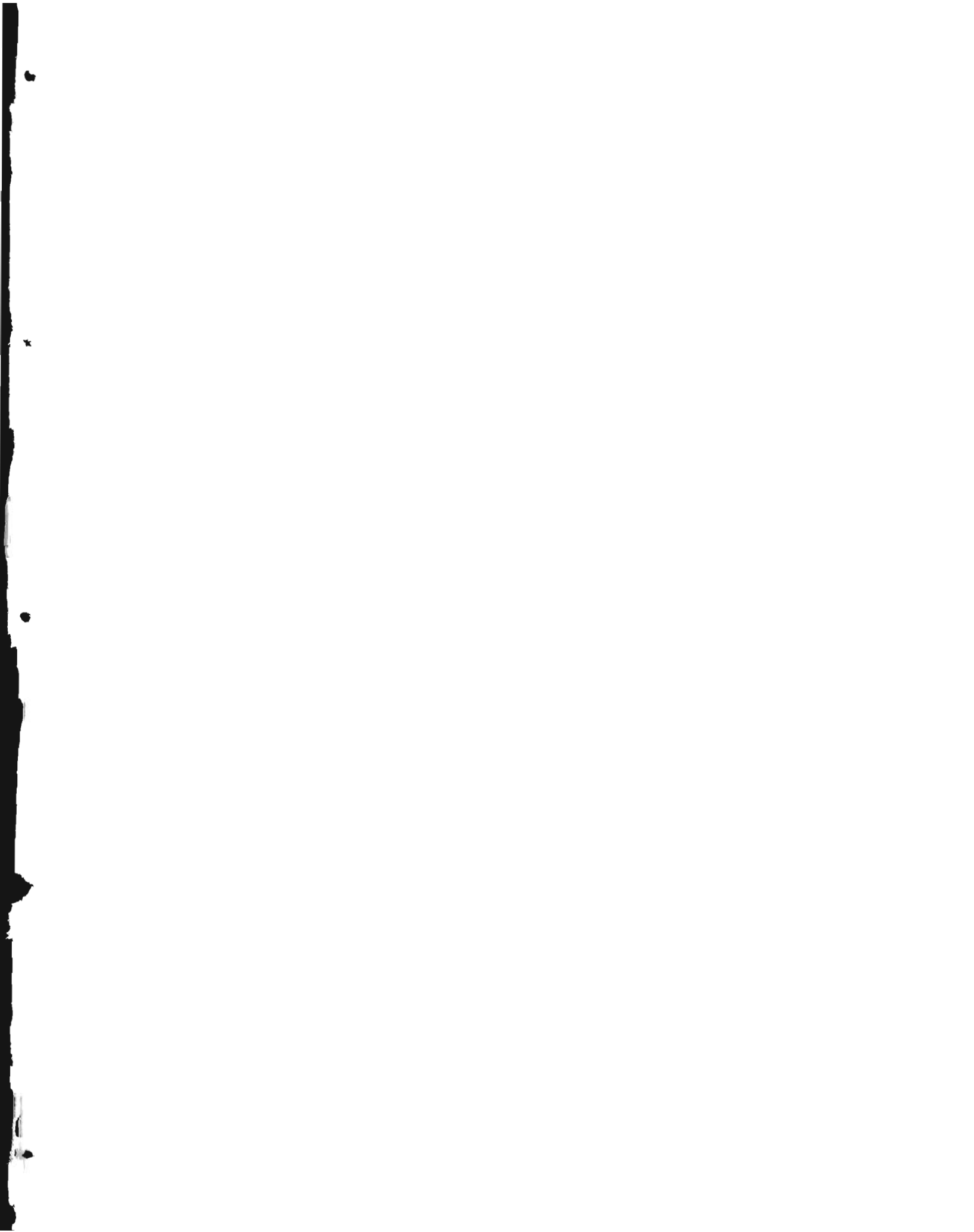
Atentamente,



Dr. Luis Felipe Lastras Martínez

Coordinador del Posgrado en Ciencias Aplicadas

Universidad Autónoma de San Luis Potosí



"Lee las instrucciones (incluso aunque no las sigas)."

Baz Luhrmann

Agradecimientos

Mi más sincero agradecimiento a mis increíbles padres, María Antonia y Ferdinando, así como a mis geniales hermanillos: Fer, Luis y David; a mi tía Irma, a mis abuelitos (QEPD): Sixta y Domingo, Hermelinda y Antonio. Son el mejor ejemplo de lo que aspiro a ser.

Agradezco a mi asesor: Dr. Lev Yu Glebsky, por su tiempo y paciencia invaluable.

Agradezco también a los investigadores: Dr. Álvaro Pérez Raposo, Dr. Antonio Morante Lezama, Dr. Gelasio Salazar Anaya, y Dr. José Antonio Vallejo Rodríguez por el tiempo que dedicaron a la revisión de este trabajo.

No puedo no mencionar a mis amigos: Tomates, Movimiento Browniano, Matemáticos, Físicas, Duros, Pue, Blanca, Dulce, Bety y Jorch pues me dieron su apoyo, consejo y hasta me ayudaron a convertir archivos en alguna ocasión: Gracias.

Un agradecimiento especial a mi amigo Juan Luis, quien me permitió descubrir que el tiempo, el espacio y las coincidencias, son las coordenadas mínimas necesarias para encontrar magia y esperanza.

Finalmente, agradezco al IICO-UASLP y al CONACYT, instituciones que me permitieron realizar mis estudios de maestría.

Resumen

Se determina que el grupo de Baumslag-Solitar $BS(2, 3)$ es sófico empleando la caracterización de la definición de soficidad debida a Weiss, puesto que los grupos de Baumslag-Solitar son finitamente generados.

Para demostrar la soficidad de $BS(2, 3)$ se elabora la construcción del grafo de Cayley de $BS(2, 3)$ y se construye una familia de (k, ϵ) -aproximaciones finitas a Γ para cada $\epsilon > 0$ y cada $k \in \mathbb{N}$.

Contenido

Agradecimientos	III
Resumen	V
Contenido	VII
Introducción	1
0.1 Objetivo	7
1 Grafo de Cayley asociado a $BS(2, 3)$	9
1.1 Grupo de Baumslag-Solitar $BS(2, 3)$	9
1.2 Construcción del grafo de Cayley asociado a $BS(2, 3)$	14
2 Estructura del árbol λ etiquetado	27
3 Aproximación finita	33
4 Demostración de que $BS(2, 3)$ es sófico por la definición de Weiss	39
Conclusiones	47
Referencias	49

Introducción

La noción de los grupos sóficos como una nueva clase, fue primeramente definida por M. Gromov en el año de 1999 en su trabajo publicado: *Endomorphisms of symbolic algebraic varieties* (ver [Gromov99]) como "una generalización de los grupos amenables y los grupos residualmente finitos".

En el año 2000, B. Weiss (ver [Weiss00]) describió una caracterización de los grupos sóficos para los grupos finitamente generados.

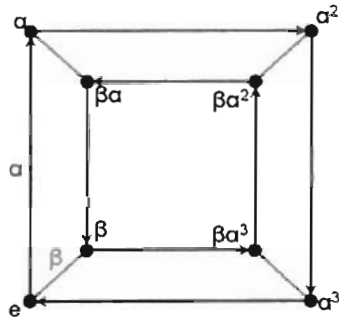
Definición 0.1. Sea B un conjunto, se dice *simétrico* si para cada $b \in B$ se tiene $b^{-1} \in B$.

Definición 0.2. Sean G un grupo finitamente generado, y $B \subset G$ un subconjunto generador, simétrico, finito, fijo. El *Grafo de Cayley de G dado por B* es un digrafo Γ , cuyas aristas están etiquetadas por los elementos de B : el conjunto de vértices es justamente G , y las aristas con etiqueta $b \in B$ son los pares (g, bg) para todo $g \in G$.

Para ilustrar esta última definición, a continuación se presentan dos ejemplos de grafo de Cayley dado por un conjunto generador fijo.

El primer ejemplo, ilustrado en la figura 0.1, es el grafo de Cayley asociado al grupo dihedral $D_4 = \langle \alpha, \beta \mid \alpha^4 = \beta^2 = e, \alpha\beta = \beta\alpha^3 \rangle$. Nótese que el conjunto generador en este caso es $\{\alpha, \beta\}$.

El segundo ejemplo, ilustrado en la figura 0.2, es el grafo de Cayley asociado al grupo

Figura 0.1: Grupo Dihedral D_4 .

libre con dos generadores α y β .

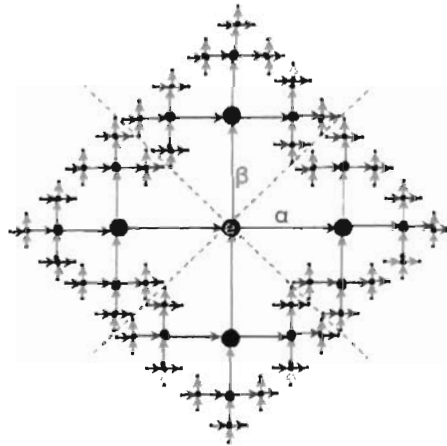


Figura 0.2: Grupo libre con dos generadores.

Definición 0.3. Llamaremos O_k a la k -bola con centro en $l \in \Gamma$ (se trata de un grafo arista-coloreado, además de un subconjunto finito en G).

Definición 0.4. (Definición de Grupo Sófico debida a Weiss) Sean $\epsilon > 0$ y $k \in \mathbb{N}$. Un digrafo finito (V, E) arista-etiquetado por B es una (k, ϵ) -aproximación de un grafo de Cayley Γ (figura 0.3) si existe un subconjunto $V_0 \subset V$ con las propiedades siguientes:

1. Para cada vértice $v \in V_0$ existe una función $\psi_v : O_k \rightarrow V$, la cual es un *isomorfismo* (de

grafos etiquetados) entre O_k y la k -bola en V con centro en v .

$$2. |V_0| \geq (1 - \epsilon)|V|.$$

Un grupo G finitamente generado, es *sófico* si para cada $\epsilon > 0$ y cada $k \in \mathbb{N}$, existe una (k, ϵ) -aproximación del grafo de Cayley correspondiente a G .

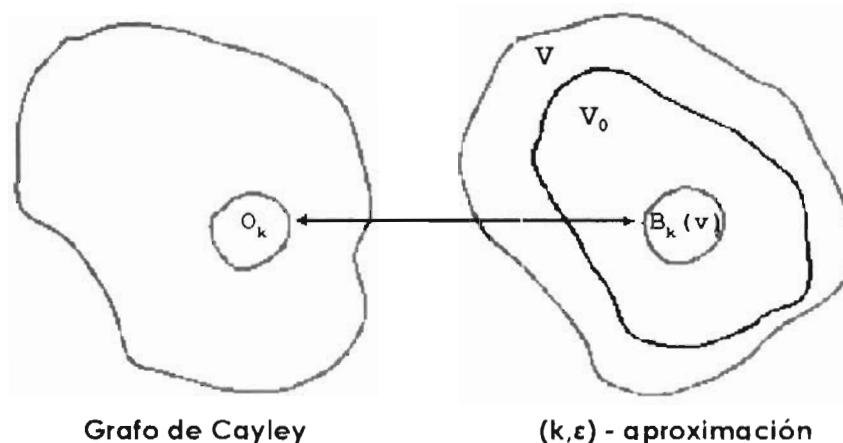


Figura 0.3: (k, ϵ) -aproximación de un grafo de Cayley.

Empleando esta caracterización, podemos ver con mayor claridad que los grupos sóficos son, en efecto, una generalización de los grupos residualmente finitos y los grupos amenables.

Supongamos que G es residualmente finito. Entonces existe un homomorfismo θ de G sobre un grupo finito G_0 que es uno a uno sobre O_k . En este caso, el grafo de Cayley de $(G_0, \theta(B))$ es un grafo finito que satisfará las condiciones 1 y 2 de la definición de Weiss con $\epsilon = 0$. En consecuencia, todo grafo residualmente finito es sófico.

La caracterización de Folner para un grupo amenable G , es que para todo conjunto finito K , y cualquier $\epsilon > 0$, existe un conjunto finito $F \subset G$ que satisface

$$|\{f \in F : fK \subset F\}| \geq (1 - \epsilon) \cdot |F|.$$

Sea $K = O_k(B)$, se ve claramente que el subgrafo de el grafo de Cayley asociado a G generado por B definido por los vértices en F da un grafo finito que satisface la definición de Weiss.

Entonces, como B. Weiss demostró en su artículo (ver [Weiss00]), se tiene el siguiente teorema.

Teorema 0.5. *Todos los grupos residualmente finitos y los grupos amenables son sóficos.*

En el mismo artículo, y siendo el propósito de éste, Weiss estableció en su teorema, la relación entre la nueva clase y un problema en Dinámica Topológica planteado en 1973 por W. Gottschalk sobre los grupos que tienen la propiedad deseable de ser suprajuntivos.

Definición 0.6. Sea G un conjunto contable. Existe una acción natural definida en el espacio compacto A^G , donde $A = \{1, 2, \dots, a\}$, $a \in \mathbb{N}$, a la cual se le llama *corrimiento derecho* σ dado por:

$$(\sigma_g \omega)(h) = \omega(hg),$$

donde $g, h \in G$ y $\omega \in A^G$.

Definición 0.7. Un mapeo $\phi : A^G \rightarrow A^G$ que conmuta con el corrimiento es llamado *endomorfismo*.

Definición 0.8. Un grupo contable G se dice *suprajuntivo* si para cualquier conjunto finito A y cualquier mapeo continuo $\phi : A^G \rightarrow A^G$ que es un endomorfismo, la inyectividad implica suprayectividad.

Teorema 0.9. (Teorema de Weiss) *Si G es un grupo sófico entonces es suprajuntivo.*

De esta manera, la soficidad permitió demostrar que para una clase más generalizada que las otras grandes clases de grupos amenables y residualmente finitos, está presente la propiedad de suprajuntividad, que es relevante para la *Teoría de Autómatas Celulares*.

Recientemente, G. Elek y E. Szabó entre otros, han continuado con el estudio de los grupos sóficos. En el año 2003 publicaron un trabajo (ver [Elek06]) en el cual dan una definición de grupo sófico generalizada.

Definición 0.10. Para un conjunto finito V , sea $\text{Map}(V)$ el monoide de auto-mapeos de V actuando por la derecha. La operación monoide es la composición de auto-mapeos.

Definición 0.11. Para dos elementos $e, f \in \text{Map}(V)$ definimos la distancia

$$d(e, f) = \frac{|\{v \in V : (v)e \neq (v)f\}|}{|V|}.$$

Definición 0.12. (Definición de Grupo Sófico debida a Elek-Szabó) Un grupo G es sófico si para cada número real $\delta \in (0, 1)$ y cualquier subconjunto finito $F \subseteq G$, existe un conjunto finito V y una función $\phi : G \rightarrow \text{Map}(V)$ con las siguientes propiedades:

- a) Sean $f, h \in F$, entonces $d((fh)\phi, (f)\phi(h)\phi) \leq \delta$.
- b) $d((e)\phi, id_V) \leq \delta$.
- c) Si $f \in F \setminus \{e\}$, entonces $d((f)\phi, id_V) > 1 - \delta$.

La equivalencia de las definiciones de grupo sófico de Weiss y de Elek-Szabó ha sido demostrada por estos últimos para grupos finitamente generados (ver [Elek04]).

Proposición 0.13. Para un grupo finitamente generado G , ambas nociones de soficidad mencionadas, son equivalentes.

Demostración. Suponemos que se cumple la definición de Weiss.

Sean $\delta > 0$ y $F \subseteq G$ un subconjunto finito. Escogemos $k \in \mathbb{N}$ tal que el conjunto producto $F \cdot F$ está contenido en O_k .

Sean (V, E) el digrafo etiquetado, y $V_0 \subset V$ el subconjunto correspondiente a $\epsilon = \delta$ y k . Usamos este conjunto finito V , y definimos la función $\phi : G \rightarrow \text{Map}(V)$ como sigue: Para

$g \in O_k$ y $v \in V$, será $(v)(g)\phi = (g)\psi_v$; para $g \in G \setminus O_k$, se define $(g)\phi$ arbitrariamente.

Es sencillo verificar las condiciones (a)-(c). Ahora bien, suponemos que se cumple la definición de Elek-Szabó.

Sean $\epsilon > 0$ y $k \in \mathbb{N}$. Tomamos $F = O_{2(k+1)}$, y escogemos cualquier $\delta > 0$. Sea $\phi : G \rightarrow \mathbb{M}_{ap}(V)$ la función de la definición de Elek-Szabó, para este par (F, δ) .

Usamos a V como el conjunto de vértices del nuevo grafo, y para cada $v \in V$ definimos: $\psi_v : O_{k+1} \rightarrow V$, tal que $(g)\psi_v = (v)(g)\phi$.

Sea V_0 el conjunto de aquellos $v \in V$ para los cuales

- i) $(bg)\psi_v = (b)\psi_{(g)\psi_v}$ para todo $g \in O_k$ y todo $b \in B$,
- ii) $(g)\psi_v \neq (h)\psi_v$ siempre que $g, h \in O_{k+1}$.

Finalmente se construyen las aristas etiquetadas de V : para cada $b \in B$ y $v \in V$ añadimos la arista $(v, (b)\psi_v)$ con la etiqueta b . Es sencillo ver que la k -bola centrada en v es el conjunto $(O_k)\psi_v$, y todas las aristas salientes de sus vértices están contenidos en la $(k+1)$ -bola $(O_{k+1})\psi_v$. La condición (ii) implica que ψ_v es inyectiva, y la condición (i) asegura que ψ_v preserva las aristas salientes de $(g)\psi_v$. Luego la condición (1) de la definición de Weiss se satisface. Hay $|O_k| \cdot |B|$ ecuaciones por verificar en (i) y $|O_{k+1}|^2$ desigualdades, en (ii). Sabemos por la condición (a) de la definición de Elek-Szabó, que cada una de las ecuaciones pueden fallar en a lo más $\delta|V|$ vértices $v \in V$. Además, aplicaremos la definición de Elek-Szabó a los elementos g, h en (ii), y obtendremos:

$$((g)\psi_v)(g^{-1})\phi \stackrel{(a)}{=} (v)(gg^{-1})\phi \stackrel{(b)}{=} v \stackrel{(c)}{\neq} (v)(hg^{-1})\phi \stackrel{(a)}{=} (\psi_v(h))(g^{-1})\phi,$$

donde cada igualdad o desigualdad se ha marcado con la condición correspondiente de la definición de Elek-Szabó. Entonces $(g)\psi_v \neq (h)\psi_v$ para todo v fuera de un subconjunto de tamaño a lo más $4\delta|V|$. Así que cada desigualdad en (ii) puede fallar en a lo más $4\delta|V|$ vértices $v \in V$. Luego la condición (2) de la definición de Weiss se verifica para $\delta < \frac{\epsilon}{4|O_{k+1}|^2|O_k||B|}$.

□

Elek y Szabó también incluyen en uno de sus trabajos la demostración del teorema que a continuación se enuncia (ver [Elek06]).

Teorema 0.14. *La clase de grupos sóficos es cerrada bajo las siguientes construcciones:*

1. *productos directos, subgrupos, límites inversos, límites directos,*
2. *productos libres.*

Introducimos a continuación la definición de los grupos de Baumslag-Solitar.

Definición 0.15. (Grupos de Baumslag-Solitar) Se les llama *grupos de Baumslag-Solitar* a los grupos definidos por la presentación:

$$G(m, n) = \langle t, b; t^{-1}b^mt = b^n \rangle,$$

donde $m, n \in \mathbb{Z}$ y $m \neq 0, n \neq 0$.

Para los grupos de Baumslag Solitar, la pertenencia en la clase de grupos sóficos no se deriva de la proposición antes enunciada. Siendo ésta la circunstancia para los grupos de Baumslag-Solitar, demostrar la pertenencia a la clase de grupos sóficos requiere de una prueba directa.

Otra característica de estos grupos es que los grafos de Cayley asociados, tienen una representación sencilla y son conexos en forma regular.

Para el caso particular de $BS(2, 3)$, ocurre que este grupo es no residualmente finito, además de ser no amenable.

0.1. Objetivo

El objetivo del presente trabajo, es determinar si el grupo de Baumslag-Solitar $BS(2, 3)$ es sófico, empleando la caracterización de la definición debida a Weiss, puesto que los grupos

de Baumslag-Solitar son finitamente generados.

La motivación para trabajar con los grupos de Baumslag-Solitar, proviene de que en $BS(2, 3)$ tenemos un ejemplo de un grupo que no es amenable ni residualmente finito. Como la clase de grupos sóficos es una generalización de estas clases, la pregunta natural es si $BS(2, 3)$ es sófico. Además los grafos de Cayley correspondientes a los grupos de Baumslag-Solitar, tienen una estructura sencilla y regular que hace posible trabajar con ellos.

La solución de este problema comprende dos pasos:

1. Proponer un grafo Γ como candidato a ser el Grafo de Cayley de $BS(2, 3)$ y verificarlo.
2. Proponer una familia de grafos que sean (k, ϵ) -aproximaciones finitas verificando que cada una sea localmente isomorfa a Γ para la mayoría de los vértices en dicho grafo, para cada $\epsilon > 0$ y cada $k \in \mathbb{N}$.

Capítulo 1

Grafo de Cayley asociado a $BS(2, 3)$

1.1. Grupo de Baumslag-Solitar $BS(2, 3)$

Definición 1.1. El Grupo de Baumslag-Solitar $BS(2, 3)$ es el grupo definido por la presentación:

$$BS(2, 3) = \langle t, b; t^{-1}b^2t = b^3 \rangle.$$

El grupo $BS(2, 3)$ es un grupo no abeliano. Está finitamente representado (tiene dos generadores y un único relator); sin embargo, se trata de un grupo infinito.

En la literatura relacionada, este grupo es frecuentemente mencionado como ejemplo de grupo no hopfiano.

Definición 1.2. Se dice que un grupo G es *no hopfiano*, si es isomorfo a un grupo factor propio.

Entonces para ver que $BS(2, 3)$ es no hopfiano, añadimos al relator $b = (b^{-1}t^{-1}bt)^2$ a la presentación de $BS(2, 3)$ para obtener

$$F = \langle b, t; t^{-1}b^2t = b^3, b = (b^{-1}t^{-1}bt)^2 \rangle,$$

un candidato a ser grupo factor propio de $BS(2, 3)$. Para verificar que lo es, veremos que el relator $b = (b^{-1}t^{-1}bt)^2$ no es válido en $BS(2, 3)$. Posteriormente demostraremos que $BS(2, 3)$

y F son isomorfos.

El grafo de Cayley Γ asociado a $BS(2, 3)$ (ver sección 1.2), es útil para ver que el relator $b = (b^{-1}t^{-1}bt)^2$ en F no es válido para $BS(2, 3)$. Basta ver que la palabra dada por $b^{-1}(b^{-1}t^{-1}bt)^2$, no origina un camino cerrado en Γ .

En la figura 1.1 se presenta un segmento de Γ , el grafo asociado a $BS(2, 3)$ como se construye en la sección 1.2, donde se puede apreciar un vértice fijo (x_0, α_0) y el camino descrito por el relator en la forma $b^{-2}t^{-1}btb^{-1}t^{-1}bt$. Notamos que el camino dado por el relator propuesto, no es un camino cerrado.

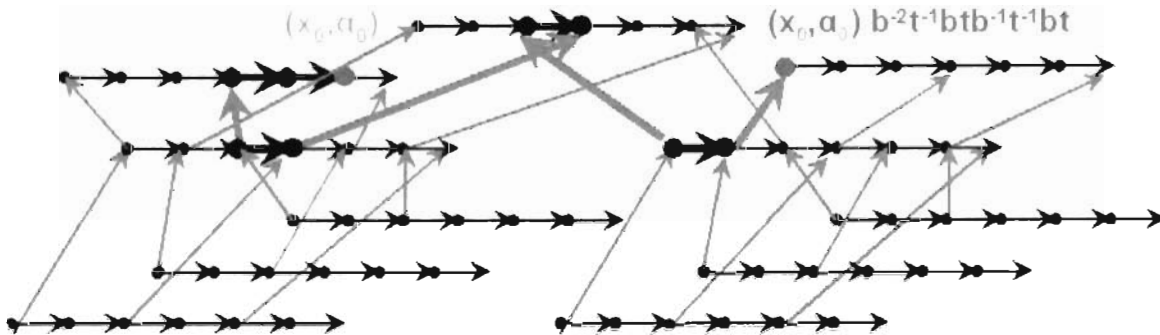


Figura 1.1: Camino dado por $(x_0, \alpha_0)b^{-2}t^{-1}btb^{-1}t^{-1}bt$ en un segmento de Γ .

El camino dado por $(x_0, \alpha_0)b^{-2}t^{-1}btb^{-1}t^{-1}bt$ en Γ , tiene una proyección en el segmento correspondiente del árbol λ , también descrito en detalle en la sección 1.2. Dicha proyección también forma un camino no cerrado, como podemos apreciar en la figura 1.2.

Entonces, es cierto que F es un grupo factor propio de $BS(2, 3)$.

Para ver que F y $BS(2, 3)$ son isomorfos, veremos ambos tienen la misma presentación, para ello, requerimos de las llamadas *transformaciones de Tietze* descritas a continuación.

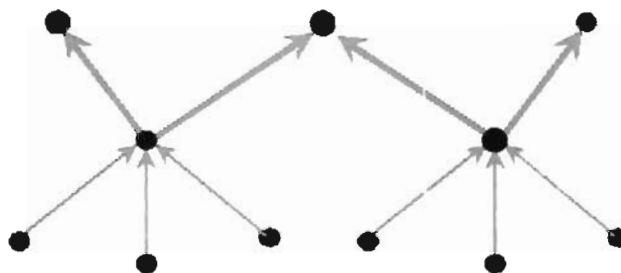


Figura 1.2: Camino dado por la proyección de $(x_0, \alpha_0) b^{-2} t^{-1} b t b^{-1} t^{-1} b t$ en un segmento de λ

Proposición 1.3. (Tietze) Dada una presentación

$$\langle a, b, c, \dots; P, Q, R, \dots \rangle$$

para un grupo G , con generadores a, b, c, \dots y relatores P, Q, R, \dots , cualquier otra presentación de G puede ser obtenida por la aplicación repetida de las siguientes transformaciones de la presentación:

- (T1) Si las palabras S, T, \dots pueden obtenerse a partir de P, Q, R, \dots , entonces se agregan S, T, \dots al conjunto de relatores en la presentación.
- (T2) Si algunos de los relatores, digamos, S, T, \dots listados entre los relatores P, Q, R, \dots se pueden obtener de los otros, se eliminan S, T, \dots del conjunto de relatores en la presentación.
- (T3) Si K, M, \dots son palabras cualesquiera en términos de a, b, c, \dots , entonces agregue x, y, \dots al conjunto de generadores en la presentación y adjunte los relatores $x = K, y = M, \dots$ al conjunto de relatores en la presentación.
- (T4) Si alguno de los relatores en la presentación toma la forma $p = V, q = W, \dots$ donde p, q, \dots son generadores en la presentación y V, W, \dots son palabras en términos de generadores distintos a p, q, \dots , entonces elimine a p, q, \dots del conjunto de generadores,

elimine a $p = V, q = W, \dots$ del conjunto de relatores, y reemplace a p, q, \dots por V, W, \dots respectivamente, en los relatores restantes en la presentación.

En la presentación de $BS(2, 3)$ dada por la definición 1.1, aplicamos (T3) para introducir $c = b^{-1}t^{-1}bt$ como un generador; obtenemos

$$F = \langle b, t, c; t^{-1}b^2t = b^3, b = (b^{-1}t^{-1}bt)^2, c = b^{-1}t^{-1}bt \rangle,$$

o bien,

$$F = \langle b, t, c; t^{-1}b^2t = b^3, b = c^2, c = b^{-1}t^{-1}bt \rangle.$$

Podemos eliminar a b por (T4), si le reemplazamos con c^2 , y obtenemos

$$F = \langle t, c; t^{-1}c^4t = c^6, c = c^{-2}t^{-1}c^2t \rangle.$$

Cambiando la forma del último relator, tenemos

$$F = \langle t, c; t^{-1}c^4t = c^6, t^{-1}c^2t = c^3 \rangle;$$

y, como el primer relator se obtiene del segundo, entonces por (T2)

$$F = \langle c, t; t^{-1}c^2t = c^3 \rangle.$$

Entonces F y $BS(2, 3)$ tienen la misma presentación y por lo tanto son isomorfos. Entonces $BS(2, 3)$ es isomorfo a un grupo factor propio. Hemos demostrado que $BS(2, 3)$ es no hopfiano.

Se sabe que todo grupo residualmente finito es hopfiano, en consecuencia, $BS(2, 3)$ no es residualmente finito, como ya se había mencionado.

También se mencionó que $BS(2, 3)$ es conocido por ser no amenable. Al respecto, se conoce el siguiente resultado.

Proposición 1.4. *Si un grupo contiene un subgrupo libre con dos generadores, entonces no es amenable.*

Entonces para ver, que en efecto, $BS(2, 3)$ es no amenable, veremos que $BS(2, 3)$ tiene un subgrupo libre con dos generadores. Para ello, proponemos los elementos tb y bt , y nos referimos nuevamente al grafo de Cayley Γ asociado a $BS(2, 3)$ presentado en la sección 1.2.

Pretendemos ver que nuestro grafo Γ tiene un subgrafo generado por tb y bt isomorfo al grafo de Cayley asociado al grupo libre de dos generadores (ver figura 2 en la introducción).

En Γ se tienen infinitas órbitas infinitas de las aristas etiquetadas por b relacionadas entre sí por las aristas etiquetadas por t de acuerdo al relator de $BS(2, 3)$, de manera que para cada órbita salen aristas t a dos órbitas distintas y entran aristas t de otras tres órbitas distintas como se puede apreciar en la figura 1.3. Ningún par de vértices consecutivos en las órbitas etiquetadas por b se dirige por una arista t o t^{-1} (arista etiquetada con t , pero con orientación opuesta) a la misma órbita, sino que se alternan cada dos vértices si salen por t ; y cada tres, si entran por t^{-1} .

Fijamos un vértice (x_0, α_0) en Γ y observamos la acción de los elementos tb , bt y sus respectivos inversos $b^{-1}t^{-1}$ y $t^{-1}b^{-1}$, en la figura 1.3, sobre dicho vértice.

Notamos que como cada uno de los elementos generadores incluye un desplazamiento sobre la órbita de aristas etiquetadas por b (con orientación inversa para los elementos inversos), la acción de cada uno sobre el vértice fijo (x_0, α_0) , resulta en los vértices: $(x_0, \alpha_0)tb$, $(x_0, \alpha_0)bt$, $(x_0, \alpha_0)b^{-1}t^{-1}$ y $(x_0, \alpha_0)t^{-1}b^{-1}$. Estos cuatro vértices se encuentran en órbitas etiquetadas por b distintas: las dos salientes y dos de las tres entrantes, respectivamente.

De las consideraciones propuestas, el comportamiento previsto para el subgrafo de Γ generado por tb y bt , es el mismo del grafo de Cayley asociado al grupo libre de 2 generadores: para cada vértice (x, α) de este subgrafo, hay un único camino dado por $(x, \alpha)tb$ y un único camino dado por $(x, \alpha)(tb)^{-1} = (x, \alpha)b^{-1}t^{-1}$; así como un único camino dado por $(x, \alpha)bt$ y un único camino dado por $(x, \alpha)(bt)^{-1} = (x, \alpha)t^{-1}b^{-1}$, donde los vértices extremos de cada

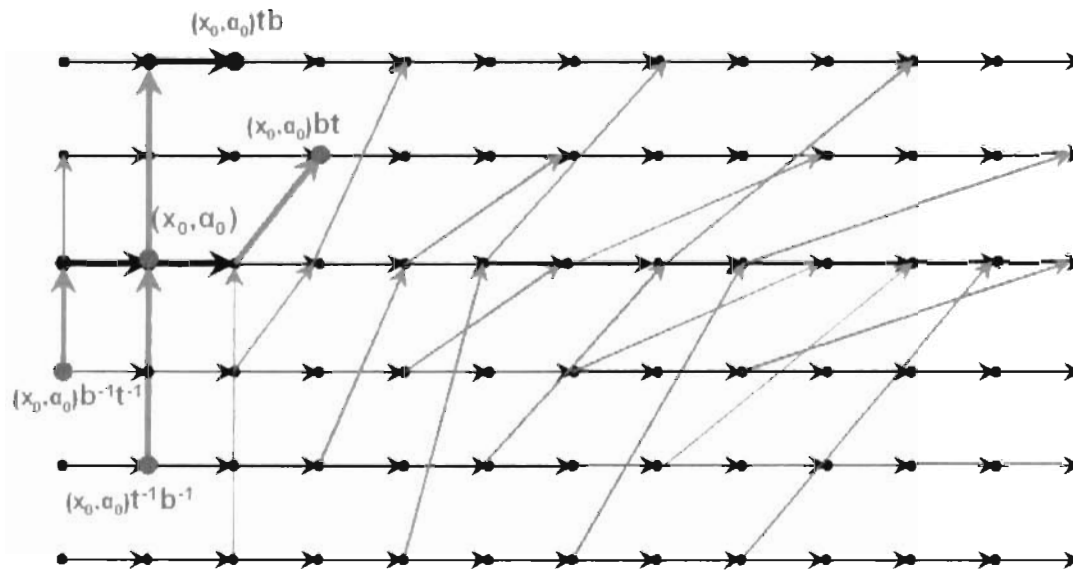


Figura 1.3: Segmento del grafo generado por tb y bt .

uno de estos caminos, se encuentran, todos, en órbitas etiquetadas por b distintas.

La proyección del subgrafo descrito sobre el árbol λ , ilustrada en la figura 1.4, permite hacer evidente que el subgrafo resultante será isomorfo al grafo de Cayley asociado al grupo libre con dos generadores.

Entonces $BS(2, 3)$ tiene un subgrupo libre generado por tb y bt , y por lo tanto es no amenable.

1.2. Construcción del grafo de Cayley asociado a $BS(2, 3)$

Hemos dicho que se pretende determinar si el grupo de Baumslag-Solitar $BS(2, 3)$ es sófico por medio de la caracterización de la definición de Weiss. El propósito de este capítulo es proponer un grafo Γ como candidato a ser el Grafo de Cayley de $BS(2, 3)$ y verificar que, de hecho, lo es.

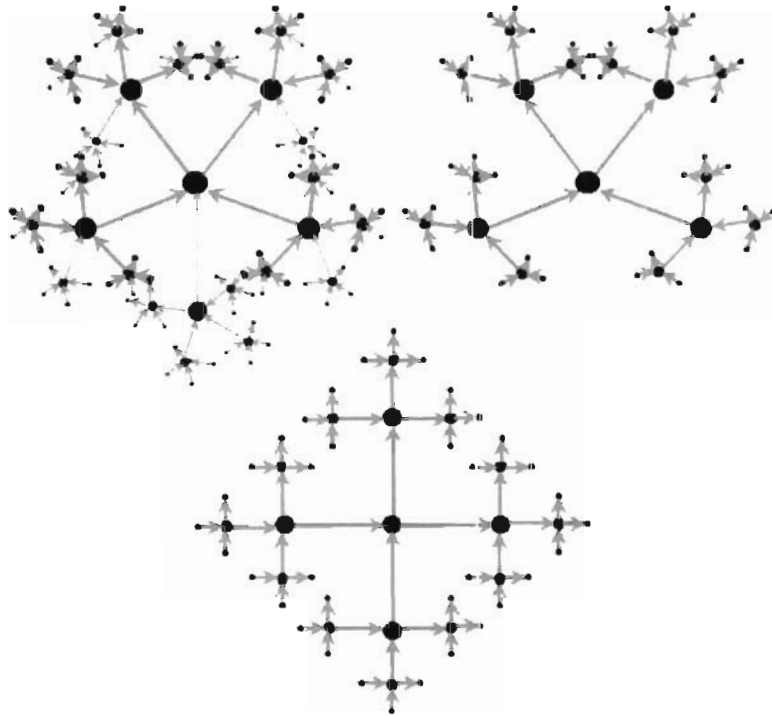


Figura 1.4: Proyección del subgrafo generado por tb y bt sobre λ .

Para poder construir al grafo de Cayley de $BS(2, 3)$ con la presentación dada en la definición 1.1, podemos pensar inicialmente en una órbita infinita de aristas etiquetados por b (coincidentemente isomorfo al grafo de Cayley de \mathbb{Z}). A continuación podemos relacionar dicha órbita con otra igual empleando aristas etiquetados por t empleando el relator $t^{-1}b^2t = b^3$, de manera que por cada tres aristas en nuestra primer órbita, tendremos una arista etiquetada por t que llega al vértice correspondiente en la órbita infinita.

Podemos ver que para que llegue una arista t a cada vértice de nuestra primer órbita de aristas b , necesitaremos aún otro par de órbitas infinitas para relacionarlas de la misma manera que la anterior. En cuanto a las aristas t que deben de salir de cada vértice de la órbita inicial, necesitaremos dos órbitas infinitas de aristas etiquetados por b , relacionados a nuestra órbita inicial de manera que por cada dos aristas tendremos una arista etiquetada por t que sale del

vértice correspondiente en la órbita infinita (ver figura 1.5).

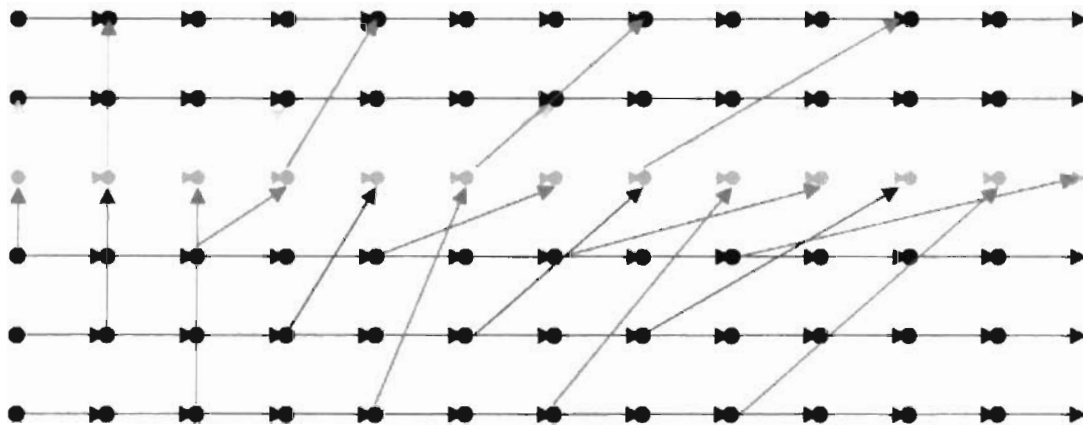


Figura 1.5: Segmento de Γ .

Entonces en el grafo de Cayley de $BS(2, 3)$ debe haber una infinidad de órbitas de aristas etiquetados por b a su vez infinitas, para las cuales para cada una, habrá dos órbitas relacionadas por aristas t salientes, y habrá tres órbitas relacionadas por aristas t entrantes.

Si contrajéramos cada una de las órbitas infinitas de aristas etiquetados por b , resultaría en un árbol infinito con tres aristas entrantes y dos aristas salientes para cada vértice. Entonces para dar una construcción formal de Γ es conveniente hacer uso de dicho árbol, al cual llamaremos λ (figura 1.6).

Para el desarrollo del presente trabajo será necesario diferenciar las aristas salientes de cada vértice y diferenciar las aristas entrantes a cada vértice. Por ello, es conveniente establecer una estructura que nos permita etiquetar a las aristas de λ , además de las etiquetas que ya tienen por su coloración. Ideamos la estructura de etiquetas que describiremos en lo consecutivo. Dicha estructura tiene como base lo siguiente:

1. Cada arista en el árbol λ tiene una etiqueta auxiliar $\langle i, \bar{i} \rangle$ conformada por dos etiquetas independientes entre sí.

2. La etiqueta i toma valores $i = 0, 1$ y para cada vértice, las dos aristas salientes tienen etiquetas distintas.
3. La etiqueta j toma valores $j = 0, 1, 2$ y para cada vértice, las tres aristas entrantes tienen etiquetas distintas.

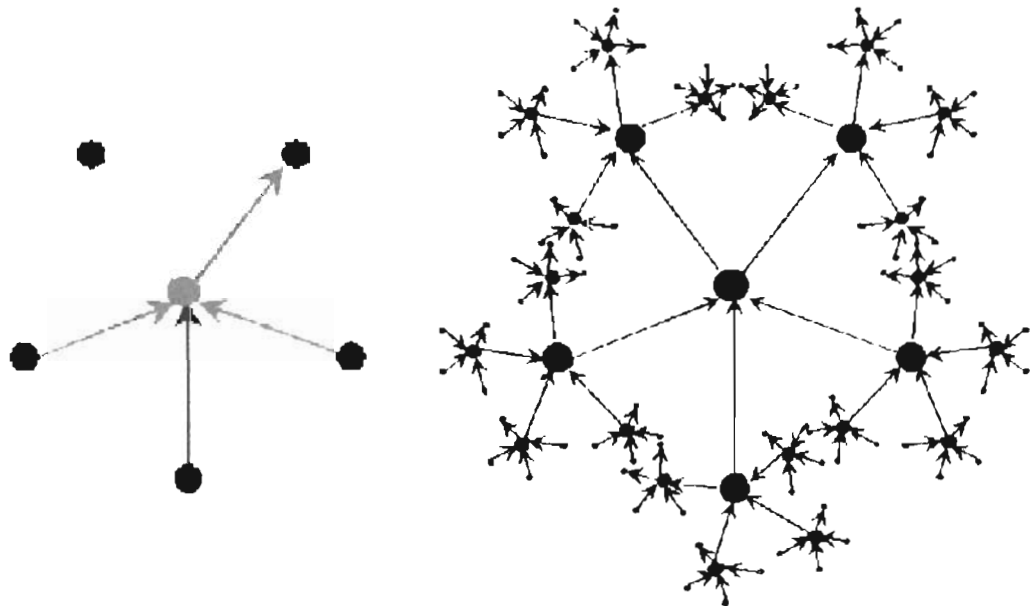


Figura 1.6: Segmentos de λ .

El siguiente resultado nos asegura que podemos encontrar un árbol λ que verifica las condiciones requeridas.

Lema 1.5. *Existe al menos un árbol etiquetado que satisface las condiciones de la estructura de etiquetas propuesta para λ .*

Demostración. Para cada vértice $\alpha \in V(\lambda)$, fijamos valores distintos 0 y 1 para las etiquetas i correspondientes a sus dos aristas salientes. De esta manera se cumple la condición 2.

Para cada vértice $\alpha \in V(\lambda)$, fijamos valores distintos 0, 1 y 2 para las etiquetas j correspondientes a sus tres aristas entrantes. Así tenemos que se verifica 3.

Como los valores de las etiquetas i y j fueron fijados con procedimientos independientes, y como a cada arista le corresponde un valor de i en calidad de arista saliente y un valor de j en calidad de arista entrante, se verifica la condición 1. \square

Considerando lo anterior podemos definir ahora a Γ . Comenzaremos definiendo al conjunto de vértices $V(\Gamma)$ como:

$$V(\Gamma) = \mathbb{Z} \times V(\lambda).$$

En cuanto a $E(\Gamma)$, el conjunto de aristas de Γ , emplearemos para \mathbb{Z} las particiones $\mathcal{A} = \{A_0, A_1\}$ y $\mathcal{B} = \{B_0, B_1, B_2\}$ donde $A_i = 2\mathbb{Z} + i$, para $i = 0, 1$ y $B_j = 3\mathbb{Z} + j$, para $j = 0, 1, 2$.

Sea $f_{i,j} : A_i \rightarrow B_j$ una biyección definida por

$$f_{i,j}(x) = \frac{3}{2}(x - i) + j. \quad (1.1)$$

En λ , es posible distinguir los *vértices vecinos salientes* de un vértice fijo α , por medio de las funciones $m_i : V(\lambda) \rightarrow V(\lambda)$, $i = 0, 1$, que son tales que $[\alpha, m_i(\alpha)] \in E(\lambda)$ tiene etiqueta $\langle i, j_i \rangle$ y $m_0(\alpha) \neq m_1(\alpha)$ son precisamente los dos vecinos salientes de α (ver figura 1.7).

También es posible distinguir a los *vértices vecinos entrantes* de un vértice fijo α , por medio de las funciones $m^j : V(\lambda) \rightarrow V(\lambda)$, $j = 0, 1, 2$, tales que $[m^j(\alpha), \alpha] \in E(\lambda)$ tiene etiqueta $\langle i_j, j \rangle$ y $m^0(\alpha)$, $m^1(\alpha)$ y $m^2(\alpha)$, son diferentes y son precisamente los tres vecinos entrantes de α (ver figura 1.7).

Entonces $E(\Gamma)$ se define por:

$$E(\Gamma) = E_b \cup E_l,$$

donde E_b es el conjunto de aristas etiquetadas por b si van de $(x, \alpha) \in \Gamma$ a $(x, \alpha)b$, y por b^{-1} si van de $(x, \alpha) \in \Gamma$ a $(x, \alpha)b^{-1}$, donde

$$(x, \alpha)b = (x + 1, \alpha),$$

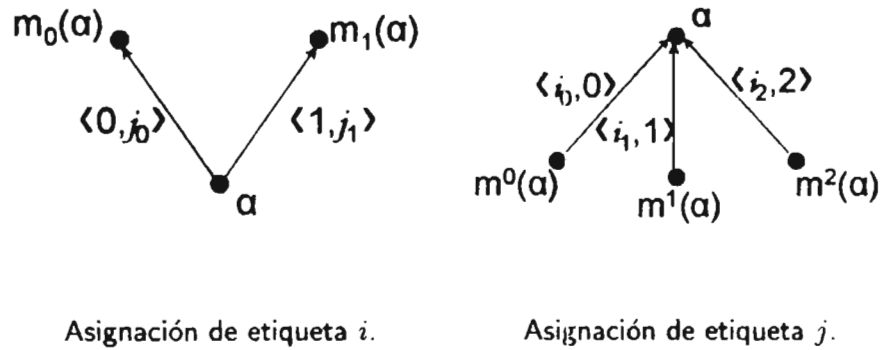


Figura 1.7: Asignación de etiquetas.

y

$$(x + 1, \alpha)b^{-1} = (x, \alpha);$$

así como E_t es el conjunto de aristas etiquetadas por t si van de $(x, \alpha) \in \Gamma$ a $(x, \alpha)t$, y por t^{-1} si van de $(x, \alpha) \in \Gamma$ a $(x, \alpha)t^{-1}$, donde para $i \equiv x \pmod 2$, tomo j tal que $m^j(m_i(\alpha)) = \alpha$, se tiene que,

$$(x, \alpha)t = (f_{i,j}(x), m_i(\alpha)),$$

y

$$(f_{i,j}(x), m_i(\alpha))t^{-1} = (x, \alpha).$$

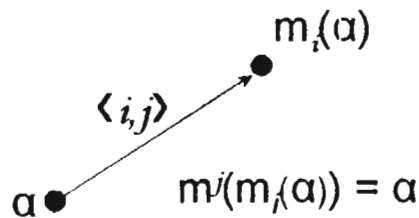


Figura 1.8: Asignación de etiqueta doble $\langle i, j \rangle$.

Lema 1.6. En λ , sea $\langle i, j \rangle$ la etiqueta doble auxiliar de una arista, para cada $i \equiv 0, 1$ existe un único $j = 0, 1, 2$ tal que $m^j(m_i(\alpha)) = \alpha$.

Demostración. Sea $\alpha \in V(\lambda)$, para un valor de i dado, tenemos que $[\alpha, m_i(\alpha)] \in E(\lambda)$, por las propiedades de la función m_i .

Entonces α es uno de los tres diferentes vértices vecinos entrantes de $m_i(\alpha)$ dados por $m^j(m_i(\alpha))$, $j = 0, 1, 2$, por las propiedades de m^j . Como las tres arista entrantes tienen etiquetas distintas $j = 0, 1, 2$, sólo para uno de los tres valores se tiene que $m^j(m_i(\alpha)) = \alpha$.

□

Habiendo definido a Γ , falta verificar que en efecto es el grafo de Cayley asociado a $BS(2,3)$. Antes de plantear el teorema que nos permitirá hacer esto, conviene recordar las definiciones y proposición que a continuación se presentan.

Definición 1.7. Sea e una arista en un grafo con vértice inicial P y vértice final Q , e^{-1} se refiere a la arista con vértice inicial Q y vértice final P .

Definición 1.8. Un camino C en un grafo, es una sucesión alternante de vértices y aristas, finita, con todos los vértices distintos que comienza en un vértice y termina en otro, y en la cual cada arista en la sucesión une al vértice que precede en la sucesión con el vértice siguiente en la sucesión. Podemos representar al camino C como una secuencia de aristas:

$$C = e_1^{\eta_1} e_2^{\eta_2} \dots e_m^{\eta_m}$$

donde $\eta_i = 1, -1$, para $i = 1, 2, \dots, m$ y tal que, para $i = 1, 2, \dots, m-1$, $e_{i+1}^{\eta_{i+1}}$ comienza en el vértice final de $e_i^{\eta_i}$. El vértice inicial de C , es el vértice inicial de $e_1^{\eta_1}$, y el vértice final de C , es el vértice final de $e_m^{\eta_m}$.

Definición 1.9. Sean dos caminos $C = e_1^{\eta_1} e_2^{\eta_2} \dots e_m^{\eta_m}$ y $C' = e_1^{\delta_1} e_2^{\delta_2} \dots e_n^{\delta_n}$. Se dice que C y C' son equivalentes si el vértice inicial y el vértice final de C son el vértice inicial y el vértice final de C' , respectivamente. Además, si $m > n$, se dice que C es reducible a C' .

Definición 1.10. Sea un camino $C = e_1^{\eta_1} e_2^{\eta_2} \dots e_m^{\eta_m}$, éste se dice elementalmente reducible por una etiqueta a , si para los pares de aristas $e_i^{\eta_i}, e_{i+1}^{\eta_{i+1}}$ tales que comparten etiqueta a y $\eta_i = -\eta_{i+1}$, ocurre que $e_i^{\eta_i}$ y $e_{i+1}^{\eta_{i+1}}$ son la misma arista pero con orientación inversa, cancelándose.

Definición 1.11. Una *coloración y orientación (con n colores)* de un grafo Γ es un mapeo M de $E(\Gamma)$ en $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, un conjunto de n "colores" o "etiquetas" distintos que verifica:

- (1) Para cada vértice v en Γ , existe una biyección entre el conjunto de aristas salientes de v y el conjunto A .
- (2) Para cada arista e en Γ , $(e^{-1})M = [(e)M]^{-1}$, esto es que si e tiene color a_i , $i = 1, \dots, n$ entonces e^{-1} tiene el mismo color a_i , pero orientación inversa.

Una coloración y orientación M de un grafo Γ se dice *regular* si para cualesquiera dos caminos C y C' de Γ tales que $(C)M = (C')M$, se tiene que C es cerrado, si y sólo si, C' es cerrado.

Definición 1.12. Si M es una coloración y orientación de Γ y C es un camino en Γ , definimos $(C)M = (e_1^{\eta_1})M \cdots (e_m^{\eta_m})M$ y decimos que el camino C cubre a la palabra $(C)M$.

Proposición 1.13. Una palabra W en términos de las etiquetas t y b en Γ , siempre puede ser representada de la forma:

$$W(t, b) = t^{\theta_1} b^{\beta_1} t^{\theta_2} b^{\beta_2} \dots t^{\theta_r} b^{\beta_r},$$

donde $\theta_i = -1, 0, 1$, con $\theta_i \neq 0$ para $i \neq 1$ y $\beta_i \in \mathbb{Z}$.

Nota 1.14. Recordemos que dado un digrafo coloreado Γ , si en cada vértice en $V(\Gamma)$ hay una arista entrante y una arista saliente de cada color, entonces la coloración de Γ define una estructura de grupo con conjunto $V(\Gamma)$ y operación binaria determinada por la función de asignación que determina a $E(\Gamma)$, esto es la *acción de grupo definida por un grafo*. Así mismo, si tenemos una estructura de grupo $\langle G, * \rangle$, entonces la operación "*" describe la función de asignación de un grafo Γ , tal que $V(\Gamma) = G$.

De las consideraciones previas, se obtiene el siguiente resultado.

Lema 1.15. Sea (x_0, α_0) en $V(\Gamma)$ un vértice inicial fijo del camino C , entonces $(C)M$ define a una palabra $W(t, b) = (C)M$.

Sea (x_0, α_0) en $V(\Gamma)$ un vértice fijo, y sea $W(t, b)$ una palabra, entonces $(x_0, \alpha_0)W(t, b)$ define a un único camino C en Γ tal que su vértice inicial es (x_0, α_0) y $W(t, b) = (C)M$

Demostración. Sea (x_0, α_0) en $V(\Gamma)$ un vértice inicial fijo de un camino C , entonces $(C)M$ determina una etiqueta y una orientación para cada arista del camino por la definición 1.11 en la condición (2) (t^{-1} es la etiqueta de una arista que corresponde a una arista t pero con orientación inversa, y análogamente para b^{-1} y b) y la condición (1) que determina que exactamente una arista de cada color y orientación inicia en cada vértice de Γ . En consecuencia la coloración del camino define a una palabra $W(t, b) = (C)M$.

Sea (x_0, α_0) en $V(\Gamma)$ un vértice fijo, y sea $W(t, b)$ una palabra, entonces $(x_0, \alpha_0)W(t, b)$ origina una sucesión de aristas correspondientes a las etiquetas, dado que cada una determina la elección de alguna de las cuatro aristas adyacentes a cada vértice en Γ . De esta manera la palabra $W(t, b)$ actuando sobre (x_0, α_0) define un camino C en Γ tal que $W(t, b) = (C)M$. \square

Definición 1.16. Sea Γ un grafo y $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ un conjunto de etiquetas representando una acción definida por Γ . Para un vértice $v \in V(\Gamma)$, definimos a $vW(a_1, a_2, \dots, a_n)$ como el vértice resultante de aplicar sobre éste la acción que representa la palabra.

Nota 1.17. Para v un vértice en un grafo, hemos utilizado ya a $v(C)M$ para representar a un camino, así como lo hemos utilizado para representar al vértice final del mismo camino por simplicidad. Su uso será claro según el contexto.

Que el grafo Γ sea el grafo de Cayley asociado a $BS(2, 3)$ se sigue del teorema que a continuación se enuncia (ver [Magnus76]).

Teorema 1.18. Sea Γ un grafo conexo con una coloración-orientación regular de n colores M . Entonces Γ es isomorfo al grafo de un grupo G con n generadores a_1, a_2, \dots, a_n . Las palabras $W(a_1, a_2, \dots, a_n)$ están en correspondencia uno-a-uno con los caminos C en Γ teniendo un vértice fijo P_0 como vértice inicial, bajo el mapeo $W(a_1, a_2, \dots, a_n) \rightarrow C$, donde C cubre a $(C)M$. Además, los relatores de G son precisamente las palabras $R(a_1, a_2, \dots, a_n)$ que corresponden a los caminos cerrados en Γ .

Para verificar que en el grafo sugerido Γ , los relatores de $BS(2, 3)$ son precisamente las palabras que corresponden a los caminos cerrados, se requieren las siguientes definiciones y

resultados que a continuación se enuncian, y en su caso, se demuestran.

Definición 1.19. Un camino C es cerrado en Γ si $(C)M = W(t, b)$ es tal que

$$(x, \alpha)W(t, b) = (x, \alpha)$$

en Γ .

Definición 1.20. Para el grafo propuesto Γ y el árbol λ , sea un vértice $(x, \alpha) \in V(\Gamma)$, y una arista $[(x, \alpha), (x', \alpha')] \in E(\Gamma)$ etiquetada por t . Definimos la *proyección* $\pi : \Gamma \rightarrow \lambda$ como

$$(x, \alpha)\pi = \alpha$$

para el conjunto de vértices, y

$$[(x, \alpha), (x', \alpha')]\pi = [\alpha, \alpha']$$

para el conjunto de aristas.

Lema 1.21. La proyección $C' = (C)\pi$ en λ de un camino cerrado C en Γ es también un camino cerrado.

Demostración. Si C es un camino cerrado, entonces puede expresarse como una sucesión de vértices $\{(x_i, \alpha_i)\}_{i=1}^n$ donde $(x_1, \alpha_1) = (x_n, \alpha_n)$.

Entonces la proyección C' de C en λ , puede expresarse como una sucesión de vértices $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$ donde $\alpha_1 = \alpha_n$.

Por lo tanto, C' es un camino cerrado en λ . □

Lema 1.22. Si un camino C es cerrado en Γ , $C' = (C)\pi$ está dado por una sucesión de aristas $e_1^{\theta_1} e_2^{\theta_2} \cdots e_r^{\theta_r}$, donde $\sum_{i=1}^r |\theta_i| = 2n$, $n \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$.

Demostración. Suponemos que $\sum_{i=1}^r |\theta_i| = 2n + 1$, $n \in \mathbb{N}$.

Como C es cerrado en Γ , C' es cerrado en λ . Como λ es un árbol, entonces $e_i = e_{i+1}$ y $\theta_i = -\theta_{i+1}$ para algún $i = 1, \dots, r-1$.

Haciendo la reducción elemental correspondiente, resulta un camino de la forma

$$e_1^{\theta_1} e_2^{\theta_2} \cdots e_{i-1}^{\theta_{i-1}} e_{i+2}^{\theta_{i+2}} \cdots e_r^{\theta_r}.$$

Pero este camino reducido sigue siendo cerrado en λ , luego hay otro par consecutivo $e_j^{\theta_j}, e_{j+1}^{\theta_{j+1}}$, con $j = 1, \dots, i-1, i+2, \dots, r-1$ tal que $e_j = e_{j+1}$ y $\theta_j = -\theta_{j+1}$, que entonces puede ser reducido nuevamente, y así consecutivamente, en n ocasiones, hasta obtener al camino $e_p^{\theta_p}$, con $p \neq 0$ que no puede corresponder a un camino cerrado en un árbol. Por lo tanto, $\sum_{i=1}^r |\theta_i| = 2n$, $n \in \mathbb{N}$.

□

Definición 1.23. La concatenación de las palabras $U(t,b)$ y $V(t,b)$ se define como la palabra $W(t,b) = U(t,b)V(t,b)$.

Proposición 1.24. Los caminos en Γ dados por $(x, \alpha)t^{-1}b^{2p}t$ y $(x, \alpha)tb^{3p}t^{-1}$ son equivalentes a $(x, \alpha)b^{3p}$ y a $(x, \alpha)b^{2p}$, respectivamente.

Demostración. Tomamos el caso de $t^{-1}b^{2p}t$, $p \in \mathbb{Z}$.

Si $j \equiv x \pmod{3}$, y $m_i(m^j(\alpha)) = \alpha$,

$$(x, \alpha)t^{-1}b^{2p}t = \left(\frac{2}{3}(x-j) + i + 2p, m^j(\alpha)\right)t,$$

como $3|(x-j)$, entonces $\frac{2}{3}(x-j) + 2p$ es par, luego $r(\frac{2}{3}x + 2p + i, 2) = i$ y

$$\begin{aligned} (x, \alpha)t^{-1}b^{2p}t &= \left(\frac{3}{2}\left(\left(\frac{2}{3}(x-j) + i + 2p\right) - i\right) + j, m_i(m^j(\alpha))\right), \\ &= (x + 3p, \alpha) = (x, \alpha)b^{3p}. \end{aligned}$$

Ahora tomamos el caso de $tb^{3p}t^{-1}$, $p \in \mathbb{Z}$.

Si $i \equiv x \pmod{2}$ y $m^j(m_i(\alpha)) = \alpha$,

$$(x, \alpha)tb^{3p}t^{-1} = \left(\frac{3}{2}(x - i) + j + 3p, m_i(\alpha)\right)t^{-1},$$

como $2 \mid (x - i)$, tenemos que $r\left(\frac{3}{2}(x - i) + j + 3p, 3\right) = j$, entonces

$$\begin{aligned} (x, \alpha)tb^{3p}t^{-1} &= \left(\frac{2}{3}\left(\left(\frac{3}{2}(x - i) + j + 3p\right) - j\right) + i, m^j(m_i(\alpha))\right), \\ &= (x + 2p, \alpha) = (x, \alpha)b^{2p} \end{aligned}$$

□

Proposición 1.25. *Un camino C en Γ es cerrado, si y sólo si, la palabra $(C)M$ es reducible a e , por los relatores de la presentación de $BS(2, 3)$.*

Demostración. Primeramente, suponemos que $(C)M = W(t, b)$ es reducible a la palabra vacía e por los relatores de la presentación de $BS(2, 3)$, esto es que puede transformarse en la palabra vacía de manera tal que no hay acción sobre el vértice inicial de C . Por lo tanto, C es cerrado.

Inversamente, suponemos que el camino C en Γ es cerrado. Demostraremos que la palabra dada por $(C)M$ es reducible a e por los relatores de la presentación de $BS(2, 3)$ empleando la inducción matemática sobre n en $\sum_{i=1}^r |\theta_i| = 2n$, $n \in \mathbb{N}$ y la proposición 1.24.

Sea $(C)M = W(t, b)$, tal que $\sum_{i=1}^r |\theta_i| = 2n$, $n = 0$, entonces

$$(C)M = b^{\beta_1};$$

como C es cerrado, tenemos que $(x, \alpha)b^{\beta_1} = (x, \alpha)$, luego $\beta_1 = 0$.

Suponemos que si C es un camino cerrado en Γ entonces la palabra $(C)M = W(t, b)$, tal que $\sum_{i=1}^r |\theta_i| = 2k$, $k \in \mathbb{N}$, es reducible a e por los relatores de la presentación de $BS(2, 3)$.

Ahora bien, sea C es un camino cerrado en Γ con $(C)M = W(t, b)$ tal que $\sum_{i=1}^r |\theta_i| = 2(k + 1)$, $k \in \mathbb{N}$. Consideramos la proyección $C' = (C)\pi$ en el árbol λ donde C' también corresponde a un camino cerrado y por lo tanto en C' siempre puedo encontrar un i tal que en

$$C' = e_1^{\theta_1} \cdots e_i^{\theta_i} e_{i+1}^{\theta_{i+1}} \cdots e_r^{\theta_r},$$

se tiene que $e_i = e_{i+1}$ y $\theta_i = -\theta_{i+1}$.

$(C)M$ puede expresarse como sigue:

$$(C)M = t^{\theta_1} b^{\beta_1} \dots t^{\theta_i} b^{\beta_i} t^{\theta_{i+1}} \dots t^{\theta_r} b^{\beta_r},$$

o bien,

$$(C)M = U(t, b) t^{\theta_i} b^{\beta_i} t^{\theta_{i+1}} V(t, b),$$

donde si $\theta_i = 1$, y $(x, \alpha) \in \Gamma$,

$$(x, \alpha)(C)M = (x, \alpha)U(t, b) t b^{\beta_i} t^{-1} V(t, b) = (x', \alpha') t b^{\beta_i} t^{-1} V(t, b),$$

para algún $(x', \alpha') \in \Gamma$.

Nótese que para $(x', \alpha') t b^{\beta_i} t^{-1}$, t y t^{-1} corresponden a e y e^{-1} en C' respectivamente, y éstas son la misma arista con orientación inversa y por lo tanto $3|\beta_i$. Luego la palabra dada por $(C)M$ es equivalente a $((C)M)' = U(t, b) b^{\frac{2}{3}\beta_i} V(t, b)$.

En cambio, si $\theta_i = -1$, y $(x, \alpha) \in \Gamma$,

$$(x, \alpha)(C)M = (x, \alpha)U(t, b) t^{-1} b^{\beta_i} t V(t, b) = (x', \alpha') t^{-1} b^{\beta_i} t V(t, b).$$

Nótese que en $(x', \alpha') t^{-1} b^{\beta_i} t$, t^{-1} y t corresponden a e^{-1} y e en C' respectivamente, y éstas son la misma arista con orientación inversa y por lo tanto $2|\beta_i$. Luego la palabra dada por $(C)M$ es equivalente a $((C)M)' = U(t, b) b^{\frac{1}{2}\beta_i} V(t, b)$.

En cualquiera de los dos casos, $((C)M)'$ corresponde a un camino cerrado en Γ , donde $\sum_{i=1}^{r-1} |\theta_i| = 2k$, $k \in \mathbb{N}$. Y por la hipótesis inductiva, tenemos que esta palabra es reducible a e por los relatores en la presentación de $BS(2, 3)$.

□

Demostrado lo anterior, afirmamos que:

Proposición 1.26. *El grafo Γ es el grafo de Cayley asociado a $BS(2, 3)$.*

Capítulo 2

Estructura del árbol λ etiquetado

Si tenemos cualesquiera dos árboles λ_1 y λ_2 como λ en el capítulo anterior, cada uno dotado de un etiquetado como el descrito para λ en el mismo capítulo, notamos que no siempre existe un isomorfismo de grafos etiquetados entre ambos árboles. Que dicho isomorfismo exista da origen a la siguiente definición.

Definición 2.1. Sean λ_1 y λ_2 árboles etiquetados como en la sección 1.2. Si existe un isomorfismo de grafos etiquetados entre λ_1 y λ_2 , se dice que sus etiquetados son *equivalentes*.

En la construcción del grafo de Cayley Γ asociado a $BS(2, 3)$ se usa precisamente al árbol λ , cuya estructura debe ser única, aunque su etiquetado no lo sea.

Debido a que Γ , el grafo de Cayley asociado a $BS(2, 3)$ dado por $\{t, b\}$, es único, debe haber manera de encontrar el isomorfismo de grafos etiquetados entre λ_1 y λ_2 , aunque inicialmente los etiquetados de λ_1 y λ_2 no sean equivalentes. Esto, porque una vez que se opta por el árbol con las características de λ , éste debiera ser útil para la construcción de Γ independientemente de su etiquetado.

En el presente capítulo demostraremos que la construcción de Γ es independiente del etiquetado de λ .

Nótese que en Γ , la estructura de etiquetas asignada a λ indica el elemento de las particiones (\mathcal{A} o \mathcal{B}) de los grafos de \mathbb{Z} correspondientes a los vértices entrantes o salientes de α con el cual se relaciona $V(\mathbb{Z}) \times \alpha$, por medio de aristas etiquetados por t .

La manera de modificar la relación recién descrita, consiste en mover al elemento identidad del grafo de \mathbb{Z} correspondiente al vértice α para cada $\alpha \in \lambda$ a la posición que más convenga. Esto último está representado por un proceso de re-etiquetado que describiremos para λ_2 en términos del etiquetado original de λ_1 . Posteriormente demostraremos que el re-etiquetado de λ_2 y el etiquetado original de λ_1 son etiquetados equivalentes.

Para llevar a cabo el re-etiquetado, definiremos las siguientes operaciones para etiquetas de aristas:

$$\langle i, j \rangle + \langle i', j' \rangle = \langle (i + i') \bmod 2, (j + j') \bmod 3 \rangle,$$

$$\langle i, j \rangle - \langle i', j' \rangle = \langle (i - i') \bmod 2, (j - j') \bmod 3 \rangle.$$

Sea $\alpha \in V(\lambda_1)$, sabemos que las etiquetas de las aristas adyacentes entrantes son: $\langle i_0, 0 \rangle$, $\langle i_1, 1 \rangle$ y $\langle i_2, 2 \rangle$, donde $i_n \in \{0, 1\}$ para $n = 0, 1, 2$. Sabemos también que las etiquetas de las aristas adyacentes salientes son: $\langle 0, j_0 \rangle$ y $\langle 1, j_1 \rangle$, donde $j_n \in \{0, 1, 2\}$ para $n = 0, 1$.

Análogamente, para $\alpha' \in V(\lambda_2)$, sabemos que las etiquetas de las aristas adyacentes entrantes son: $\langle i'_0, 0 \rangle$, $\langle i'_1, 1 \rangle$ y $\langle i'_2, 2 \rangle$, donde $i'_n \in \{0, 1\}$ para $n = 0, 1, 2$. Sabemos también que las etiquetas de las aristas adyacentes salientes son: $\langle 0, j'_0 \rangle$ y $\langle 1, j'_1 \rangle$, donde $j'_n \in \{0, 1, 2\}$ para $n = 0, 1$.

Por conveniencia, consideraremos correspondientes a los pares de etiquetas: $\langle i_n, n \rangle$, $\langle i'_n, n \rangle$, para $n = 0, 1, 2$; y a los pares de etiquetas: $\langle n, j_n \rangle$ y $\langle n, j'_n \rangle$, para $n = 0, 1$ (ver figuras 2.1 y 2.2).

Con las disposiciones anteriores, es posible encontrar las etiquetas dobles para cada

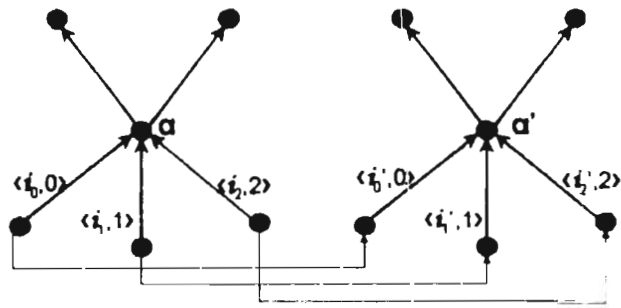


Figura 2.1: Etiquetas entrantes y su correspondencia.

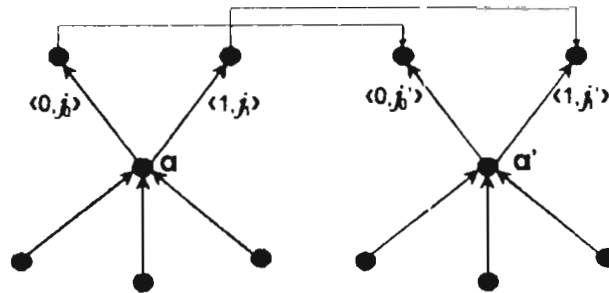
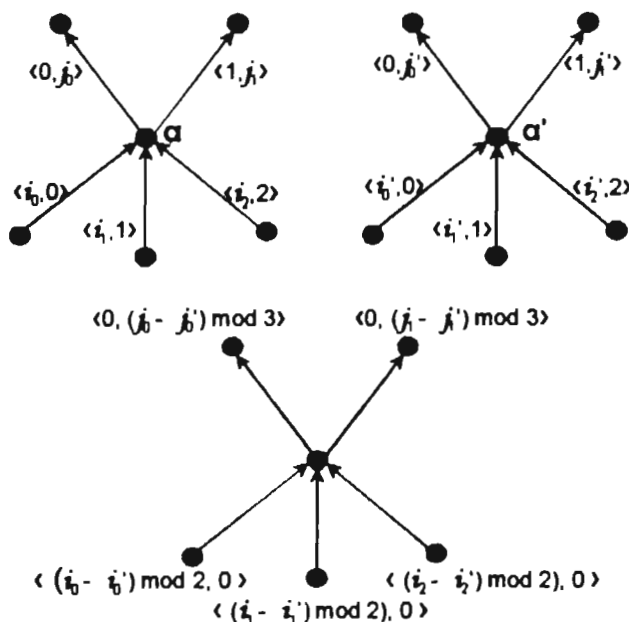


Figura 2.2: Etiquetas salientes y su correspondencia.

uno de los vértices en λ_2 a partir de un etiquetado provisional (ver figura 2.3): a los vértices vecinos por las aristas entrantes, asignaremos una etiqueta $\langle i_n, n \rangle - \langle i'_n, n \rangle = \langle (i_n - i'_n) \bmod 2, 0 \rangle$, para $n = 0, 1, 2$; y a los vértices vecinos por las aristas salientes, asignaremos una etiqueta $\langle n, j_n \rangle - \langle n, j'_n \rangle = \langle 0, (j_n - j'_n) \bmod 3 \rangle$, para $n = 0, 1$. Con este etiquetado provisional es evidente que si a las etiquetas de cada arista se le suma la etiqueta original de λ_2 que le corresponde, resulta que queda etiquetada con la etiqueta correspondiente del árbol λ_1 .

De esta manera la reasignación de etiquetas en un radio de una arista a partir del vértice $\alpha' \in \lambda_2$ da como resultado el mismo etiquetado en un radio de una arista a partir del vértice $\alpha \in \lambda_1$. Esto es que el etiquetado en $O_1(\alpha)$ es el mismo que en $O_1(\alpha')$.

Figura 2.3: Etiquetado equivalente para $k = 1$.

Proposición 2.2. *El re-etiquetado de λ_2 descrito es equivalente al etiquetado original de λ_1 .*

Demostración. Demostraremos por inducción matemática que la reasignación de etiquetas en λ_2 , transforma a λ_2 en λ_1 .

El paso básico ($k=1$) queda demostrado con la explicación del procedimiento de re-etiquetado ilustrado en la figura 2.3.

Suponemos ahora, que para una bola $O_k(\alpha')$, donde $k = m$ es posible etiquetar los vértices comprendidos de manera que la reasignación final de etiquetas, transforme a $O_m(\alpha')$ etiquetado en $O_m(\alpha)$ etiquetado.

Ahora bien, sea $k = m + 1$, hemos de considerar que a partir del $m - 1$ -ésimo vértice, tenemos dos posibilidades según la orientación de la m -ésima arista: la primera, que la m -ésima arista sea entrante al m -ésimo vértice, entonces restan dos aristas entrantes y dos aristas salientes, dirigidas cada una, a un $m + 1$ -ésimo vértice; la segunda, que la m -ésima arista sea

saliente del m -ésimo vértice, entonces restan tres aristas entrantes y una arista saliente, dirigidas cada una, al $m + 1$ -ésimo vértice. Esto se ilustra en la figura 2.4.

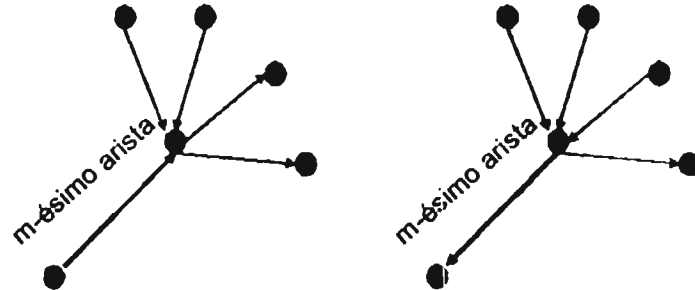


Figura 2.4: Ramificaciones del caso $m = k + 1$.

Para el caso en que la m -ésima arista es entrante al m -ésimo vértice, las $m + 1$ -ésimas aristas salientes en el árbol λ_2 cambian sus etiquetas de acuerdo a las $m + 1$ -ésimas aristas correspondientes en el árbol λ_1 siguiendo el procedimiento de re-etiquetado descrito; de la misma manera son sustituidas las dos etiquetas de las $m + 1$ -ésimas aristas entrantes sin posibilidades de que se repita la etiqueta ya utilizada para la m -ésima arista en λ_2 , puesto que por hipótesis de inducción, ésta es la misma de la m -ésima arista en λ_1 , y la estructura de los etiquetados en λ_1 y λ_2 no permiten que una vez que se ha utilizado una etiqueta para una arista entrante a un vértice, se utilice para otra de las aristas entrantes al mismo vértice.

Para el caso en que la m -ésima arista es saliente del m -ésimo vértice, las $m + 1$ -ésimas aristas entrantes en el árbol λ_2 cambian sus etiquetas de acuerdo a las $m + 1$ -ésimas aristas correspondientes en el árbol λ_1 siguiendo el procedimiento de re-etiquetado descrito; de la misma manera es sustituida la etiqueta de la $m + 1$ -ésima arista saliente restante sin posibilidad de que se repita la etiqueta ya utilizada para la m -ésima arista en λ_2 , puesto que por hipótesis de inducción, ésta es la misma de la m -ésima arista en λ_1 , y la estructura de los etiquetados en λ_1 y λ_2 no permiten que una vez que se ha utilizado una etiqueta para una arista saliente de un vértice, se utilice para la otra arista saliente del mismo vértice.

Por lo tanto, la reasignación de etiquetas en un radio de $m + 1$ aristas a partir del vértice $\alpha' \in \lambda_2$ da como resultado el mismo etiquetado en un radio de $m + 1$ aristas a partir del vértice $\alpha \in \lambda_1$. Esto es que el etiquetado en $O_{m+1}(\alpha)$ es el mismo que en $O_{m+1}(\alpha')$.

□

Capítulo 3

Aproximación finita

En el capítulo 1 propusimos un grafo Γ como grafo de Cayley asociado a $BS(2, 3)$, y verificamos que, de hecho, lo es. En este capítulo nos damos a la tarea de construir un grafo finito dependiente de dos variables n y k al cual llamaremos $\gamma_{n,k}$, para posteriormente demostrar que se trata de una aproximación finita al grafo γ . Como $\gamma_{n,k}$ depende de n y k , tendremos una familia de grafos que será precisamente una familia de aproximaciones finitas al grafo Γ como demostraremos posteriormente en el capítulo 4. Con ello satisfaremos la caracterización de Weiss para grupos sóficos, que es nuestro propósito.

Para construir $\gamma_{n,k}$ se debe considerar que este grafo debe tener una estructura que localmente sea parecida a Γ , para ello, debemos pensar que las órbitas (ahora finitas) de aristas etiquetados por b estarán relacionadas con otras órbitas similares, teniendo cada tres aristas un vértice al que entra otra órbita por una arista etiquetada por t ; así como, por cada dos aristas, un vértice del que sale otra órbita por una arista etiquetada por t . Además, en cada vértice debe haber un arista de cada color y orientación.

Entonces lo conveniente es pensar en órbitas cuya longitud sea divisible por 2 y por 3, de manera que ahora nos auxiliaremos del grafo de Cayley de \mathbb{Z}_{6n} en vez del de \mathbb{Z} . Además cada órbita tendrá aristas etiquetados por t salientes a otras seis órbitas distintas, y tendrá aristas etiquetados por t entrantes a otras seis órbitas distintas. Entonces emplearemos un árbol finito

H_k (figura 3.1) en vez del árbol λ , donde H_k es el grafo finito 12-regular para el cual para cada vértice entran seis aristas y salen seis aristas, y cuyo menor ciclo tiene al menos k aristas.

Para demostrar que $\gamma_{n,k}$ es una aproximación finita de Γ , será necesario diferenciar las aristas salientes de cada vértice y diferenciar las aristas entrantes a cada vértice, al menos en bolas de radio menor a k en H_k . Por ello, es conveniente establecer una estructura que nos permita etiquetar a las aristas de bolas de radio menor a k en H_k , semejante a la que ideamos para λ . Dicha estructura tiene como base lo siguiente:

1. Cada arista en una bola de radio menor a k del grafo H_k tiene una etiqueta auxiliar $\langle i, j; r, s \rangle$ conformada por cuatro etiquetas independientes entre sí.
2. La etiqueta i toma valores $i = 0, 1$, y para cada vértice, los seis aristas salientes tienen etiquetas distintas por pares.
3. La etiqueta j toma valores $j = 0, 1, 2$, y para cada vértice, los seis aristas entrantes tienen etiquetas distintas por tríos, de manera, que si tienen una etiqueta i fija, los valores de j no se repitan.
4. La etiqueta r se comporta como la etiqueta j , pero independientemente.
5. La etiqueta s se comporta como la etiqueta i , pero independientemente.

Lema 3.1. *Existe al menos un grafo etiquetado H_k que satisface las condiciones de la estructura de etiquetas propuesta para bolas de radio menor a k en H_k .*

Demostración. Nótese que H_k se comporta como un árbol 12-regular con seis aristas entrantes y seis aristas salientes en cada bola de radio menor a k , de manera que podemos llevar a cabo el procedimiento de etiquetado como sigue.

Para cada vértice $\alpha \in V(O_k) \subset V(H_k)$, fijamos valores distintos 0 y 1 por pares para las etiquetas i correspondientes a sus seis aristas salientes. De esta manera se cumple la condición 2.

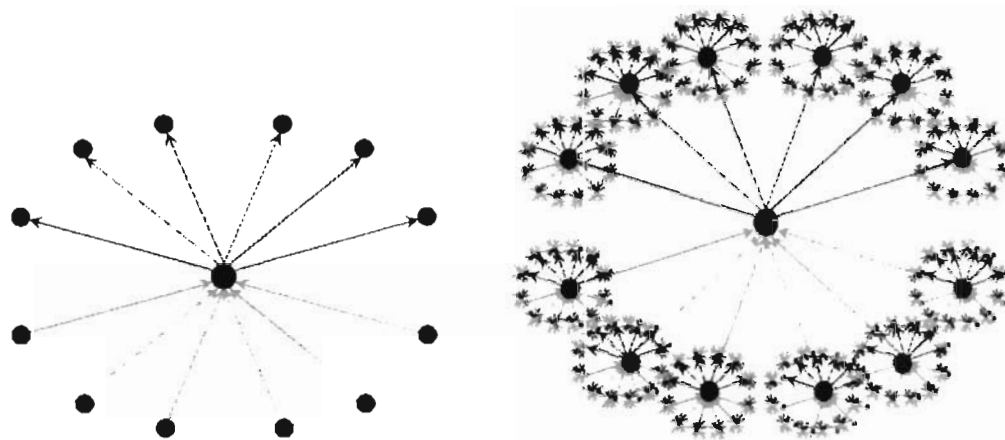


Figura 3.1: Segmentos de H_k .

Para cada vértice $\alpha \in V(O_k) \subset V(H_k)$, fijamos valores distintos 0, 1 y 2 para las etiquetas j correspondientes a las seis aristas entrantes de manera que no se repitan para un valor fijo de la etiqueta i . Así tenemos que se verifica 3.

Se asignan las etiquetas s y r de la misma manera que se asignaron las etiquetas i y j , pero en un procedimiento independiente, para que se satisfagan las condiciones 4 y 5.

Como los valores de las etiquetas i y j fueron fijados con procedimientos independientes, de igual manera, para r y s , y como a cada arista le corresponde un valor de i , un valor de s , un valor de j y un valor de r , se verifica la condición 1. □

Definición 3.2. Llamaremos $[m, n]$ al conjunto definido por $\{x \in \mathbb{Z} : m \leq x \leq n\}$.

Considerando lo establecido, describimos a $\gamma_{n,k}$ como el grafo cuyo conjunto de vértices $V(\gamma_{n,k})$ se define como:

$$V(\gamma_{n,k}) = [0, 6n - 1] \times V(H_k).$$

En cuanto a $E(\gamma_{n,k})$, el conjunto de aristas de $\gamma_{n,k}$, consideraremos las particiones de $[0, 6n - 1]$: $\mathcal{A} = \{A_0, A_1\}$ y $\mathcal{B} = \{B_0, B_1, B_2\}$ donde $A_i = [0, 6n - 1] \cap 2\mathbb{Z} + i$, para $i = 0, 1$; y

$B_j = [0, 6n-1] \cap 3\mathbb{Z} + j$, para $j = 0, 1, 2$. Pero además tendremos las particiones $\mathcal{I} = \{I_0, I_1, I_2\}$ y $\mathcal{J} = \{J_0, J_1\}$ de $[0, 6n-1]$, donde $I_0 = [0, 2n-1]$, $I_1 = [2n, 4n-1]$, $I_2 = [4n, 6n-1]$; y $J_0 = [0, 3n-1]$, $J_1 = [3n, 6n-1]$.

Con lo anterior, podemos definir las colecciones de conjuntos siguientes: $\mathcal{A}' = \{A_i^r \subset [0, 6n-1] : A_i^r = A_i \cap I_r\}$ y $\mathcal{B}' = \{B_j^s \subset [0, 6n-1] : B_j^s = B_j \cap J_s\}$ para $i, s = 0, 1$ y $j, r = 0, 1, 2$.

Definimos $f_{i,j}^{r,s} : A_i^r \rightarrow B_j^s$ como sigue:

$$f_{i,j}^{r,s}(x) = \frac{3}{2}(x - i) + j - 3nr + 3ns, \quad (3.1)$$

o bien,

$$f_{i,j}^{r,s}(x) = f_{i,j}(x) + g_{r,s}, \quad (3.2)$$

con $g_{r,s} = -3nr + 3ns$, donde r y s indican a qué intervalos pertenece x , según las particiones \mathcal{I} y \mathcal{J} , respectivamente.

En H_k , es posible distinguir a los vértices vecinos salientes de un vértice dado α por medio de funciones $m_{i,r} : V(H_k) \rightarrow V(H_k)$, $i = 0, 1$, $r = 0, 1, 2$, que son tales que $[\alpha, m_{i,r}(\alpha)] \in E(H_k)$ y los seis $m_{i,r}(\alpha)$ posibles son precisamente los seis vecinos salientes de α (ver figura 3.2).

A la vez, es posible distinguir a los vértices vecinos entrantes de un vértice fijo α , por medio de funciones $m^{j,s} : V(H_k) \rightarrow V(H_k)$, $j = 0, 1, 2$, $s = 0, 1$, de manera que $[m^{j,s}(\alpha), \alpha] \in E(H_k)$ y los seis $m^{j,s}(\alpha)$ posibles son precisamente los seis vecinos entrantes de α (ver figura 3.2).

En lo consecutivo, denotaremos por $x \oplus y$ a la expresión dada por $(x + y) \bmod 6n$, y por $x \ominus y$ a la expresión dada por $(x - y) \bmod 6n$. Entonces $E(\gamma_{n,k})$ se define como:

$$E(\gamma_{n,k}) = E_b(\gamma_{n,k}) \cup E_t(\gamma_{n,k}),$$

donde $E_b(\gamma_{n,k})$ es el conjunto de aristas etiquetadas por b si van de $(x, \alpha) \in \gamma_{n,k}$ a $(x, \alpha)b$, y

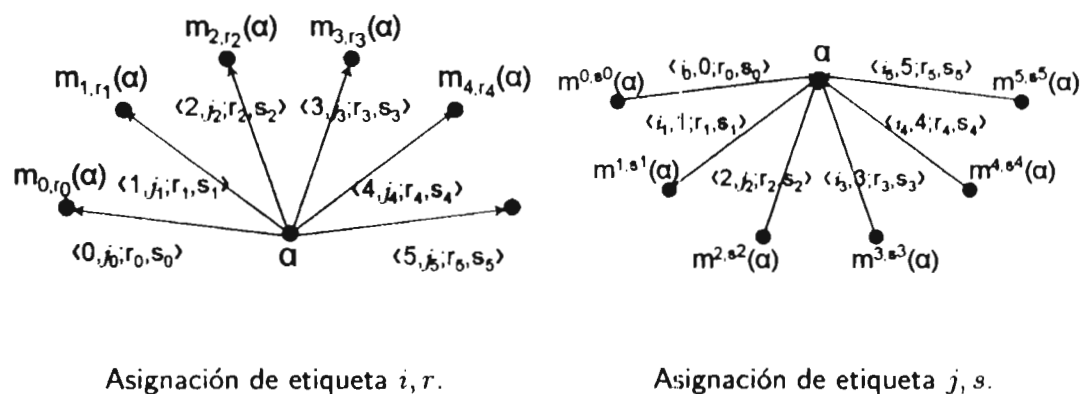


Figura 3.2: Asignación de etiquetas.

por b^{-1} si van de $(x, \alpha) \in \gamma_{n,k}$ a $(x, \alpha)b^{-1}$, donde

$$(x, \alpha)b = (x \oplus 1, \alpha),$$

y

$$(x \oplus 1, \alpha)b^{-1} = (x, \alpha),$$

así como E_t es el conjunto de aristas etiquetadas por t si van de $(x, \alpha) \in \gamma_{n,k}$ a $(x, \alpha)t$, y por t^{-1} si van de $(x, \alpha) \in \gamma_{n,k}$ a $(x, \alpha)t^{-1}$, donde para $i \equiv x \pmod{2}$ y r tal que $x \in I_r$ se verifica $m^{j,s}(m_{i,r}(\alpha))$, y se tiene que

$$(x, \alpha)t = (f_{i,j}^{r,s}(x), m_{i,r}(\alpha)),$$

y

$$(f_{i,j}^{r,s}(x), m_{i,r}(\alpha))t^{-1} = (x, \alpha).$$

Lema 3.3. En H_k , sea $\langle i, j; r, s \rangle$ la etiqueta cuádruple auxiliar de una arista. Para cada par de etiquetas $\langle i, r \rangle$, $i = 0, 1$ y $r = 0, 1, 2$, existe un único par $\langle j, s \rangle$ de etiquetas $j = 0, 1, 2$ y $s = 0, 1$ tal que $m^{j,s}(m_{i,r}(\alpha))$.

Demostración. Sea $\alpha \in V(H_k)$, para un par de valores de i y r dado, tenemos que $[\alpha, m_{i,r}(\alpha)] \in E(H_k)$, por las propiedades de la función m_i .

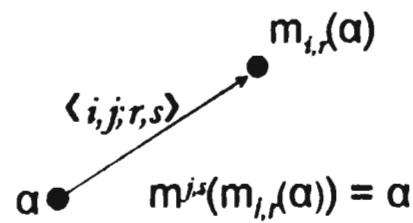


Figura 3.3: Asignación de etiqueta cuádruple $\langle i, j; r, s \rangle$.

Entonces α es uno de los seis diferentes vértices vecinos entrantes de $m_{i,r}(\alpha)$ dados por $m^{j,s}(m_{i,r}(\alpha))$, $j = 0, 1, 2$ y $s = 0, 2$, por las propiedades de $m^{j,s}$. Como las seis aristas entrantes tienen pares de etiquetas j y s distintos conformados por los valores de $j = 0, 1, 2$, $s = 0, 1$, sólo para uno de los seis pares de etiquetas j y s se tiene que $m^{j,s}(m_{i,r}(\alpha)) = \alpha$.

□

Nótese que los lemas y proposiciones demostrados para el árbol λ y para el árbol λ con respecto al grafo Γ en el capítulo 1, son válidos para el grafo H_k y para el grafo H_k con respecto al grafo $\gamma_{n,k}$, respectivamente, en una bola de radio menor a k , la longitud del menor de los ciclos en $\gamma_{n,k}$. Esto nos resultará útil para demostrar que, en efecto, $\gamma_{n,k}$ es una aproximación finita a Γ .

Capítulo 4

Demostración de que $BS(2, 3)$ es sófico por la definición de Weiss

Este capítulo tiene como propósito, finalmente, demostrar que existe una familia de aproximaciones finitas al grafo de Cayley de $BS(2, 3)$ para confirmar que $BS(2, 3)$ es sófico por la caracterización de Weiss.

Para lograr lo anterior, veremos que en el grafo $\gamma_{n,k}$, dentro de bolas de radio menor a k con centro en cada vértice de $E(\gamma_{n,k})$, excepto para un conjunto muy pequeño, los relatores de $BS(2, 3)$ son precisamente las palabras que corresponden a los caminos cerrados si estos tienen longitud menor a k .

Los lemas que a continuación se enuncian y demuestran, nos ayudan a completar el resultado deseado.

Lema 4.1. *Sea C en $\gamma_{n,k}$ donde $n \geq k(\frac{3}{2})^{\frac{k}{2}}$, un camino cerrado de longitud menor a k , tal que $(C)M = W(t, b)$. Entonces $W(t, b)$ es reducible a e por los relatores de la presentación de $BS(2, 3)$.*

Demostración. Sea $W(t, b) = t^{\theta_1} b^{\beta_1} t^{\theta_2} b^{\beta_2} \dots t^{\theta_l} b^{\beta_l}$, demostraremos nuestro lema por inducción

matemática sobre m en $\sum_{i=1}^l |\theta_i| = 2m$, $m \in \mathbb{N}$ y $2m < k$.

Sea C con $(C)M = W(t, b)$, tal que $\sum_{i=1}^l |\theta_i| = 2m$, $m = 0$, entonces

$$(C)M = b^{\beta_1};$$

como C es cerrado, tenemos que $(x, \alpha)b^{\beta_1} = (x, \alpha)$, como la longitud de $(C)M$ es menor a k , la longitud del menor de los ciclos en $\gamma_{n,k}$, entonces $\beta_1 = 0$.

Como hipótesis de inducción, suponemos que si C es un camino cerrado de longitud menor a k en $\gamma_{n,k}$, entonces la palabra $(C)M = W(t, b)$, tal que $\sum_{i=1}^l |\theta_i| = 2p$, $p \in \mathbb{N}$, es reducible a e por los relatores de la presentación de $BS(2, 3)$.

Ahora bien, sea C es un camino cerrado en Γ con $(C)M = W(t, b)$ tal que $\sum_{i=1}^l |\theta_i| = 2(p+1)$, $p \in \mathbb{N}$. Consideramos la proyección $C' = (C)\pi$ en el grafo H_k donde C' también corresponde a un camino cerrado y por lo tanto en C' siempre puedo encontrar un i tal que en

$$C' = e_1^{\theta_1} \dots e_i^{\theta_i} e_{i+1}^{\theta_{i+1}} \dots e_r^{\theta_r},$$

se tiene que $e_i = e_{i+1}$ y $\theta_i = -\theta_{i+1}$.

$(C)M$ puede expresarse como sigue:

$$(C)M = t^{\theta_1} b^{\beta_1} \dots t^{\theta_i} b^{\beta_i} t^{\theta_{i+1}} \dots t^{\theta_r} b^{\beta_r},$$

o bien,

$$(C)M = U(t, b)t^{\theta_i} b^{\beta_i} t^{\theta_{i+1}} V(t, b),$$

donde si $\theta_i = 1$, y $(x, \alpha) \in \gamma_{n,k}$,

$$(x, \alpha)(C)M = (x, \alpha)U(t, b)tb^{\beta_i}t^{-1}V(t, b) = (x', \alpha')tb^{\beta_i}t^{-1}V(t, b),$$

para algún $(x', \alpha') \in \gamma_{n,k}$. Así como

$$(x', \alpha')tb^{\beta_i}t^{-1}V(t, b) = (x'', \alpha'')b^{\beta_i}t^{-1}V(t, b)$$

y

$$(x'', \alpha'')b^{\beta_i}t^{-1}V(t, b) = (x''', \alpha''')t^{-1}V(t, b).$$

Nótese que para $(x', \alpha')tb^{\beta_i}t^{-1}$, t y t^{-1} corresponden a e y e^{-1} en C' respectivamente, y éstas son la misma arista con orientación inversa y por lo tanto $3|\beta_i$ y $x'', x''' \in J_s$. Luego $(C)M$ es equivalente a $((C)M)' = U(t, b)b^{\frac{3}{2}\beta_i}V(t, b)$.

En cambio, si $\theta_i = -1$, y $(x, \alpha) \in \Gamma$,

$$(x, \alpha)(C)M = (x, \alpha)U(t, b)t^{-1}b^{\beta_i}tV(t, b) = (x', \alpha')t^{-1}b^{\beta_i}tV(t, b)$$

para algún $(x', \alpha') \in \gamma_{n,k}$. Así como

$$(x', \alpha')t^{-1}b^{\beta_i}tV(t, b) = (x'', \alpha'')b^{\beta_i}tV(t, b),$$

y

$$(x'', \alpha'')b^{\beta_i}tV(t, b) = (x''', \alpha''')tV(t, b).$$

Nótese que en $(x', \alpha')t^{-1}b^{\beta_i}t$, t^{-1} y t corresponden a e^{-1} y e en C' respectivamente, y éstas son la misma arista con orientación inversa y por lo tanto $2|\beta_i$ y $x'', x''' \in I_r$. Luego $(C)M$ es equivalente a $((C)M)' = U(t, b)b^{\frac{3}{2}\beta_i}V(t, b)$.

En cualquiera de los dos casos, $((C)M)'$ corresponde a un camino cerrado en $\gamma_{n,k}$, donde $\sum_{i=1}^{l-1} |\theta_i| = 2p$, $p \in \mathbb{N}$. Y por la hipótesis inductiva tenemos que esta palabra es reducible a e por los relatores en la presentación de $BS(2, 3)$.

□

Lema 4.2. Sean $(x, \alpha) \in \gamma_{n,k}$ y $\Omega = \{0, 2n, 3n, 4n\}$.

1. Si $\bigcup_{r,s} ((f^{r,s})^{-1}(x), (f^{r,s})^{-1}(x) \oplus 2p) \cap \Omega = \emptyset$, entonces el camino $C = (x, \alpha)t^{-1}b^{2p}t$ es equivalente al camino $C' = (x, \alpha)b^{3p}$.
2. Si $\bigcup_{r,s} (f^{r,s}(x), f^{r,s}(x) \oplus 3p) \cap \Omega = \emptyset$ entonces el camino $C = (x, \alpha)tb^{3p}t^{-1}$ es equivalente al camino $C' = (x, \alpha)b^{2p}$.

Demostración. Tomemos el caso de $t^{-1}b^{2p}t$, $p \in \mathbb{Z}$. Si $j \equiv x \pmod{3}$, y $m_{i,r}(m^{j,s}(\alpha)) = \alpha$,

$$(x, \alpha)t^{-1}b^{2p}t = \left(\frac{2}{3}(x - j + 3nr - 3ns) + i + 2p, m^{j,s}(\alpha)\right)t.$$

Como $0 \equiv (x-j) \pmod{3}$, $3|(x-j+3nr-3ns)$ y por lo tanto $\frac{2}{3}(x-j+3nr-3ns)+i+2p$ tiene paridad i . Además, como $\bigcup_{r,s} [f^{-1(r,s)}(x), f^{-1(r,s)}(x) \oplus 2p] \cap \Omega = \emptyset$, se tiene que $x \in I_r$ y $x \in J_s$. Luego

$$\begin{aligned} (x, \alpha)t^{-1}b^{2p}t &= \left(\frac{3}{2} \left(\frac{2}{3}(x-j+3nr-3ns)+i+2p-i \right) + j-3nr+3ns, m_{i,r}(m^{j,s}(\alpha)) \right) \\ &= (x-j+nr-3ns+3p+j-3nr+3ns, \alpha) \\ &= (x+3p, \alpha) \\ &= (x, \alpha)b^{3p}. \end{aligned}$$

Tomemos ahora el caso de $tb^{3p}t^{-1}$, $p \in \mathbb{Z}$. Si $i \equiv x \pmod{2}$, y $m^{j,s}(m_{i,r}(\alpha)) = \alpha$,

$$(x, \alpha)tb^{3p}t^{-1} = \left(\frac{3}{2}(x-i) + j-3nr+3ns+3p, m_{i,r}(\alpha) \right)t^{-1}.$$

Como $0 \equiv (x-i) \pmod{2}$, $2|(x-i)$ y por lo tanto $j \equiv \left(\frac{3}{2}(x-i) + j-3nr+3ns+3p \right) \pmod{3}$. tiene paridad i . Además, como $\bigcup_{r,s} [f^{r,s}(x), f^{r,s}(x) \oplus 3p] \cap \Omega = \emptyset$, se tiene que $x \in I_r$ y $x \in J_s$. Luego

$$\begin{aligned} (x, \alpha)tb^{3p}t^{-1} &= \left(\frac{2}{3} \left(\frac{3}{2}(x-i) + j-3nr+3ns+3p - j+3nr-3ns \right) + i, m^{j,s}(m_{i,r}(\alpha)) \right) \\ &= (x-i+2p+i, \alpha) \\ &= (x+2p, \alpha) \\ &= (x, \alpha)b^{2p}. \end{aligned}$$

□

Definición 4.3. Al conjunto complemento del conjunto S , se le denota por \bar{S} .

Definición 4.4. Llamaremos \mathcal{U}_k al conjunto de palabras $U(t, b)$ con longitud menor a k .

Definición 4.5. Sea X_k tal que

$$X_k = \bigcup_{r,s} (f^{r,s}{}^{-1}(x) \ominus k, f^{r,s}{}^{-1}(x) \oplus k) \cap \Omega = \emptyset,$$

y sea $U(t, b)$ una palabra de longitud menor a k , entonces definimos al conjunto Y_k como sigue:

$$Y_k = \{x \in \mathbb{Z} : \forall \alpha \in V(H_k), \forall U(t, b) \in \mathcal{U}_k, (x, \alpha)U(t, b) \in X_k \times H_k\}.$$

Nota 4.6. Aunque $\gamma_{n,k}$ no se trata de un grafo de Cayley propiamente, debido a su estructura en bolas de radio menor a k , presenta la misma acción de grupo que presenta el grafo Γ . Luego para un vértice dado en dicho grafo, la acción de una palabra $U(t, b) \in \mathcal{U}_k$ sobre él, tiene una única acción inversa correspondiente dada por una palabra $U(t, b)^{-1}$.

Antes de definir el término de k -reducibilidad, conviene establecer un procedimiento para transformar a una palabra $V(t, b)$ en otra palabra equivalente $W(t, b)$. Dicho procedimiento consta de las siguientes operaciones aplicadas un número finito de veces en el orden que más convenga.

- i) Inserción de uno de los relatores, incluyendo los triviales: entre, al principio o al final, de la palabra que se desea transformar, originando una nueva palabra.
- ii) Supresión de uno de los relatores, incluyendo los triviales, si se encuentran: entre, al principio o al final, de la palabra que se desea transformar, originando una nueva palabra.

Definición 4.7. Se dice que el camino $C = (x, \alpha)W(t, b)$ es k -reducible a e si $W(t, b)$ es reducible a e y si cada palabra que aparece durante el procedimiento de transformación, tiene longitud menor a k .

Lema 4.8. Sea $(x, \alpha) \in \gamma_{n,k}$ tal que $x \in Y_k$ y sea $C = (x, \alpha)W(t, b)$ un camino en $\gamma_{n,k}$ tal que $W(t, b)$ tiene longitud menor a k y es k -reducible a e por los relatores de la presentación de $BS(2, 3)$. Entonces C es cerrado.

Demostración. Sea $W^{(m)}(t, b)$ la m -ésima transformación de $W(t, b)$ en el proceso de transformación de $W(t, b)$ a e , donde $m = 0, \dots, p$ si se requiere en total un número p de transformaciones para ir de $W(t, b)$ a e (nótese que $W^{(0)}(t, b) = W(t, b)$).

Se tiene que $(x, \alpha)W^{(m)}(t, b) = (x, \alpha)W^{(m+1)}(t, b)$, para todo $m = 0, \dots, p - 1$ si se requiere un número p de transformaciones para ir de $(x', \alpha')W(t, b)$ a $(x', \alpha')e$.

Ahora bien, para la m -ésima transformación, como $(x, \alpha)W^{(m)}(t, b)$ es k -reducible por los relatores de $BS(2, 3)$, se tiene que

$$(x, \alpha)W^{(m)}(t, b) = (x, \alpha)U^{(m)}(t, b)t^{\theta_i}t^{\beta_i}t^{\theta_{i+1}}V^{(m)}(t, b)$$

con $\theta_i = -1 = -\theta_{i+1}$ y $0 \equiv \beta_i \pmod{2}$, o bien $\theta_i = 1 = -\theta_{i+1}$ y $0 \equiv \beta_i \pmod{3}$.

Como $|W^{(m)}(t, b)| < k$ por su k -reducibilidad, en particular $|U^{(m)}(t, b)| < k$; entonces se tiene que $(x', \alpha') = (x, \alpha)U^{(m)}(t, b)$ verifica el lema 4.2, y por lo tanto, si $\theta_i = -1 = -\theta_{i+1}$ y $0 \equiv \beta_i \pmod{2}$, se tiene

$$(x, \alpha)U^{(m)}(t, b)t^{-1}b^{\beta_i}tV^{(m)}(t, b) = (x', \alpha')b^{\frac{3}{2}}V^{(m)}(t, b),$$

o bien, si $\theta_i = 1 = -\theta_{i+1}$ y $0 \equiv \beta_i \pmod{3}$, se tiene

$$(x, \alpha)U^{(m)}(t, b)tb^{\beta_i}t^{-1}V^{(m)}(t, b) = (x', \alpha')b^{\frac{2}{3}}V^{(m)}(t, b).$$

Entonces $(x, \alpha)W(t, b)$ es finalmente equivalente a $(x, \alpha)b^q$ para algún $q \in \mathbb{Z}$ tal que $(x, \alpha)b^q = (x, \alpha)e$. Como b^q es de longitud menor a k la longitud mínima de los ciclos en el grafo, entonces $q = 0$ y por lo tanto $(x, \alpha)W(t, b) = (x, \alpha)$.

Es decir, C es cerrado. □

Lema 4.9. Sea Y_k como se ha definido. Entonces $|\overline{Y}_k| \leq 4^{k+1}|\overline{X}_k| \cdot |H_k|$. Donde $|H_k|$ es el tamaño del grafo H_k .

Demostración. Dada la definición de Y_k , se tiene que

$$\overline{Y}_k = \{x \in \mathbb{Z} : \forall \alpha \in V(H_k), \forall U(t, b) \in \mathcal{U}_k, (\overline{X}_k \times H_k)U(t, b)^{-1} = (x, \alpha)\}.$$

Entonces $|\overline{Y}_k| \leq 4^{k+1}|\overline{X}_k| \cdot |H_k|$, donde el factor 4^{k+1} surge por la posibilidad de la aparición de cada letra t, b y sus inversas t^{-1}, b^{-1} , $|\overline{X}_k|$ es el tamaño del conjunto complemento de X_k y $|H_k|$ es el tamaño del grafo finito H_k , pues este conjunto \overline{Y}_k depende de ambos \overline{X}_k y $|H_k|$. □

Nótese que la estimación de $|\overline{Y}_k|$ depende únicamente de k . Como se espera que $\frac{|\overline{Y}_k|}{n} < \epsilon$, dados cualesquiera valores para k y ϵ , se tiene que n debe ser tal que $n > \frac{|\overline{Y}_k|}{\epsilon}$. Así se garantiza que $\frac{|\overline{Y}_k|}{n} > 1 - \epsilon$.

Entonces, por el resultado en el lema 4.9, la familia de grafos $\gamma_{n,k}$ verifica que para un conjunto de vértices en $\gamma_{n,k}$ de tamaño menor a ϵ , un camino C de longitud menor a k que inicia en uno de esos vértices es cerrado, si y sólo si, la palabra $(C)M$ es reducible a e por los relatores de la presentación de $BS(2,3)$. La demostración en el primer sentido está dada por el lema 4.1; y en el sentido inverso, por el lema 4.8.

Por lo anterior, la familia de grafos $\gamma_{n,k}$, se trata de una familia de aproximaciones finitas al grafo Γ . Por la estimación de $\epsilon > \frac{|Y_k|}{n}$, sabemos que dados k y ϵ , es posible fijar k y encontrar un valor de n que satisfaga la definición, y finalmente crecer n tanto como sea necesario para ajustar el valor de ϵ deseado. De esta manera se satisface la definición de Weiss de soficidad. Por lo tanto, hemos demostrado el resultado central propuesto en el presente trabajo, y afirmamos lo siguiente.

Proposición 4.10. *El grupo de Baumslag-Solitar $BS(2,3)$ es sófico.*



Conclusiones

La clase de los grupos sóficos como generalización de las otras dos grandes clases, de grupos amenables y grupos residualmente finitos, ha permitido generalizar a su vez resultados importantes, como el teorema de Weiss. Ahora se sabe que si un grupo es sófico, entonces es suprajuntivo, propiedad considerada deseable en la Teoría de Autómatas Celulares.

El presente trabajo tuvo como tarea principal demostrar que el grupo de Baumslag-Solitar $BS(2, 3)$ es sófico, siendo que no es amenable ni residualmente finito. Como $BS(2, 3)$ es finitamente generado, se optó por emplear la caracterización de un grupo sófico debida a Weiss, que requiere que exista una familia de aproximaciones finitas al grafo de Cayley asociado al grupo en cuestión, para afirmar que dicho grafo es sófico.

Entonces la estrategia para resolver este problema abarcó las siguientes tareas: la construcción de Γ , un posible grafo de Cayley asociado a $BS(2, 3)$; demostrar que Γ sí es el grafo de Cayley asociado a $BS(2, 3)$; la construcción de una familia de grafos $\gamma_{n,k}$ finitos como posible familia de aproximaciones finitas al grafo Γ ; demostrar que la familia de grafos $\gamma_{n,k}$ sí es una familia de aproximaciones finitas al grafo Γ .

En el desarrollo de las tareas mencionadas, se aportaron las ideas originales de la construcción de los grafos Γ y $\gamma_{n,k}$, y los etiquetados de los que fueron provistos; y se elaboraron las demostraciones de los resultados necesarios para, apoyados en dichas construcciones y estructuras, probar el resultado central.

Actualmente, un problema abierto es encontrar un grupo que no sea sófico. Propiamente, el desarrollo de este trabajo, tiene el potencial de aportar técnicas para atacar dicho problema, refiriéndonos a la construcción de grafos y a los etiquetados adicionales a los etiquetados dados por la coloración y orientación de dichos grafos.

Referencias

- [Elek04] Elek, G. y Szabó, E. Sofic groups and direct finiteness. *J. Algebra*, 280(2):426–434, 2004. ISSN 0021-8693.
- [Elek06] Elek, G. y Szabó, E. On sofic groups. *J. Group Theory*, 9(2):161–171, 2006. ISSN 1433-5883.
- [Gromov99] Gromov, M. Endomorphisms of symbolic algebraic varieties. *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*, 1(2):109–197, 1999. ISSN 1435-9855.
- [Magnus76] Magnus, W., Karrass, A., y Solitar, D. *Combinatorial group theory*. Dover Publications Inc., New York, revised ed^{ón}, 1976. Presentations of groups in terms of generators and relations.
- [Weiss00] Weiss, B. Sofic groups and dynamical systems. *Sankhyā Ser. A*, 62(3):350–359, 2000. ISSN 0581-572X. Ergodic theory and harmonic analysis (Mumbai, 1999)

