



Universidad Autónoma de San Luis Potosí.



Facultad de Ciencias

Conexidad de gráficas k -críticas
en cruces

TESIS

Que para obtener el Grado de

Maestro en Ciencias Aplicadas

P R E S E N T A

Jesús Leños Macías

A S E S O R E S

Dr. Gelasio Salazar Anaya

Dr. Lev Yu Glebsky



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE
SAN LUIS POTOSÍ
FACULTAD DE CIENCIAS



Conexidad de gráficas k -críticas en cruces

JESÚS LEAÑOS MACÍAS

Jesús Leños Macías

SINODALES

Dr. Gelasio Salazar Anaya (Asesor)

Dr. Lev Yu Glebsky (Asesor)

Dr. Edgardo Ugalde Saldaña

Dr. Jesús Urias Hermosillo

DEDICATORIA

A Ruth

A mis padres y hermanos

A la memoria de Irma

AGRADECIMIENTOS

Quiero expresar un profundo agradecimiento a mi asesor el Dr. Gelasio Salazar por su inteligente orientación en la realización de este trabajo y por el invaluable e incondicional apoyo que de su parte recibí en este tiempo.

Al Dr. Lev Yu Glebsky por sus acertadas observaciones.

A Héctor por haberme orientado con el software una cantidad de veces difícilmente numerable. Le agradezco también por las valiosas discusiones que estuvo dispuesto a sostener conmigo sobre los resultados de esta tesis.

Al Gallo por su paciencia en los cursos y su confianza.

Sea I el conjunto de todas las personas que estuvieron en el IICO en calidad de estudiantes en algún momento del periodo Septiembre de 2001 - Julio de 2003. Quiero expresar mi agradecimiento sincero a cada uno de los elementos de I por las muestras claras de compañerismo mostradas durante este tiempo. De manera especial a cada uno de los siguientes elementos (escritos en orden alfabético): Arturo, Camacho, Efraín, Héctor, Huicho, Jacob, Jorge, Latty, Mario, Medel, Nadia, Samuel, Saul y Reyna.

Otro conjunto distinguido de personas (no necesariamente disjunto de I) al cual deseo expresar un merecido reconocimiento es al conjunto V tal que $v \in V$ si y solo si v acudió (a nuestros encuentros de los martes y jueves) al menos 5 veces a jugar "Volley Ball".

Al personal que labora en el IICO por la disponibilidad incondicional que me brindaron durante este tiempo.

Y sobre todo a Dios.

Contenido

1	Introducción	3
1.1	Conceptos Básicos	3
1.2	Gráficas planares	6
1.2.1	Encajes de gráficas en superficies	7
1.2.2	Gráficas planas	8
1.2.3	Arboles geométricos	10
1.3	Conjuntos independientes	11
1.4	Números de cruce de gráficas en el plano	12
1.5	Números de cruce en el plano de familias específicas de gráficas	13
1.5.1	Gráficas Completas	13
1.5.2	Gráficas Bipartitas Completas	14
1.5.3	Productos Cartesianos de Ciclos	14
1.6	Gráficas críticas en cruces en el plano	14
1.7	Contribuciones de esta tesis a la teoría de gráficas críticas en cruces en el plano	16
1.7.1	Descomposición de gráficas críticas en menores críticas	16
1.7.2	Sobre el número de cruce de gráficas k -críticas en el plano	17

1.7.3	Árboles geométricos sobre conjuntos de puntos multicoloreados con pocas intersecciones.	19
1.8	Organización de esta tesis	20
2	Estructura de gráficas críticas con 2-cortes de aristas:	
	Demostración del Teorema 1	21
2.1	Sobre la aditividad del número de cruce en el plano	21
2.2	Sobre los 2-cortes de aristas	24
2.3	Prueba del Teorema 1	26
2.4	Prueba del Corolario 2	26
2.5	Prueba del Corolario 3	29
3	Número de cruce de gráficas críticas con grado máximo acotado:	
	Demostración del Teorema 4	32
3.1	Ciclos de longitud pequeña en gráficas planares	33
3.2	Conjuntos independientes máximos en gráficas planares	34
3.3	Prueba del Teorema 4	35
4	Árboles abarcadores de conjuntos de puntos multicoloreados en el plano:	
	Demostración del Teorema 5	39
4.1	Prueba del Teorema 5 para $k > 5$	39
4.2	Prueba del Teorema 5 para $k = 5$	40
5	Conclusiones y algunas observaciones	50

Capítulo 1

Introducción

Nuestro objetivo en la presente tesis es analizar la conexidad de gráficas finitas que son k -críticas en cruces en el plano y establecer cotas sobre sus números de cruce.

Iniciaremos presentando una breve discusión de los conceptos básicos que utilizaremos en este trabajo.

1.1 Conceptos Básicos

En este trabajo utilizamos la notación y terminología convencional de teoría de gráficas introducida por Bondy y Murty (ver [3]).

Comenzaremos con la definición formal de una gráfica.

Definición. Una gráfica G es una tripleta ordenada $(V(G), E(G), \psi_G)$ que consiste de un conjunto no vacío $V(G)$ de *vértices*, un conjunto $E(G)$ (ajeno de $V(G)$); de *aristas* y una función de incidencia ψ_G que asocia a cada arista de G un par (no ordenado) de elementos (no necesariamente diferentes) de $V(G)$.

Usualmente, omitimos la referencia a ψ_G , y simplemente decimos que una gráfica $G = (V, E)$ consiste de un conjunto $V(G)$ de *vértices* y un conjunto $E(G)$ de *aristas*.

Si V es el conjunto de vértices de una gráfica G entonces ocasionalmente diremos que G es una gráfica *sobre* V .

El número de vértices de una gráfica G es su *orden*. Una gráfica es *finita* o *infinita* según su orden.

Cada arista e une un par de vértices u y v , los *extremos* de e . Si una arista e une u y v , entonces u y v son *adyacentes*, y e es *incidente* con ambos u y v .

Dos aristas $e \neq f$ son *adyacentes* si ellas tienen un extremo en común.

Si V_1 y V_2 son dos conjuntos de vértices en una gráfica G , entonces toda arista que tenga un extremo en V_1 y el otro en V_2 será una $V_1 - V_2$ *arista*. Denotaremos $G[V_1, V_2]$ al conjunto de todas las $V_1 - V_2$ aristas de G .

Un *sendero* de una gráfica G es una secuencia no nula $T = v_0 e_1 v_1 e_2 \dots e_k v_k$, cuyos términos son alternadamente vértices y aristas, tal que los extremos de la arista e_i son v_{i-1} y v_i . Los vértices v_0 y v_k son el *principio* y el *final*, respectivamente, de T , y el entero k es la *longitud* de T . Los vértices v_1, \dots, v_{k-1} son los vértices *internos* de T .

Un sendero es *cerrado* si $v_0 = v_k$. Un *ciclo* es un sendero cerrado cuyos vértices son todos diferentes entre sí.

Un sendero $T = v_0 e_1 v_1 \dots e_k v_k$ es un *camino* si los vértices v_0, v_1, \dots, v_k son todos diferentes entre sí. Frecuentemente nos referiremos a v_0 y v_k como los *extremos* del camino.

Dados dos conjuntos A, B de vértices, diremos que el camino $P = v_0 e_1 v_1 \dots v_k$ es un $A-B$ *camino* si $V(P) \cap A = \{v_0\}$ y $V(P) \cap B = \{v_k\}$. Si $A = \{a\}$ escribiremos $a - B$ camino en lugar de $\{a\} - B$ camino.

Un *lazo* es un sendero cerrado con $k = 1$.

Si e, f son aristas distintas que unen el mismo par de vértices (diferentes), entonces e y f son aristas *paralelas*.

Una gráfica es *simple* si no tiene lazos ni aristas paralelas.

Si e es una arista en una gráfica simple, y u y v son vértices unidos por e , entonces frecuentemente denotamos a e por (u, v) o por uv .

Sea G una gráfica y v uno de sus vértices. El conjunto de vértices en G adyacentes a v será denotado por $N_G(v)$. Si hay solo una gráfica bajo consideración, no habrá confusión por abreviar a $N_G(v)$ como $N(v)$.

En esta tesis, denotaremos por $|B|$ la cardinalidad del conjunto B .

Si G es una gráfica y t es un entero no negativo, entonces $V_t(G) := \{v \in V(G) : |N(v) \setminus \{v\}| \geq t\}$.

El *grado* $d(v)$ de un vértice v en una gráfica G es el número de aristas en G incidentes con v (cada lazo incidente con un vértice v contribuye en 2 a $d(v)$).

El número $\delta(G) := \min\{d(v) \mid v \in V(G)\}$ es el *grado mínimo* de la gráfica G . El número $\Delta(G) := \max\{d(v) \mid v \in V(G)\}$ es su *grado máximo*.

Si $G = (V, E)$ y $G' = (V', E')$ son dos gráficas, entonces $G \cup G' := (V \cup V', E \cup E')$ y $G \cap G' := (V \cap V', E \cap E')$. Diremos que G y G' son *disjuntas* o *ajenas* siempre que $V \cap V' = \emptyset$ y $E \cap E' = \emptyset$. Si $V' \subset V$ y $E' \subset E$, entonces G' es una *subgráfica* de G (y G es una *supergráfica* de G'), lo denotamos $G' \subset G$. Si $G' \subset G$ y $V \neq V'$ o $E \neq E'$, entonces G' es una *subgráfica propia* de G (y G es una *supergráfica propia* de G').

Sean G y G' como en el párrafo anterior. Si $G' \subset G$ y G' contiene *todas* las aristas de E que tienen ambos extremos en V' , entonces G' es una *subgráfica inducida* de G . Diremos que V' *induce* a G' en G . Si $U \subset V(G)$, entonces $G[U]$ denotará la subgráfica inducida por U en G .

Sea $e = xy$ una arista de una gráfica $G = (V, E)$. G/e denotará a la gráfica que resulte de *contraer* en G a la arista e en un nuevo vértice v_e , el cual será adyacente a cada elemento de $N_G(v) \setminus \{x, y\}$. Formalmente, G/e es una gráfica (V', E') tal que $V' := (V \setminus \{x, y\}) \cup \{v_e\}$ y

$$E' := \{vw \in E : \{v, w\} \cap \{x, y\} = \emptyset\} \cup \{v_e w : xv \in E \setminus \{e\} \text{ o } yw \in E \setminus \{e\}\}.$$

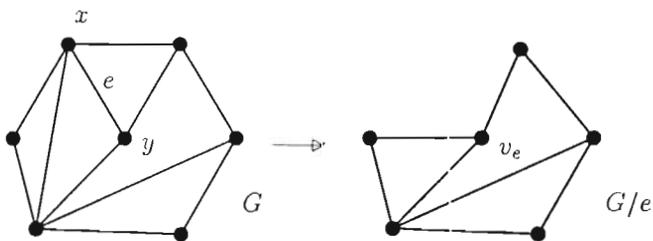


Figura 1 Contracción de la arista $e = xy$.

Cualquier gráfica M obtenida a partir de una gráfica G a través de una serie de eliminaciones de vértices y/o aristas y contracciones de aristas es una *menor* de G (y G es una *mayor* de M).

Diremos que una gráfica G es *minimal* (*maximal*) con respecto a una propiedad específica, si

G poseé tal propiedad, pero no ninguna de sus subgráficas propias (supergráficas propias.)

Una gráfica G es *conexa* si para cualquier par de vértices u y v en G existe un camino el cual tiene principio u y final v ; de otra manera diremos que G es *disconexa*.

Las subgráficas conexas maximales de una gráfica G son las *componentes* de G .

Si W es un subconjunto de $V(G)$, entonces denotamos por $G - W$ la gráfica que resulta de eliminar de G todos los vértices de W , así como todas las aristas adyacentes a algún vértice en W .

Una gráfica G es *k -conexa* (donde k es un entero tal que $0 \leq k \leq |V(G)|$) si para cualquier subconjunto W de $V(G)$ con $|W| \leq k - 1$, la gráfica $G - W$ es conexa.

Sea G una gráfica. Si W es un subconjunto de $V(G)$ con k -elementos y el número de componentes de $G - W$ es mayor que el número de componentes de G , entonces W es un *k -corte de vértices* de G . Si W tiene un único elemento, digamos w , y W es un 1-corte de vértices de G , entonces w es un *vértice de corte* de G .

Si F es un subconjunto de $E(G)$, entonces denotamos por $G - F$ la gráfica que resulta de eliminar de G todas las aristas de F .

Una gráfica G es *k -arista-conexa* (donde k es un entero tal que $0 \leq k \leq |E(G)|$) si para cualquier subconjunto F de $E(G)$ con $|F| \leq k - 1$, la gráfica $G - F$ es conexa.

Sea G una gráfica. Si F es un subconjunto de $E(G)$ con k -elementos y el número de componentes de $G - F$ es mayor que el número de componentes de G , entonces F es un *k -corte de aristas* de G . Si F consta de un único elemento, digamos e , y F es un 1-corte de aristas de G , entonces e es una *arista de corte* de G .

Finalizamos esta sección mencionando un resultado elemental de teoría de gráficas que usaremos frecuentemente en este trabajo: Para toda gráfica $G = (V, E)$,

$$\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2|E(G)|.$$

1.2 Gráficas planares

En la sección anterior pudimos ver que una gráfica es un objeto abstracto. Sin embargo, para facilitar su estudio realizaremos representaciones de cada gráfica a analizar en el plano. En este trabajo haremos dichas representaciones de las gráficas a analizar mediante dibujos.

1.2.1 Encajes de gráficas en superficies

En esta sección enfocaremos nuestro interés a gráficas que pueden dibujarse "naturalmente" en el plano. Tenemos la siguiente definición:

Definición. Un *dibujo* de una gráfica G es un subconjunto del plano en el cual los vértices de G son representados por (diferentes) puntos, y cada arista uv de G es representada como un arco abierto (imagen homeomorfa de $(0,1)$) A que no contiene vértices, de tal manera que los extremos de A son los puntos que representan u y v .

Una vez que hemos dejado en claro, a través de las definiciones de gráfica y dibujo de una gráfica, la diferencia que existe entre estos dos términos, hacemos la siguiente convención. Si \mathcal{D} es un dibujo de la gráfica G , con frecuencia no distinguiremos entre objetos combinatorios (un vértice, una arista un camino, etc.) y el subconjunto del plano que los representa. Esta práctica es bastante común, y difícilmente lleva a confusiones, pues es claro a partir del contexto específico si nos referimos a un objeto combinatorio o a un subconjunto del plano.

Entenderemos por un *cruce* en un dibujo \mathcal{D} de una gráfica G como una intersección de un par (o más) de aristas en \mathcal{D} .

Enseguida se establecen algunos elementos característicos de las gráficas que pueden dibujarse en una superficie dada sin cruces de aristas.

Definición. Un *encaje* de una gráfica G en una superficie Σ es un dibujo de G en Σ que no tiene cruces.

Definición. Una gráfica G , es *planar* si existe un encaje de G en el plano.

Sea \mathcal{E} un encaje de una gráfica G en la superficie Σ . Las componentes conexas de $\Sigma \setminus G$ son las *caras* de \mathcal{E} .

Sea F una cara asociada en un encaje \mathcal{E} en una superficie Σ . La *frontera de cara* asociada a F es el sendero cerrado obtenido al recorrer (en Σ) la frontera de F en su orden natural. Diremos que un vértice v es *incidente* con F (y F es *incidente* con v) si v está en la frontera de F . Asimismo, diremos que una arista e es *incidente* con F (y F es *incidente* con e) si e está en la frontera de F .

El número de aristas en la frontera de una cara F es la *longitud* de la cara (lo denotamos por $l(F)$).

En este trabajo nos ocuparemos solo del caso en el que la superficie Σ es el plano.

Sea $S \subset \mathbb{R}^2$. Denotamos \bar{S} la clausura de S .

Diremos que un encaje \mathcal{E} en el plano de una gráfica G es *limpio* si satisface que para cada arista e en \mathcal{E} existe un subconjunto abierto B_e del plano, tal que:

- (i) $e \subset B_e$;
- (ii) $\mathcal{E} \cap B_e = e$;
- (iii) $(\mathcal{E} \setminus e) \cap \bar{B}_e$ consiste de los dos vértices incidentes con e .

Informalmente, un encaje es limpio si las aristas se encuentran suficientemente apartadas entre sí. El concepto de encajes limpios es sumamente útil para evitar comportamientos patológicos que pueden surgir en encajes generales. Por ejemplo, es fácil dar ejemplos de encajes en los cuales existen aristas e, f tales que $\bar{e} \cap f$ tiene cardinalidad infinita. Este tipo de comportamientos se evita fácilmente exigiendo la (bastante razonable) limpieza en nuestros encajes.

Es un trabajo técnico y complicado probar que todo encaje de una gráfica G en el plano puede ser modificado hasta obtener un encaje limpio de G . Se sigue entonces que para toda gráfica G planar, existe un encaje que es limpio.

En el presente trabajo estamos interesados únicamente en encajes de gráficas en el plano que son limpios. Y de la observación del párrafo anterior, no habrá pérdida de generalidad por nuestra suposición (implícita, de ahora en adelante) de que todo encaje bajo consideración será un encaje limpio en el plano.

Una relación que se verifica entre los vértices, aristas y caras de un encaje \mathcal{E} de una gráfica G conexa en el plano es la conocida fórmula de Euler:

$$|V(\mathcal{E})| - |E(\mathcal{E})| + |F(\mathcal{E})| = 2$$

Donde $V(\mathcal{E})$, $E(\mathcal{E})$ denotan al conjunto de vértices y de aristas de G respectivamente, dibujados en el plano, y $F(\mathcal{E})$ denota al conjunto de las caras de \mathcal{E} .

1.2.2 Gráficas planas

En esta subsección introducimos la terminología relacionada con gráficas planas y definimos el concepto de gráfica dual.

Un *polígono* es un subconjunto de \mathbb{R}^2 el cual es la unión de una cantidad finita de segmentos de recta y es homeomorfo al círculo unitario.

Definición. Una *gráfica plana* es un par (V, E) de conjuntos finitos con las siguientes propiedades (los elementos de V son llamados *vértices* y los de E *aristas*):

- (i) $V \subset \mathbb{R}^2$;
- (ii) cada arista es un arco entre dos vértices o un polígono conteniendo exactamente un vértice (su *extremo*);
- (iii) aparte de su(s) propio(s) extremo(s), una arista no contiene vértices ni puntos de cualquier otra arista.

Note que una gráfica plana (V, E) define a una gráfica G sobre V de manera natural.

Observe de las definiciones de *gráfica planar* y *gráfica plana* que estos conceptos son diferentes.

Consideremos la gráfica plana G que se muestra en la Figura 2. Enseguida ponemos un nuevo vértice en cada cara de G y unimos con aristas esos nuevos vértices para formar otra nueva gráfica plana, como sigue: por cada arista e de G uniremos los dos vértices nuevos contenidos en las caras incidentes con e por una arista e^* , la cual, se cruza sólo con e ; si e es incidente sólo con una cara, entonces añadimos un polígono e^* al vértice nuevo contenido en esa cara, de tal manera que e^* se cruce sólo con e . La gráfica plana G^* formada a partir de G con este procedimiento es conocida como un dual plano de G .

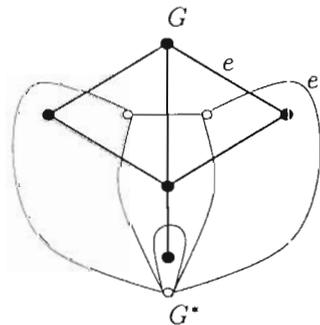


Figura 2. Una gráfica plana y su dual.

Enseguida definimos formalmente el concepto de gráfica dual.

Definición. Sean $G = (V, E)$ y (V^*, E^*) dos gráficas planas, y $F(G) =: F, F((V^*, E^*)) =: F^*$.

Diremos que $G^* = (V^*, E^*)$ es un *dual plano* de G , si existen biyecciones

$$\begin{array}{lll} F \rightarrow V^* & E \rightarrow E^* & V \rightarrow F^* \\ f \mapsto v^*(f) & e \mapsto e^* & v \mapsto f^*(v) \end{array}$$

que satisfacen lo siguiente:

- (i) $v^*(f) \in f$ para toda $f \in F$;
- (ii) $|e^* \cap G| = |e^* \cap e| = |e \cap G^*| = 1$ para toda $e \in E$;
- (iii) $v \in f^*(v)$ para toda $v \in V$.

A partir de la existencia de tales biyecciones es fácil deducir que ambas G y G^* son conexas. Por otra parte, de la construcción de G^* a partir de G es claro que cada gráfica conexa planar tiene un dual plano.

1.2.3 Árboles geométricos

En esta subsección presentaremos terminología y conceptos relacionados con gráficas geométricas y árboles. Desde luego, se enunciarán las definiciones de ambos términos.

Uno de los tres resultados importantes de esta tesis consiste en el establecimiento de una nueva cota inferior sobre el número de cruce de ciertas familias de árboles geométricos. Más adelante, abordaremos este problema con absoluta precisión.

Un *bosque* es una gráfica que no contiene ciclos. Una componente de un bosque es un *árbol*. Note que un bosque conexo es un árbol.

Los vértices de grado 1 de un árbol son sus *hojas*.

Sea \mathcal{P} una colección de puntos en el plano. Diremos que los elementos de \mathcal{P} están situados en *posición general* si no existe una línea recta que contenga más de dos elementos de \mathcal{P} .

Definición. Una *gráfica geométrica* es una gráfica plana tal que los vértices son puntos en posición general y sus aristas son segmentos de líneas rectas.

Consecuentemente, un árbol geométrico T sobre \mathcal{P} es una gráfica que satisface simultáneamente con ser árbol, gráfica geométrica, y $V(T) = \mathcal{P}$.

1.3 Conjuntos independientes

En esta subsección introduciremos los conceptos básicos y terminología relacionados con la independencia en gráficas.

Definición. Sea G una gráfica. Un subconjunto no vacío U de $V(G)$ es *independiente* si cada par de vértices en U no son adyacentes.

Un conjunto independiente $U \subset V(G)$ de una gráfica G es *máximo* si para cada $W \subset V(G)$ independiente, se satisface que $|U| \geq |W|$.

El *número de independencia*, $\alpha(G)$ de una gráfica G es la cardinalidad máxima de un conjunto de vértices independientes de G , es decir, la cardinalidad de un conjunto independiente máximo de G :

$$\alpha(G) = \max\{|W| : W \text{ es un conjunto independiente de vértices de } G\}.$$

Un conjunto independiente $U \subset V(G)$ de una gráfica G es *maximal* si U no es subconjunto propio de ningún subconjunto independiente de $V(G)$. Esto es, un conjunto independiente U es maximal si para todo vértice $v \notin U$, se tiene que v es adyacente a algún vértice en U .

Nótese que cada conjunto de vértices independiente de cardinalidad $\alpha(G)$ es un conjunto maximal independiente. Es fácil construir ejemplos que muestran que el recíproco de este enunciado es falso. Por ejemplo, el conjunto unitario que contiene al (único) vértice de grado n en la n -estrella S_n es un conjunto independiente maximal de cardinalidad 1, mientras que $\alpha(S_n) = n$ (la n -estrella S_n es la gráfica conexa con un vértice de grado n y n vértices de grado 1).

Desafortunadamente, no se conoce un algoritmo eficiente para determinar el número de independencia. De hecho, el problema de la determinación de este parámetro es NP-completo. En particular, todos los algoritmos conocidos para determinar el número de independencia de una gráfica dada logran su objetivo (en un peor caso) en un número exponencial de pasos (en el número de vértices y/o aristas).

En [11] se demostró que si G es una gráfica planar con grado mínimo al menos 3 entonces $\alpha(G) < (2/3)|V(G)|$. En esta tesis deduciremos algunas consecuencias a partir de este resultado, y las utilizaremos para establecer una cota superior sobre el número de cruce de cierta familia de gráficas críticas en cruces en el plano.

1.4 Números de cruce de gráficas en el plano

El *número de cruce* $cr(G)$ de una gráfica G en el plano es el mínimo número de intersecciones (a pares) de aristas tomado sobre todos los dibujos de G . Un dibujo de \mathcal{D} de G en el plano es *óptimo* si el número $cr(\mathcal{D})$ de intersecciones (a pares) de aristas en \mathcal{D} satisface la igualdad $cr(G) = cr(\mathcal{D})$.

Notemos que al exhibir un dibujo de G en el plano con n cruces, se implica automáticamente que $cr(G) \leq n$.

Un dibujo de una gráfica G es *bueno* si las siguientes condiciones se satisfacen:

- (i) Cada intersección es un cruce (y no tangencial).
- (ii) Ninguna arista se autointersecta.
- (iii) Ningún par de aristas adyacentes se intersecta.
- (iv) Ningún par de aristas tiene más de un punto de intersección.
- (v) Ningún conjunto de tres (o más) aristas tiene un punto común de intersección.

No es difícil probar que todo dibujo en el plano puede ser modificado hasta obtener un buen dibujo de G en el plano sin aumentar el número de cruces (ver [17]). Asimismo, todo dibujo bueno puede ser modificado hasta obtener otro dibujo bueno que satisface lo siguiente: la región finita acotada por cada par de aristas paralelas no contiene vértices. Se sigue entonces que para toda gráfica G existe un dibujo óptimo que es bueno y además cumple que la región finita acotada por cada par de aristas paralelas no contiene vértices de G .

En el presente trabajo estamos interesados únicamente en dibujos óptimos de gráficas en el plano. Por la observación del párrafo anterior, no habrá pérdida de generalidad por nuestra suposición (implícita, de ahora en adelante) de que todo dibujo bajo consideración es bueno y además verifica que la región finita acotada por cada par de aristas paralelas no contiene vértices.

El cálculo exacto del número de cruce de una gráfica es, para la enorme mayoría de los casos de interés, un proyecto desesperanzadoramente complicado. Esta dificultad se fundamenta en el hecho de que calcular el número de cruce de una gráfica en el plano es un problema NP-Completo [6].

Dada esta dificultad inherente al proceso de calcular números de cruce, cualquier esfuerzo serio

para hallar el número de cruce de una gráfica particular debe involucrar argumentos que exploten características especiales de la estructura de la gráfica en cuestión.

Naturalmente, nos gustaría conocer los números de cruce de familias interesantes de gráficas. Sin embargo, a pesar de un sostenido esfuerzo de la comunidad de teoría topológica de gráficas, conocemos los números de cruce de solo unas cuantas gráficas.

Dedicamos la siguiente sección a presentar un breve resumen de los números de cruce exactos que se conocen.

1.5 Números de cruce en el plano de familias específicas de gráficas

El objetivo de esta sección es presentar algunas familias interesantes de gráficas cuyos números de cruce son conocidos con exactitud. Algunas de estas familias son:

- K_n . Es la gráfica de n -vértices donde cada uno de sus vértices es adyacente a todos los vértices restantes.
- $K_{m,n}$. Es la gráfica cuyo conjunto de vértices puede partitionarse en conjuntos X, Y , con $|X| = m$ y $|Y| = n$, de tal modo que los vértices u, v son adyacentes si y solo si uno de u, v pertenece a X y el otro pertenece a Y .
- $C_m \times C_n$. Es la gráfica 4-regular con mn vértices, los cuales son etiquetados $v_{i,j}$, con $0 \leq i \leq m-1$ y $0 \leq j \leq n-1$, de tal manera que los vértices adyacentes a $v_{i,j}$ son $v_{i-1,j}$, $v_{i+1,j}$, $v_{i,j-1}$ y $v_{i,j+1}$, con los subíndices siendo leídos módulo m y n respectivamente.

Presentamos las mejores cotas inferiores conocidas para los números de cruce de las familias $K_n, K_{m,n}$, y $C_m \times C_n$.

1.5.1 Gráficas Completas

No es difícil encontrar dibujos de K_n con exactamente

$$\frac{1}{4} \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n-3}{2} \right\rfloor$$

cruces.

Donde $\lfloor \alpha \rfloor$ se define como el máximo entero que es menor o igual que α .

Erdős y Guy conjeturaron en 1973 que éste es el número de cruce de K_n [5].

Esta conjetura ha sido confirmada únicamente para $n \leq 10$. En particular, note que $cr(K_5) = 1$.

El mejor resultado conocido en esta dirección es que $cr(K_n) \geq \frac{3}{10} \binom{n}{4}$. Esto implica que, asintóticamente, el número de cruce de K_n es al menos cuatro quintos del valor conjeturado.

1.5.2 Gráficas Bipartitas Completas

El problema de calcular números de cruce fue propuesto por el matemático húngaro Turán en 1940. Específicamente, Turán planteó el problema de calcular el número de cruce de $K_{m,n}$. Turán conjeturó que

$$cr(K_{m,n}) = \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{m-1}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor.$$

Esta conjetura ha sido demostrada únicamente para valores de m y n que satisfacen $\min\{m, n\} \leq 6$. En particular, note que $cr(K_{3,3}) = 1$.

1.5.3 Productos Cartesianos de Ciclos

Harary, Kainen, y Schwenk conjeturaron en 1973 que el número de cruce de $C_m \times C_n$ es igual a $(m-2)n$, si m, n satisfacen $n \geq m \geq 3$. Esta conjetura ha sido demostrada para $n \geq m \geq 7$.

Recientemente, en [7], L. Glebsky y G. Salazar demostraron que para cada m fija, la conjetura es falsa para a lo más un número finito de valores de n .

1.6 Gráficas críticas en cruces en el plano

Dado que el cálculo exacto del número de cruce es una tarea fútil para prácticamente cualquier gráfica de interés, es sensato enfocar nuestro interés en el análisis de las propiedades estructurales de las gráficas que ocasionan (y/o garantizan) números de cruces grandes.

Es fácil construir gráficas con un número arbitrariamente grande de aristas y/o vértices que tienen número de cruce arbitrariamente bajo (inclusive igual a cero, por supuesto). Estas gráficas

tienen la propiedad de que el número de cruce no disminuye si eliminamos de la gráfica alguna(s) arista(s). El hecho de que el número de cruce de una gráfica G permanece inalterado ante la eliminación de aristas indica que las propiedades estructurales responsables del número de cruce pueden encontrarse en subgráficas propias de G .

Naturalmente, ante tal situación lo más razonable es eliminar recursivamente aristas de G , hasta llegar al punto en que borrar *cualquier* arista disminuye el número de cruce. Esta idea conduce a la definición de gráficas críticas en cruces.

Definición. Una gráfica G es *crítica en cruces* en el plano si $cr(G - e) < cr(G)$ para toda arista e de G .

Un refinamiento de la definición anterior es la siguiente:

Definición. Una gráfica G es *k-crítica en cruces* en el plano si $cr(G) \geq k$, y $cr(G - e) < k$ para toda arista e de G .

Como en esta tesis el término *k-crítica* solo se utiliza para referirnos a gráficas que son *k-críticas* en cruces en el plano, entonces no habrá confusión por abreviar *k-crítica en cruces* como *k-crítica*. Asimismo, ocasionalmente abreviaremos *crítica en cruces* como *crítica*.

Note que las definiciones anteriores son esencialmente la misma, ya que como podemos ver G es una gráfica crítica en cruces en el plano si y solo si existe un entero positivo k para el cual se satisface que G es *k-crítica* en cruces en el plano. Sin embargo, como ya habíamos mencionado la segunda definición es más específica.

Contar con ambas definiciones nos permitirá explicar con mayor facilidad los procedimientos que se usaron para establecer algunos de los resultados obtenidos en esta tesis.

Ya hemos mencionado que el objetivo de esta tesis es estudiar la conexidad y el número de cruce de gráficas que son críticas en cruces en el plano. Más específicamente, nos dedicaremos a mejorar un par de cotas sobre el número de cruce en el plano de gráficas críticas en cruces establecidas en publicaciones recientes y además, analizaremos la 2-arista-conexidad de estas gráficas.

1.7 Contribuciones de esta tesis a la teoría de gráficas críticas en cruces en el plano

La aportación de esta tesis a la teoría de gráficas críticas en cruces en el plano fué en tres frentes. A continuación se precisa cada uno de ellos.

1.7.1 Descomposición de gráficas críticas en menores críticas

La primera contribución importante de esta tesis a la teoría de número de cruce en el plano consistió en el diseño de un “algoritmo” que nos permitirá descomponer una gráfica G conexa crítica en cruces en el plano con 2-cortes de aristas (la entrada del algoritmo) en varias gráficas menores de G (la salida del algoritmo), digamos $G_1^*, G_2^*, \dots, G_n^*$, las cuales satisfacen lo siguiente: a) Cada par de estas gráficas menores son disjuntas, b) cada una de ellas es crítica en cruces en el plano y 3-arista-conexa, c) el grado mínimo de todas las menores es al menos $\delta(G)$, y por último d) $cr(G) = \sum_{j=1}^n cr(G_j^*)$.

Esta contribución es importante ya que permitirá atacar con cierta ventaja problemas relacionados con el cálculo del número de cruce en gráficas que son críticas en cruces en el plano pero no 3-arista-conexas. La ventaja mencionada consiste esencialmente en que ahora podremos estudiar el número de cruce de las gráficas que tienen 2-cortes de aristas a través del estudio de los números de cruce de varias gráficas menores (más pequeñas), las cuales, además de tener las mismas características de su gráfica mayor, son 3-arista-conexas.

Un comentario sobre notación. Sea H una gráfica. En esta tesis denotaremos por E_H^2 al conjunto de aristas de H tales que $e \in E_H^2$ si y solo si e forma parte de algún 2-corte de aristas minimal de H . Si $e \in E_H^2$, entonces definimos por $C_e(H)$ al subconjunto de E_H^2 tal que $a \in C_e(H)$ si y solo si $\{e, a\}$ es un 2-corte de aristas minimal de H ó $a = e$. Note que $a \in C_e(H)$ equivale a $e \in C_a(H)$.

La herramienta básica que nos permitirá alcanzar esta meta es el siguiente resultado:

Teorema 1 *Sea G una gráfica conexa crítica en cruces en el plano con grado mínimo al menos 3. Supongamos que e es una arista de G tal que $e \in E_G^2$. Sean G_1, G_2, \dots, G_n las componentes de $G \setminus C_e(G)$. Para $i = 1, 2, \dots, n$ sean u_i y v_i los extremos en G_i del 2-corte de aristas que separa a G_i de $G \setminus G_i$ garantizado por la Proposición 10. Sea G_i' la gráfica que resulta de añadir a G_i una arista g_i con extremos u_i, v_i . Entonces al menos una de G_i o G_i' es crítica en cruces en el plano.*

Una consecuencia importante del Teorema 1 que nos habla de la estructura de las gráficas críticas en el plano es el siguiente:

Corolario 2 *Si G es una gráfica conexa crítica en cruces en el plano con grado mínimo al menos 3 entonces $|E_G^2| \leq 3cr(G) - 4$.*

En el capítulo 2, se exhibirá una familia de gráficas que mostrará, que la cota presentada en el Corolario 2 está asintóticamente dentro de un factor de $2/3$ de la solución óptima.

Otra consecuencia del Teorema 1 es el contenido de la discusión presentada al inicio de esta subsección. Redactaremos dicha discusión de manera precisa en nuestro próximo resultado, el Corolario 3, y en el capítulo 2 probaremos que, efectivamente, dicho resultado también puede deducirse a partir del Teorema 1.

Corolario 3 *Si G es una gráfica conexa crítica en cruces en el plano con grado mínimo al menos 3 entonces existe una colección \mathcal{M}_G de menores de G , digamos $\mathcal{M}_G = \{M_1, M_2, \dots, M_n\}$ tales que para cada $i = 1, 2, \dots, n$ se cumple que M_i es 3-arista-conexa crítica en cruces en el plano con grado mínimo al menos 3, y $cr(G) = \sum_{j=1}^n cr(M_j)$.*

Nótese que una consecuencia inmediata del corolario anterior es que $n \leq cr(G)$, donde G y n son como en el Corolario 3.

1.7.2 Sobre el número de cruce de gráficas k -críticas en el plano

El principal trabajo de investigación reportado hasta la fecha en el área de gráficas críticas en cruces es indudablemente el realizado en [16] por B. Richter y C. Thomassen, cuyo principal resultado es el siguiente:

Teorema (Richter y Thomassen, 1993). Si G es una gráfica k -crítica en cruces en el plano entonces

$$cr(G) \leq 2.5k + 16.$$

Este resultado fue generalizado en [13] a cualquier superficie compacta de género positivo con el siguiente teorema.

Teorema. Para cada superficie compacta Σ existe una constante $c(\Sigma)$ con la siguiente propiedad. Sea G una gráfica k -crítica en Σ . Entonces

$$cr_{\Sigma}(G) \leq 2.5k + c(\Sigma).$$

Aquí, $cr_{\Sigma}(G)$ denota al número de cruce de G en Σ .

Recientemente, M. Lomelí y G. Salazar lograron reducir el coeficiente de k de 2.5 a 2 con el siguiente resultado (ver [14]).

Teorema. Existe una constancia C con la siguiente propiedad. Si G es una gráfica k -crítica en el plano con grado mínimo $\delta \geq 4$, entonces

$$cr(G) \leq 2k - k \left(\frac{\delta - 4}{\delta - 2} \right) + C$$

La segunda aportación importante de esta tesis a la teoría de número de cruce consistió justamente en bajar el coeficiente de k en el Teorema anterior de 2 a 1.5. El siguiente resultado resume el trabajo realizado en esta tesis sobre esta línea.

Teorema 4 *Si G es una gráfica conexa k -crítica en cruces en el plano con grado máximo m y $|V_3(G)| \geq (3704k + 21140)k$ entonces*

$$cr(G) \leq 1.5k + 18m - 38$$

Como puede apreciarse en los resultados antes citados, el costo que hemos pagado por bajar el coeficiente de k de 2.5 a 1.5 consiste esencialmente en conferirle participación al grado máximo sobre la cota. En otras palabras, hemos tenido que agregar a la cota un término que depende del grado máximo.

Por otra parte, especialistas en el tema como lo son G. Salazar, B. Richter y C. Thomassen creen que no existen gráficas que satisfacen simultáneamente con ser k -críticas y tener grados máximos arbitrariamente grandes comparados con k . Concretamente, estos matemáticos han conjeturado lo siguiente:

Conjetura 1. Para cada entero positivo k existe un entero n_k tal que si G es una gráfica k -crítica en cruces en el plano entonces $\Delta(G) < n_k$.

En este sentido, J. Leños y G. Salazar conjeturan más todavía, a saber:

Conjetura 2. Existe una función $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tal que si G es k -crítica en cruces en el plano entonces $\Delta(G) < f(k)$ y además $O(f(k)) < O(k)$.

Aquí, $O(f(k)) < O(k)$ significa que para cada número positivo r existe un entero positivo p_r con la siguiente propiedad: Si $k > p_r$ entonces $k - f(k) > r$.

Observe que de confirmarse la segunda conjetura, entonces nuestra cota mejoraría íntegramente a la cota propuesta por B. Richter y C. Thomassen.

1.7.3 Árboles geométricos sobre conjuntos de puntos multicoloreados con pocas intersecciones.

En esta sección presentaremos la última aportación importante de esta tesis a la teoría de número de cruce.

Como puede verse en [1, 2, 4, 9, 10, 15, 18, 12], en la última década el estudio de las gráficas geométricas ha recibido una considerable atención por parte de la comunidad matemática. En parte, este interés proviene del importante papel que este tipo de gráficas está teniendo actualmente dentro de la geometría computacional y muchas de sus aplicaciones.

Los problemas que se investigaron en varios de los artículos recién citados involucran gráficas geométricas cuyos vértices son conjuntos de puntos multicoloreados. Por ejemplo, en [12], C. Merino, G. Salazar y J. Urrutia probaron lo siguiente:

Teorema. Sean $k \geq 3$, y $s \geq 2$ números enteros. Sea $\mathcal{P} = \{p_0, p_1, \dots, p_{ks-1}\}$ una colección de puntos en posición convexa, cuyos subíndices están ordenados de acuerdo al orden cíclico en el cual ellos aparecen en el polígono convexo cuyo conjunto de vértices es \mathcal{P} . Para cada $i = 0, 1, \dots, k-1$, sea $P_i := \{p_j \in \mathcal{P} \mid j \equiv i \pmod{k}\}$. Sea T_0, T_1, \dots, T_{k-1} cualquier colección de árboles geométricos sobre P_0, P_1, \dots, P_{k-1} , respectivamente. Entonces el número total de intersecciones sobre las aristas de $T_0 \cup T_1 \cdots \cup T_{k-1}$ es al menos $2sk(k-1)/3 - 5k(k-1)/6$.

Más aún, ellos mismos probaron que para los casos $k = 3$ y $k = 4$, la cota enunciada no se puede mejorar.

En esta tesis, se continuó con el estudio del teorema anterior con el fin de mejorar la cota para $k \geq 5$. Afortunadamente, alcanzamos nuestro objetivo y pudimos probar el siguiente resultado.

Teorema 5 Si $k \geq 5$ en el Teorema anterior, entonces el número total de intersecciones sobre las

aristas de $T_0 \cup T_1 \cup \dots \cup T_{k-1}$ es al menos $7sk(k-1)/10 - 9k(k-1)/10$.

El único caso en el que nuestra cota no mejora a la presentada en [12] es cuando $s = 2$. En este caso, el lector puede verificar fácilmente que ambas cctas coinciden.

1.8 Organización de esta tesis

Esta tesis se encuentra organizada de la siguiente manera.

En el Capítulo 2 demostramos el Teorema 1 y los Corolarios 2 y 3.

En el Capítulo 3 demostraremos el Teorema 4.

En el Capítulo 4 demostramos el Teorema 5.

En el Capítulo 5 presentaremos las conclusiones y algunas observaciones.

Capítulo 2

Estructura de gráficas críticas con 2–cortes de aristas: Demostración del Teorema 1

Iniciaremos introduciendo la terminología y notación que se utilizará a lo largo de este capítulo.

Sea \mathcal{D} un dibujo de una gráfica H en el plano y sean H_1, H_2 subgráficas disjuntas de H y $w, z \in V(H)$.

- $\mathcal{D}|_{H_1}$ será el dibujo que resulte de eliminar en \mathcal{D} a todo arco y todo punto que no represente a una arista o un vértice de H_1 .
- Representaremos por \mathcal{D}_{H_1, H_2} al conjunto de cruces en \mathcal{D} que tienen un arco en $\mathcal{D}|_{H_1}$ y el otro en $\mathcal{D}|_{H_2}$. Asimismo, \mathcal{D}_{H_1} será el conjunto de cruces en \mathcal{D} que tienen ambos arcos en $\mathcal{D}|_{H_1}$.
- Sean \mathcal{A}, \mathcal{B} subconjuntos de \mathcal{D} . Definimos la distancia $d(\mathcal{A}, \mathcal{B}; \mathcal{D})$ de \mathcal{A} a \mathcal{B} en \mathcal{D} como el mínimo número de cruces que se producen al añadir a \mathcal{D} un arco con un extremo en \mathcal{A} y el otro en \mathcal{B} .

2.1 Sobre la aditividad del número de cruce en el plano

Consideremos la siguiente pregunta:

Pregunta. Sean G y G' gráficas ajenas y $g = xy, g' = wv$ aristas de G y G' respectivamente. Si H es la gráfica que resulta de añadir a $(G \cup G') \setminus \{g, g'\}$ dos aristas, una con extremos en x, w

y la otra en y, v . ¿Será posible calcular $cr(H)$ en términos de $cr(G)$ y $cr(G')$?

El resultado principal de esta sección (el Lema 8) constituye nuestro primer paso significativo hacia la demostración del Teorema 1 y además prueba que la respuesta a esta pregunta es afirmativa.

A continuación enunciamos un resultado elemental de teoría topológica de gráficas, el cual, será utilizado varias veces en el resto de este capítulo.

Proposición 6 *Sea $h = vw$ una arista de corte de una gráfica conexa H . Sean H_1 y H_2 las dos componentes de $H - h$. Si \mathcal{D} es un dibujo de H en el plano tal que $cr(H) = cr(\mathcal{D})$ entonces $|\mathcal{D}_{H_1 H_2}| = 0$.*

El resultado que sigue, al igual que el anterior, también será frecuentemente utilizado en resultados posteriores.

Proposición 7 *Sea G una gráfica no planar y \mathcal{D} un dibujo óptimo de G en el plano. Si se reemplaza cualquier cruce de \mathcal{D} por un vértice de grado 4 entonces la gráfica resultante tiene $cr(G) - 1$ cruces.*

Demostración. Sea c uno de los cruces de \mathcal{D} . Sea H la gráfica que resulta de intercambiar en \mathcal{D} a c por un vértice de grado 4. Observe que $cr(G) = cr(\mathcal{D}) \geq cr(H) + 1$. Por otra parte, sea \mathcal{H} un dibujo óptimo de H ; claramente \mathcal{H} induce un dibujo \mathcal{H}' para G tal que $cr(\mathcal{H}') = cr(\mathcal{H}) + 1$, esto implica que $cr(G) \leq cr(H) + 1$ y por tanto $cr(G) = cr(H) + 1$. ■

Finalmente, estamos listos para dar respuesta a la pregunta que nos planteamos al inicio de esta sección.

Lema 8 *Sea $\{e, e'\} = G[V_1, V_2]$ un 2-corte de aristas minimal de una gráfica conexa G y $G_i = G[V_i]$ para $i = 1, 2$. Sean x_i, y_i los extremos de e, e' en V_i respectivamente. Sea G'_i la gráfica resultante de añadir a G_i una arista g_i con extremos x_i, y_i . Entonces $cr(G) = cr(G'_1) + cr(G'_2)$.*

Demostración. Primero probamos que $cr(G) \leq cr(G'_1) + cr(G'_2)$. Es fácil encontrar dibujos disjuntos en el plano $\mathcal{D}'_1, \mathcal{D}'_2$ de G'_1 y G'_2 respectivamente, tales que: (i) $cr(G'_i) = cr(\mathcal{D}'_i)$, donde $i = 1, 2$, y (ii) $d(g_1, g_2; \mathcal{D}'_1 \cup \mathcal{D}'_2) = 0$.

De (ii) se sigue que podemos unir los arcos g_1, g_2 con un par α, β de arcos disjuntos sin producir nuevos cruces. Claramente, $\mathcal{D}'_1 \cup \mathcal{D}'_2 \cup \{\alpha, \beta\}$ induce un dibujo \mathcal{D} para G tal que

$$\text{cr}(\mathcal{D}) = \text{cr}(\mathcal{D}'_1) + \text{cr}(\mathcal{D}'_2),$$

esto, implica que

$$\text{cr}(G) \leq \text{cr}(G'_1) + \text{cr}(G'_2).$$

Antes de comenzar con la otra parte de la prueba hacemos un parentesis para introducir la siguiente notación: Si \mathcal{D} es un dibujo óptimo de G en el plano entonces $\mathcal{A}_{\mathcal{D}}$ será la unión de los conjuntos $\mathcal{D}_{G_1}, \mathcal{D}_{G_2}, \mathcal{D}_{eG_1}, \mathcal{D}_{e'G_1}, \mathcal{D}_{eG_2}, \mathcal{D}_{e'G_2}$.

No es difícil ver que necesariamente $|\mathcal{D}_{ee'}| = 0$. Luego, podemos asumir que $\text{cr}(G) = |\mathcal{D}_{G_1G_2}| + |\mathcal{A}_{\mathcal{D}}|$ siempre que \mathcal{D} sea un dibujo óptimo de G .

Procederemos por inducción sobre $\text{cr}(G)$ para probar que $\text{cr}(G) \geq \text{cr}(G'_1) + \text{cr}(G'_2)$. Nuestro caso base será $\text{cr}(G) = 0$. Llegaremos a una contradicción por asumir que para alguna gráfica planar G ocurre que $\text{cr}(G) < \text{cr}(G'_1) + \text{cr}(G'_2)$. Tal suposición implica que al menos uno de G'_1 o G'_2 es no planar. Sin pérdida de generalidad supongamos que $\text{cr}(G'_1) > 0$. De la minimalidad de $\{e, e'\}$ se sigue que G contiene un ciclo C tal que $e, e' \in C$. Una simple observación nos deja ver que $\text{cr}(G_1 \cup C) = \text{cr}(G'_1)$. Pero $G_1 \cup C$ es una subgráfica de G , luego $\text{cr}(G) \geq \text{cr}(G_1 \cup C) > 0$.

Ahora, supongamos que la afirmación es válida para todo entero no negativo menor que t , donde t es algún entero positivo y consideremos el caso $\text{cr}(G) = t$.

Dividiremos el resto de la prueba en 2 casos.

Caso 1. Existe al menos un dibujo \mathcal{D} de G en el plano tal que $\text{cr}(G) = \text{cr}(\mathcal{D})$ y $|\mathcal{A}_{\mathcal{D}}| > 0$. Supongamos que c es uno de los cruces de $\mathcal{A}_{\mathcal{D}}$ y que las aristas a, a' son tales que $\mathcal{D}_{aa'} = \{c\}$. Enseguida reemplácese a c por un vértice v de grado 4 y llámese H la gráfica resultante. De la Proposición 7 tenemos que $\text{cr}(G) = \text{cr}(H) + 1$.

Como $c \in \mathcal{A}_{\mathcal{D}}$ entonces al menos una de a o a' está en $G_1 \cup G_2$. Sin pérdida de generalidad asumamos que $a \in G_1 \cup G_2$. Dado que G_1 y G_2 son gráficas disjuntas, luego a está en sólo una de G_1 o G_2 . Sin pérdida de generalidad supongamos que $a \in G_1$. Sean $H_1 = H[V'_1]$ y $H_2 = H[V_2]$ donde $V'_1 = V_1 \cup \{v\}$. Por otra parte no es difícil ver que $H[V'_1, V_2]$ es un 2-corte de aristas minimal para H y que $H_2 = G_2$. Como $\text{cr}(H) = t - 1$ entonces por la hipótesis de inducción tenemos que $\text{cr}(H) = \text{cr}(H'_1) + \text{cr}(H'_2)$, donde H'_1 y H'_2 se obtienen a partir de H de manera análoga a como se obtuvieron G'_1 y G'_2 a partir de G . Nótese que $H'_2 = G'_2$ debido a que $H_2 = G_2$.

Un argumento análogo al que se usó en la Proposición 7 para probar que $\text{cr}(G) \leq \text{cr}(H) + 1$ demuestra que $\text{cr}(G'_1) \leq \text{cr}(H'_1) + 1$. Conjuntando las relaciones anteriores obtenemos que

$$\text{cr}(G) = \text{cr}(H) + 1 = \text{cr}(H'_1) + \text{cr}(H'_2) + 1 \geq (\text{cr}(G'_1) - 1) + \text{cr}(G'_2) + 1 = \text{cr}(G'_1) + \text{cr}(G'_2),$$

esto es,

$$\text{cr}(G) \geq \text{cr}(G'_1) + \text{cr}(G'_2).$$

Caso 2. $|\mathcal{A}_{\mathcal{D}}| = 0$ siempre que \mathcal{D} sea un dibujo de G en el plano tal que $\text{cr}(G) = \text{cr}(\mathcal{D})$. Luego e' aparece sin cruces en todo dibujo óptimo de G y por tanto $\text{cr}(G) = \text{cr}(G - e')$. Sea $H = G - e'$. Como $\{e, e'\}$ es un 2-corte de aristas minimal para G entonces H es conexa y e es una arista de corte para H . Note que G_1 y G_2 son las dos componentes de $H - e$. Sea \mathcal{D} un dibujo de G en el plano tal que $\text{cr}(G) = \text{cr}(\mathcal{D})$. Como e' no aparece en ningún cruce de \mathcal{D} entonces $\text{cr}(\mathcal{D}) = \text{cr}(\mathcal{D}|_H)$, pero $\mathcal{D}' = \mathcal{D}|_H$ es un dibujo de H , luego \mathcal{D}' es un dibujo óptimo de H . De la elección de \mathcal{D}' es claro que $|\mathcal{D}'_{G_1, G_2}| = |\mathcal{D}_{G_1, G_2}|$. Por otra parte de la Proposición 6 se sigue que $\mathcal{D}'_{G_1, G_2} = \emptyset$ y consecuentemente $|\mathcal{D}_{G_1, G_2}| = 0$. Luego $\text{cr}(G) = |\mathcal{A}_{\mathcal{D}}| + |\mathcal{D}_{G_1, G_2}| = 0$. Esto, contradice la elección de G . En otras palabras, si $\text{cr}(G) > 0$ entonces es imposible que ocurra el *Caso 2*. ■

2.2 Sobre los 2-cortes de aristas

En esta sección probaremos algunos resultados que involucran 2-cortes de aristas. Estos resultados serán citados más tarde en las pruebas del Teorema 1 y el Corolario 2.

Recordemos que E_H^2 denota al conjunto de aristas de una gráfica H tales que $e \in E_H^2$ si y solo si e forma parte de algún 2-corte de aristas minimal de H , mientras que $C_e(H)$ denota al subconjunto de E_H^2 tal que $a \in C_e(H)$ si y solo si $\{e, a\}$ es un 2-corte de aristas minimal de H ó $a = e$. En este contexto tenemos los siguientes tres resultados.

Proposición 9 Si $a, b \in C_e(H)$ entonces $a \in C_b(H)$.

Demostración. Si $a = b$ entonces la afirmación se sigue trivialmente. Asumamos pues que $a \neq b$. Sean A_1 y A_2 las dos componentes de $H \setminus \{a, e\}$. Para $i = 1, 2$ supongamos que a_i y e_i son los extremos de a y e en A_i respectivamente. Pero $b \in H \setminus e$ y $a \neq b$, luego $b \in A_1$ ó $b \in A_2$. Sin pérdida de generalidad asumamos que $b \in A_1$. De la hipótesis de que $\{b, e\}$ es un 2-corte de aristas de H es fácil deducir que b es una arista de corte para A_1 . Sean $A_{1,1}$ y $A_{1,2}$ las dos componentes de $A_1 \setminus b$. La minimalidad de $\{b, e\}$ implica que si $a_1 \in A_{1,1}$ entonces $e_1 \in A_{1,2}$ o bien, si $a_1 \in A_{1,2}$

entonces $e_1 \in A_{1,1}$. Sin pérdida de generalidad supongamos que $a_1 \in A_{1,1}$ y $e_1 \in A_{1,2}$. Por otra parte, es claro que si cada $a_1 - a_2$ camino de H contiene a alguna de a o b entonces $\{a, b\}$ es un 2-corte de aristas de H . Llegaremos a una contradicción por asumir que existe un $a_1 - a_2$ camino, digamos P contenido en $H \setminus \{a, b\}$. Como e es una arista de corte para $H \setminus a$ y además $a_1 \in A_1$ y $a_2 \in A_2$, entonces cada $a_1 - a_2$ camino en $H \setminus a$ contiene a e , en particular $e \in P$. Es fácil ver que si P_1 y P_2 son los subcaminos de P cuyos extremos son a_1, e_1 y a_1, e_2 respectivamente, entonces P_1 está contenido en P_2 . Esto implica que $e \notin P_1$ y por tanto P_1 es un $a_1 - e_1$ camino contenido en A_1 , pero $a_1 \in A_{1,1}$ y $e_1 \in A_{1,2}$ luego $b \in P_1$ y como consecuencia obtenemos $b \in P$ una contradicción. Por otra parte, la minimalidad de $\{a, e\}$ implica que a no es una arista de corte de H , asimismo, la minimalidad de $\{b, e\}$ implica que b no es una arista de corte de H , luego el 2-corte $\{a, b\}$ es minimal y por lo tanto $a \in C_b(H)$. ■

Proposición 10 Sea G una gráfica 2-arista-conexa con grado mínimo al menos 3. Si e es una arista de G tal que $e \in E_G^2$ y G_1 es una componente de $G \setminus C_e(G)$ entonces G_1 es 2-arista-conexa y existen exactamente 2 aristas de $C_e(G)$ incidentes con G_1 .

Demostración. Primero probaremos que existen exactamente 2 aristas de $C_e(G)$ incidentes con G_1 . Sea $G_2 = G \setminus G_1$. De la definición de G_1 es obvio que toda arista de G que tiene un extremo en G_1 y el otro en G_2 es un elemento de $C_e(G)$, llamaremos E_{G_1} a tal subconjunto de $C_e(G)$. Como G es 2-arista-conexa entonces $|E_{G_1}| \geq 2$. Obtendremos una contradicción por asumir que E_{G_1} tiene al menos 3 elementos. Sean b, d y f elementos distintos de E_{G_1} . Para $x \in \{b, d, f\}$ supongamos que x_1 y x_2 son los extremos de la arista x , más aún, asumamos que $x_1 \in G_1$.

Como $b, d \in C_e(G)$ entonces por la Proposición 9 tenemos que $b \in C_d(G)$, esto implica que $\{b, d\}$ es un 2-corte de aristas para G , y por tanto todo $b_1 - b_2$ camino en G contiene a b o d . Por otra parte, es evidente que tanto G_1 como G_2 son conexas, más aún, ninguna de ellas contiene aristas de E_{G_1} , luego para $j = 1, 2$ existe un camino Q_j contenido en G_j con extremos en b_j y f_j . Pero $Q_1 \cup f \cup Q_2$ es un $b_1 - b_2$ camino de G que no contiene a ninguna de b o d , esto contradice el hecho de que $\{b, d\}$ es un 2-corte de aristas para G . De esta manera queda probado que $|E_{G_1}| = 2$. Supongamos que $E_{G_1} = \{a, a'\}$.

Enseguida verificamos que G_1 es 2-arista-conexa. Como G es 2-arista-conexa entonces todo 2-corte de aristas de G es minimal. No es difícil ver que si h es una arista de corte en G_1 entonces $\{a, h\}$ es un 2-corte de aristas para G y por tanto $h \in C_a(G)$, pero por otra parte ya teníamos que $a \in C_e(G)$ o bien $e \in C_a(G)$, luego de la Proposición 9 se sigue que $h \in C_e(G)$, lo cual contradice al hecho de que $C_e(G) \cap G_1 = \emptyset$. Tal contradicción concluye con la prueba de que G_1 es 2-arista-conexa. ■

Corolario 11 Si G, e y G_1 son como en la Proposición 10 y $a \in E_G^2 \cap E(G_1)$ entonces $C_a(G) \subset E(G_1)$.

2.3 Prueba del Teorema 1

Finalmente, nos encontramos en condiciones de probar el resultado más importante de este capítulo.

Demostración del Teorema 1. Como G es conexa y crítica en cruces entonces G es 2-arista-conexa y por tanto todo 2-corte de aristas en G es minimal. Sea j un entero tal que $1 \leq j \leq n$. Asumamos que $\{u_j u'_j, v_j v'_j\}$ es el 2-corte de aristas de G que separa a G_j de $H_j = G \setminus G_j$ garantizado por la Proposición 10. Asumamos que $u'_j, v'_j \in V(H_j)$. Sea H'_j la gráfica que se obtiene al añadir a H_j una arista con extremos u'_j, v'_j .

Sea a una arista arbitraria de G_j . De la Proposición 10 sabemos que G_j es 2-arista conexa, luego $G_j \setminus a$ es conexa y por tanto el 2-corte de aristas $\{u_j u'_j, v_j v'_j\}$ conserva su condición de minimalidad si se le considera como un 2-corte de $G \setminus a$, este hecho garantiza que tanto G como $G \setminus a$ satisfacen los requerimientos del Lemma 8. Aplicando el Lemma 8 sobre G y $G \setminus a$, y considerando que G es crítica en cruces obtenemos

$$\text{cr}(G'_j \setminus a) + \text{cr}(H'_j) = \text{cr}(G \setminus a) < \text{cr}(G) = \text{cr}(G'_j) + \text{cr}(H'_j),$$

y en consecuencia

$$\text{cr}(G'_j \setminus a) < \text{cr}(G'_j). \quad (2.1)$$

Ahora, puede ocurrir sólo uno de los siguientes dos casos. En un primer caso tenemos que $\text{cr}(G'_j \setminus g_j) < \text{cr}(G'_j)$ y por lo tanto $\text{cr}(G'_j \setminus e) < \text{cr}(G'_j)$ para toda $e \in E(G'_j)$. En el segundo caso tenemos que $\text{cr}(G'_j \setminus g_j) = \text{cr}(G'_j)$. Ahora, como $G'_j \setminus g_j = G_j$ entonces $\text{cr}(G'_j \setminus g_j) = \text{cr}(G_j)$ y por lo tanto $\text{cr}(G'_j) = \text{cr}(G_j)$. Por otra parte, como $G_j \setminus a$ es una subgráfica de $G'_j \setminus a$ entonces $\text{cr}(G_j \setminus a) \leq \text{cr}(G'_j \setminus a)$. Combinando las últimas dos relaciones con (2.1) obtenemos que $\text{cr}(G_j \setminus a) \leq \text{cr}(G'_j \setminus a) < \text{cr}(G'_j) = \text{cr}(G_j)$ y por lo tanto $\text{cr}(G_j \setminus e) < \text{cr}(G_j)$ para toda $e \in E(G_j)$. ■

2.4 Prueba del Corolario 2

Nos apoyaremos en el siguiente lema para probar el Corolario 2.

Lema 12 Sea G una gráfica conexa crítica en cruces en el plano con grado mínimo al menos 3. Supongamos que e es una aristas de G tal que $e \in E_G^2$. Sean G_1, G_2, \dots, G_n las componentes de $G \setminus C_e(G)$. Para $i = 1, 2, \dots, n$ sean u_i y v_i los extremos en G_i del 2-corte de aristas que separa a G_i de $G \setminus G_i$ garantizado por la Proposición 10. Sea G'_i la gráfica que resulta de añadir a G_i una arista g_i con extremos u_i, v_i . Entonces

$$(E_G^2 \setminus C_e(G)) \subset (E_{G'_1}^2 \cup E_{G'_2}^2 \cup \dots \cup E_{G'_n}^2).$$

Demostración. Si $E_G^2 \setminus C_e(G) = \emptyset$ no hay nada que probar. Asumiremos pues que $E_G^2 \setminus C_e(G)$ no es vacío. Sea a una arista arbitraria de $E_G^2 \setminus C_e(G)$. De la construcción de G'_1, G'_2, \dots, G'_n es obvio que $a \in E(G'_1) \cup E(G'_2) \cup \dots \cup E(G'_n)$, más aún, las gráficas G'_1, G'_2, \dots, G'_n son ajenas por pares, luego a está contenida en sólo una de ellas. Sin pérdida de generalidad asumamos que $a \in G'_j$ para algún $j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Como $a \in E_G^2$ entonces G contiene al menos a una arista b distinta de a tal que a y b son un 2-corte de aristas para G . Por el Corolario 11 sabemos que $C_a(G) \subset G_j$, luego $b \in G'_j$ ya que $b \in C_a(G)$ y $G_j \subset G'_j$.

Enseguida probaremos que a y b conforman un 2-corte para G'_j . Supongamos que no. Luego si a_1 y a_2 son los extremos de a entonces $G'_j \setminus \{a, b\}$ contiene un camino P con extremos a_1 y a_2 . Como el par a, b es un 2-corte para G y G_j es una subgráfica de G entonces $g_j \in P$. Denotemos por P_1 y P_2 a las dos componentes de $P \setminus g_j$. Por la Proposición 10 sabemos que existen 2 aristas en G , digamos f, f' que separan a G_j de $G \setminus G_j$. Evidentemente los extremos de f y f' en G_j son u_j y v_j . Asumamos que u'_j y v'_j son los extremos de f y f' en $G \setminus G_j$. Como $G \setminus G_j$ es conexa entonces $G \setminus G_j$ contiene un camino Q con extremos u'_j y v'_j . Luego $P' = P_1 \cup Q \cup P_2$ es un camino en $G \setminus \{a, b\}$ con extremos a_1 y a_2 . La existencia de P' implica que $\{a, b\}$ no es un 2-corte para G , esta es la contradicción deseada. Por la Proposición 9, G_j es 2-arista-conexa, luego G'_j es 2-arista-conexa y por lo tanto el par a, b es un 2-corte minimal para G'_j y así $a \in E_{G'_j}^2$. ■

El siguiente resultado es uno de los más importantes de esta sección, ya que establece una cota superior para el cardinal de E_G^2 cuando G es una gráfica de grado mínimo al menos 3 y crítica en cruces en el plano. Más adelante exhibiremos una familia de gráficas, la cual, prueba que dicho resultado está asintóticamente dentro de un factor de 2/3 de la solución óptima.

Demostración del Corolario 2. Si $E_G^2 = \emptyset$ el problema se sigue trivialmente. Por otra parte no es difícil ver que si $cr(G) = 1$ entonces $G \in \{K_5, K_{3,3}\}$, en tal caso es evidente que $E_G^2 = \emptyset$. Asumiremos pues que $cr(G) \geq 2$ y $E_G^2 \neq \emptyset$, y procederemos por inducción sobre $cr(G)$.

La prueba para el caso base $cr(G) = 2$ se puede deducir fácilmente a partir del Teorema 1 y el Lema 12. Ahora, supongamos que la afirmación es válida para cada entero positivo s tal que

$s \leq t - 1$, donde $t \geq 3$, y consideremos el caso $\text{cr}(G) = t$.

Sea e una arista de G tal que $e \in E_G^2$ y G_1, G_2, \dots, G_n las componentes de $G \setminus C_e(G)$. Evidentemente $|C_e(G)| = n$. Para $i = 1, 2, \dots, n$ supongamos que u_i y v_i son los extremos en G_i del 2-corte de aristas que separa a G_i de $G \setminus G_i$, garantizado por la Proposición 10. Sea G'_i la gráfica que resulta de añadir a G_i una arista con extremos u_i, v_i . Por el Teorema 1 sabemos que al menos una de G_i o G'_i es crítica en cruces. Si G'_i es crítica en cruces entonces $H_i = G'_i$. En el otro caso $H_i = G_i$. Como G es crítica en cruces entonces existe al menos un $r \in \{1, 2, \dots, n\}$ tal que $H_r = G'_r$. Por comodidad asumiremos que $r = 1$ aunque ello implique reetiquetar las componentes de $G \setminus C_e(G)$. La única posibilidad que existe de que H_i contenga vértices de grado 2 se da cuando $H_i = G_i$, más aún, en tal caso los únicos vértices que pueden tener grado 2 son u_i y v_i . Si ninguno de u_i y v_i tiene grado 2 en H_i , entonces $H'_i = H_i$. Si por el contrario H_i contiene vértices de grado 2 entonces definimos a H'_i como sigue: Si x es un vértice de grado 2 en H_i , entonces denotaremos por w_x y z_x a sus vértices adyacentes. Como H_i es crítica en cruces entonces $w_x \neq z_x$ y por tanto al menos uno de w_x o z_x está en $V(H_i) \setminus \{u_i, v_i\}$. Sin pérdida de generalidad asumamos que w_x es dicho vértice. H'_i será la gráfica que resulte de contraer en H_i a cada arista xw_x .

De la construcción de H'_i es fácil deducir que $|E_{H'_i}^2| \leq |E_{H_i}^2| + 2$, más aún, H'_i es conexa con grado mínimo al menos 3 y crítica en cruces en el plano, además de verificar que $\text{cr}(H'_i) = \text{cr}(H_i)$. Ahora bien, como $\text{cr}(H'_i) = \text{cr}(G'_i)$ entonces

$$\sum_{j=1}^n \text{cr}(H'_j) = \sum_{j=1}^n \text{cr}(G'_j).$$

Aplicando la hipótesis de inducción sobre H'_i obtenemos que $|E_{H'_i}^2| \leq 3\text{cr}(H'_i) - 4$ y en consecuencia

$$\sum_{j=1}^n |E_{H'_j}^2| \leq 3 \sum_{j=1}^n \text{cr}(G'_j) - 4n.$$

Como H_1, H_2, \dots, H_n son disjuntos por pares, $|C_e(G)| = n$, y por el Lema 12 $E_G^2 \setminus C_e(G) \subset \bigcup_{j=1}^n E_{H_j}^2$, entonces

$$|E_G^2| - n = |E_G^2 \setminus C_e(G)| \leq \left| \bigcup_{j=1}^n E_{H_j}^2 \right| = \sum_{j=1}^n |E_{H_j}^2|.$$

Pero $|E_{H_1}^2| = |E_{H'_1}^2|$ ya que $H_1 = H'_1$ y además $|E_{H_m}^2| \leq |E_{H'_m}^2| + 2$ para $m = 2, 3, \dots, n$. Lo anterior implica que

$$\sum_{j=1}^n |E_{H_j}^2| \leq |E_{H_1}^2| + \sum_{j=2}^n (|E_{H_j}^2| + 2) = \sum_{j=1}^n |E_{H_j}^2| + 2(n-1).$$

Luego

$$|E_G^2| - n \leq \sum_{j=1}^n |E_{H_j}^2| + 2(n-1) \leq \left(3 \sum_{j=1}^n \text{cr}(G'_j) - 4n \right) + 2(n-1) = 3 \sum_{j=1}^n \text{cr}(G'_j) - 2n - 2.$$

Por el Lema 8, $\text{cr}(G) = \sum_{j=1}^n \text{cr}(G'_j)$ y por lo tanto $|E_G^2| - n \leq 3\text{cr}(G) - 2n - 2$, o equivalentemente $|E_G^2| \leq 3\text{cr}(G) - n - 2$, pero $n \geq 2$, luego $|E_G^2| \leq 3\text{cr}(G) - 4$. ■

A continuación exhibiremos una familia de gráficas que muestra que la cota enunciada en el Corolario 2 no puede mejorarse en un factor mayor que $2/3$.

Para n entero positivo sea H_n la gráfica crítica en cruces en el plano con grado mínimo al menos 3 construida a partir de n -copias de $K_{3,3}$, como se muestra en la Figura 3. Por el Lema 8 sabemos que $\text{cr}(H_n) = n$ y por otra parte, de la Figura 3 es claro que $|E_{H_n}^2| = 2n - 2$. Por lo tanto $|E_{H_n}^2| = 2\text{cr}(H_n) - 2$. La existencia de esta familia de gráficas implica que nuestra cota está asintóticamente dentro de un factor de $2/3$ de la solución óptima.

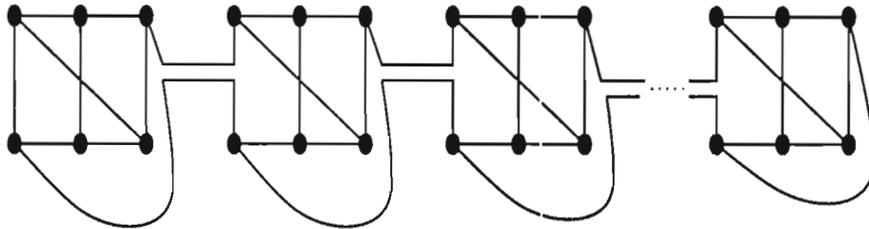


Figura 3.

2.5 Prueba del Corolario 3

Como podemos ver en el Teorema 1 se ha propuesto una manera de partir a una gráfica que tiene 2-cortes de aristas y es conexa con grado mínimo al menos 3 y crítica en cruces en el plano en varias subgráficas disjuntas por pares, a saber G_1, G_2, \dots, G_n (ver Teorema 1). De hecho, el Teorema 1 concluye que si G_j para algún $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, no es crítica en cruces en el plano entonces basta agregar a G_j la arista g_j para que $G'_j = G_j \cup g_j$ sea crítica en cruces en el plano. El costo de añadir

g_j a G_j consiste únicamente en que G'_j puede pasar a ser una menor de G y no una subgráfica como lo era antes de la adición de g_i . Nótese que en el caso de que G_j no sea crítica en cruces en el plano entonces G'_j es una menor de G que posee las mismas características de G , esto es G'_j es conexa crítica en cruces en el plano con grado mínimo al menos 3. En el caso contrario (cuando G_j es crítica en cruces en el plano y G'_j no lo es), existe la posibilidad de que G_j no tenga grado mínimo al menos 3 y por lo tanto G_j no puede tener las mismas propiedades que G . A continuación proponemos un algoritmo basado en el Teorema 1, el cual nos permitirá superar esta dificultad. La prueba del Corolario 3 está basada en este algoritmo.

En lo sucesivo, nos referiremos a tal algoritmo como el *algoritmo partición*.

El algoritmo partición tendrá como entrada a una gráfica G y una arista e de G tales que $e \in E_G^2$ y G es conexa crítica en cruces en el plano con grado mínimo al menos 3. La salida será una colección de gráficas, digamos $\mathcal{G} = \{M_1, M_2, \dots, M_n\}$ tal que: 1) \mathcal{G} contiene al menos 2 elementos, 2) cada par de elementos de \mathcal{G} son disjuntos entre sí, 3) cada elemento de \mathcal{G} es una menor de G , 4) cada gráfica en \mathcal{G} es conexa crítica en cruces en el plano y de grado mínimo al menos 3, y por último 5) $cr(G) = \sum_{j=1}^n cr(M_j)$.

Descripción del algoritmo partición.

Asumamos pues que G es una gráfica conexa crítica en cruces en el plano con grado mínimo al menos 3 y que $e \in E_G^2$. Sean $G_1^1, G_2^1, \dots, G_n^1$ las componentes de $G \setminus C_e(G)$. Evidentemente $2 \leq |C_e(G)| = n$. Para $i = 1, 2, \dots, n$ sean u_i y v_i los extremos en G_i^1 del 2-corte de aristas que separa a G_i^1 de $G \setminus G_i^1$ garantizado por la Proposición 10. Sea G_i^2 la gráfica que resulta de añadir a G_i^1 una arista con extremos u_i, v_i . Por el Teorema 1 sabemos que al menos una de G_i^1 o G_i^2 es crítica en cruces en el plano. Note que ambas G_i^1 y G_i^2 son menores de G . Sea j un elemento arbitrario del conjunto $\{1, 2, \dots, n\}$.

Paso 1. Si G_j^2 es crítica en cruces entonces $G_j^3 = G_j^2$. En el otro caso $G_j^3 = G_j^1$.

Paso 2. Si G_j^3 tiene grado mínimo al menos 3 entonces $G_j^4 = G_j^3$. En el otro caso los únicos vértices de G_j^3 que pueden tener grado menor que 3 son u_j y v_j , más aún, de la construcción de G_j^3 es fácil ver que tanto u_j como v_j tienen grado al menos 2. G_j^4 será la gráfica que resulte de suprimir en G_j^3 a cada vértice de grado 2.

No es difícil verificar que $G_1^4, G_2^4, \dots, G_n^4$ es la colección de gráficas requeridas. En lo sucesivo diremos que $G_1^4, G_2^4, \dots, G_n^4$ son las *menores críticas* de G inducidas por e .

Un comentario sobre notación. Si \mathcal{H} es una familia finita de gráficas entonces denotaremos por

$cr(\mathcal{H})$ la suma de los números de cruce en el plano de los elementos de \mathcal{H} , en símbolos $cr(\mathcal{H}) = \sum_{H \in \mathcal{H}} cr(H)$.

Demostración del Corolario 3. Sea $\mathcal{G}_0 = \{G\}$. Para i entero positivo definimos a la colección de gráficas \mathcal{G}_i como sigue: Si cada una de las gráficas contenidas en la colección \mathcal{G}_{i-1} es 3-arista-conexa entonces $\mathcal{G}_i = \mathcal{G}_{i-1}$. En el otro caso \mathcal{G}_{i-1} contiene al menos una gráfica H_{i-1} la cual contiene una arista e_{i-1} tal que $e_{i-1} \in E_{H_{i-1}}^2$. Nótese que en el caso $i = 1$, $H_0 = G$. Enseguida aplíquese el algoritmo partición sobre el par H_{i-1}, e_{i-1} . Si \mathcal{H}_{i-1} es la familia de gráficas cuyos elementos son las menores críticas de H_{i-1} inducidas por e_{i-1} entonces $\mathcal{G}_i = (\mathcal{G}_{i-1} \setminus H_{i-1}) \cup \mathcal{H}_{i-1}$.

Afirmación 1 Si r es un entero no negativo entonces $cr(\mathcal{G}_r) = cr(\mathcal{G}_{r+1})$.

Demostración. Si $\mathcal{G}_r = \mathcal{G}_{r+1}$ no hay nada que probar. Asumiremos pues que $\mathcal{G}_r \neq \mathcal{G}_{r+1}$. Claramente, basta probar que $cr(\mathcal{G}_{r+1} \setminus \mathcal{G}_r) = cr(\mathcal{G}_r \setminus \mathcal{G}_{r+1})$. Pero $\mathcal{G}_{r+1} \setminus \mathcal{G}_r = \mathcal{H}_r$ mientras que $\mathcal{G}_r \setminus \mathcal{G}_{r+1} = \{H_r\}$. Por otra parte, la última condición que satisface el algoritmo partición es justamente que $cr(H_r) = cr(\mathcal{H}_r)$, este hecho concluye con la prueba de la Afirmación 1. ■

Una consecuencia inmediata de la Afirmación 1 es que para todo par de enteros no negativos r_1 y r_2 se satisface que $cr(\mathcal{G}_{r_1}) = cr(\mathcal{G}_{r_2})$. Lo anterior es cierto en particular para $r_1 = 0$ y por lo tanto $cr(\mathcal{G}_0) = cr(\mathcal{G}_{r_2})$, pero $cr(\mathcal{G}_0) = cr(G)$, luego $cr(G) = cr(\mathcal{G}_{r_2})$.

A continuación probaremos que para algún entero no negativo $p < cr(G)$ se verifica que $\mathcal{G}_p = \mathcal{G}_{p+1}$. Supongamos que no. Luego, para $q = cr(G)$ se satisface que $\mathcal{G}_{q-1} \neq \mathcal{G}_q$. Por otra parte, de la construcción de \mathcal{G}_i a partir de \mathcal{G}_{i-1} es fácil ver que $|\mathcal{G}_i| > |\mathcal{G}_{i-1}|$ siempre que $\mathcal{G}_{i-1} \neq \mathcal{G}_i$. Luego \mathcal{G}_q tiene al menos $q + 1$ elementos. Como cada uno de los elementos de \mathcal{G}_q es crítica en cruces en el plano entonces cada elemento de \mathcal{G}_q tiene número de cruce al menos 1, esto implica que $cr(\mathcal{G}_q) \geq q + 1 > cr(G)$ lo cual contradice a la Afirmación 1.

Sea p_0 el menor entero no negativo para el cual se satisface que $\mathcal{G}_{p_0} = \mathcal{G}_{p_0+1}$. De la construcción de \mathcal{G}_{p_0} es fácil deducir que \mathcal{G}_{p_0} es la colección de gráficas requerida, es decir $\mathcal{M}_G = \mathcal{G}_{p_0}$. ■

El resultado que sigue, es una consecuencia del Corolario 3

Corolario 13 Si G y M_1, M_2, \dots, M_n son como en el Corolario 3 entonces $cr(G) \geq n$.

Demostración. Dado que cada una de M_1, M_2, \dots, M_n es una gráfica crítica en cruces entonces $cr(M_j) \geq 1$ para cada $j = 1, 2, \dots, n$. Esto implica que $\sum_{j=1}^n cr(M_j) \geq n$, pero por el Corolario 3 sabemos que $cr(G) = \sum_{j=1}^n cr(M_j)$, luego $cr(G) \geq n$. ■

Capítulo 3

Número de cruce de gráficas críticas con grado máximo acotado:

Demostración del Teorema 4

Las gráficas conexas k -críticas en el plano que tienen un número grande de vértices (y aristas, en consecuencia) comparado con k (como todas las que nos interesan en este capítulo) tienen una estructura muy parecida a la de las gráficas planares. Esta similitud se debe a que este tipo de gráficas k -críticas contienen un subconjunto S de a lo más k aristas tal que la eliminación de dicho conjunto S de la gráfica k -crítica da como resultado una subgráfica planar. Esta subgráfica planar es muy parecida a la gráfica k -crítica que la contiene, ya que por construcción, la diferencia entre ambas es de sólo unas “pocas” aristas.

Nuestro primer paso hacia la prueba de Teorema 4 es demostrar que las gráficas críticas en cruces en el plano con grado mínimo al menos 3 tienen una cantidad relativamente grande de ciclos de longitud pequeña. En esta tesis diremos que un ciclo tiene longitud *pequeña* si su longitud es a lo más 20.

Para alcanzar esta meta, dedicaremos la primera sección de este capítulo a probar algunos resultados sobre ciclos de longitud pequeña en gráficas planares. Más adelante, usaremos la similitud que existe entre las gráficas k -críticas y las gráficas planares para extender estos resultados a la familia de gráficas que nos interesa.

3.1 Ciclos de longitud pequeña en gráficas planares

El argumento que usaremos para probar nuestro próximo resultado fué motivado por un argumento parecido que B. Richter y C. Thomassen usaron para probar uno de sus Teoremas en [16].

Teorema 14 Sea G una gráfica simple conexa planar con grado mínimo al menos 3 y $r \geq 0$ un entero. Sea \mathcal{F} el conjunto de caras de algún encaje de G en el plano. Si \mathcal{A} es el subconjunto de caras de \mathcal{F} cuyas fronteras tienen longitud a lo más $r + 5$ entonces $|\mathcal{A}| \geq \frac{r|\mathcal{F}|+12}{r+3}$.

Demostración. Para cada cara F de \mathcal{F} la suma $w(F) = \sum_{v \sim F} 1/d(v)$, es conocida como el peso de F , donde $d(v)$ es el grado del vértice v y $v \sim F$ significa que v es incidente con F . (Un vértice aparece en la suma $w(F)$ tantas veces como la frontera de F pasa por v .) Como G es simple y tiene grado mínimo al menos 3 entonces $l(F) \geq 3$ y para cada cara F , $w(F) \leq l(F)/3$ respectivamente, donde $l(F)$ es la longitud de la frontera de F .

Es fácil ver que $p = \sum_{\mathcal{F}} w(F)$ es el número de vértices de G . ($\sum_{\mathcal{F}}$ significa que la suma se hace sobre todas las caras de \mathcal{F} .) Asimismo, si q es el número de aristas de G entonces $2q = \sum_{\mathcal{F}} l(F)$.

De las últimas 2 ecuaciones y la fórmula de Euler $2 = p - q + |\mathcal{F}|$ se sigue que $2 = \frac{1}{2} \sum_{\mathcal{F}} \{2w(F) - l(F) + 2\}$. Como $w(F) \leq l(F)/3$ entonces

$$12 \leq \sum_{\mathcal{F}} \{-l(F) + 6\} = \sum_{\mathcal{A}} \{-l(F) + 6\} + \sum_{\mathcal{F}-\mathcal{A}} \{-l(F) + 6\}.$$

Ahora bien, puesto que $3 \leq l(F)$ entonces $-l(F) + 6 \leq 3$ y consecuentemente $\sum_{\mathcal{A}} \{-l(F) + 6\} \leq 3|\mathcal{A}|$. Por otra parte si $F \in \mathcal{F} - \mathcal{A}$ entonces $l(F) - 6 \geq r$, o bien $-l(F) + 6 \leq -r$ y por lo tanto $\sum_{\mathcal{F}-\mathcal{A}} \{-l(F) + 6\} \leq -r(|\mathcal{F}| - |\mathcal{A}|)$. Luego

$$12 \leq 3|\mathcal{A}| - r(|\mathcal{F}| - |\mathcal{A}|).$$

El resultado deseado se obtiene al despejar $|\mathcal{A}|$ de la desigualdad anterior. ■

En el Teorema anterior, note que la frontera de cada elemento de \mathcal{A} nos provee de un ciclo de longitud a lo más $r + 5$.

El próximo resultado es parecido al anterior. La única variante en este caso, es que no todos los vértices de G tienen grado mínimo al menos 3.

Corolario 15 Sea G una gráfica simple conexa planar. Sea \mathcal{F} el conjunto de caras de algún encaje de G en el plano y \mathcal{A} el subconjunto de caras en \mathcal{F} cuyas fronteras tienen longitud a lo más 20. Si W es un subconjunto de $V(G)$ tal que $v \in W$ si y solo si $d(v) < 3$ entonces $|\mathcal{A}| \geq (5/6)|\mathcal{F}| - 4|W|$.

Demostración. Sea \mathcal{D} el encaje de G en el plano cuyo conjunto de caras es \mathcal{F} . Como G es conexa entonces $d(v) \geq 1$ para todo $v \in V(G)$. Por otra parte, es fácil ver que si $u \in V(G)$ es tal que $d(u) < 3$ entonces siempre podemos añadir a \mathcal{D} un conjunto \mathcal{E}_u de $3 - d(u)$ aristas tales que cada elemento de \mathcal{E}_u tiene un extremo en u y el otro en $V(G) \setminus \{u\}$. Lo anterior es posible sin producir nuevos cruces y manteniendo la simplicidad, es decir $\mathcal{D} \cup \mathcal{E}_u$ es un dibujo sin cruces y la gráfica inducida por $\mathcal{D} \cup \mathcal{E}_u$ es simple. De esta manera podemos construir un dibujo sin cruces, digamos \mathcal{D}' a partir de \mathcal{D} tal que la gráfica G' inducida por \mathcal{D}' satisface las siguientes propiedades: a) $V(G) = V(G')$, b) G es una subgráfica de G' , c) G' es simple y tiene grado mínimo al menos 3, d) $|E(G') \setminus E(G)| \leq 2|W|$ y por último e) ninguna subgráfica propia de G' satisface simultáneamente a), b), c) y d).

Si \mathcal{F}' es la colección de caras de \mathcal{D}' y \mathcal{A}' es el subconjunto de caras en \mathcal{F}' cuyas fronteras tienen longitud a lo más 20 entonces por el Teorema 14 tenemos que $|\mathcal{A}'| \geq \frac{15|\mathcal{F}'|+12}{18} > (5/6)|\mathcal{F}'|$.

Como cada arista de G' está en la frontera de a lo más 2 caras de \mathcal{F}' entonces la eliminación de cada arista de $E = E(G') \setminus E(G)$ disminuye a lo más en 2 a $|\mathcal{A}'|$. Pero $|E| \leq 2|W|$, luego \mathcal{A} tiene al menos $|\mathcal{A}'| - 2(2|W|) = |\mathcal{A}'| - 4|W|$ elementos. Esto es, $|\mathcal{A}| \geq |\mathcal{A}'| - 4|W| \geq (5/6)|\mathcal{F}'| - 4|W|$. El resultado deseado se sigue de la desigualdad anterior y el hecho de que $|\mathcal{F}'| \geq |\mathcal{F}|$. ■

3.2 Conjuntos independientes máximos en gráficas planares

En esta sección deduciremos una consecuencia a partir de uno de los resultados obtenidos en [11]. Esta consecuencia será utilizada en la prueba del Teorema 4.

Iniciaremos esta sección enunciando un resultado elemental de teoría de gráficas. ■

Proposición 16 Si G es una gráfica conexa planar sin lazos y G' es una subgráfica simple maximal de G entonces $\alpha(G) = \alpha(G')$.

El resultado obtenido en [11] que usaremos en esta tesis es el siguiente (la prueba que exhibimos aquí, es una síntesis de la prueba original):

Teorema 17 Sea G una gráfica simple conexa planar con grado mínimo al menos 3. Si U es un conjunto independiente de vértices en G entonces $|U| \leq \frac{2|V(G)|-4}{3}$.

Demostración. Sea $U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ y $N(u_i) = \{w_{i,1}, w_{i,2}, \dots, w_{i,p_i}\}$ es el conjunto de vértices adyacentes a u_i en G , donde $i = 1, 2, \dots, n$. Sin pérdida de generalidad asumamos que los vértices $w_{i,1}, w_{i,2}, \dots, w_{i,p_i}$ aparecen en ese orden cíclico en algún encaje \mathcal{F} de G en el plano. No es difícil ver que $G' = G \cup C_1 \cup \dots \cup C_n$ es una gráfica simple conexa planar, donde C_i denota al ciclo $w_{i,1}w_{i,2}\dots w_{i,p_i}w_{i,1}$. Sea G'' la gráfica que se obtiene de G' al eliminar a U y a toda arista incidente con algún vértice de U . Claramente, $|U| \leq |F(G'')|$. De la construcción de G'' es fácil ver que esta gráfica es simple conexa y planar. De las características recién mencionadas de G'' se sigue que $3|F(G'')| \leq 2|E(G'')|$. Sustituyendo la desigualdad anterior en la fórmula de Euler $|V(G'')| - |E(G'')| + |F(G'')| = 2$ obtenemos que $|F(G'')| \leq 2|V(G'')| - 4$. Pero $|V(G'')| = |V(G)| - |U|$, luego $|U| \leq 2|V(G)| - 2|U| - 4$ y por lo tanto $|U| \leq \frac{2|V(G)|-4}{3}$. ■

El corolario que sigue, será utilizado en la prueba del Teorema 4.

Corolario 18 Si G es una gráfica conexa planar tal que $|N(v) \setminus \{v\}| \geq 3$ para todo $v \in V(G)$ entonces $\alpha(G) \leq \frac{2|V(G)|-4}{3}$.

Demostración. Sea H una subgráfica simple maximal de G .

Dividiremos la prueba en 2 casos.

Caso 1. Si G no tiene lazos entonces por la Proposición 16 tenemos que $\alpha(G) = \alpha(H)$. Por otra parte el Teorema 17 garantiza que $\alpha(H) \leq (2|V(H)| - 4)/3$. Luego $\alpha(G) \leq (2|V(G)| - 4)/3$ ya que $V(H) = V(G)$.

Caso 2. G contiene lazos. Como ningún vértice de G que tenga lazos puede pertenecer a algún conjunto independiente de vértices en G entonces $\alpha(G) \leq \alpha(H)$. Por el Teorema 17 tenemos que $\alpha(H) \leq (2|V(H)| - 4)/3$ y por construcción de H es cierto que $V(H) = V(G)$, luego $\alpha(G) \leq \alpha(H) \leq (2|V(G)| - 4)/3$. ■

3.3 Prueba del Teorema 4

Finalmente nos encontramos en condiciones de probar el Teorema 4.

Demostración del Teorema 4. La estrategia que seguiremos para resolver este problema es la siguiente:

- (i) Primero probaremos que si G contiene una arista e y un par de ciclos C_1, C_2 tales que $E(C_1) \cap E(C_2) = \{e\}$ y además tanto C_1 como C_2 tienen longitud a lo más 20, entonces el resultado deseado se sigue fácilmente.
- (ii) Después, probaremos que efectivamente, G contiene una arista e y ciclos C_1 y C_2 que satisfacen los requerimientos citados en (i).

Demostración de (i). Como G es k -crítica entonces $cr(G - e) \leq k - 1$. Luego, existe un dibujo de $G - e$ en el plano con a lo más $k - 1$ cruces. Supongamos que u y w son los extremos de e . Para $i = 1, 2$ sea P_i el camino $C_i \setminus e$. En principio es posible que algunas aristas de P_i se crucen con otras aristas de P_i . Podemos considerar el dibujo de P_i como una gráfica sin cruces H_i con vértices de grado 2 y 4. Sea P'_i el camino más corto en H_i que une a u y w .

Dividimos el resto de la prueba de (i) en 2 casos.

Caso 1. P'_1 y P'_2 no se cruzan. En este caso, para cada $j \in \{1, 2\}$ habrá 2 formas de dibujar a e cerca de P'_j , una por cada lado. En total ésos 4 dibujos de e cruzando cada arista que no está en $P_1 \cup P_2$ incidente con los vértices internos de P_1 o P_2 ocasionan a lo más $36(m - 2)$ cruces ya que tanto P_1 como P_2 tienen a lo más 18 vértices internos y todo vértice de $P_1 \cup P_2$ tiene a lo más $m - 2$ aristas incidentes que no están en $P_1 \cup P_2$.

En principio es posible que los restantes $k - 1$ cruces de $G \setminus e$ crucen a $P'_1 \cup P'_2$. Con ésto y dado que P'_1 no se cruza con P'_2 entonces tenemos que los 4 dibujos de e cerca de P'_1 o P'_2 ocasionarán a lo más $2(k - 1)$ cruces. Esto arroja un dibujo de $G = (G \setminus e) \cup e$ con a lo más

$$\frac{36(m - 2) + 2(k - 1)}{4} + k - 1$$

cruces. Por lo tanto, $cr(G) \leq 1.5(k - 1) + 9(m - 2) < 1.5k + 18m - 38$.

Caso 2. P'_1 se intersecta con P'_2 . Podemos considerar el dibujo de $P'_1 \cup P'_2$ como una gráfica sin cruces H con vértices de grado 2 y 4. Luego, habrá exactamente 2 formas de dibujar a e cerca de H sin cruzar a H , una por cada lado. En total ésos 2 dibujos de e cruzando cada arista que no está en $P_1 \cup P_2$ incidente con los vértices internos de P_1 o P_2 ocasionan a lo más $36(m - 2)$ cruces ya que tanto P_1 como P_2 tienen a lo más 18 vértices internos y todo vértice de $P_1 \cup P_2$ tiene a lo más $m - 2$ aristas incidentes que no están en $P_1 \cup P_2$.

Como P'_1 se cruza al menos una vez con P'_2 y $G \setminus e$ tiene a lo más $k - 1$ cruces entonces los 2 dibujos de e cerca de H ocasionarán a lo más $k - 2$ cruces. Esto arroja un dibujo de $G = (G \setminus e) \cup e$

con a lo más

$$\frac{36(m-2) + (k-2)}{2} + k - 1$$

cruces. Por lo tanto, $\text{cr}(G) \leq 1.5k + 18m - 38$. Con ésto, queda probado (i).

Demostración de (ii). Primero, suprimase cualquier vértice v tal que $|N(v) \setminus \{v\}| = 2$. Ésto, no afecta al número de cruce de G ni a sus propiedades. Por lo tanto, podemos asumir que para todo vértice v en G se satisface que $|N(v) \setminus \{v\}| \geq 3$.

Si G tiene un conjunto con al menos 3 aristas paralelas, digamos f, g y h con extremos u y w entonces la arista g y los ciclos $C_1 = xfwgx$ y $C_2 = xhwgx$ satisfacen las propiedades requeridas por (i). Asumamos pues que todo conjunto de aristas paralelas en G tiene 2 elementos.

Observe que G tiene un conjunto S con a lo más k aristas tales que $G - S$ es planar. Sea G' una subgráfica simple maximal de G . Como $|N(v) \setminus \{v\}| \geq 3$ para todo $v \in V(G)$ entonces G' tiene grado mínimo al menos 3, más aún, $G' - S$ es planar. Sean H_1, H_2, \dots, H_n las componentes de $G' - S$. Sin pérdida de generalidad asumamos que H_1 es tal que $|V(H_1)| \geq |V(H_j)|$, donde $j = 2, 3, \dots, n$. Note que H_1 es una gráfica simple conexa planar con a lo más $2k$ vértices con grado menor que 3. Por el Corolario 15 tenemos que H_1 contiene al menos $(5/6)|F(H_1)| - 4(2k)$ caras de longitud a lo más 20. En lo sucesivo denotaremos por \mathcal{A} a tal conjunto de caras.

Sea H_1^* un dual plano de H_1 . De las características de H_1 y la definición de dualidad se sigue que H_1^* es una gráfica conexa planar con grado mínimo al menos 3. Aplicando el Corolario 18 sobre H_1^* tenemos que $\alpha(H_1^*) \leq (2|V(H_1^*)| - 4)/3$, esto implica que \mathcal{A} contiene un subconjunto \mathcal{A}' con al menos $(5/6)|F(H_1)| - 8k - (2|V(H_1^*)| - 4)/3$ elementos tales que si $f \in \mathcal{A}'$ entonces \mathcal{A}' contiene otro elemento distinto de f , digamos f' tal que las fronteras de f y f' tienen al menos una arista en común.

Como H_1^* es un dual plano de H_1 entonces $|F(H_1)| = |V(H_1^*)|$. Esto implica que $|\mathcal{A}'| \geq (5/6)|F(H_1)| - 8k - (2|F(H_1)| - 4)/3$ y por lo tanto $|\mathcal{A}'| \geq (1/6)|F(H_1)| - (8k + 4/3)$.

Por otra parte, por el Teorema 2 sabemos que E_G^2 tiene a lo más $3\text{cr}(G) - 4$ elementos. Pero $\text{cr}(G) \leq 2.5k + 16$ (ver [16]), luego $|E_G^2| \leq 3(2.5k + 16) - 4 = 7.5k + 44$. Como H_1 es una subgráfica de G , entonces H_1 contiene a lo más $7.5k + 44$ aristas de E_G^2 .

Ahora bien, si en H_1 se eliminan las aristas del conjunto $E(H) \cap E_G^2$ entonces la cardinalidad de \mathcal{A}' disminuirá en a lo más $40(7.5k + 44)$ unidades, ya que la eliminación de cualquier arista de H puede ocasionar la pérdida de a lo más 40 elementos de \mathcal{A}' . De lo anterior se sigue que si $(1/6)|F(H_1)| \geq 308k + 1762 > 8k + 4/3 + 40(7.5k + 44)$ entonces \mathcal{A}' contiene un par de elementos, digamos f y f' cuyas fronteras vistas como ciclos de G satisfacen con tener en común exactamente

una arista. Luego, basta verificar que $|F(H_1)| \geq 6(308k + 1762) = 1848k + 10572$.

No es difícil ver que el número de componentes de $G' - S$ es a lo más k . Esto implica que $|V(H_1)| \geq |V(G')|/k$. Por otro lado, como H_1 es conexa y contiene a lo más $2k$ vértices con grados menores que 3, entonces $|E(H_1)| \geq (3/2)|V(H_1)| - 4k$ o equivalentemente $-|E(H_1)| \leq -(3/2)|V(H_1)| + 4k$. Sustituyendo la desigualdad anterior en la fórmula de Euler $|V(H_1)| - |E(H_1)| + |F(H_1)| = 2$ obtenemos

$$-|V(H_1)|/2 + 4k + |F(H_1)| \geq 2,$$

o bien

$$|F(H_1)| \geq |V(H_1)|/2 + 2 - 4k. \quad (3.1)$$

Ahora, de la construcción de G' tenemos que $|V_3(G)| = |V(G')|$ y por hipótesis $|V_3(G)| \geq (3704k + 21140)k$, luego $|V(H_1)| \geq 3704k + 21140$, ya que $|V(H_1)| \geq |V_3(G)|/k$. Sustituyendo la desigualdad anterior en 3.1 obtenemos

$$|F(H_1)| \geq (3704k + 21140)/2 + 2 - 4k = 1848k + 10572,$$

el resultado deseado. ■

Capítulo 4

Árboles abarcadores de conjuntos de puntos multicoloreados en el plano:

Demostración del Teorema 5

Primero probaremos que el Teorema 5 para $k > 5$ se sigue fácilmente del caso $k = 5$. La prueba para el caso $k = 5$ se da en la siguiente sección.

4.1 Prueba del Teorema 5 para $k > 5$

A continuación probaremos que si el Teorema 5 se verifica para el caso $k = 5$, entonces también se verifica para $k > 5$.

Demostración del Teorema 5 para $k > 5$, asumiendo que es válido para $k = 5$. Sean $P_{r_1}, P_{r_2}, \dots, P_{r_5}$ cinco elementos distintos de $\{P_1, P_2, \dots, P_k\}$. Por hipótesis tenemos que el Teorema 5 se verifica para $k = 5$, luego existen al menos $(140s)/10 - 180/10 = 14s - 18$ cruces con ambas aristas en $T_{r_1} \cup T_{r_2} \cup \dots \cup T_{r_5}$.

Como existen $\binom{k}{5}$ maneras de seleccionar a $P_{r_1}, P_{r_2}, \dots, P_{r_5}$, entonces el número total de cruces sobre las aristas de T_0, T_1, \dots, T_{k-1} es al menos

$$\binom{k}{5} \frac{14s - 18}{\binom{k-2}{3}}$$

(dividimos por $\binom{k-2}{3}$) ya que, ésta, es la cantidad de veces que se sobrecuenta un cruce).

Una manipulación trivial demuestra que la expresión recién escrita es igual a $7sk(k-1)/10 - 9k(k-1)/10$, como queríamos. ■

4.2 Prueba del Teorema 5 para $k = 5$

Demostración del Teorema 5 para $k = 5$. Procederemos por inducción sobre s . La prueba para el caso base $s = 2$ es fácil.

Por tanto, asumiremos que el enunciado es verdadero para $s = t-1$, donde $t \geq 3$, y consideremos el caso $s = t$.

Un vértice de P_i es un i -vértice. Una arista de T_i es una i -arista.

Por brevedad denotaremos por G a $T_0 \cup T_1 \dots \cup T_4$. Note que si cada arista de G tiene al menos 6 cruces, entonces el número total de intersecciones en G es al menos $6(5(s-1))/2 > 14s - 18$. Por lo tanto, G tiene al menos una arista con a lo más 5 cruces.

Es fácil verificar que las consideraciones de conexidad (de los árboles T_i) implican que cada i -arista interseca al menos a una q -arista, donde $q = 0, \dots, i-1, i+1, \dots, 4$. Entonces, cada arista tiene al menos 4 cruces.

Reetiquetando los puntos de \mathcal{P} si es necesario (quizá en el orden inverso al orden cíclico de los puntos de \mathcal{P}), podemos asumir que alguna 0-arista e_0 tiene el menor número de cruces con respecto a las otras aristas de G , y, más aún, que los vértices incidentes con e_0 son p_0 y p_{j_0} , con $j_0 \geq 10$. Luego, e_0 tiene 4 o 5 cruces.

Sea E_0 el conjunto de aristas que interseca a e_0 y $E'_0 = E_0 \cup \{e_0\}$. Un cruce es *interno* si ambas aristas involucradas pertenecen a E'_0 . Un cruce será *externo* si no es interno pero involucra alguna arista de E'_0 . Un cruce es *bueno* si es interno o externo.

Un comentario sobre notación. Sean p_{r_1}, p_{r_2} vértices de \mathcal{P} tales que $0 \leq r_1 < r_2 \leq 5t-1$. Entonces el *segmento abierto* (p_{r_1}, p_{r_2}) es el (posiblemente vacío) conjunto $\{p_{r_1+1}, p_{r_1+2}, \dots, p_{r_2-1}\}$ mientras que el *segmento cerrado* $[p_{r_1}, p_{r_2}]$ es el conjunto $\{p_{r_1}, p_{r_1+1}, \dots, p_{r_2}\}$. Usaremos $[p_{r_2}, p_0]$ para referirnos a $\mathcal{P} \setminus (p_0, p_{r_2})$.

Dividimos el resto de la prueba en 2 casos.

Caso 1. e_0 tiene 5 cruces. Esto implica que toda arista en G tiene al menos 5 cruces. No es difícil ver que si T_m tiene aristas que se cruzan entre sí, para algún $m \in S = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ entonces T_m puede ser modificado de tal manera que ningún par de aristas de T_m se crucen, esto sin incrementar $cr(G)$. Así pues, para $m \in S$ podemos asumir que ningún par de m -aristas se cruzan. Como cada 0-arista se cruza al menos una vez con cada uno de T_1, T_2, T_3 y T_4 , y dado que e_0 tiene 5 cruces, entonces existen exactamente dos r -aristas, digamos e_r, e'_r que se intersectan con e_0 , para algún $r \in \{1, 2, 3, 4\}$. Supongamos que p_{i_1}, p_{j_1} y p_{i_2}, p_{j_2} son los extremos de e_r y e'_r respectivamente. Sin pérdida de generalidad asumamos que $0 < i_1, i_2 < j_0$ y $j_0 < j_1, j_2 \leq 5t - 1$.

Como T_r es un árbol entonces para cada par u, v de r -vértices existe un único $u - v$ camino contenido en T_r . Sean I y J los caminos contenidos en T_r , cuyos extremos son p_{i_1}, p_{i_2} y p_{j_1}, p_{j_2} respectivamente. Como T_r no contiene ciclos y puesto que e_r y e'_r son las únicas aristas de T_r que intersectan a e_0 entonces el par e_r, e'_r está contenido en I ó en J pero no en ambos.

Sin pérdida de generalidad supongamos que e_r y e'_r están contenidas en I . Sea e una arista con extremos p_{i_1}, p_{i_2} . Como I es el único $p_{i_1} - p_{i_2}$ camino contenido en T_r , entonces $e \notin T_r$. Sea $H = (G \cup e) \setminus E_0$.

A continuación probaremos que $cr(H) \geq 14s - 36$. Si contraemos e_0 (junto con todas sus aristas incidentes) en H , colapsando p_0 y p_{j_0} y reemplazándolos por un vértice situado en cualquier punto de e_0 , obtenemos dos colecciones no vacías de puntos, de tamaños $5s'$ y $5s''$, con $s' + s'' = s$, sobre las cuales puede aplicarse la hipótesis de inducción. Esto da al menos $(14s' - 18) + (14s'' - 18) = 14s - 36$ cruces, como queríamos.

Denotaremos por S_i (respectivamente S_j) al segmento contenido en $[p_0, p_{j_0}]$ (resp. $[p_{j_0}, p_0]$) que tiene como extremos a p_{i_1} y p_{i_2} (resp. p_{j_1} y p_{j_2}). Sea E_r el subconjunto de $E(G) \setminus \{e_r, e'_r, e_0\}$ cuyas aristas se intersectan con alguna de e_r o e'_r . Denotaremos por A al conjunto de aristas de E_r que tienen un extremo en S_j y el otro en $[p_{j_0}, p_0] \setminus S_j$. Asimismo, B será el subconjunto de E_r cuyas aristas tienen un extremo en S_i y el otro en $[p_0, p_{j_0}] \setminus S_i$. Obviamente, $A \cap B = \emptyset$.

Como $p_{j_1}, p_{j_2} \in P_j$ entonces S_j contiene al menos un vértice de cada uno de $T_0, \dots, T_{r-1}, T_{r+1}, \dots, T_4$. Por otra parte, no es difícil ver que $[p_{j_0}, p_0] \setminus S_j$ también contiene al menos un vértice de cada uno de $T_0, \dots, T_{r-1}, T_{r+1}, \dots, T_4$.

Sea $n \in \{0, 1, 2, 3, 4\} \setminus \{r\}$. Nótese que para cada par w, z de n -vértices en $[p_{j_0}, p_0]$ se satisface que el conjunto de vértices del camino $P_{w-z}^n \subset T_n$ que tiene como extremos a w y z está contenido en $[p_{j_0}, p_0]$, lo cual implica que $P_{w-z}^n \subset H$. De las tres implicaciones anteriores, se sigue que existe al menos una n -arista contenida en A . Luego $|A| \geq 4$.

Por otra parte, dado que ninguna arista de H se intersecta con e_0 , entonces toda arista de H que se cruza con e es un elemento de B . Sea α el número de aristas de H que se cruzan con e . Como e_0 se cruza con cada una de e_r y e'_r , y $|B| \geq \alpha$ entonces existen al menos $6 + \alpha$ cruces sobre $e_r \cup e'_r$, ya que $|A| + |B| + 2 \geq 4 + \alpha + 2$.

Ahora, como cada arista de G tiene al menos 5 cruces, luego las tres aristas del conjunto $E_0 \setminus \{e_r, e'_r\}$ garantizan al menos $3(5) - 3$ cruces buenos. Y dado que ninguno de los $6 + \alpha$ cruces contabilizados sobre $e_r \cup e'_r$ involucra a alguna arista de $E_0 \setminus \{e_r, e'_r\}$, entonces tenemos que G contiene al menos $18 + \alpha$ cruces buenos.

De las definiciones de G y H es fácil ver que si β es el número de cruces buenos en G , entonces $\text{cr}(H) = \text{cr}(G) - \beta + \alpha$, de manera que $\text{cr}(G) = \text{cr}(H) + \beta - \alpha \geq (14s - 36) + (18 + \alpha) - \alpha = 14s - 18$.

■

Caso 2. e_0 tiene 4 cruces. Supongamos que e_m es la m -arista que intersecta e_0 , $m = 1, 2, 3, 4$. Note que, en este caso $E_0 = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$. Denotaremos por p_{i_m}, p_{j_m} a los extremos de e_m , y sin pérdida de generalidad asumiremos que $0 < i_1, i_2, i_3, i_4 < j_0$ y $j_0 < j_1, j_2, j_3, j_4 \leq 5t - 1$.

El siguiente resultado prueba que, es suficiente con verificar que los elementos de E'_0 están involucrados en un número suficientemente grande de cruces, para que el paso de inducción proceda.

Proposición 19 *Para establecer el paso de inducción, es suficiente probar que al menos una de las siguientes condiciones es verdadera.*

- (i) *Los elementos de E'_0 son incidentes con hojas que aparecen consecutivamente en \mathcal{P} , y hay al menos 14 cruces buenos.*
- (ii) *Hay al menos 18 cruces buenos.*
- (iii) *Hay al menos 14 cruces buenos, y cada arista de E_0 es incidente con una hoja.*

Demostración. Asumamos que (i) es verdadera. Elimínense las aristas de E'_0 , y las hojas consecutivas de \mathcal{P} que son incidentes con estas aristas. Esto, por hipótesis elimina al menos 14 cruces y además da como resultado una colección con $5(s - 1)$ puntos, sobre los cuales la hipótesis de inducción puede aplicarse, para obtener al menos $14(s - 1) - 18 = 14s - 32$ cruces. Esos $14s - 32$ cruces, junto con los 14 cruces previamente eliminados, dan al menos $14s - 18$ cruces en G , completándose así el paso de inducción.

Supongamos ahora que (ii) es verdadera. Asumamos primero que ningún elemento de E_0 es incidente con una hoja. Elimínense e_1, e_2, e_3 , y e_4 . Esto eliminará al menos 18 cruces por hipótesis. Si contraemos e_0 (junto con todas sus aristas incidentes), colapsando p_0 y p_{j_0} y reemplazándolos por un vértice situado en cualquier punto de e_0 , obtenemos dos colecciones disjuntas no vacías de puntos, de tamaños $5s'$ y $5s''$, con $s' + s'' = s$, sobre las cuales, la hipótesis de inducción puede ser aplicada. Esto da al menos $(14s' - 18) + (14s'' - 18) = 14s - 36$ cruces, los cuales junto con los 18 cruces previamente identificados, dan los $14s - 18$ cruces requeridos para completar el paso inductivo.

Ahora asumamos que al menos un elemento de E_0 es incidente con una hoja. Es fácil verificar que entonces cada uno de e_1, e_2, e_3 , y e_4 es incidente con una hoja, y, más aún, que $p_{j_0}, p_{j_1}, p_{j_2}, p_{j_3}, p_{j_4}$ aparecen consecutivamente en \mathcal{P} (más aún, $j_4 = 5t - 1$), luego p_{j_m} es la hoja incidente con e_m , $m = 1, 2, 3, 4$. Por lo tanto en este caso el resultado deseado se verifica siempre que (iii) sea verdadera. Completaremos la prueba analizando el caso en el cual (iii) es verdadera.

Finalmente supongamos que (iii) se verifica. Elimínense a e_1, e_2, e_3 y e_4 . Esto, por hipótesis elimina al menos 14 cruces. De la contracción de e_0 (junto con todas sus aristas incidentes), colapsando p_0 y p_{j_0} y reemplazándolos por un vértice situado en cualquier punto de e_0 , obtenemos una colección de puntos, de tamaño $5(s - 1)$ sobre la cual el paso de inducción puede ser aplicado. Esto da al menos $14(s - 1) - 18 = 14s - 32$ cruces, los cuales junto con los 14 cruces previamente eliminados, dan los $14s - 18$ cruces requeridos para completar el paso inductivo. Esto completa la prueba de la Proposición 19. ■

De la Proposición 19 es claro que para establecer el paso de inducción debemos probar que los elementos de E'_0 están involucrados en un número suficientemente grande de cruces. En el resto de la prueba nos dedicaremos a probar que, efectivamente G garantiza una cantidad suficientemente grande de cruces buenos. Los siguientes 2 resultados serán una herramienta de gran utilidad para alcanzar este objetivo.

Por brevedad denotaremos por V_ℓ al conjunto $\{p_{\ell_1}, p_{\ell_2}, p_{\ell_3}, p_{\ell_4}\}$, donde $\ell = i, j$. Representaremos por A_i (respectivamente A_j) a la colección de aristas en $E(G) \setminus e_0$ que tienen ambos extremos en $[p_0, p_{j_0}]$ (resp. $[p_{j_0}, p_0]$).

Proposición 20 *Sea $n = 1, 2, 3, 4$. Si u, v son dos n -vértices en $[p_0, p_{j_0}]$ (respectivamente $[p_{j_0}, p_0]$) entonces existe un único $u - v$ camino en T_n cuyo conjunto de aristas está contenido en A_i (resp. A_j).*

Demostración. Asumamos que $u, v \in [p_0, p_{j_0}]$ (resp. $[p_{j_0}, p_0]$). La existencia y unicidad del $u - v$ camino se siguen inmediatamente del hecho de que T_n es un árbol que contiene a cada n -vértice. Denotaremos por P al $u - v$ camino mencionado. Puesto que e_n es la única arista de T_n que interseca a e_0 entonces $e_n \notin P$ y por tanto las aristas de P están contenidas en A_i (resp. A_j). ■

Proposición 21 Sean p_x, p_y vértices de \mathcal{P} tales que $0 \leq x < y \leq 5t - 1$. Sean a, b enteros tales que $0 \leq a, b \leq 4$. Si p_x es un a -vértice y p_y es un b -vértice, entonces $(p_x, p_y) = \emptyset$, o bien (p_x, p_y) contiene un $(b - 1) \pmod{5}$ -vértice.

Demostración. Si $(p_x, p_y) \neq \emptyset$ entonces de la definición de (p_x, p_y) se sigue que $p_{y-1} \in (p_x, p_y)$. Ahora, como $y \equiv b \pmod{5}$ entonces $(y - 1) \equiv (b - 1) \pmod{5}$ y por lo tanto p_{y-1} es el vértice requerido. ■

En los siguientes dos resultados determinaremos una cantidad mínima de cruces externos que A_η garantiza según el orden en el que aparecen los vértices de V_η en \mathcal{P} , $\eta = i, j$.

Proposición 22 Si los vértices $p_0 = p_{i_0}, p_{i_1}, p_{i_2}, p_{i_3}, p_{i_4}, p_{j_0} = p_{i_5}$ aparecen en \mathcal{P} en este orden particular, entonces las aristas de A_i están involucradas en al menos 4 cruces externos.

Demostración. Como $j_0 \geq 10$ entonces para algún $\ell \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ ocurre que $(p_{i_\ell}, p_{i_{\ell+1}})$ es no vacío. Sea $\ell' = (\ell + 1) \pmod{5}$. De la Proposición 21 se tiene que $(p_{i_\ell}, p_{i_{\ell+1}})$ contiene un ℓ -vértice, digamos q_ℓ . Ahora, como p_{i_ℓ} y q_ℓ son ambos ℓ -vértices, entonces (p_{i_ℓ}, q_ℓ) contiene al menos un r -vértice, para cada $r \in \{0, 1, 2, 3, 4\} \setminus \{\ell\}$. Por tanto $(p_{i_\ell}, p_{i_{\ell+1}})$ contiene al menos un r -vértice, digamos q_r para cada $r \in R = \{0, 1, 2, 3, 4\} \setminus \{\ell, \ell'\}$.

Para cada $r \in R \setminus \{0\}$, Q_r denotará al camino contenido en T_r que tiene como extremos a p_{i_r} y q_r . Sea P el $p_0 - q_0$ camino contenido en T_0 . Si $e_0 \in P$ entonces $Q_0 = P \setminus e_0$, en el otro caso $Q_0 = P$.

No es difícil ver que para cada $r \in \mathbb{R}$ se satisface que Q_r se cruza con alguna de e_ℓ o e'_ℓ . Con esto se garantizan al menos 3 cruces externos. Luego, basta probar que para algún $a \in \mathbb{R}$ se verifica que Q_a se interseca con al menos dos aristas de E_0 . Note que si $\ell \geq 3$ entonces Q_1 se cruza con e_2 y e_3 . Asimismo, si $\ell \leq 1$ entonces Q_4 interseca a e_2 y e_3 . En el caso $\ell = 2$ tenemos dos situaciones. Si $e_0 \in P$ entonces Q_0 se cruza con e_3 y e_4 , en el otro caso, esto es, si $e_0 \notin P$ entonces Q_0 se interseca con e_2 y e_1 . De esta manera quedan justificados los 4 cruces requeridos. ■

Sea $\eta = i, j$. Evidentemente los vértices de V_η pueden aparecer ordenados en \mathcal{P} de 24 maneras distintas. Sin embargo, solo 8 de estos 24 arreglos serán ampliamente analizados en el resto de la prueba del *Caso 2*. Los 8 arreglos mencionados son: (1) $p_{\eta_1}, p_{\eta_2}, p_{\eta_3}, p_{\eta_4}$; (2) $p_{\eta_1}, p_{\eta_2}, p_{\eta_4}, p_{\eta_3}$; (3) $p_{\eta_1}, p_{\eta_3}, p_{\eta_2}, p_{\eta_4}$; (4) $p_{\eta_2}, p_{\eta_1}, p_{\eta_3}, p_{\eta_4}$; (5) $p_{\eta_1}, p_{\eta_3}, p_{\eta_4}, p_{\eta_2}$; (6) $p_{\eta_1}, p_{\eta_4}, p_{\eta_2}, p_{\eta_3}$; (7) $p_{\eta_2}, p_{\eta_3}, p_{\eta_1}, p_{\eta_4}$; (8) $p_{\eta_3}, p_{\eta_1}, p_{\eta_2}, p_{\eta_4}$. Por cuestiones de brevedad, nos referiremos a cada uno de ellos a través del número en el parentesis de la izquierda. Así por ejemplo, nos referiremos al arreglo $p_{\eta_2}, p_{\eta_1}, p_{\eta_3}, p_{\eta_4}$ por medio del símbolo (4).

En la Proposición 22 se muestra que si $p_{i_1}, p_{i_2}, p_{i_3}, p_{i_4}$ aparecen en ese orden en \mathcal{P} entonces las aristas de A_i producen al menos 4 cruces externos. Un argumento análogo al de la prueba de la Proposición 22 puede usarse sobre cada uno de los 23 arreglos restantes para determinar la cantidad mínima de cruces externos que cada uno de dichos arreglos garantiza sobre las aristas de A_η , $\eta = i, j$. Este, es el contenido de nuestra siguiente Proposición.

Proposición 23 *Si los elementos de V_η aparecen ordenados en \mathcal{P} como en (2), (3) o (4) entonces A_η tiene al menos 6 cruces externos, pero si los vértices de V_η están ordenados como en (5), (6), (7) u (8) entonces A_η tiene al menos 8 cruces externos. Finalmente, cada uno de los 16 arreglos restantes garantiza al menos 10 cruces externos sobre las aristas de A_η .*

Sólo probaremos 1 de los 23 casos referidos, ya que cada uno de los casos restantes puede establecerse usando un argumento totalmente análogo al que a continuación presentaremos. Nos ocuparemos del caso en que los vértices de V_η aparecen en \mathcal{P} ordenados como en (2).

Demostración. Asumiremos pues que $p_{\eta_1}, p_{\eta_2}, p_{\eta_4}, p_{\eta_3}$ aparecen en ese orden. Por demostrar que tal disposición garantiza al menos 6 cruces externos sobre las aristas de A_η .

Sean x_0, y_0 elementos distintos de $\{p_0, p_{j_0}\}$ tales que $x_0 = p_0$ si $\eta = i$ y $x_0 = p_{j_0}$ en el otro caso ($\eta = j$).

Como p_{η_2} no puede ser el antecesor de p_{η_4} en \mathcal{P} entonces $(p_{\eta_2}, p_{\eta_4}) \neq \emptyset$, luego por la Proposición 21 tenemos que (p_{η_2}, p_{η_4}) contiene un 3-vértice, digamos q_3 . Asimismo, puesto que p_{η_4} no es el antecesor de p_{η_3} entonces existe un 2-vértice, digamos q_2 contenido en (p_{η_4}, p_{η_3}) . Pero, para $n = 0, 1$ es claro que p_{η_4} tampoco antecede a q_{2-n} , luego existe un $(1 - n)$ -vértice, digamos q_{1-n} contenido en (p_{η_4}, q_{2-n}) . Por la misma razón, podemos concluir que (p_{η_3}, y_0) contiene un 4-vértice q_4 . Hasta ahora, tenemos que $x_0, p_{\eta_1}, p_{\eta_2}, q_3, p_{\eta_4}, q_0, q_1, q_2, p_{\eta_3}, q_4, y_0$ están situados en \mathcal{P} en ese orden. Llamaremos Q al conjunto de los 11 vértices recién escritos.

Sea L un subconjunto de \mathcal{P} con al menos 2 elementos de cada uno de P_0, P_1, P_2, P_3, P_4 . Sean u, v dos ℓ -vértices de L , los cuales aparecen en L en el orden dado. Diremos que u y v son el par de ℓ -vértices *más lejanos* de L , si $[u, v]$ contiene a todos los ℓ -vértices de L , para $\ell \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$

Para $n = 1, 2, 3, 4$ sea Q_n el camino contenido en T_n cuyos extremos son el par de n -vértices más lejanos contenidos en Q . Dado que $Q \subset [x_0, y_0]$ entonces por la Proposición 20 tenemos que para cada n , las aristas de Q_n están contenidas en A_n . Ahora, como p_{η_1} y q_1 son los extremos de Q_1 y $p_{\eta_2}, p_{\eta_4} \in (p_{\eta_1}, q_1)$ entonces Q_1 se cruza con e_2 y e_4 . Usando un argumento similar al anterior sobre Q_2, Q_3 y Q_4 obtenemos que e_4 se intersecta con Q_2, Q_3 y e_3 con Q_4 . Hasta el momento, se han justificado 5 cruces externos sobre las aristas de A_n . Sea P el $q_0 - x_0$ camino contenido en T_0 . Si $e_0 \in P$ entonces $Q_0 = P \setminus e_0$ es un $q_0 - y_0$ camino que intersecta a e_3 , pero si $e_0 \notin P$ entonces $Q_0 = P$ se cruza con e_1, e_2 y e_3 . En ambos casos se garantiza al menos un cruce externo sobre Q_0 , y como $E(Q_0) \subset A_n$ entonces tal cruce en Q_0 completa los 6 cruces requeridos. ■

Las siguientes cuatro proposiciones dan cuenta de la cantidad de cruces internos que se producen si los elementos de $V_i \cup V_j$ aparecen ordenados en \mathcal{P} de ciertas formas específicas.

Proposición 24 Sean x, y, w, z enteros distintos por pares tales que $1 \leq x, y, w, z \leq 4$. Si $p_0, p_{i_x}, p_{i_y}, p_{i_w}, p_{i_z}, p_{j_0}, p_{j_x}, p_{j_y}, p_{j_w}, p_{j_z}$ aparecen en ese orden en \mathcal{P} entonces en G ocurren al menos 10 cruces internos.

Demostración. Como e_0 se cruza con cada una de las 4 aristas de E_0 , entonces basta verificar que existen al menos 6 cruces internos que no involucran a e_0 . Sean e_{ℓ_1}, e_{ℓ_2} aristas distintas en E_0 . Por hipótesis, los extremos de e_{ℓ_1} y e_{ℓ_2} están ordenados en \mathcal{P} , en alguna de las dos siguientes maneras: $p_{i_{\ell_1}}, p_{i_{\ell_2}}, p_{j_{\ell_1}}, p_{j_{\ell_2}}$, o bien $p_{i_{\ell_2}}, p_{i_{\ell_1}}, p_{j_{\ell_2}}, p_{j_{\ell_1}}$. En ambos casos es fácil ver que e_{ℓ_1} se intersecta con e_{ℓ_2} . Así pues, cada par de aristas en E_0 se intersectan, lo cual garantiza los 6 cruces requeridos. ■

Proposición 25 Sean ρ, ρ' elementos distintos de $\{i, j\}$. Si los vértices de V_ρ están ordenados como en (2), (3) o (4) y los elementos de $V_{\rho'}$ están ordenados como en (1) entonces G tiene al menos 9 cruces internos.

Demostración. Consideremos el caso particular en el que los vértices de V_ρ están ordenados como en (2). Como e_0 se cruza con cada arista de E_0 , entonces basta probar que hay al menos 5 cruces internos que no involucran a e_0 . Por otra parte, no es difícil ver que el único par de aristas de E_0 que no se intersectan son e_3 y e_4 , luego E_0 produce $\binom{4}{2} - 1 = 5$ cruces internos, ya que $|E_0| = 4$. Razonamientos similares al anterior prueban la veracidad de cada uno de los 2 casos restantes. ■

Proposición 26 Sean ω, ω' elementos distintos de $\{i, j\}$. Si los vértices de V_ω están ordenados como en (5), (6), (7) u (8) y los elementos de $V_{\omega'}$ están ordenados como en (1) entonces G tiene al menos 7 cruces internos.

Demostración. Consideremos el caso particular en el que los vértices de V_ω están ordenados como en (8). Como e_0 se cruza con cada arista de E_0 , entonces basta probar que hay al menos 3 cruces internos que no involucran a e_0 . De nuestra suposición sabemos que los vértices de $V_\omega \cup V_{\omega'}$ aparecen en \mathcal{P} en alguno de los dos siguientes órdenes: a) $p_{\omega_3}, p_{\omega_1}, p_{\omega_2}, p_{\omega_4}, p_{\omega'_1}, p_{\omega'_2}, p_{\omega'_3}, p_{\omega'_4}$ o bien b) $p_{\omega'_1}, p_{\omega'_2}, p_{\omega'_3}, p_{\omega'_4}, p_{\omega_3}, p_{\omega_1}, p_{\omega_2}, p_{\omega_4}$, en ambos casos es fácil ver que la arista e_4 se intersecta con cada una de e_1, e_2 y e_3 , lo cual provee los 3 cruces requeridos. Argumentos similares al anterior confirman la validez de cada uno de los 3 casos restantes. ■

Proposición 27 Sean $\delta, \lambda \in \{2, 3, 4\}$ Si los vértices de V_i están ordenados como en (δ), y los de V_j como en (λ) entonces G tiene al menos 6 cruces internos.

Demostración. Por la Proposición 24 sabemos que si $\delta = \lambda$ entonces G tiene al menos 10 cruces internos. Ahora, dado que cada arista de E_0 intersecta a e_0 entonces es suficiente verificar que las aristas de E_0 se cruzan entre sí al menos 2 veces. Consideremos el caso particular $\delta = 2, \lambda = 3$. Luego los vértices $p_{i_1}, p_{i_4}, p_{i_3}, p_{j_1}, p_{j_2}, p_{j_4}$ aparecen en \mathcal{P} en ese orden, y por lo tanto e_2 y e_4 se intersectan con e_1 , lo cual provee los 2 cruces requeridos. El resto de la prueba se puede obtener aplicando un razonamiento similar al anterior sobre cada uno de los casos restantes. ■

Dividiremos el resto del *Caso 2* en 2 subcasos.

Subcaso 2.1 Asumamos que $j_0 = 5t - 5$. Tal suposición y el hecho de que las únicas aristas que se cruzan con e_0 son los elementos de E_0 , implican que cada arista en E_0 es incidente con una hoja, más aún, los vértices $p_{j_0}, p_{j_1}, p_{j_2}, p_{j_3}, p_{j_4}$ aparecen en \mathcal{P} en ese orden. Luego, por *iii*) de la Proposición 19, basta verificar que G contiene al menos 14 cruces buenos.

Sea α la cantidad de cruces entre aristas de E_0 . Dado que cada arista en G tiene al menos 4 cruces, entonces las aristas de E'_0 están involucradas en al menos $5(4) - (4 + \alpha)$ cruces. De la afirmación anterior es claro que los 14 cruces requeridos quedan garantizados si $\alpha \leq 2$. Ahora, si $\alpha \geq 3$ entonces existen al menos $\alpha + 4 \geq 7$ cruces buenos, ya que e_0 tiene 4 cruces. En el caso de que los vértices de V_i estén ordenados en \mathcal{P} de tal manera que las aristas de A_i garantizan al menos 8 cruces externos, entonces existen al menos $7 + 8$ cruces buenos. Luego, el único caso por analizar es cuando las aristas de A_i aparecen involucradas en a lo más 7 cruces externos. Por la

Proposición 23, basta analizar los casos en los que los elementos de V_i están ordenados como en (1), (2), (3) o (4).

Si los vértices de V_i están ordenados como en (1) entonces por la Proposición 22 sabemos que A_i contiene al menos 4 cruces externos. Por otra parte de la Proposición 24 se sigue que E'_0 tiene al menos 10 cruces internos, y por lo tanto quedan garantizados los 14 cruces requeridos.

Si el orden de los elementos de V_i es como en (2), (3) o (4), entonces por la Proposición 23 tenemos que en cada uno de estos 3 casos se verifica que A_i tiene al menos 6 cruces externos. Pero por la Proposición 25 sabemos que cualquiera de estos 3 arreglos genera al menos 9 cruces internos, lo cual provee los 14 cruces requeridos.

Subcaso 2.2 $j_0 < 5t - 5$. Esto implica que $[p_{j_0}, p_0]$ tiene al menos 10 elementos. Por otra parte, recordemos que de las 24 maneras de ordenar a los elementos de V_j , la única de ellas que no garantiza al menos 6 cruces externos sobre A_j es cuando los elementos de V_j aparecen ordenados como en (1). En este caso, podemos usar el argumento de la prueba de la Proposición 22 (simplemente, en los subíndices escríbase j en lugar de i) para concluir que si los vértices de V_j están ordenados como en (1) entonces A_j tiene al menos 4 cruces externos, lo anterior es posible debido a que $[p_{j_0}, p_0]$ contiene al menos 10 vértices. Luego, independientemente del orden de los vértices de V_i , se satisface que A_η tiene al menos 4 cruces externos, para $\eta = i, j$.

De acuerdo con *ii*) de la Proposición 19, basta verificar que G contiene al menos 18 cruces buenos.

Sean μ, μ' elementos distintos de $\{i, j\}$ y sea β la cantidad de cruces internos de G . Obviamente $\beta \geq 4$. Enseguida dividiremos en 3 partes el *Subcaso 2.2*.

Subcaso 2.2.1 Al menos uno de V_μ o $V_{\mu'}$ está ordenado como en (1). Sin pérdida de generalidad supongamos que los vértices de $V_{\mu'}$ están ordenados como en (1). Si A_μ tiene al menos 10 cruces externos, entonces los 18 cruces requeridos quedan justificados, ya que $A_{\mu'}$ tiene al menos 4 cruces externos y $\beta \geq 4$. Luego por la Proposición 23 se sigue que los vértices de V_μ deben estar ordenados como en (1), (2), (3), (4), (5), (6), (7) u (8).

a) Si los elementos de V_μ están ordenados como en (1) entonces por la Proposición 24 tenemos que $\beta \geq 10$, y puesto que cada uno de A_μ y $A_{\mu'}$ tiene al menos 4 cruces externos, entonces quedan justificados los 18 cruces requeridos.

b) Si los vértices de V_μ están ordenados como en (2), (3) o (4) entonces por la Proposición 23 A_μ tiene al menos 6 cruces externos que sumados con los 4 de $A_{\mu'}$ acumulan 10. Por otra parte,

de la Proposición 25 se sigue que $\beta \geq 9$, luego, G contiene al menos $10 + 9$ cruces buenos.

c) Si los elementos de V_μ están ordenados como en (5), (6), (7) u (8) entonces por la Proposición 23 A_μ tiene al menos 8 cruces externos, que sumados con los 4 de $A_{\mu'}$ acumulan 12. Por otra parte, por la Proposición 26 tenemos que $\beta \geq 7$, lo cual garantiza al menos $12 + 7$ cruces buenos.

Subcaso 2.2.2 Tanto los vértices de V_μ como los de $V_{\mu'}$ están ordenados como en (2), (3) o (4). Luego por la Proposición 23 se sigue que cada uno de A_μ y $A_{\mu'}$ tiene al menos 6 cruces externos. Por otra parte, de la Proposición 27 tenemos que $\beta \geq 6$, de esta manera quedan garantizados los 18 cruces requeridos.

Subcaso 2.2.3 Una vez más, de la Proposición 23 tenemos que cada uno de los casos no considerados en **Subcaso 2.2.1** y **Subcaso 2.2.2** acumula al menos 14 cruces externos sobre las aristas de $A_\mu \cup A_{\mu'}$, y dado que $\beta \geq 4$ entonces la existencia de los 18 cruces requeridos es inmediata. ■

Capítulo 5

Conclusiones y algunas observaciones

La contribución de esta tesis a la teoría de gráficas críticas en cruces en el plano fué en tres frentes.

El primero de ellos, consistió en diseñar una manera de descomponer una gráfica crítica en cruces que no es 3-arista-conexa en varias menores, tales que cada una de dichas menores es crítica en cruces y 3-arista-conexa, además de verificarse que la suma de los números de cruce de dichas menores es igual al número de cruce de la gráfica crítica original. Esto, nos da cierta ventaja al enfrentar problemas relacionados con el cálculo del número de cruce de gráficas que no son 3-arista-conexas, ya que podemos estudiar su número de cruce por medio del estudio de números de cruces de gráficas más pequeñas, lo cual, generalmente es más sencillo. En este sentido creemos que el próximo problema a resolver es diseñar una manera de descomponer gráficas que son 3-arista-conexas pero no 3-conexas en menores críticas 3-conexas que satisfagan la importante propiedad de que la suma de sus números de cruce sea igual al número de cruce de la gráfica original. En otra palabras, hacer un análogo a lo que nosotros hicimos para 2-cortes de aristas, pero ahora para 2-cortes de vértices. De lograr resolver este problema, podríamos restringir el estudio de las gráficas críticas en cruces en el plano al estudio de las gráficas críticas en cruces en el plano que son 3-conexas, esto, con la garantía de que tal restricción no produce pérdida de información relevante.

Ahora, el estudio del número de cruce en el plano de gráficas críticas 3-conexas es más fácil que el estudio del número de cruce de gráficas que no son 3-conexas por la siguiente razón: Como ya explicamos al inicio del capítulo 3, existe un gran parecido entre gráficas planares y gráficas que son k -críticas en cruces en el plano con un número grande de vértices comparado con k , esta similitud nos (como se puede apreciar en varios resultados del capítulo 3) deja extender resultados que se satisfacen para gráficas planares a gráficas k -críticas, pagando un costo casi irrelevante.

Por otra parte, en la literatura existe un resultado que afirma lo siguiente: *Existe esencialmente una única manera de dibujar sin cruces en el plano a una gráfica planar 3-conexa*, esto implica que la cantidad de maneras de dibujar óptimamente en el plano a una gráfica crítica 3-conexa son relativamente pocas y de ahí, nuestro comentario de que es más fácil el estudio del número de cruce de las gráficas que son 3-conexas.

Las otras dos contribuciones de esta tesis a la teoría de número de cruce en el plano consistieron en mejorar un par de cotas sobre el número de cruce de ciertas familias de gráficas. Estos dos problemas, fueron parcialmente resueltos en [16] y [12]. La contribución que hicimos en estos campos está contenida en los Teoremas 4 y 5, respectivamente. La estrategia que seguimos para obtener estos resultados fue un refinamiento de las pruebas presentadas en [16] y [12].

Sin embargo, en ambos casos aún resta mucho trabajo por hacer. Concretamente, en lo referente al Teorema 4 creemos que el reto principal en esta área de trabajo es demostrar la siguiente conjetura de B. Richter y C. Thomassen:

Conjetura. Existe una constante c con la siguiente propiedad. Toda gráfica k -crítica en cruces en el plano satisface

$$cr(G) \leq k + c\sqrt{k}.$$

Mientras que en lo referente al Teorema 5, creemos que el principal problema a resolver en este campo de estudio es la conjetura (ver [8]) de M. Kano, C. Merino y J. Urrutia, que dice lo siguiente:

Conjetura. La cota inferior presentada en el Teorema 5 puede mejorarse hasta $(\frac{3}{4}k^2 - k)(s - 1) - \frac{k(k-2)}{4}$ si k es par y hasta $(\frac{3}{4}(k - 1)^2 + \frac{k-1}{2})(s - 1) - \frac{(k-1)^2}{4}$ en otro caso.

Referencias

- [1] M. ABELLANAS, J. GARCÍA, G. HERNÁNDEZ, M. NOY, AND P. RAMOS, *Bipartite embeddings of trees in the plane*, in Graph Drawing 96, Lecture Notes in Computer Science, 1990 Springer Verlag, Berlin, (1997), 1-10.
- [2] J. AKIYAMA AND J. URRUTIA, *Simple alternating path problems*, Discrete math. 84 (1990) 101-103.
- [3] J.A. BONDY AND U.S.R. MURTY, Graph Theory with Applications. North-Holland, New York (1982).
- [4] A. DUMITRESCU AND J. PACH, *Partitioning colored points sets into monochromatic parts*, Int. J. of Computational Geometry Applications 19 (1) (2001), 69-85.
- [5] P. ERDÖS AND R. GUY, *Crossing Number Problems*. American Mathematical Monthly 86 (1973), 52-58.
- [6] M.R. GAREY AND D.S. JOHNSON, Crossing number is NP-Complete, SIAM J. Alg. Disc. Meth. 1 (1983), 312-316.
- [7] L. GLEBSKY AND G. SALAZAR, *The conjecture $cr(C_m \times C_n) = (m - 2)n$ is true for all but finitely many n , for each m* , enviado.
- [8] G. KANO, C. MERINO, AND J. URRUTIA, *On spanning trees and cycles of multicolored points sets with few intersections*, enviado.
- [9] G. KAROLI, J. PACH, J. TOTH, AND P. VALTR, *Ramsey-type results for geometric graphs I*, Discrete and Comp. Geometry 18, (1995), 247-255.
- [10] G. KAROLI, J. PACH, J. TOTH, AND P. VALTR, *Ramsey-type results for geometric graphs II*, Discrete and Comp. Geometry 20, (1998), 375-388.
- [11] J. LEAÑOS MACÍAS, Tesina de Licenciatura. Universidad Autónoma de Zacatecas (2002).
- [12] J. LEAÑOS, C. MERINO, G. SALAZAR AND J. URRUTIA, *Spanning trees of three- and four-coloured points sets with few intersections*, enviado.

- [13] M. LOMELÍ HARO, Tesis de Licenciatura. Universidad Autónoma de San Luis Potosí (2001)
- [14] M. LOMELÍ HARO, Tesis de Maestría. Universidad Autónoma de San Luis Potosí (2003).
- [15] J. PACH, *Geometric graph theory*, Surveys in combinatorics, 1999 (Canterbury), 167-200, London Math. Soc. Lecture Note Ser., 267, Cmbridge Univ. Press, Cambridge, 1999.
- [16] R.B. RICHTER AND C. THOMASSEN, *Minimal Graphs with crossing number at least k*. J. Combin. Theory Ser. B 58 (1993), No. 2, 217-224.
- [17] G. SALAZAR, Ph.D. Thesis, Carleton University (1997).
- [18] S. TOKUNAGA, *Crossing number of two-connected geometric graphs*, Info. Proc. Letters 59 (1996) 331-333.