



Universidad Autónoma de San Luis Potosí.



Facultad de Ciencias

Gráficas  $k$ -críticas en cruces

TESIS

Que para obtener el Grado de

Maestro en Ciencias Aplicadas

P R E S E N T A :

Mat. Mario Lomelí Haro

A S E S O R :

Dr. Gelasio Salazar Anaya

SAN LUIS POTOSÍ, S.L.P.

FEBRERO DE 2003.

Quien se añade conocimiento se añade dolor  
*Ismael Zamora Castanedo.*

A mi familia, a mi sagrada familia, mi papá,  
mi mamá, mis hermanos Jaime, Alex,  
Ismael Zamora, Jerová Ramírez  
e Ismael Olivares.

## Agradecimientos:

Principalmente a mi familia, que siempre me ha apoyado.

A mis grandes e infalibles amigos Ismael Zamora, Ismael Olivares y Jehová, que siempre han estado conmigo desde hace muchos años, de verdad gracias.

A David Viramontes, Ricardo Aguiñaga, Luis R. Temblador, Daniel Alejandro Mejía, Gerardo Ampacún, Alejandro Acosta, Erick Luévano, Carlos Jasso y a su esposa Aída que siempre me motivan para seguir estudiando, y también a todos mis demás amigos que siempre andan en la pista.

A mis amigos del IICO especialmente Efraín, Jacob, Leti, Nadia, Saúl y Carmelo.

Al Dr. Gelasio Salazar y al Dr. Edgardo Ugalde.

Y sobre todo a Dios que es El quien más me ha ayudado.

# Contenido

Lista de figuras	iii
<b>1 Introducción</b>	<b>1</b>
1.1 Gráficas . . . . .	1
1.2 Números de cruce de gráficas en superficies compactas . . . . .	3
1.3 Números de cruce en el plano de familias específicas de gráficas . . . . .	5
1.3.1 Gráficas Completas . . . . .	5
1.3.2 Gráficas Bipartitas Completas . . . . .	6
1.3.3 Productos Cartesianos de Ciclos . . . . .	7
1.4 Encajes de gráficas en superficies . . . . .	7
1.5 Gráficas $k$ -críticas en cruces en $\Sigma$ . . . . .	8
1.6 Motivación para el estudio de gráficas críticas en cruces . . . . .	9
1.7 Contribuciones de esta tesis a la teoría de gráficas críticas en cruces . . . . .	9
1.7.1 Teoremas principales de esta tesis . . . . .	10
1.8 Organización de esta tesis . . . . .	11
<b>2 Demostración de los resultados</b>	

principales	12
2.1 Demostración del Teorema 1 . . . . .	12
2.2 Demostración del Teorema 2 . . . . .	15
<b>3 La familia <math>H(m, n)</math></b>	<b>25</b>
<b>4 Conclusiones y comentarios finales</b>	<b>34</b>
<b>5 Bibliografía</b>	<b>35</b>

# Lista de figuras

1.1	Figura de $K_5$ con 1 cruce. . . . .	6
1.2	Figura de $K_6$ con 3 cruces. . . . .	6
3.1	Adyacencias de $v_{i,j}$ . . . . .	26
3.2	$H(4, 7)$ en el toro. . . . .	26
3.3	$H(4, 7)$ en $\mathbb{K}$ con 12 cruces . . . . .	30
3.4	$H(4, n)$ en $\mathbb{K}$ con 12 cruces . . . . .	30
3.5	$C_4 \times C_{16}$ contenida en $H(4, 16)$ . . . . .	31
3.6	$C_3 \times C_5$ contenida en $H(12, 12)$ . . . . .	33

# Capítulo 1

## Introducción

Nuestro objetivo en la presente tesis es de analizar los resultados que tenemos acerca de las gráficas que son críticas con respecto a su número de cruce y resolver una conjetura acerca de una familia infinita de gráficas.

Comenzaremos presentando una breve discusión de los conceptos básicos utilizados en este trabajo.

### 1.1 Gráficas

Empezaremos con la definición formal de una gráfica.

**Definición.** Una *gráfica*  $G$  es una tripleta ordenada  $(V(G), E(G), \psi_G)$  que consiste de un conjunto no vacío  $V(G)$  de *vértices*, un conjunto  $E(G)$  (disjunto de  $V(G)$ ) de *aristas*, y una función de incidencia  $\psi_G$  que asocia a cada arista de  $G$  un par (no ordenado) de elementos (no necesariamente distintos) de  $V(G)$ .

Normalmente, omitimos la referencia a  $\psi_G$ , y simplemente decimos que una gráfica  $G = (V, E)$  consiste de un conjunto  $V$  de *vértices* y un conjunto  $E$  de *aristas*. Cada arista  $e$  *une* un par de vértices  $u$  y  $v$ , los *extremos* de  $e$ . Si una arista  $e$  une  $u$  y  $v$ , entonces  $u$  y  $v$  son *adyacentes*, y  $e$  es *incidente* con ambos  $u$  y  $v$ .

Si  $u$  y  $v$  son vértices unidos por  $e$ , frecuentemente denotaremos a  $e$  por  $(u, v)$  o por  $uv$ .

Un *sendero* de una gráfica  $G$  es una secuencia no nula  $T = v_0 e_1 v_1 e_2 \dots e_k v_k$ , cuyos términos son alternadamente vértices y aristas, tal que los extremos de la arista  $e_i$  son  $v_{i-1}$  y  $v_i$ . Los vértices  $v_0$  y  $v_k$  son el *principio* y el *final*, respectivamente, de  $T$ , y el entero  $k$  es la *longitud* de  $T$ . Los vértices  $v_1, \dots, v_{k-1}$  son los vértices *internos* de  $T$ .

Un sendero es *cerrado* si  $v_0 = v_k$ . Un *ciclo* es un sendero cerrado cuyos vértices son todos diferentes entre sí.

Un sendero  $T = v_0 e_1 v_1 \dots e_k v_k$  es un *camino* si los vértices  $v_0, v_1, \dots, v_k$  son todos diferentes entre sí.

Un *lazo* es un sendero cerrado con  $k = 1$ .

Si  $e$  y  $f$  son aristas distintas que unen el mismo par de vértices (diferentes), entonces  $e$  y  $f$  son aristas *paralelas*.

Una gráfica es *simple* si no tiene lazos ni aristas paralelas.

El *grado*  $d(v)$  de un vértice  $v$  en una gráfica  $G$  es el número de aristas en  $G$  incidentes con  $v$  (cada lazo incidente con un vértice  $v$  contribuye en 2 a  $d(v)$ ). Si  $d(v) = k$  para todo vértice  $v$  en  $G$  decimos entonces que  $G$  es *k-regular*.

Diremos que dos gráficas son *isomorfas* (lo denotaremos  $G \cong H$ ) si existen biyecciones  $\theta : V(G) \rightarrow V(H)$  y  $\phi : E(G) \rightarrow E(H)$  tales que  $\psi_G(e) = uv$  si y solo si  $\psi_H(\phi(e)) = \theta(u)\theta(v)$ . Así, la pareja  $(\phi, \theta)$  es el *isomorfismo* entre  $G$  y  $H$ .

Un *automorfismo* de una gráfica  $G$ , es un isomorfismo de dicha gráfica a sí misma. El conjunto de todos los isomorfismos de  $G$  forma un grupo  $\mathcal{A}(G)$  bajo la operación usual de composición; a este grupo le llamaremos *grupo de automorfismos*.

**Definición.** Una gráfica simple  $G$  es *vértice-transitiva* si para cualesquiera dos vértices  $u$  y  $v$  hay un automorfismo  $g$  en  $\mathcal{A}(G)$  tal que  $g(u) = v$ .

**Definición.** Una gráfica simple  $G$  es *arista-transitiva* si para cualesquiera dos aristas  $u_1 v_1$  y  $u_2 v_2$ , hay un automorfismo  $h$  en  $\mathcal{A}(G)$  tal que  $h(\{u_1 v_1\}) = \{u_2 v_2\}$ .

En esta tesis, denotaremos por  $|B|$  la cardinalidad del conjunto  $B$ .

Finalizamos esta subsección mencionando un resultado elemental de teoría de gráficas que usaremos frecuentemente en este trabajo: para toda gráfica  $G = (V, E)$ ,

$$\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2|E(G)|.$$

## 1.2 Números de cruce de gráficas en superficies compactas

En este trabajo utilizamos la notación y terminología convencional de teoría de gráficas introducida por Bondy y Murty (ver [1]).

En la sección anterior pudimos apreciar que una gráfica es un objeto abstracto. Sin embargo, para facilitar su estudio realizaremos representaciones de cada gráfica a analizar en diferentes superficies.

Una *superficie* es una 2-variedad (esto es, un espacio topológico localmente homeomorfo al disco unitario) conexa. Nos interesaremos principalmente en superficies compactas  $\Sigma$ . Por el Teorema de Clasificación de Superficies (ver por ejemplo [7]), toda superficie compacta se caracteriza por su condición de orientabilidad (esto es, por si es orientable o no orientable) y por su *género*.

Las superficies orientable y no orientable de género  $g$  serán denotadas por  $\Sigma_g$  y  $\widetilde{\Sigma}_g$ , respectivamente.

Así, por ejemplo,  $\Sigma_0$  es la esfera,  $\Sigma_1$  es el toro,  $\widetilde{\Sigma}_1$  es el plano proyectivo, y  $\widetilde{\Sigma}_2$  es la Botella de Klein.

En este trabajo realizaremos dichas representaciones de las gráficas a analizar mediante dibujos. Tenemos la siguiente definición:

**Definición.** Un *dibujo* de una gráfica  $G$  en la superficie  $\Sigma$  (ya sea orientable o no) es un subconjunto de dicha superficie en el cual los vértices de  $G$  son representados como diferentes puntos, y cada arista  $(u, v)$  de  $G$  es representada como un arco abierto  $A$  (imagen continua del intervalo  $(0, 1)$ ) que no contiene vértices, de tal manera que los extremos de  $A$  son los puntos que representan  $u$  y  $v$ .

**Nota.** Por razones de brevedad, si hay solamente un dibujo de una gráfica  $G$  en el la superficie  $\Sigma$  bajo consideración, usualmente no distinguimos entre una subestructura de  $G$  (como un vértice, un camino, o un ciclo) y el subconjunto de  $\Sigma$  que lo representa.

**Definición** El *número de cruce*  $cr_{\Sigma}(G)$  de una gráfica  $G$  en la superficie  $\Sigma$  es el mínimo número de intersecciones (a pares) de aristas tomado sobre todos los dibujos de  $G$  en  $\Sigma$ .

Un dibujo  $\mathcal{D}$  de  $G$  en una superficie  $\Sigma$  es *óptimo* si el número de cruce del dibujo es igual al número de cruce de la gráfica en  $\Sigma$ .

Notemos que al exhibir un dibujo de  $G$  en cualquier superficie  $\Sigma$  con  $n$  cruces, se implica automáticamente que  $cr_{\Sigma}(G) \leq n$ .

Un dibujo de una gráfica  $G$  es *bueno* si las siguientes condiciones se satisfacen:

- (i) Cada intersección es un cruce (y no tangencial).
- (ii) Ninguna arista se autointersecta.
- (iii) Ningún par de aristas adyacentes se intersecta.
- (iv) Ningún par de aristas tiene más de un punto de intersección.
- (v) Ningún conjunto de tres (o más) aristas tiene un punto común de intersección.

No es difícil probar que todo dibujo de una gráfica  $G$  en una superficie  $\Sigma$  puede ser modificado hasta obtener un buen dibujo de  $G$  en  $\Sigma$  sin aumentar el número de cruces [11]. Se sigue entonces que para toda gráfica  $G$  existe un dibujo óptimo que es bueno.

En el presente trabajo nos interesan únicamente dibujos óptimos de gráficas en superficies. Por la observación del párrafo anterior, no habrá pérdida de generalidad por nuestra suposición (implícita, de ahora en adelante) de que todo dibujo bajo consideración es bueno.

El cálculo exacto del número de cruce de una gráfica es, para la enorme mayoría de los casos de interés, un proyecto desesperanzadoramente complicado (como veremos más adelante). Esta dificultad se fundamenta en el hecho de que calcular el número de cruce de una gráfica en el plano es un problema NP-Completo [4].

Dada esta dificultad inherente al proceso de calcular números de cruce, cualquier esfuerzo serio para hallar el número de un cruce de una gráfica debe involucrar argumentos que exploten características especiales de la estructura de la gráfica en cuestión.

Naturalmente, nos gustaría conocer los números de cruce de familias interesantes de gráficas tales como  $K_{m,n}$ ,  $K_n$ , o  $C_m \times C_n$ . Sin embargo, a pesar de un sostenido esfuerzo de la comunidad de teoría topológica de gráficas, conocemos los números de cruce de solo unas cuantas gráficas.

Dedicamos la siguiente sección a presentar un breve resumen de los números de cruce exactos que se conocen.

### 1.3 Números de cruce en el plano de familias específicas de gráficas

El objetivo de esta sección es presentar algunas familias interesantes de gráficas cuyos números de cruce son conocidos con exactitud. Algunas de estas familias son:

- $K_n$ . Es la gráfica de  $n$  vértices donde cada uno de sus vértices es adyacente a todos los vértices restantes.
- $K_{m,n}$ . Es la gráfica cuyo conjunto de vértices puede partitionarse en conjuntos  $X, Y$ , con  $|X| = m$  y  $|Y| = n$ , de tal modo que los vértices  $u, v$  son adyacentes si y solo si uno de  $u, v$  pertenece a  $X$  y el otro pertenece a  $Y$ .
- $C_m \times C_n$ . Es la gráfica 4-regular con  $mn$  vértices, los cuales son etiquetados  $v_{i,j}$ , con  $0 \leq i \leq m-1$  y  $0 \leq j \leq n-1$ , de tal manera que los vértices adyacentes a  $v_{i,j}$  son  $v_{i-1,j}, v_{i+1,j}, v_{i,j-1}$  y  $v_{i,j+1}$ , con los subíndices siendo leídos módulo  $m$  y  $n$  respectivamente.

Presentamos las mejores cotas inferiores conocidas para los números de cruce de las familias  $K_n, K_{m,n}$ , y  $C_m \times C_n$ .

#### 1.3.1 Gráficas Completas

No es difícil encontrar dibujos de  $K_n$  con exactamente

$$\frac{1}{4} \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n-3}{2} \right\rfloor$$

cruces.

En las siguientes figuras podemos ver que la fórmula funciona para  $K_5$  y  $K_6$ .

Erdős y Guy conjeturaron en 1973 que éste es el número de cruce de  $K_n$  [2].

Esta conjetura ha sido confirmada únicamente para  $n \leq 10$ .

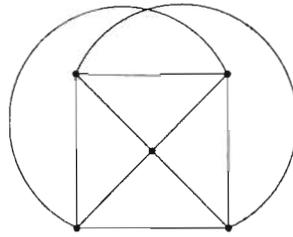


Figura 1.1: Figura de  $K_5$  con 1 cruce.

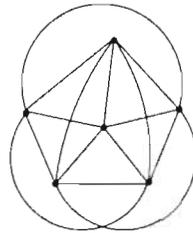


Figura 1.2: Figura de  $K_6$  con 3 cruces.

El mejor resultado conocido en esta dirección es que  $cr(K_n) \geq \frac{3}{10} \binom{n}{4}$ . Esto implica que, asintóticamente, el número de cruce de  $K_n$  es al menos cuatro quintos del valor conjeturado.

### 1.3.2 Gráficas Bipartitas Completas

El problema de calcular números de cruce fue propuesto por el matemático húngaro Turán en 1940. Específicamente, Turán planteó el problema de calcular el número de cruce de  $K_{m,n}$ . Turán conjeturó que

$$cr(K_{m,n}) = \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{m-1}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor.$$

Donde  $\lfloor \alpha \rfloor$  se define como el mínimo entero menor o igual que  $\alpha$ .

Esta conjetura ha sido demostrada únicamente para valores de  $m$  y  $n$  que satisfacen  $\min\{m, n\} \leq 6$ .

### 1.3.3 Productos Cartesianos de Ciclos

Harary, Kainen, y Schwenk conjeturaron en 1973 que el número de cruces de  $C_m \times C_n$  es igual a  $(m-2)n$ , si  $m, n$  satisfacen  $n \geq m \geq 3$ . Esta conjetura ha sido demostrada para  $n \geq m \geq 7$ .

Recientemente, Glebsky y Salazar demostraron que para cada  $m$  fija, la conjetura es falsa para a lo más un número finito de valores de  $n$  [5].

## 1.4 Encajes de gráficas en superficies

En esta tesis necesitaremos establecer algunos resultados sobre gráficas que se pueden dibujar en una superficie  $\Sigma$  dada (orientable o no, de género  $g$ ) sin cruces de aristas.

**Definición.** Un *encaje* de una gráfica  $G$  en una superficie  $\Sigma$  es un dibujo de  $G$  en  $\Sigma$  que no tiene cruces de aristas.

**Definición.** Sea  $\Sigma$  una superficie compacta. Una gráfica es  $\Sigma$  *encajable* si existe un encaje de  $G$  en  $\Sigma$ .

Sea  $\mathcal{E}$  un encaje de una gráfica  $G$  en  $\Sigma$ . Las componentes conexas de  $\Sigma \setminus G$  son las *caras* de  $\mathcal{E}$ .

El número de aristas en la frontera de una cara es el *orden* de la cara. Notemos que las caras no son necesariamente homeomorfas a discos abiertos.

Sea  $F$  una cara en un encaje  $\mathcal{E}$  en una superficie  $\Sigma$ . La *frontera de cara* asociada a  $F$  es el sendero cerrado obtenido al recorrer (en  $\Sigma$ ) la frontera de  $F$  en su orden natural.

En un encaje  $\mathcal{E}$  de una gráfica conexa simple que no tiene únicamente una arista (como todas las gráficas que nos interesan en el presente trabajo), ninguna cara tiene orden menor que tres. Como toda arista está en la frontera de a lo más dos caras, obtenemos la importante desigualdad

$$3|F(\mathcal{E})| \leq 2|E(\mathcal{E})|,$$

donde  $F(\mathcal{E})$  y  $E(\mathcal{E})$  denotan los conjuntos de caras y aristas en la gráfica  $G$  encajada, respectivamente.

Una herramienta esencial para el presente trabajo es la Fórmula de Euler para superficies compactas. Si  $\mathcal{E}$  es un  $\Sigma_g$ -encaje de  $G$ , entonces

$$|V(\mathcal{E})| - |E(\mathcal{E})| + |F(\mathcal{E})| = 2 - 2g \quad (1.1)$$

(aquí  $V(\mathcal{E})$  denota el conjunto de vértices de  $G$  dibujados en  $\Sigma_g$ ).

Por otra parte, si  $\mathcal{E}$  es un  $\widetilde{\Sigma}_g$ -encaje de  $G$ , entonces

$$|V(\mathcal{E})| - |E(\mathcal{E})| + |F(\mathcal{E})| = 2 - g. \quad (1.2)$$

## 1.5 Gráficas $k$ -críticas en cruces en $\Sigma$

Dado que el cálculo exacto de números de cruce es una tarea fútil para prácticamente cualquier gráfica de interés, es sensato enfocar nuestro interés en el análisis de las propiedades estructurales de las gráficas que ocasionan (y/o garantizan) números de cruce grandes.

Es fácil construir gráficas con un número arbitrariamente grande de aristas (y vértices, en consecuencia) que tienen número de cruce arbitrariamente bajo (inclusive igual a cero, por supuesto). Estas gráficas tienen la propiedad de que el número de cruce no disminuye si eliminamos de la gráfica alguna(s) arista(s). El hecho de que el número de cruce de una gráfica  $G$  permanece inalterado ante la eliminación de aristas indica que las propiedades estructurales responsables del número de cruce pueden encontrarse en subgráficas propias de  $G$ .

Naturalmente, ante tal situación lo más razonable es eliminar recursivamente aristas de  $G$ , hasta llegar al punto en que borrar *cualquier* arista disminuye el número de cruce. Esta idea conduce a la definición de gráficas críticas en cruces.

**Definición.** Una gráfica  $G$  es  $k$  crítica en cruces en  $\Sigma$  si  $cr_{\Sigma}(G) \geq k$ , y  $cr_{\Sigma}(G-e) < k$  para toda arista  $e$  de  $G$ .

Como hemos mencionado anteriormente, el objetivo de esta tesis es estudiar gráficas  $k$ -críticas en cruces. Más específicamente, nos dedicaremos al análisis de

gráficas  $k$ -críticas en cruces en superficies de género positivo (orientables y no orientables).

## 1.6 Motivación para el estudio de gráficas críticas en cruces

A partir de la discusión en la sección precedente, resulta clara la importancia del estudio de gráficas críticas en cruces: estas gráficas no contienen aristas superfluas, por lo que cada subestructura de la gráfica es esencial para mantener el número de cruce de la misma.

## 1.7 Contribuciones de esta tesis a la teoría de gráficas críticas en cruces

El principal trabajo de investigación reportado hasta la fecha en el área de gráficas críticas en cruces es indudablemente el realizado por Richter y Thomassen [8], cuyo principal resultado es el siguiente:

**Teorema (Richter y Thomassen, 1993).** Sea  $G$  una gráfica  $k$ -crítica en cruces en  $\Sigma_0$ . Entonces

$$cr_{\Sigma_0}(G) \leq 2.5k + 16.$$

Este resultado fue generalizado en [12] a cualquier superficie compacta de género positivo con el siguiente Teorema:

**Teorema.** Para cada superficie compacta  $\Sigma$  existe una constante  $c(\Sigma)$  con la siguiente propiedad. Sea  $G$  una gráfica  $k$ -crítica en  $\Sigma$ . Entonces

$$cr_{\Sigma}(G) \leq 2.5k + c(\Sigma).$$

Nuestro interés en el presente trabajo es mejorar el coeficiente de  $k$  en esta cota.

### 1.7.1 Teoremas principales de esta tesis

En esta tesis presentamos 2 casos donde logramos reducir la cota recién presentada. En el primer resultado, que es únicamente para el plano, analizamos el grado mínimo de la gráfica en cuestión, motivados por una nota que hizo Gelasio Salazar [10] sobre el mencionado resultado de Richter y Thomassen.

En el segundo caso reducimos la cota de  $2.5k$  a  $2k$  y generalizamos éste resultado a cualquier superficie  $\Sigma$ . Los enunciados demostrados son los siguientes:

**Teorema 1.** *Existe una constante  $C$  con la siguiente propiedad. Si  $G$  es una gráfica  $k$ -crítica en el plano con grado mínimo  $\delta \geq 4$ , entonces*

$$cr(G) \leq 2k - k \left( \frac{\delta - 4}{\delta - 2} \right) + C$$

**Teorema 2.** *Existe una constante  $C'$  con la siguiente propiedad. Si  $G$  es una gráfica  $k$ -crítica en  $\Sigma$ , entonces existe un entero  $f(k, g)$  tal que si  $|V(G)| \geq f(k, g)$  entonces*

$$cr(G) \leq 2k + C'$$

Para este último Teorema contamos con la agradable sorpresa de que ésta misma constante  $C'$  funciona para cualquier superficie  $\Sigma$ .

Mencionamos anteriormente que generalizamos el resultado de Richter y Thomassen de [8] para cualquier superficie compacta en [12]. En el mismo trabajo, también se generalizaron los corolarios que surgieron como consecuencia del Teorema principal de [8]. Sin embargo, el Corolario 3 no aceptó generalización para cualquier superficie compacta.

El Corolario 3 en [8] establece que para cada número natural  $k$ , existe un número natural  $n_k$  tal que toda gráfica simple  $G$   $k$ -crítica en el plano con grado mínimo 6 tiene a lo más  $n_k$  vértices.

Desafortunadamente, las técnicas utilizadas para demostrar este resultado no admiten una generalización a superficies arbitrarias como se hizo en [12]. Esto fue lo que nos orilló a formular la siguiente conjetura que en este trabajo respondemos:

**Conjetura.** Existe una familia infinita de gráficas 6-regulares  $k$ -críticas en cruces (para la misma  $k$ ) en la botella de Klein ( $\mathbb{K}$  o  $\widetilde{\Sigma}_2$ ).

Para resolver esta conjetura, describimos la construcción de una familia infinita  $H(m, n)$  de gráficas 6-regulares, para la cual (basados en la riqueza del grupo de automorfismos de cada gráfica en la familia) la siguiente propiedad se cumple: para cada entero (par) fijo  $m$  existe  $n_m$  (que depende solamente de  $m$ ) tal que para toda  $n \geq n_m$   $cr_{\mathbb{K}}H(m, n)$  es el mismo y  $H(m, n)$  es  $k$ -crítico en  $\mathbb{K}$ .

Esta propiedad garantizaría la existencia de una familia infinita de gráficas 6 regulares  $k$ -críticas en  $\mathbb{K}$ .

Así pues el siguiente Teorema demuestra la conjetura mencionada.

**Teorema 3.** *Existen enteros positivos  $m_0$  y  $n_0$  tales que si  $m \geq m_0$  y  $n \geq n_0$  entonces  $H(m, n)$  es crítico en cruces en  $\mathbb{K}$ .*

Como se comentó ya, con ésto probamos que el Corolario 3 en [8] no admite generalización para superficies compactas arbitrarias.

En los capítulos siguientes determinaremos los valores de  $C, C', m_0$  y  $n_0$ .

## 1.8 Organización de esta tesis

Esta tesis se encuentra organizada de la siguiente manera.

En el Capítulo 2 demostramos los Teoremas 1 y 2.

En el Capítulo 3 demostramos el Teorema 3.

En el Capítulo 4 presentaremos las conclusiones y algunos comentarios finales.

## Capítulo 2

# Demostración de los resultados principales

### 2.1 Demostración del Teorema 1

Como dijimos anteriormente Richter y Thomassen probaron que si  $G$  es una gráfica  $k$ -crítica en el plano, entonces el número de cruce de  $G$ , es a lo mas  $2.5k + 16$ . Posteriormente Gelasio Salazar probó que si  $G$  es una gráfica  $k$ -crítica con grado mínimo  $\delta = 4$  entonces  $cr(G) \leq 2k + 35$  [10].

Es fácil verificar que la prueba del Teorema 2 en [8] arroja el siguiente resultado:

**Teorema 4.** *Sea  $G$  una gráfica simple y de grado mínimo al menos 3. Supongamos que  $G$  tiene un conjunto  $E$  de  $t$  aristas tal que  $G \setminus E$  es planar. Entonces  $G$  tiene un ciclo  $C$  y una arista  $vw$  tal que*

$$\sum_{u \in V(C) \setminus \{v,w\}} (d(u) - 2) \leq 27 + t.$$

Un procedimiento análogo al que se utilizó en éste trabajo nos da lo siguiente.

**Teorema 1** *Si  $G$  una gráfica  $k$ -crítica en el plano con grado mínimo  $\delta \geq 4$ , entonces*

$$cr(G) \leq 2k - k \left( \frac{\delta - 4}{\delta - 2} \right) + \frac{56 - \delta}{\delta - 2}$$

*Demostración:*

Sea  $t_0$  el menor entero posible tal que exista un conjunto  $E$  de  $t_0$  aristas tal que  $G' = G \setminus E$  sea planar. Sean  $C$ ,  $v$  y  $w$  como en el Teorema anterior. Tenemos que

$$\sum_{u \in V(C) \setminus \{v, w\}} (d(u) - 2) \leq t_0 + 27.$$

Llamémosle  $e$  a la arista  $vw$  y sea  $P$  el camino  $C - e$ .

Como el grado mínimo de  $G$  es  $\delta$ , se sigue que hay a lo mas  $\frac{t_0 + 27}{\delta - 2}$  aristas en  $P$ .

Dado que  $G$  es  $k$ -crítico, hay un dibujo de  $G \setminus e$  con a lo mas  $k - 1$  cruces. En dicho dibujo algunas aristas de  $P$  podrán cruzarse con algunas aristas de  $P$  mismo. Sea  $H$  el dibujo planar de  $P$  con vértices de grado 2 y 4 y  $P'$  el camino mas corto en  $H$  que une a  $v$  y  $w$ .

Hay dos maneras de dibujar a  $e$  cerca de  $P'$ , una por cada lado, creando el menor número de cruces posible, que es a lo mas

$$2 \left( \frac{t_0 + 27}{\delta - 2} \right) + 2cr(P). \quad (2.1)$$

Donde  $cr(P)$  es el número de cruce de las aristas de  $P$  en el dibujo de  $C \setminus e$ .

Quitando de  $G \setminus e$  las (a lo mas  $\left(\frac{t_0 + 27}{\delta - 2}\right)$ ) aristas de  $P$ , tendremos un dibujo de  $G \setminus (P \cup e)$  con a lo mas  $(k - 1) - cr(P)$  cruces, así pues, ésto implica que tendremos un conjunto  $E'$  de a lo mas

$$1 + \left( \frac{t_0 + 27}{\delta - 2} \right) + (k - 1) - cr(P)$$

aristas tales que  $G \setminus E'$  es planar.

Por la elección de  $t_0$  tenemos que

$$t_0 \leq 1 + \left( \frac{t_0 + 27}{\delta - 2} \right) + (k - 1) - cr(P).$$

O sea  $cr(P) \leq k + \frac{27}{\delta - 2} + \frac{t_0(3 - \delta)}{\delta - 2}$ . Sustituyendo ésto en la ecuación 2.1 tendremos que *los dos dibujos* de  $e$  cerca de  $P$  tienen a lo más

$$\begin{aligned} 2 \left( \frac{t_0 + 27}{\delta - 2} \right) + 2cr(P) &\leq \frac{2t_0}{\delta - 2} + \frac{54}{\delta - 2} + 2k + \frac{2t_0(3 - \delta)}{\delta - 2} + \frac{54}{\delta - 2} \\ &= 2t_0 \left( \frac{4 - \delta}{\delta - 2} \right) + \frac{108}{\delta - 2} + 2k \end{aligned}$$

cruces.

Por lo tanto, podemos dibujar a  $c$  con a lo más

$$t_0 \left( \frac{4 - \delta}{\delta - 2} \right) + \frac{54}{\delta - 2} + k$$

cruces.

Con ésto, tenemos que  $G$  tendrá a lo más  $t_0 \left( \frac{4 - \delta}{\delta - 2} \right) + \frac{54}{\delta - 2} + k + (k - 1)$  cruces, ésto es

$$cr(G) \leq t_0 \left( \frac{4 - \delta}{\delta - 2} \right) + \frac{54}{\delta - 2} + 2k - 1.$$

Finalmente, como  $t_0 \leq k$ , la ecuación anterior queda:

$$cr(G) \leq 2k - k \left( \frac{\delta - 4}{\delta - 2} \right) + \frac{56 - \delta}{\delta - 2}.$$

Con éste resultado claramente podemos apreciar que mientras más grande sea el grado mínimo, el número de cruce tiende a ser  $k$ .

En la siguiente sección reduciremos la cota general a  $2k$  y generalizaremos el resultado a superficies compactas arbitrarias.

## 2.2 Demostración del Teorema 2

Como se mencionó anteriormente es de nuestro gran interés reducir la cota obtenida en [8]. Demostraremos a continuación el Teorema 2.

Primeramente haremos unas observaciones sobre gráficas encajables en  $\Sigma$  donde  $\Sigma$  representa una superficie compacta de género  $g$  ya sea orientable o no orientable.

En esta sección asumiremos que las gráficas a analizar tienen grado mínimo 3, pues el eliminar los vértices de grado 1 o suprimir los vértices de grado 2 no influye en su número de cruce.

Denotaremos como  $\mathcal{V}(G)$ ,  $\mathcal{E}(G)$  y  $\mathcal{F}(G)$  a los conjuntos de vértices, aristas y caras de  $G$  en  $\Sigma$  respectivamente.

Definamos la función de peso  $w$  para la cara  $F$  como:

$$w(F) = \sum_{v \sim F} \frac{1}{d(v)},$$

donde  $v \sim F$  significa que  $v$  es sumado conforme aparece al recorrer la frontera de  $F$ . Podemos ver que

$$\sum_{F \in \mathcal{F}} w(F) = v.$$

Denotaremos  $l(F)$  al número de aristas que forman la cara  $F$ , con ésto, podemos ver que

$$\sum_{F \in \mathcal{F}} l(F) = 2e.$$

Con las dos cantidades anteriormente descritas, definiremos la función de peso neto  $N$  de la cara  $F$  como

$$N(F) = w(F) - \frac{l(F)}{2} + 1.$$

Con ésto podemos reescribir la fórmula de Euler para superficies orientables (1.1) como:

$$\sum_{F \in \mathcal{F}} N(F) = 2 - 2g.$$

y para superficies no orientables como:

$$\sum_{F \in \mathcal{F}} N(F) = 2 - g.$$

Así, podemos ver que el promedio del peso neto de las caras será  $\frac{2-2g}{|\mathcal{F}|}$  en superficies orientables y  $\frac{2-g}{|\mathcal{F}|}$  en superficies no orientables.

Dado que los resultados que aquí presentamos se demuestran idénticamente para superficies orientables como para las no orientables, trabajaremos únicamente de ahora en adelante con superficies orientables.

Así tenemos el siguiente resultado:

**Lema 5.** *Sea  $G$  una gráfica encajada en  $\Sigma$ , entonces existe al menos una cara  $F$  de  $G$  tal que  $N(F) \geq \frac{2-2g}{|\mathcal{F}|} - \frac{5}{42}$ .*

*Demostración:*

Supongamos que no existe cara  $F$  tal que  $N(F) \geq \frac{2-2g}{|\mathcal{F}|} - \frac{5}{42}$ . Esto es lo mismo que suponer que toda cara  $F$  cumple que  $N(F) < \frac{2-2g}{|\mathcal{F}|} - \frac{5}{42}$ . Tenemos así que

$$2 - 2g = \sum_{F \in \mathcal{F}} N(F) < |\mathcal{F}| \left( \frac{2-2g}{|\mathcal{F}|} - \frac{5}{42} \right) = 2 - 2g - |\mathcal{F}| \frac{5}{42}$$

lo cual es una contradicción. Concluimos entonces que existe al menos una cara  $F$  tal que  $N(F) \geq \frac{2-2g}{|\mathcal{F}|} - \frac{5}{42}$ . ■

Llamémosle cara *buen*a a toda cara  $F$  tal que  $N(F) \geq \frac{2-2g}{|\mathcal{F}|} - \frac{5}{42}$ . Denotemos por  $\mathcal{G}$  al conjunto de las caras buenas, esto es

$$\mathcal{G} = \left\{ F \in \mathcal{F} : w(F) - \frac{l(F)}{2} + 1 \geq \frac{2-2g}{|\mathcal{F}|} - \frac{5}{42} \right\}.$$

Nuestro argumento anterior muestra que  $\mathcal{G}$  es no vacío.

**Lema 6.** *Sea  $G$  una gráfica encajada en  $\Sigma$  entonces  $N(F) \leq \frac{1}{2}$  para toda  $F \in \mathcal{F}$ .*

*Demostración:*

Sea  $F$  una cara de  $G$  en  $\Sigma$ . Por un lado podemos ver que  $d(v) \geq 3$  para todo  $v \in \mathcal{V}$ . Por otro lado, como ya se había dicho tenemos que para toda cara  $F$ ,  $l(F) \geq 3$ . Combinando ambas desigualdades en la definición de  $N(F)$  tenemos que

$$N(F) = w(F) - \frac{l(F)}{2} + 1 \leq \frac{l(F)}{3} - \frac{l(F)}{2} + 1 = 1 - \frac{l(F)}{6} \leq \frac{1}{2}.$$

Para poder reducir la cota dada en el Teorema 3 de [8], trabajaremos únicamente de ahora en adelante con las gráficas tales que su número de vértices  $|\mathcal{V}|$  cumpla  $|\mathcal{V}| \geq 40(g-1)$ . Con ésto, para las gráficas encajadas en  $\Sigma_g$  tendremos  $|\mathcal{F}| > 84(g-1)$ .

Con los lemas anteriores podemos probar el siguiente teorema.

**Teorema 7.** *Sea  $G$  una gráfica simple, conexa, con grado mínimo al menos 3, con  $|\mathcal{V}(G)| \geq 40(g-1)$  y encajada en  $\Sigma_g$ . Si  $F$  es una cara tal que  $N(F) \geq \frac{2-2g}{|\mathcal{F}|} - \frac{5}{42}$ , entonces su frontera cumple lo siguiente:*

1. Tiene longitud a lo más  $l_\Sigma$ .
2. Tiene a lo más un vértice de grado  $d_\Sigma$  o más.

*Demostración:*

Sea  $F \in \mathcal{F}$  tal que  $N(F) \geq \frac{2-2g}{|\mathcal{F}|} - \frac{5}{42}$ . Usando el hecho de que  $w(F) \leq \frac{l(F)}{3}$ , tenemos que

$$\frac{2-2g}{|\mathcal{F}|} - \frac{5}{42} \leq w(F) - \frac{l(F)}{2} + 1 \leq \frac{l(F)}{3} - \frac{l(F)}{2} + 1 = 1 - \frac{l(F)}{6}.$$

Despejando  $l(F)$  en la desigualdad anterior tenemos que

$$l(F) \leq 6 + \left( \frac{5}{7} - 6 \left( \frac{2-2g}{|\mathcal{F}|} \right) \right).$$

Como  $|\mathcal{F}| > 84(g-1)$  entonces la desigualdad anterior queda como

$$l(F) \leq 6 + \left( \frac{5}{7} + \frac{1}{7} \right) < 7.$$

Esto es,  $l(F) \leq 6$ .

Para probar (2) supongamos que  $F \in \mathcal{F}$  tiene 2 vertices de grado 84 o más. Con ésto tendremos que

$$w(F) \leq \frac{l(F) - 2}{3} + \frac{2}{84}.$$

Dado que  $N(F) \geq \frac{2-2g}{|\mathcal{F}|} - \frac{5}{42}$ , esta desigualdad queda como

$$\frac{2-2g}{|\mathcal{F}|} - \frac{5}{42} \leq w(F) - \frac{l(F)}{2} + 1 \leq \frac{l(F)}{3} - \frac{2}{3} + \frac{2}{84} - \frac{l(F)}{2} + 1 = -\frac{l(F)}{6} + \frac{5}{14},$$

ésto es,

$$\frac{2-2g}{|\mathcal{F}|} - \frac{5}{42} \leq -\frac{l(F)}{6} + \frac{5}{14}.$$

Usando el hecho de que  $-l(F)/6 \leq -1/2$ , entonces llegamos a que

$$\frac{2-2g}{|\mathcal{F}|} \leq -\frac{1}{42},$$

lo cual es una contradicción. ■

Con ésto hemos probado (1) y (2) del enunciado del teorema con  $l_{\Sigma} = 6$  y  $d_{\Sigma} = 84$ . Cabe hacer notar que éstas mismas constantes funcionan para gráficas encajadas en superficies no orientables reiterando que la demostración es exactamente igual.

De aquí en adelante le llamaremos vértice *pesado* al vértice que tenga grado 84 o mas y vértice *ligero* al vértice que tenga grado 83 o menos.

**Corolario 8.** *El conjunto  $\mathcal{G}$  definido anteriormente cumple  $|\mathcal{G}| \geq \frac{5}{27}|\mathcal{F}|$ .*

*Demostración:*

Llamémosle  $\mathcal{B}$  al complemento de  $\mathcal{G}$ . Supongamos que  $|\mathcal{G}| = n$ . Así,  $|\mathcal{B}| = |\mathcal{F}| - n$ . Por el Lema 6 tenemos que

$$\sum_{F \in \mathcal{G}} N(F) \leq \frac{n}{2},$$

y por la definición de  $\mathcal{B}$  tenemos entonces que

$$\sum_{F \in \mathcal{B}} N(F) < (|\mathcal{F}| - n) \left( \frac{2 - 2g}{|\mathcal{F}|} - \frac{5}{42} \right).$$

Entonces, la fórmula de Euler queda como:

$$2 - 2g = \sum_{F \in \mathcal{G}} N(F) + \sum_{F \in \mathcal{B}} N(F) \leq \frac{n}{2} + (|\mathcal{F}| - n) \left( \frac{2 - 2g}{|\mathcal{F}|} - \frac{5}{42} \right).$$

Agrupando, llegamos a que

$$n \left( \frac{1}{2} + \frac{5}{42} - \frac{2 - 2g}{|\mathcal{F}|} \right) - \frac{5|\mathcal{F}|}{42} \geq 0.$$

Usando el hecho de que  $|\mathcal{F}| > 84(g - 1)$ , al despejar  $n$  tenemos que

$$n \geq \frac{5|\mathcal{F}|}{27}.$$

Con ésto podemos encontrar un número de vértices tal que tengamos tantas caras buenas como sean requeridas. El siguiente resultado nos lo demuestra.

**Corolario 9.** *Para cada entero  $r \geq 0$  existe un entero  $N(r)$  con la siguiente propiedad. Supongamos  $G$  es simple, conexo y encajado en  $\Sigma$  con grado mínimo al menos 3 tal que  $|\mathcal{V}(G)| \geq N(r)$ . Entonces existe una colección  $\mathcal{C}$  de  $r$  ciclos arista disjuntos tales que cada  $C \in \mathcal{C}$  contiene una arista  $uw$  tal que*

$$\sum_{v \in \mathcal{V}(C) \setminus \{u, w\}} (d(v) - 2) \leq 324. \quad (2.2)$$

*Demostración:*

Sea  $F \in \mathcal{G}$ . Tomemos el ciclo  $C(F)$  contenido en la frontera de  $F$ .

Como cada cara  $F \in \mathcal{G}$  tiene longitud a lo mas 6, haciendo  $u$  el vértice pesado y  $w$  un vértice perteneciente a la frontera de  $F$  adyacente a  $u$ , tenemos que cada ciclo  $C(F) \in \mathcal{G}$  satisface

$$\sum_{v \in \mathcal{V}(C) \setminus \{u, w\}} (d(v) - 2) \leq 4 \cdot (83 - 2) = 324.$$

Nótese que cada arista de  $G$  pertenece a lo más a 2 ciclos de la forma  $C(F)$ . Como  $|C(F)| \leq 6$ , se sigue que cada  $C(F_0)$  contiene una arista de a lo más otros 6 ciclos de la forma  $C(F)$ .

Con la observación anterior podemos asegurar que hay una colección  $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{C}$  de al menos  $|\mathcal{G}|/7$  ciclos arista-disjuntos de la forma  $C(F)$ .

Para encontrar  $N(r)$  observaremos que,

$$|\mathcal{N}| \geq \frac{|\mathcal{G}|}{7} \geq \frac{\frac{5}{27}|\mathcal{F}|}{7} \geq \frac{5}{189} \left( 2 - 2g + \frac{|\mathcal{V}|}{2} \right)$$

para superficies orientables, mientras que en superficies no orientables

$$|\mathcal{N}| \geq \frac{|\mathcal{G}|}{7} \geq \frac{\frac{5}{27}|\mathcal{F}|}{7} \geq \frac{5}{189} \left( 2 - g + \frac{|\mathcal{V}|}{2} \right).$$

Como requerimos  $r$  caras, entonces debemos de tener que  $\frac{5}{189} \left( 2 - 2g + \frac{|\mathcal{V}|}{2} \right) \geq r$  en superficies orientables; y  $\frac{5}{189} \left( 2 - g + \frac{|\mathcal{V}|}{2} \right) \geq r$  en superficies no orientables.

Despejando  $|\mathcal{V}|$  de la primer desigualdad, tenemos que

$$|\mathcal{V}| \geq \frac{378}{5}r + 4g - 4,$$

mientras que de la segunda

$$|\mathcal{V}| \geq \frac{378}{5}r + 2g - 4.$$

Como

$$\frac{378}{5}r + 4g - 4 > \frac{378}{5}r + 2g - 4,$$

haciendo  $N(r) = \frac{378}{5}r + 4g - 4$  demostramos el corolario para superficies orientables y no orientables. ■

Daremos enseguida nuestro primer resultado para gráficas no encajables en  $\Sigma$ .

**Teorema 10.** *Para todo par de enteros  $t, r \geq 0$  existe una constante  $N(t, r)$  con la siguiente propiedad. Sea  $G$  una gráfica con grado mínimo al menos 3 dibujada en  $\Sigma$  y con un conjunto  $E$  de  $t$  aristas tales que  $G \setminus E$  es encajable en  $\Sigma$ . Supongamos que  $|\mathcal{V}(G)| \geq N(t, r)$ . Entonces existe una colección  $\mathcal{C}$  de al menos  $r$  ciclos arista disjuntos tales que cada uno tiene una arista  $uw$  tal que*

$$\sum_{v \in \mathcal{V}(\mathcal{C}) \setminus \{u, w\}} (d(v) - 2) \leq 324.$$

*Demostración:*

Procederemos por inducción en  $t$ . El caso base será para  $t = 0$ . Esto se cumple por el corolario anterior, donde  $N(t, r) = N(r)$ .

Supongamos que  $N(t, r)$  existe para todo  $r$  y para todo  $t < k$ . Demostraremos que  $N(t, r)$  existe para  $t = k$ .

Sea  $G$  una gráfica dibujada en  $\Sigma$ , donde existe un conjunto  $E$  de  $k$  aristas tal que  $G \setminus E$  es encajable en  $\Sigma$ .

Sea  $e = uw \in E$ ,  $G' = G \setminus e$  y  $E' = E \setminus e$ . Probaremos que  $N(k, r + 166)$  cumple lo que se pide demostrar.

Dividiremos en dos casos:

- Caso 1

$G'$  no tiene vértices de grado 2.

Apliquémosle la hipótesis de inducción a  $G'$  para obtener una colección  $\mathcal{C}'$  de  $r + 166$  ciclos arista-disjuntos, satisfaciendo 2.2.

Para cada  $C \in \mathcal{C}'$  llamémosle  $v_C$  al vértice pesado. Es claro que si un ciclo  $C$  en  $G'$  no satisface la ecuación 2.2 tampoco lo hará en  $G$ , pero si un ciclo  $C$  pertenece a  $\mathcal{C}'$  entonces, cada vértice  $z$  de cada  $C' \in \mathcal{C}'$  es un vértice ligero de a lo más 83 ciclos en  $\mathcal{C}'$ .

Por lo tanto habrá a lo más 166 ciclos en  $\mathcal{C}'$  que no satisfarán la ecuación 2.2 cuando sean considerados como ciclos en  $G$ , pues puede ser que  $u$  y  $w$  sean vértices ligeros de 83 caras buenas, que al ser considerados vértices en  $G$  serán vértices pesados.

Como  $|\mathcal{C}'| = r + 166$  se sigue entonces que hay una colección de al menos  $r$  ciclos en  $G$  que satisfacen la ecuación 2.2.

- Caso 2

$G'$  tiene vértices de grado 2.

Para éste caso la demostración es análoga a la prueba del Teorema 2 que se da en [8].

Dado que las aristas de  $E$  pueden ser adyacentes a vértices de grado 3 entonces, el entero buscado  $N$  es  $N(t, r) = \frac{378}{5}r + 4g - 4 + 2t$ . ■

Con ésto podemos ahora probar finalmente el resultado principal de ésta sección:

**Teorema 2.** Sea  $G$  una gráfica  $k$ -crítica en  $\Sigma$ , tal que  $|\mathcal{V}(G)| \geq N(k, 2k + 1)$ .  
Entonces

$$cr_{\Sigma}(G) \leq 2k + 160.$$

*Demostración:*

Sea  $G$  una gráfica  $k$ -crítica en  $\Sigma$  con al menos  $N(k, 2k + 1)$  vértices.

Observemos lo siguiente: sea  $e$  una arista de  $G$ . Por la criticalidad de  $G$ , hay un dibujo de  $G \setminus e$  con a lo más  $k - 1$  cruces. Haciendo  $S$  igual a  $e$  junto con este conjunto de a lo más  $k - 1$  aristas, tendremos un conjunto  $S$  de a lo más  $k$  aristas tal que  $G \setminus S$  es  $\Sigma$ -encajable.

Haciendo  $t = k$  y  $r = 2k + 1$  como en el Teorema 10, tendremos que existe una colección  $\mathcal{C}$  de al menos  $2k + 1$  ciclos arista-disjuntos donde cada  $C$  tiene a lo más un vértice pesado  $v_C$ .

Sea  $C \in \mathcal{C}$ . Tomemos una arista  $f = v_C w$ . Notemos que es posible que  $w$  sea adyacente a alguna arista adyacente a otro ciclo  $C' \in \mathcal{C}$ ; ésto mismo puede pasar con las restantes  $k - 1$  aristas.

Sea  $\mathcal{C}$  el ciclo que podemos garantizar que no es adyacente a ninguna de las aristas de  $S$  y sea  $e = uv_C$  una arista de  $\mathcal{C}$  en  $G$ .

Sea  $P$  el camino que une a  $v_C$  y a  $u$  en  $G \setminus e$ . Tendremos que algunas aristas de  $P$  pueden cruzar otras aristas de  $P$ .

Podemos considerar el dibujo de  $P$  como una gráfica sin cruces  $H$  con vértices de grado 2 o 4. Sea  $P'$  el camino más corto en  $H$  que una a  $v_C$  y a  $u$ .

Habrán 2 formas de dibujar a  $e$  cerca de  $P'$ , una por cada lado. En total ésos dos dibujos de  $e$  cruzando cada arista que no está en  $P$  incidente con los vértices internos de  $P$  ocasionan a lo más  $4 \cdot 81$  cruces por el corolario anterior.

En principio es posible que los restantes  $k - 1$  cruces de  $G \setminus e$  crucen a  $P'$ . Con ésto entonces tenemos que los 2 dibujos de  $e$  cerca de  $P'$  ocasionarán  $2(k - 1)$  cruces. Esto arroja un dibujo de  $G = (G \setminus e) \cup e$  con a lo más

$$\frac{4 \cdot 81 + 2(k - 1)}{2} + k - 1$$

cruces. Por lo tanto,

$$cr_{\Sigma}(G) \leq 2k + 160.$$

■

Con ésto hemos probado los Teoremas principales de este trabajo, reduciendo la cota que se da en el Teorema 3 de [8].

## Capítulo 3

### La familia $H(m, n)$

En éste capítulo demostraremos el Teorema 3 para probar que el Corolario 3 de [8] no admite generalización a superficies compactas en general.

El enunciado del Corolario 3 de [8] dice lo siguiente:

**Corolario.** Para cada natural  $k$ , existe un natural  $n_k$  tal que cualquier gráfica  $G$  simple y  $k$ -crítica en el plano teniendo grado mínimo 6, tiene a lo mas  $n_k$  vértices.

Su generalización a cualquier superficie compacta sería la siguiente conjetura:

**Conjetura.** Para cada natural  $k$ , existe un natural  $n_k$  tal que cualquier gráfica  $G$  simple y  $k$ -crítica en cualquier superficie  $\Sigma$  teniendo grado mínimo 6, tiene a lo mas  $n_k$  vértices.

La familia que presentamos en esta sección es de gráficas 6 regulares,  $k$  críticas en la botella de Klein ( $\mathbb{K}$  o  $\widetilde{\Sigma}_2$ ), tiene tantos vértices como se deseen y siguen siendo  $k$ -críticas para la misma  $k$ , demostrando la falsedad de la conjetura anterior.

Procederemos a la construcción de las gráficas  $H(m, n)$ .

Sea  $m$  un entero positivo par, y sea  $n$  un entero tal que  $n \geq m$ . Definimos a  $H(m, n)$  como la gráfica 6 regular con  $mn$  vértices  $v_{i,j}$ , donde  $0 \leq i \leq n-1$  y  $0 \leq j \leq m-1$ , con la siguiente propiedad de adyacencia: los seis vértices adyacentes a  $v_{i,j}$  cuando  $i$  es impar son  $v_{i-1,j}, v_{i-1,j+1}, v_{i,j-1}, v_{i,j+1}, v_{i+1,j}, v_{i+1,j+1}$  y cuando  $i$  es par son  $v_{i-1,j-1}, v_{i-1,j}, v_{i,j-1}, v_{i,j+1}, v_{i+1,j-1}, v_{i+1,j}$  donde los índices se leen módulo  $m$  y  $n$  respectivamente.

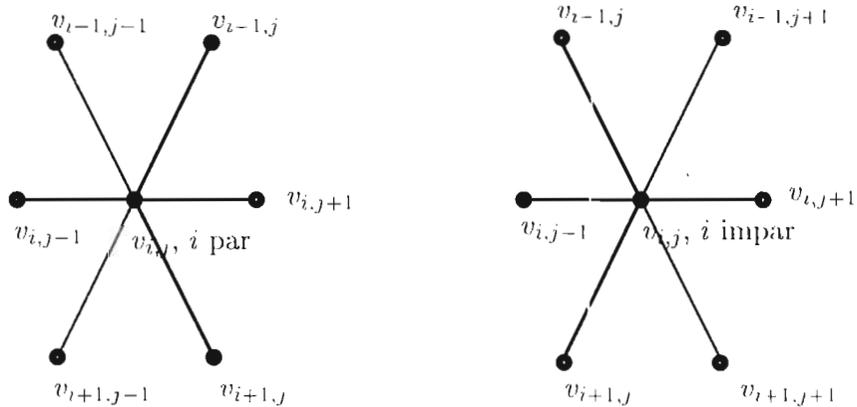


Figura 3.1: Adyacencias de  $v_{i,j}$ .

Para simplificar este trabajo colorearemos de azul a las aristas si son del tipo  $\{v_{i,j}, v_{i,j+1}\}$  y de rojo a las restantes.

Le llamaremos *de nivel  $i$*  al ciclo azul  $B_i = \{v_{i,0}, v_{i,1}, \dots, v_{i,n-1}, v_{i,0}\}$ .

En la figura 3.2 exhibimos un dibujo de  $H(4, 7)$  en el toro.

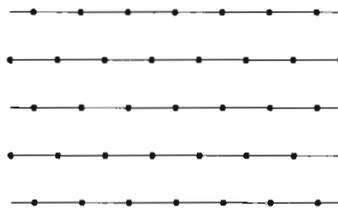


Figura 3.2:  $H(4, 7)$  en el toro.

De aquí claramente podemos apreciar que  $H(m, n)$  posee una enorme riqueza en el grupo de automorfismos. Definiremos a continuación algunos automorfismos de  $H(m, n)$ .

Sea  $T : V \rightarrow V$  la función traslación definida por

$$T(v_{i,j}) = v_{i,j+1}.$$

Sea  $R_\alpha : V \rightarrow V$  la función reflexión (vertical) con respecto al ciclo azul de nivel  $\alpha$  definido por

$$R_\alpha(v_{i,j}) = v_{2\alpha-i,j}$$

y finalmente, sea  $\Gamma : V \rightarrow V$  la función traslación diagonal derecha definida por

$$\Gamma(v_{i,j}) = \begin{cases} v_{i-1,j} & \text{si } i \text{ es par} \\ v_{i-1,j+1} & \text{si } i \text{ es impar.} \end{cases}$$

Con estos automorfismos podemos probar las siguientes proposiciones que nos serán de gran ayuda para confirmar la criticalidad de los elementos de la familia  $H(m, n)$ .

**Proposición.** *Si  $e$  y  $e'$  son dos aristas azules entonces existe un automorfismo que lleva  $e$  a  $e'$ .*

*Demostración:*

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que  $e = \{v_{i,j}, v_{i,j+1}\}$  y que  $e' = \{v_{i',j'}, v_{i',j'+1}\}$ ; entonces, tendremos los siguientes casos:

1. Si  $i$  es par entonces

$$T^\beta \circ \Gamma^{i-i'}(e) = e',$$

$$\text{donde } \beta = j' - (j + \lfloor \frac{i-i'}{2} \rfloor).$$

2. Si  $i$  es impar entonces

$$T^\beta \circ \Gamma^{i-i'}(e) = e',$$

$$\text{donde } \beta = j' - (j + \lceil \frac{i-i'}{2} \rceil).$$

**Proposición.** *Si  $e$  y  $e'$  son dos aristas rojas entonces existe un automorfismo que lleva  $e$  a  $e'$ .*

*Demostración:*

Sean  $e$  y  $e'$  dos aristas rojas. Tenemos las siguientes posibilidades para  $e$  y  $e'$ :

1.  $\{v_{i,j}, v_{i-1,j-1}\}$ ;
2.  $\{v_{i,j}, v_{i-1,j+1}\}$ ;
3.  $\{v_{i,j}, v_{i-1,j}\}$  (cuando  $i$  es impar); y
4.  $\{v_{i,j}, v_{i-1,j}\}$  (cuando  $i$  es par).

Notemos que el siguiente automorfismo lleva  $c$  a  $e'$

$$T^\tau \circ \Gamma^\gamma \circ R_{i-1}^\rho.$$

En seguida determinaremos los valores para  $\gamma$ ,  $\tau$  y  $\rho$  analizando caso por caso:

1. Si  $e$  es del tipo 1,

$$\tau = \begin{cases} j' - (j + \lfloor \frac{i-i'}{2} \rfloor) & \text{si } e' \text{ es del tipo 1 o 3} \\ j' - (j - 1 + \lceil \frac{i-i'-1}{2} \rceil) & \text{si } e' \text{ es del tipo 2 o 4} \end{cases}$$

$$\gamma = \begin{cases} i - i' & \text{si } e' \text{ es del tipo 1 o 3} \\ i - i' - 1 & \text{si } e' \text{ es del tipo 2 o 4} \end{cases}$$

$$\rho = \begin{cases} 0 & \text{si } e' \text{ es del tipo 1 o 3} \\ 1 & \text{si } e' \text{ es del tipo 2 o 4} \end{cases}$$

2. Si  $e$  del tipo 2,

$$\tau = \begin{cases} j' - (j + 1 + \lfloor \frac{i-i'-1}{2} \rfloor) & \text{si } e' \text{ es del tipo 1 o 3.} \\ j' - (j + \lceil \frac{i-i'}{2} \rceil) & \text{si } e' \text{ es del tipo 2 o 4.} \end{cases}$$

$$\gamma = \begin{cases} i - i' - 1 & \text{si } e' \text{ es del tipo 1 o 3} \\ i - i' & \text{si } e' \text{ es del tipo 2 o 4} \end{cases}$$

$$\rho = \begin{cases} 1 & \text{si } e' \text{ es del tipo 1 o 3} \\ 0 & \text{si } e' \text{ es del tipo 2 o 4} \end{cases}$$

3. Si  $e$  es del tipo 3, entonces

$$\tau = \begin{cases} j' - (j + \lceil \frac{i-i'}{2} \rceil) & \text{si } e' \text{ es del tipo 1 o 3} \\ j' - (j + \lfloor \frac{i-i'-1}{2} \rfloor) & \text{si } e' \text{ es del tipo 2 o 4} \end{cases}$$

$$\gamma = \begin{cases} i - i' & \text{si } e' \text{ es del tipo 1 o 3} \\ i - i' - 1 & \text{si } e' \text{ es del tipo 2 o 4} \end{cases}$$

$$\rho = \begin{cases} 0 & \text{si } e' \text{ es del tipo 1 o 3} \\ 1 & \text{si } e' \text{ es del tipo 2 o 4.} \end{cases}$$

4. Si  $e$  del tipo 4, entonces

$$\tau = \begin{cases} j' - (j + \lceil \frac{i-i'-1}{2} \rceil) & \text{si } e' \text{ es del tipo 1 o 3.} \\ j' - (j + \lfloor \frac{i-i'}{2} \rfloor) & \text{si } e' \text{ es del tipo 2 o 4.} \end{cases}$$

$$\gamma = \begin{cases} i - i' - 1 & \text{si } e' \text{ es del tipo 1 o 3} \\ i - i' & \text{si } e' \text{ es del tipo 2 o 4} \end{cases}$$

$$\rho = \begin{cases} 1 & \text{si } e' \text{ es del tipo 1 o 3} \\ 0 & \text{si } e' \text{ es del tipo 2 o 4} \end{cases}$$

Con las proposiciones anteriores hemos probado los siguientes resultados:

**Lema 11.**  $H(m, n)$  es arista-azul-transitivo.

**Lema 12.**  $H(m, n)$  es arista-rojo-transitivo.

En la figura 3.3 damos un dibujo (no óptimo) de  $H(4, 7)$  en  $\mathbb{K}$  con 12 cruces.

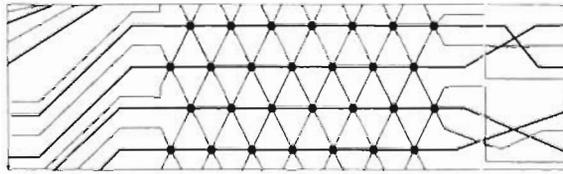


Figura 3.3:  $H(4, 7)$  en  $\mathbb{K}$  con 12 cruces

A partir de la figura 3.3 vemos que de manera semejante es posible dibujar a  $H(4, n)$  con a lo más 12 cruces, como en la figura 3.4.

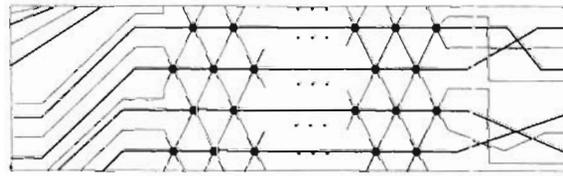


Figura 3.4:  $H(4, n)$  en  $\mathbb{K}$  con 12 cruces

Más aún, podemos decir que de una manera similar es posible dibujar a  $H(m, n)$  con a lo más  $2\binom{m}{2} = m(m-1)$  cruces en  $\mathbb{K}$ .

Los siguientes resultados serán de gran importancia pues nos garantizarán que en la familia  $H(m, n)$  hay elementos con cruces:

**Lema 13.** *En  $\mathbb{K}$   $cr(C_3 \times C_n) = 1$  para  $n \geq 5$ .*

Para la prueba de este resultado ver el Corolario 4.5 de [13]. ■

y

**Lema 14.** *En  $\mathbb{K}$   $cr(C_4 \times C'_n) = 2$  para  $n' \geq 4$ .*

Para la prueba de este resultado ver el Teoremas 4.8 de [13]. ■

Procederemos ahora a probar el siguiente enunciado.

**Lema 15.** *Si  $m \geq 4$  y  $n \geq 16$ , entonces en todo dibujo óptimo de  $H(m, n)$  en  $\mathbb{K}$  hay una arista azul que se cruza.*

Demostración:

Sea  $m \geq 4$  y  $n \geq 16$ . Demostraremos el lema por contrapositiva, es decir, demostraremos que si  $\mathcal{D}$  es un dibujo de  $H(m, n)$  en  $\mathbb{K}$  en el que ninguna arista azul se cruza entonces  $\mathcal{D}$  no es un dibujo óptimo.

Sea  $\mathcal{D}$  un dibujo de  $H(4, 16)$  en el que ninguna arista azul se cruza.

Hemos visto que podemos dibujar a  $H(4, 7)$  con 12 cruces, y que además, de manera análoga podemos dibujar a  $H(4, 16)$  con a lo más 12 cruces.

Consideremos la subgráfica  $C_4 \times C_{16}$  obtenida de  $H(4, 16)$  mediante el producto de los 16-ciclos (azules)  $B_1, B_2, B_3$  y  $B_4$  con los 4-ciclos (rojos)  $R_j = \{v_{0,j}, v_{1,j}, v_{2,j}, v_{3,j}, v_{0,j}\}$  para  $j = 0, 1, 2, 3, \dots, 15$ .

En la figura 3.5 exhibimos un dibujo en el toro de la gráfica  $C_4 \times C_{16}$  contenida en  $H(4, 16)$ .

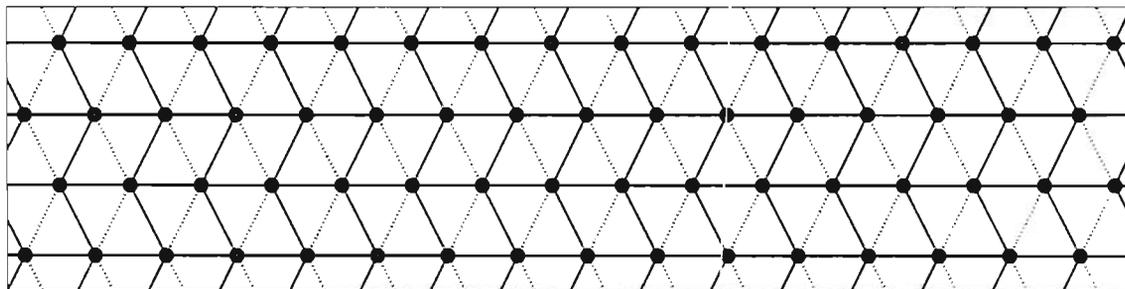


Figura 3.5:  $C_4 \times C_{16}$  contenida en  $H(4, 16)$ .

Consideremos la subgráfica  $H_1$  inducida por los ciclos  $B_1, B_2, B_3, B_4, R_1, R_2, R_3, R_4$  ( $C_4 \times C_4$ ). Por el Lema 14 tenemos que hay 2 cruces (rojo-rojo, pues estamos suponiendo que las aristas azules no se cruzan). Supongamos que cada uno de éstos 2 cruces está formado por un par de ciclos. Llamémosles  $R_{11}$  y  $R_{21}$ ; y  $R_{32}$  y  $R_{42}$ , respectivamente.

Llamémosle  $H_2$  a la subgráfica inducida por los ciclos  $B_1, B_2, B_3, B_4, R_{11}, R_{32}, R_{51}, R_{61}$  ( $C_4 \times C_4$ ). Nuevamente por el Lema 14 tenemos que hay 2 cruces (rojo-rojo). Supongamos que cada uno de éstos 2 cruces está formado por un par de ciclos. Llamémosles  $R_{33}$  y  $R_{43}$ ; y  $R_{54}$  y  $R_{64}$ , respectivamente.

Podemos ver que si continuamos con éste procedimiento, aseguraremos 14 cruces, cada uno de ellos formado por los pares de ciclos:

$R_{11}$  y  $R_{21}$ ;  $R_{32}$  y  $R_{42}$ ;  $R_{33}$  y  $R_{43}$ ; ...;  $R_{15,14}$  y  $R_{16,14}$ . Esto implica que  $\mathcal{D}$  no es un

dibujo óptimo.

Por lo tanto, en todo dibujo óptimo de  $H(m, n)$  con  $m \geq 4$  y  $n \geq 16$  alguna arista azul se cruza. ■

El siguiente es un resultado semejante al anterior: demostraremos ahora que todo dibujo óptimo tiene una arista roja que se cruza.

**Lema 16.** *Sean  $m$  y  $n$  enteros mayores o iguales que 12, entonces en todo dibujo de  $H(m, n)$  en  $\mathbb{K}$  hay al menos una arista roja con cruce.*

Demostración:

Sea  $\mathcal{D}$  un dibujo de  $H(12, 12)$  en  $\mathbb{K}$ .

Consideremos la subdivisión de la gráfica  $C_3 \times C_5$  contenida en  $H(12, 12)$  obtenida de los ciclos  $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_5, \mathcal{B}_9, \mathcal{C}_0, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_4, \mathcal{C}_6, \mathcal{C}_8$  donde  $\mathcal{B}_i = \{v_{i+1,0}, v_{i,0}, v_{i-1,1}, v_{i,1}, v_{i+1,2}, v_{i,2}, v_{i-1,3}, v_{i,3}, v_{i+1,4}, v_{i,4}, v_{i-1,5}, v_{i,5}, v_{i+1,6}, v_{i,6}, v_{i-1,7}, v_{i,7}, v_{i+1,8}, v_{i,8}, v_{i-1,9}, v_{i,9}, v_{i+1,10}, v_{i,10}, v_{i-1,11}, v_{i,11}, v_{i+1,0}\}$ , mientras que  $\mathcal{C}_j = \{v_{0,j}, v_{1,j}, v_{2,j+1}, v_{3,j}, v_{4,j}, v_{5,j}, v_{6,j+1}, v_{7,j}, v_{8,j}, v_{9,j}, v_{10,j+1}, v_{11,j}, v_{0,j}\}$  (ver la figura 3.6).

Con ésto, por el Lema 13, tenemos que hay un cruce, que para éste caso será rojo-rojo.

Por lo tanto, en todo dibujo de  $H(m, n)$  con  $n$  y  $m$  mayores o iguales que 12, tenemos que hay al menos un cruce rojo-rojo.

Con los resultados anteriores fácilmente podemos probar el resultado principal de esta sección:

**Teorema 3.** *Si  $m \geq 12$  y  $n \geq 16$  entonces  $H(m, n)$  es crítico en cruces en la botella de Klein.*

Demostración:

Dado que  $H(m, n)$  es arista-azul-transitivo y arista-rojo-transitivo, solo necesitamos garantizar que al menos una arista roja y al menos una arista azul tengan

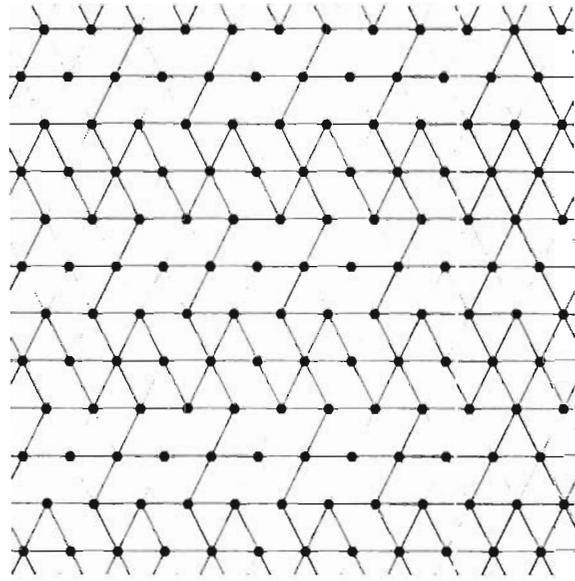


Figura 3.6:  $C_3 \times C_5$  contenida en  $H(12, 12)$ .

al menos un cruce en todo dibujo óptimo de  $H(m, n)$ . Por otra parte, ésto es garantizado por los Lemas 15 y 16.

■

Así, hemos probado que para  $m \geq 12$ ,  $n \geq 16$  las gráficas  $H(m, n)$  cumplen lo siguiente:

1. Tiene grado mínimo 6.
2. Existe una superficie  $\Sigma$  ( $\mathbb{K}$ , a saber) en la que  $H(m, n)$  es  $k$ -crítica.
3. Para  $m$  fijo existe  $n$  tal que para todo entero  $n_k$  la gráfica  $H(m, n)$  tenga  $mn \geq n_k$  vértices y siga siendo  $k$ -crítica para la misma  $k$ .

Ésto demuestra que el enunciado de la conjetura dado al principio de esta sección es *falso*.

# Capítulo 4

## Conclusiones y comentarios finales

El propósito de esta tesis fue el de reducir la cota dada por Richter y Thomassen en el Teorema 3 de [8] y generalizarlo a cualquier superficie compacta. Redujimos la cota en los Teoremas 1 y 2.

En el primer teorema se hizo el análisis sobre el grado mínimo de la gráfica en cuestión, como se dijo anteriormente, basados en una nota de Gelasio Salazar [10], mientras que en el segundo se hizo el análisis sobre el número de vértices. Sorprendentemente para el segundo caso, el Teorema no depende del género de la superficie en cuestión.

Finalmente, para poder confirmar una conjetura demostramos que la familia  $H(m, n)$  tiene elementos que proveen un contraejemplo a la suposición de que el Corolario 3 de [8] puede ser generalizado a superficies compactas.

En cuanto a trabajo posterior consideramos que el reto principal en esta área de trabajo es demostrar la siguiente conjetura de Richter y Thomassen:

**Conjetura.** *Existe una constante  $c$  con la siguiente propiedad. Toda gráfica  $k$  crítica en cruces en el plano satisface*

$$cr(G) \leq k + c\sqrt{k}$$

Desde luego, ya resuelta esta conjetura también habrá que generalizarla a superficies compactas.

# Capítulo 5

## Bibliografía

- [1] J.A. BONDY AND U.S.R. MURTY, Graph Theory with Applications. North Holland. New York (1982).
- [2] P. ERDÖS AND R. GUY, *Crossing Number Problems*. American Mathematical Monthly **86** (1973), 52-58.
- [3] D.W. FARMER AND T.B. STANFORD, Knots and surfaces. A guide to discovering mathematics, Vol. 6. American Mathematical Society, Providence, RI, 1996.
- [4] M.R. GAREY AND D.S. JOHNSON, *Crossing number is NP complete*, SIAM J. Alg. Disc. Meth. **1** (1983), 312-316.
- [5] L. GLEBSKY AND G. SALAZAR, *The conjecture  $cr(C_m \times C_n) = (m-2)n$  is true for all but finitely many  $n$ , for each  $m$* , enviado.
- [6] H.A. JUÁREZ LÓPEZ. Tesis de Maestría. Universidad Autónoma de San Luis Potosí (2000).
- [7] W. MASSEY, Algebraic Topology: An Introduction. Springer Verlag, New York.
- [8] R.B. RICHTER AND C. THOMASSEN, Minimal Graphs with crossing number at least  $k$ . *J. Combin. Theory Ser. B* **58** (1993), No. 2, 217-224.
- [9] G. SALAZAR, Construction of infinite families of crossing-critical graphs with given average degree, en proceso.

- [10] G. SALAZAR, On a crossing number result of Richter and Thomassen. *J. Combin. Theory Ser. B* **79** (2000), No. 1, 98-99.
- [11] G. SALAZAR, Ph.D. Thesis, Carleton University (1997).
- [12] M. LOMELÍ HARO, Tesis de Licenciatura. Universidad Autónoma de San Luis Potosí (2001).
- [13] RISKIN, ADRIAN, On the nonembeddability and crossing numbers of some toroidal graphs on the Klein bottle. *departament of mathematic, Mary Baldwin College, Staunton* (2000).

