



Universidad Autónoma de San Luis Potosí.

Facultad de Ciencias



Autómatas Celulares y Particiones de Árboles

TESIS

Que para obtener el Grado de

Maestra en Ciencias Aplicadas

PRESENTA:

Aurora Espinoza Valdez

ASESOR:

Dr. Lev Yu Glebski



Universidad Autónoma de San Luis Potosí.

Facultad de Ciencias



Autómatas Celulares y Particiones de Árboles

Aurora Espinoza Valdez

SINODALES:

Dr. Lev Yu Glebski
(Asesor)

Dr. Álvaro Pérez Rapozo

Dr. Antonio Morante Lezama

DEDICATORIA

Con amor a *Lorena*...

Dios te bendiga ahora y siempre...

Contenido

1	Introducción	1
2	Definiciones	4
2.1	Autómatas celulares	4
2.2	Bloques	6
2.3	Reversibilidad	7
2.4	Gráficas	8
3	Particiones en \mathbb{Z}^d	10
3.1	Particiones de ACR y ACNR	10
3.2	Partición de bloques	15
4	Autómatas celulares en árboles	21
4.1	Partición de árbol	22
4.2	Árbol 2-regular	23
4.3	Árbol m -regular	24
4.3.1	Partes con raíz y hojas	24
4.3.2	Partes que no contienen vértices de grado $m - 1$	34
5	Conclusiones	35

Capítulo 1

Introducción

Los autómatas celulares fueron introducidos a finales de los años 40 por J. von Neumann después de una sugerencia de S. Ulam. Esto fue con el objetivo de crear un modelo real del comportamiento de sistemas extensos y complejos.

Un autómata celular d -dimensional es un sistema discreto que consiste de una malla d -dimensional infinita de celdas (el espacio subyacente es \mathbb{Z}^d). Cada celda es capaz de almacenar un elemento de un conjunto finito de estados S . La dinámica se da en términos de una función local f que especifique el estado siguiente de cada celda en función de estados actuales en alguna vecindad local de la celda.

Los autómatas celulares son reversibles si su mapeo global es invertible, es decir, si cada configuración que por definición tiene exactamente un sucesor también tiene exactamente un precursor.

A pesar de su importancia sigue habiendo problemas abiertos referentes al autómata celular reversible. Toffoli y Margolus [7] dan una introducción completa al campo de los autómatas celulares reversibles con una amplia bibliografía, obteniendo la siguiente conjetura:

Conjetura 1. Todo autómata celular reversible es de estructura invertible, i.e., se puede expresar como composición de permutaciones por bloques.

Un bloque es un arreglo finito de estados d -dimensional. La malla \mathbb{Z}^d se puede particionar en bloques regulares disjuntos. Una permutación por bloques es una

generalización de una permutación e sobre tal partición de \mathbb{Z}^d .

En [4] Kari estudia la estructura de los autómatas celulares, demostrando que el autómata celular reversible de dos dimensiones y el unidimensional puede ser construido de bloques. Este resultado confirma (para el autómata celular 2-dimensional) la conjetura de Toffoli y Margolus. Finaliza su artículo con la siguiente conjetura:

Conjetura 2. Para cualquier $d \geq 1$, todo autómata celular d -dimensional reversible es la composición de permutaciones por bloques y corrimientos parciales.

Durand-Lose estudió estas dos conjeturas y demuestra en [2] que un autómata celular d -dimensional reversible puede representarse como la composición de $d + 1$ permutaciones por bloques.

El que un autómata celular sea la composición de $d + 1$ permutaciones por bloques se debe a la geometría de \mathbb{Z}^d . Al particionar la malla \mathbb{Z}^d en bloques (disjuntos) del mismo tamaño, tenemos que el valor futuro de las celdas que pertenecen a la frontera de cada bloque no puede ser determinado. Por lo que se genera un número necesario y suficiente de particiones por bloques de manera que se pueda determinar el valor futuro de todas las celdas.

Los autómatas celulares fueron primero definidos en la malla \mathbb{Z}^d y posteriormente se introdujeron a gráficas. Existen varias definiciones de autómatas celulares en gráficas, por ejemplo la más conocida es la dada por Martin [5].

El objetivo principal de este trabajo es probar el análogo al teorema de Durand-Lose para el caso de los autómatas celulares definidos en árboles: en concreto, probamos que es posible cubrir bien un autómata celular en un árbol m -regular con el mínimo número de dos particiones. También se observa que el teorema de Durand-Lose se debe más a la geometría que a la reversibilidad del autómata celular.

El trabajo se encuentra estructurado de la siguiente manera: En el capítulo 2 se dan las definiciones de autómata celular, autómata a bloques, permutaciones por bloques, reversibilidad y gráficas. En el capítulo 3 se ve el teorema de Durand-Lose [2] y cómo se puede simular un autómata celular reversible por la com-

posición de $d + 1$ permutaciones por bloques. La definición de autómata celular en un árbol m -regular y el número de particiones requeridas para cubrir bien el árbol son dados en el capítulo 4.

Capítulo 2

Definiciones

2.1 Autómatas celulares

Un autómata celular opera como un sistema iterativo d -dimensional sobre arreglos infinitos de celdas (el espacio subyacente es \mathbb{Z}^d). Cada celda toma un valor de un conjunto finito de estados S . Una iteración de un autómata celular es el reemplazar el estado de las celdas de acuerdo a una función local $f : S^{(2r+1)^d} \rightarrow S$. Una vecindad esta formada por una celda central y r celdas vecinas a cada lado, entonces una vecindad tiene $(2r+1)^d$ celdas y el número de vecindades para un r dado es igual a $S^{(2r+1)^d}$, por lo que la función f va a determinar la transformación local de cada una de las vecindades a un elemento de S .

En la fig. 2.1 *a* consideramos el caso de dos dimensiones. Para obtener en la siguiente iteración el valor de la celda (i, j) usamos la vecindad de la fig. 2.1 *b*.

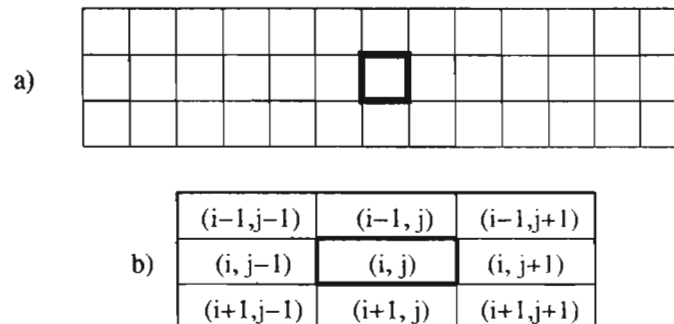


Figura 2.1: $d = 2$ y $r = 1$.

Sea $C = S^{\mathbb{Z}^d}$ el conjunto de todas las posibles configuraciones del autómata, i.e., todos los mapeos de \mathbb{Z}^d a S y denotemos al conjunto de elementos $\{i, i+1, i+2, \dots, j\}$ por $\llbracket i, j \rrbracket$.

Para la j -ésima configuración $c_j \in C$, se utilizará la notación $c_{j[a]}$ y será la celda ubicada en la posición a de la configuración c_j para $a \in \mathbb{Z}^d$.

Definición 1. Un *Autómata Celular* (AC) A es una pareja (C, \mathcal{G}_A) donde $\mathcal{G}_A : C \rightarrow C$ es una función que depende de los parámetros r y f , la cual mapea configuraciones en configuraciones de la siguiente forma:

$$\forall c \in C, \forall i \in \mathbb{Z}^d, \mathcal{G}_A(c)_{[i]} = f(c_{\llbracket [i] + \llbracket -r, r \rrbracket^d \rrbracket}).$$

Aquí r es el radio de la función local f .

En base al trabajo de Hedlund [3] definimos la función $d(c_j, c_k)$ de la siguiente manera:

$$d(c_j, c_k) = \begin{cases} 0 & \text{si } c_j = c_k \\ \frac{1}{1+r} & \text{para el menor } r \in \mathbb{Z}^d \text{ tal que } c_{j[r]} \neq c_{k[r]} \text{ ó } c_{j[-r]} \neq c_{k[-r]} \end{cases}$$

En [3] se demuestra que $d(c_j, c_k) = (1+r)^{-1}$ define una métrica sobre el conjunto de configuraciones.

Para cualquier $x \in \mathbb{Z}^d$, σ_x es el *corrimiento* de x , es decir, $\forall c \in C$ y $\forall i \in \mathbb{Z}^d$, $(\sigma_x(c))_{[i]} = c_{[i+x]}$.

Un mapeo \mathcal{F} en el conjunto de configuraciones C conmuta con todos los shifts si $\mathcal{F} \circ \sigma_x = \sigma_x \circ \mathcal{F} \forall x \in \mathbb{Z}^d$.

El siguiente teorema se puede encontrar en el artículo [3].

Teorema 2.1. *El Autómata Celular definido en \mathbb{Z}^d y con valores en el conjunto finito S es exactamente el conjunto de los mapeos continuos de $S^{\mathbb{Z}^d}$ que conmutan con todos corrimientos.*

2.2 Bloques

Dados $d, w \in \mathbb{Z}^+$ y el conjunto finito S , sea $V = \llbracket 0, w-1 \rrbracket^d \subset \mathbb{Z}^d$. $o \in V$ es el vector de ubicación. Un *bloque* es un arreglo finito de estados d -dimensional.

Definición 2. Un *autómata a bloques* (AB) es una pareja (C, e) donde $e : S^V \rightarrow S^V$ es una función definida en el bloque S^V .

Decimos que d es la dimensión, w el ancho del bloque, o es la posición del bloque y e la función aplicada al bloque.

Un AB especifica como un bloque cambia su estado independientemente de sus bloques vecinos. Un AB es una *Permutación por bloques* (PB) si la función e es una permutación.

La PB de origen 0 , T_0 es el siguiente mapeo sobre C : para cualquier $c \in C$ y para cualquier $i \in \mathbb{Z}^d$, sean $a = i \operatorname{div} w$ (división euleriana) y $b = i \bmod w$ (módulo) $a \in \mathbb{Z}^d$ y $b \in \llbracket 0, w-1 \rrbracket^d$ tales que $i = a.w + b$ (multiplicación euleriana), entonces $T_0(c)_{|i} = e(c_{|a.w+b})_b$. El mapeo de cada bloque es independiente de sus bloques vecinos.

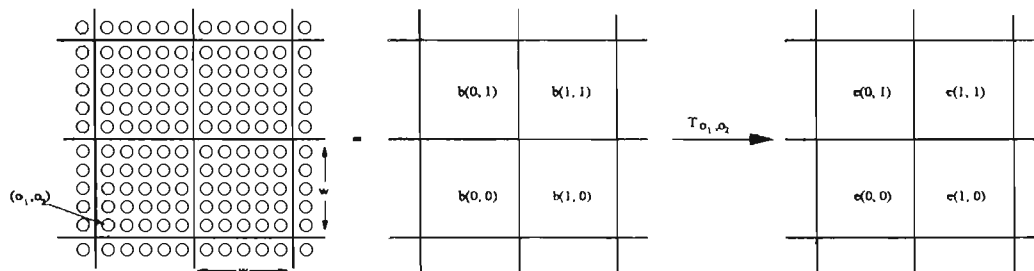


Figura 2.2: T_{o_1, o_2} PB de anchura w y origen (o_1, o_2) .

La PB de origen o , T_o es $\sigma_o \circ T_0 \circ \sigma_{-o}$, es la misma pero la partición es recorrida por o . En la fig. 2.2 se da un ejemplo de un PB de dimensión dos. Se puede observar cómo la configuración se parte en bloques disjuntos. Si la función e se aplica al contenido de cada bloque, una configuración c se transforma en una nueva configuración.

Ejemplo 2.2.1. Considérese un AB 2-dimensional como el de la fig. 2.3, particionado en bloques disjuntos de 3x3,

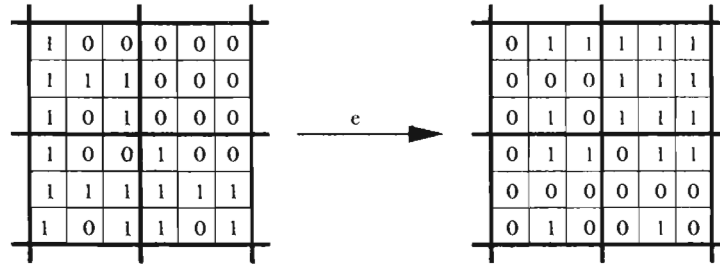


Figura 2.3: AB 2-dimensional, particionado en bloques de 3x3.

donde

$$e \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } e \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.3 Reversibilidad

Si G_A es biyectivo, el autómata celular es llamado *reversible* (ACR).

Teorema 2.2. [3] *Un AC en \mathbb{Z}^d con valores en un conjunto finito S que es inyectivo, es necesariamente sobreyectivo.*

Lema 1. [6] *Si un autómata celular es invertible, entonces su inversa es un autómata celular.*

Este es un resultado fundamental. Nos dice que si el proceso global descrito por un mapeo local es invertible, entonces también el proceso global inverso tiene un mapeo local, i.e., él se puede describir en términos locales.

Decimos que un *autómata celular a bloques reversible* (ACBR) es la composición de varias PB con el mismo volumen w y permutación e .

Por construcción, una PB es reversible, uno simplemente usa la permutación inversa en la misma partición para obtener la inversa del bloque en la partición.

2.4 Gráficas

A continuación mencionaremos algunas definiciones básicas de gráficas [1].

Una *gráfica* G es una terna ordenada $(V(G), E(G), \psi_G)$ que consiste de un conjunto no vacío $V(G)$ de vértices, de un conjunto $E(G)$ de aristas y de una función de incidencia ψ_G que asocia con cada arista un par ordenado (no necesariamente distintos) de vértices de G . $\psi_G : E(G) \rightarrow W(G)$ donde $W(G)$ es el conjunto de pares de vértices $W(G) = \{\{u, v\} \mid u, v \in V(G)\}$ de modo que si $e \in E(G)$, $\psi_G(e) = \{u, v\}$, entonces se dice que e une a u y v ; los vértices u y v son los extremos de e .

Las dos gráficas G y H son *isomorfas* ($G \cong H$) si existen las dos biyecciones $\theta : V(G) \rightarrow V(H)$ y $\phi : E(G) \rightarrow E(H)$ tales que $\psi_G(e) = \{u, v\}$ si, y sólo si, $\psi_H(\phi(e)) = \theta(u)\theta(v)$; tal par de mapeos se llama isomorfismo entre G y H .

Una gráfica H es una *subgráfica* de G ($H \subseteq G$) si $V(H) \subseteq V(G)$, $E(H) \subseteq E(G)$ y ψ_H es la restricción de ψ_G a $E(H)$.

El *orden* de G es dado por el número de vértices $|V(G)|$. Sea $v \in V(G)$, el *grado* de v denotado $deg(v)$ es igual al número de aristas que son incidentes a v . El grado total de G es la suma de todos los grados de los vértices de G . Una gráfica es *k -regular* si el grado de cada vértice es k ($k \in \mathbb{N}$).

Una *caminata* en G es una secuencia alternante finita $W = v_0 e_1 v_1 e_2 \dots v_{n-1} e_n v_n$ de vértices y aristas, tales que para $1 \leq i \leq n$ los extremos de e_i son v_{i-1} y v_i . Los vértices v_0 y v_n son llamados origen y terminación de W respectivamente y $v_1 \dots v_{n-1}$ son vértices internos. El entero n denota la longitud de W .

Si las aristas e_1, e_2, \dots, e_n son distintas y los vértices v_0, v_1, \dots, v_n también son distintos en la caminata W , decimos que W es un *camino*.

Una caminata es cerrada si su origen y terminación son el mismo vértice. Una caminata cerrada en la que todas sus aristas y vértices internos son distintos

decimos que es un *ciclo*.

La gráfica G es *conexa* si, y sólo si, dados cualesquiera dos vértices $v, w \in V(G)$ existe una caminata de v a w .

Una gráfica *acíclica* es una gráfica que no tiene ciclos. Un *árbol* es una gráfica conexa y acíclica.

Sea V' un subconjunto no vacío de V . La subgráfica de G cuyo conjunto de vértices es V' y cuyo conjunto de aristas es el conjunto de aristas de G que tienen ambos extremos en V' es llamada la subgráfica de G inducida por V' y es denotada por $G[V']$; decimos que $G[V']$ es una *subgráfica inducida* de G .

Capítulo 3

Particiones en \mathbb{Z}^d

3.1 Particiones de ACR y ACNR

Al estudiar Durand-Lose las conjeturas 1 y 2, demuestra el siguiente teorema:

Teorema 3.1. [2] *En cualquier dimensión d , cualquier ACR de radio r puede expresarse como una composición de $d + 1$ PB de ancho $3(d + 1)r$ con la misma permutación de bloques e , o como un ACBR con $d + 1$ particiones.*

Durand-Lose prueba este teorema usando lo siguiente: dada una configuración inicial c en el ACR, la i -ésima celda tiene por valor la pareja ordenada (c_i, \perp) , donde la primera componente representa el estado previo de la celda y la segunda componente representa el siguiente estado de la celda, el estado \perp es el vacío. En el siguiente diagrama observamos que se llega a la misma configuración aplicando directamente la función G_A a c o mediante la composición de PB (ver fig. 3.1), donde B_i representa la partición y el subíndice indica el número de ésta.

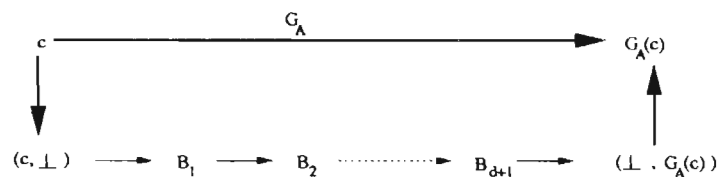


Figura 3.1: Diagrama para un ACR.

Observemos qué sucede si el AC es no reversible (ACNR). Al igual que para el ACR, la i -ésima celda tiene el valor (c_i, \perp) , generamos $d + 1$ particiones para llegar a $(c, G_A(c))$ y como no borramos a c_i en cada uno de los pasos, es reversible.

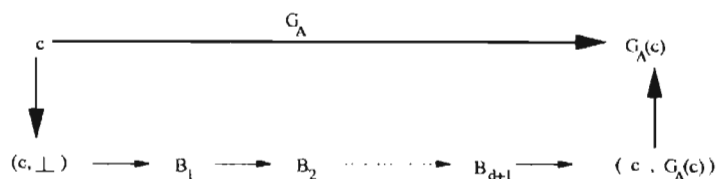


Figura 3.2: Diagrama para un ACNR.

Una pregunta inmediata del teorema anterior es: ¿porqué son necesarias $d + 1$ particiones? Por ejemplo consideremos el caso en que $d = 1$ y $r = 1$, entonces tenemos la malla de la fig. 3.3 donde cada celda toma un valor del conjunto finito de estados S . Puesto que $r = 1$, el valor de la celda i depende a lo más del valor de las celdas $(i - 1), i$ e $(i + 1)$.



Figura 3.3: Malla \mathbb{Z}^1 .

Al particionar la malla en bloques disjuntos de cuatro celdas cada uno, obtenemos la fig. 3.4.

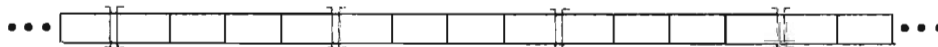


Figura 3.4: Bloques de cuatro celdas en la malla \mathbb{Z}^1 .

Definición 3. Una celda es frontera¹ de un bloque si pertenece al bloque, pero su vecindad r para poder determinar su valor no se encuentra contenida en él.

¹En el siguiente capítulo se dará la definición formal de frontera.

Consideremos las celdas marcadas con puntos en la fig. 3.5. Los valores de estas celdas no se pueden determinar dentro del bloque, ya que por definición de autómatata celular dependen de los valores de celdas que se encuentran fuera del bloque.

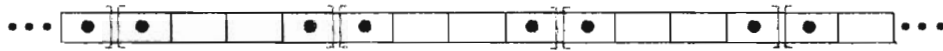


Figura 3.5: Fronteras de bloques.

Es necesario realizar otra partición de tal forma que las celdas interiores de ahora sean las fronteras de la partición anterior (ver fig. 3.6) esto para que no exista intersección de fronteras, pues de ser así el valor de esas celdas no se puede obtener. En este ejemplo tenemos que con dos particiones de bloques se puede cubrir bien (la intersección de celdas frontera entre las particiones es vacío) la malla \mathbb{Z}^1 .

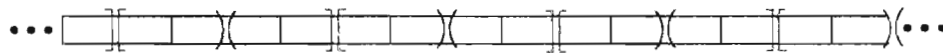


Figura 3.6: Dos particiones diferentes en la malla \mathbb{Z}^1 .

Ahora bien consideremos la malla \mathbb{Z}^2 y $r = 1$, particionemos la malla en bloques iguales no traslapados de 6×6 , como en la fig. 3.7. Obsérvese que el valor de las celdas frontera no puede ser determinado.

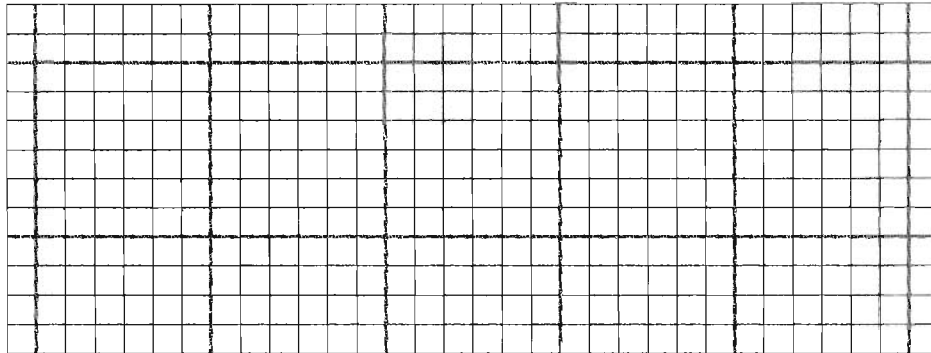


Figura 3.7: Una partición en la malla con bloques de 6×6 .

Al generar una segunda partición existe intersección de fronteras entre las dos particiones (celdas con puntos) como se puede apreciar en la fig. 3.8.

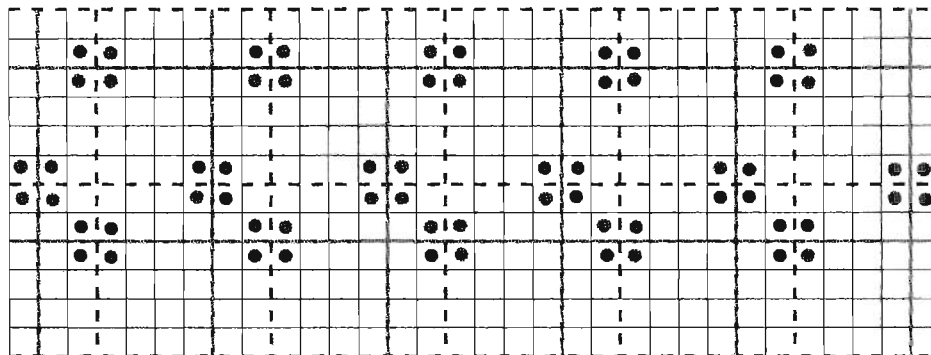


Figura 3.8: Intersección de fronteras entre dos particiones.

Para obtener todos los valores de la malla es necesario realizar una tercera partición como en la fig. 3.9 de modo que no exista intersección de fronteras

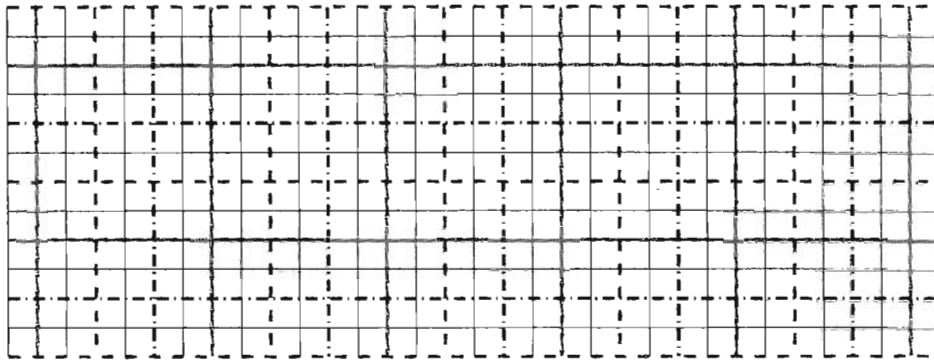


Figura 3.9: La malla es cubierta por tres particiones.

entre las tres particiones. Por lo tanto la malla \mathbb{Z}^2 se puede cubrir bien con tres particiones.

Un ACNR, también se puede expresar como la composición de $d + 1$ AB. Por ejemplo considérese el AC de la fig. 3.3, donde la i -ésima celda tiene el valor (c_i, \perp) .

Definición 4. Sea \mathcal{P} una familia de conjuntos no vacíos $\{P_1, P_2, \dots\}$ decimos que es una *partición* de \mathbb{Z}^d (o \mathcal{P} cubre a \mathbb{Z}^d) si y sólo si

- $\mathbb{Z}^d = P_1 \cup P_2 \cup \dots$
- P_1, P_2, \dots son mutuamente disjuntos.

donde P_1, P_2, \dots son llamados *bloques* de \mathcal{P} .

Definamos las celdas interiores de un bloque como $int_r(P_j) = \{x \in P_j \mid B_r(x) \subseteq P_j\}$ donde $r \in \mathbb{N}$ y $B_r(x) = \{\text{vecindad de tamaño } (2r+1)^d, \text{ con } x \text{ como celda central}\}$, y definamos las celdas frontera de un bloque por $\partial_r(P_j) = P_j - int_r(P_j)$.

Al realizar la primera partición, el valor futuro de las celdas que pertenecen a $\partial_r(P_j)$ no puede ser determinado, mientras que el valor de las celdas que pertenecen al interior del bloque sí (fig. 3.10), $b_i = f(c_{i-1}, c_i, c_{i+1})$.

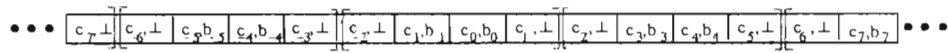


Figura 3.10: El valor de las celdas interiores se puede determinar.

Como quedan celdas cuyo valor no se puede determinar, se hace otra partición de tal forma que las celdas que pertenecen a $\partial_r(P_j)$ ahora sean celdas interiores del bloque (ver la fig. 3.11). Podemos observar que sí se pueden determinar los valores de todas las celdas del AC, sin necesidad de que éste sea reversible.

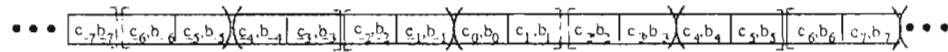


Figura 3.11: El valor de todas las celdas se puede determinar.

En general tenemos que para cualquier AC d -dimensional no reversible, la i -ésima celda con valor (c_i, \perp) sólo puede obtener los siguientes valores:

- $(c_i, \perp) \rightarrow (c_i, \perp)$, si $(c_i, \perp) \in \partial_r(P_j)$.
- $(c_i, \perp) \rightarrow (c_i, b_i)$, si $(c_i, \perp) \in \text{int}_r(P_j)$.

Como no se borra c_i en cada uno de los pasos es reversible. Por lo que obtenemos el siguiente teorema:

Teorema 3.2. *En cualquier dimensión d , cualquier AC de radio r puede expresarse como una composición de un AB con $d + 1$ particiones.*

3.2 Partición de bloques

En esta sección veremos como Durand-Lose [2] simula un autómata celular reversible con la composición de $d + 1$ PB con un ancho $w = 3(d + 1)r$.

Los siguientes conjuntos son subarreglos finitos de \mathbb{Z}^d . Ellos usan estados previos y siguientes durante la iteración. Denotemos por \vec{r} el vector (r, r, \dots, r) de \mathbb{Z}^d . Para cada λ en $\llbracket 0, d + 1 \rrbracket$, sean

$$E_\lambda^P = \bigcup_{x \in \mathbb{Z}^d} \left[\bigcup_{\lambda \leq \mu < d+1} (3\mu\bar{r} + \llbracket r, 3(d+1)r - r - 1 \rrbracket^d) + 3(d+1)r \cdot x \right]$$

$$E_\lambda^N = \bigcup_{x \in \mathbb{Z}^d} \left[\bigcup_{0 \leq \mu < \lambda} (3\mu\bar{r} + \llbracket r, 3(d+1)r - r - 1 \rrbracket^d) + 3(d+1)r \cdot x \right].$$

Una PB usa el conjunto de estados $(S \cup \{\perp\})^2$, almacena la configuración previa en la primera componente y la siguiente configuración en la segunda componente. Definamos de la siguiente forma las configuraciones:

$$\forall c \in C, \forall \lambda \in \llbracket 0, d+1 \rrbracket, E_\lambda(c) = (c|_{E_\lambda^P}, \mathcal{G}_A(c)|_{E_\lambda^N}). \quad (3.2.1)$$

Ejemplo 3.2.1. Considérese $d = 1, r = 1$ y sea $c \in C$ la configuración inicial dada en la fig. 3.12 i, la cual al aplicarle la función $b_i = f(c_{i-1}, c_i, c_{i+1})$ obtenemos la configuración de la fig. 3.12 ii.

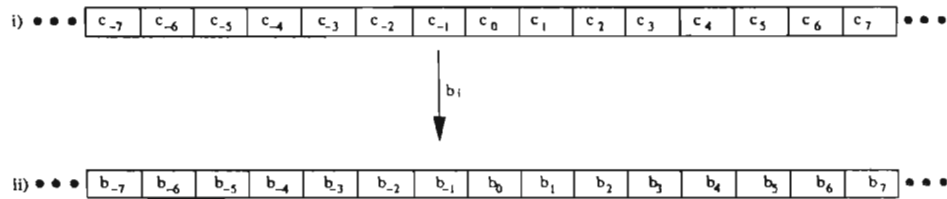


Figura 3.12: Autómata celular unidimensional.

Ahora bien, simulemos la configuración de la fig. 3.12 i por la composición de 2 particiones de bloques de ancho $w = 6$.

Sea $\bar{r} = 1$, entonces tenemos que $\lambda \in \llbracket 0, 2 \rrbracket$. Para $\lambda = 0$, según la ec. 3.2.1 tenemos que

$$E_0(c) = (c|_{E_0^P}, \mathcal{G}_A(c)|_{E_0^N}), \text{ donde } E_0^N = \emptyset \text{ y } E_0^P = \mathbb{Z}^d.$$

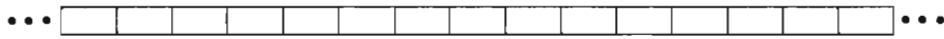


Figura 3.13: $E_0(c) = (c, \perp)$.

La celda i -ésima tiene el valor (c_i, \perp) . Para $\lambda = 1$

$$E_1(c) = (c|_{E_1^P}, \mathcal{G}_A(c)|_{E_1^N}),$$

donde $E_1^N = \bigcup_{x \in \mathbb{Z}^d} [\llbracket 1, 4 \rrbracket^1 + 6 \cdot x]$ es representado por $()$ y $E_1^P = \bigcup_{x \in \mathbb{Z}^d} [(3(1) + \llbracket 1, 4 \rrbracket^1) + 6 \cdot x]$ por \square en la fig. 3.14 a).

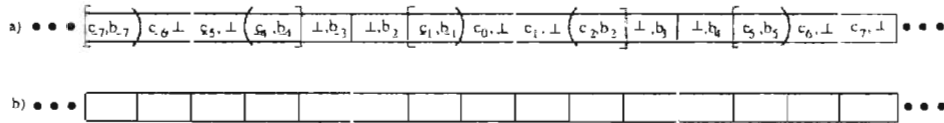


Figura 3.14: $E_1(c)$ y $E_2(c)$.

Finalmente para $\lambda = 2$, obtenemos

$$E_2(c) = (c|_{E_2^P}, \mathcal{G}_A(c)|_{E_2^N}),$$

donde $E_2^N = \mathbb{Z}^d$ y $E_2^P = \emptyset$ en la fig. 3.14 b). La i -ésima celda tiene el valor (\perp, b_i) .

Obsérvese que se llega a la misma configuración de la fig. 3.12 ii al realizar la simulación mediante la composición de particiones de bloques o al aplicar directamente la función (ver fig. 3.12), es decir

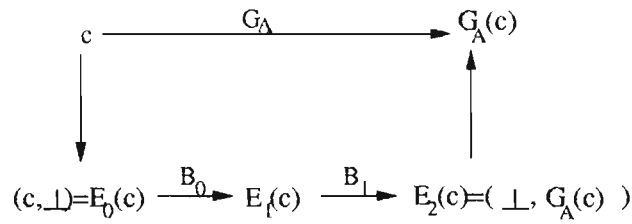


Figura 3.15: Diagrama para $d = 1$.

Ejemplo 3.2.2. Sea $d = 2$, $r = 1$ y $\bar{r} = (1, 1)$, entonces $\lambda \in \llbracket 0, 3 \rrbracket$. Para $\lambda = 0$, tenemos que

$$E_0(c) = (c_{|E_0^P}, G_A(c)_{|E_0^N}), \text{ donde } E_0^N = \emptyset \text{ y } E_0^P = \mathbb{Z}^d.$$

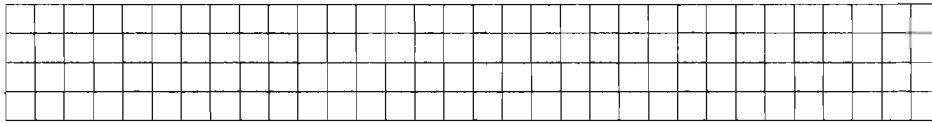


Figura 3.16: $E_0(c) = (c, \perp)$.

La celda i -ésima tiene el valor (c_i, \perp) en el autómata celular dado en la fig. 3.16. Ahora bien, para $\lambda = 1$

$$E_1(c) = (c_{|E_1^P}, G_A(c)_{|E_1^N}),$$

donde $E_1^N = \bigcup_{x \in \mathbb{Z}^d} [\llbracket 1, 7 \rrbracket^2 + 9 \cdot x]$ y $E_1^P = \bigcup_{x \in \mathbb{Z}^d} [((3(1, 1) + \llbracket 1, 7 \rrbracket^2) \cup (6(1, 1) + \llbracket 1, 7 \rrbracket^2)) + 9 \cdot x]$.

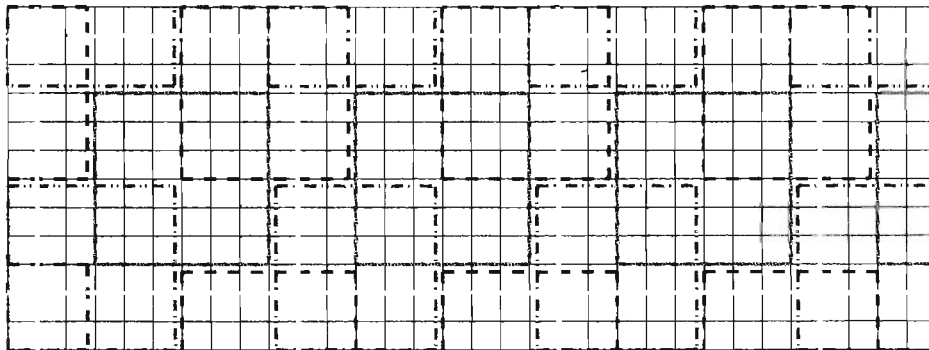


Figura 3.17: E_1 .

E_1^N esta representado por el color rojo y E_1^P por los colores azul y verde. La partición bloque es denotado con el color amarillo. Para el valor de $\lambda = 2$,

$$E_2(c) = (c_{E_2^P}, \mathcal{G}_A(c)_{|E_2^N}),$$

donde $E_2^N = \bigcup_{x \in \mathbb{Z}^d} [(\llbracket 1, 7 \rrbracket^2) \cup (3(1, 1) + \llbracket 1, 7 \rrbracket^2)] + 9 \cdot x$ y $E_2^P = \bigcup_{x \in \mathbb{Z}^d} [(6(1, 1) + \llbracket 1, 7 \rrbracket^2) + 9 \cdot x]$.

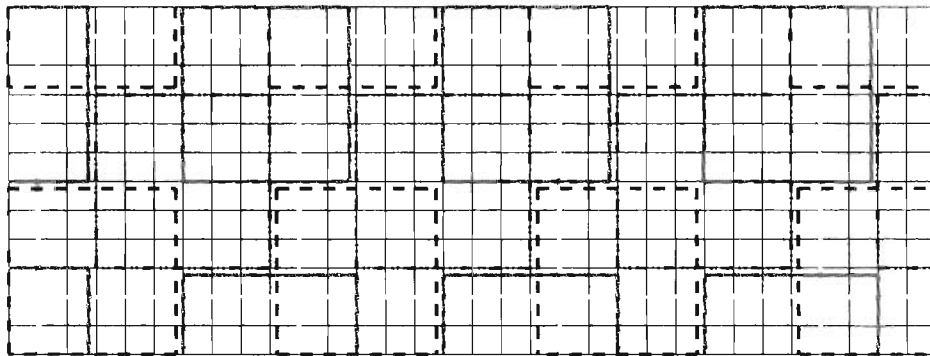


Figura 3.18: E_2 .

Aquí a E_2^N lo representan los colores rojo y azul, mientras que a E_2^P el color verde. Finalmente para $\lambda = 3$, obtenemos

$$E_3(c) = (c_{|E_3^P}, \mathcal{G}_A(c)_{|E_3^N}), \text{ donde } E_3^N = \mathbb{Z}^d \text{ y } E_3^P = \emptyset.$$

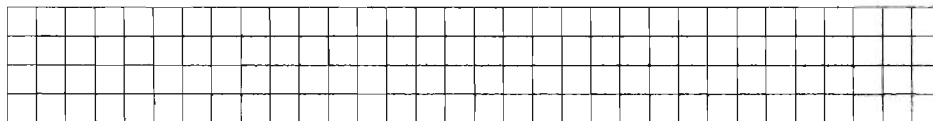


Figura 3.19: $E_3 = (\perp, b_i)$.

Se complica apreciar la simulación de un AC conforme se incrementa la dimensión, ya que no se pueden visualizar las particiones de bloques.

Sea $c \in C$ una configuración en el AC, tal que al aplicarle la función global $G_A(c)$ obtenemos otra configuración $c' \in C$. En la fig. 3.20 se muestra cómo a partir de c se puede generar la configuración c' mediante particiones de bloques como se define en 3.2.1.

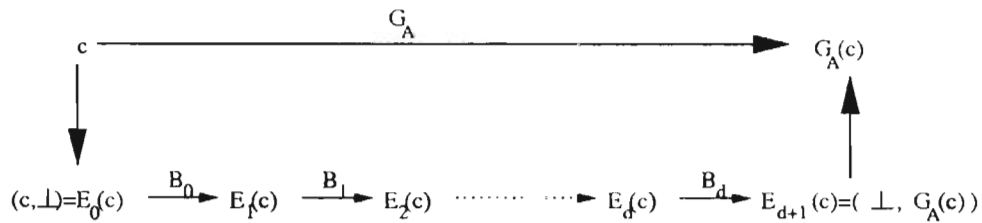


Figura 3.20: Diagrama.

Sea B_λ un PP de ancho $3(d+1)r$. La partición de bloques e_λ es definida tal que B_λ mapea reversibilidad de $E_\lambda(c)$ sobre $E_{\lambda+1}(c)$. Esto significa que los bloques correspondientes a $E_\lambda(c)$ y $E_{\lambda+1}(c)$ en la partición de B_λ se pueden determinar únicamente uno del otro. La partición de bloques fue utilizada para la demostración del teorema 3.1.

Capítulo 4

Autómatas celulares en árboles

Un árbol (infinito) es m -regular si el grado de cada vértice es m . Todos los vértices son equivalentes, es decir por simetría se puede tomar como centro del árbol m -regular a cualquier vértice.



Figura 4.1: Árbol 2-regular.

Podemos definir un AC en un árbol $G(V, E)$ m -regular. Ahora el conjunto de configuraciones es $C = S^{V(G)}$ (mapeos de vértices de G a un conjunto finito S), para cada $v \in V(G)$ denotamos el subconjunto $N(v) \subseteq V(G)$ (vecindad) el cual contiene a v y a los vértices adyacentes a él. Seleccionemos una función local $F_v : S^{N(v)} \rightarrow S$, F_v debe ser simétrica.

Puesto que en un árbol m -regular todos los vértices son equivalentes y por tanto indistinguibles, y por tanto F_v debe arrojar el mismo resultado para una configuración de vecinos que para cualquier reordenación de la misma configuración. Es decir F_v debe de ser simétrica en el sentido $F_v(v_1, \dots, v_m) = F_v(v_{\sigma_1}, \dots, v_{\sigma_m})$ para σ cualquier permutación de los vértices v_1, \dots, v_m que son la vecindad de v .

Definición 5. Los mapeos locales F_v inducen un mapeo global F del conjunto de configuraciones sobre ellas mismas. Sea c una configuración, definamos la configuración $F(c)$ por

$$\forall v \in V(G) \quad F(c)(v) := F_v(c|_{N(v)})$$

donde $c|_{N(v)}$ es la restricción de c a el conjunto $N(v)$.

En este capítulo veremos las particiones de árboles y no consideraremos los AC. Estas particiones las podemos usar para probar el análogo del teorema de Durand-Lose para AC en árboles.

Teorema 4.1. *Un autómata celular en un árbol G m -regular se puede expresar como la composición de dos AB.*

4.1 Partición de árbol

Definición 6. Sea \mathcal{P} una familia de conjuntos no vacíos $\{P_1, P_2, \dots\}$ decimos que es una *partición* de $V(G)$ (o \mathcal{P} cubre a G) si y sólo si

- $V(G) = P_1 \cup P_2 \cup \dots$
- P_1, P_2, \dots son mutuamente disjuntos.

donde P_1, P_2, \dots son llamadas *partes* de \mathcal{P} .

Sea $X \subseteq V$, definimos el interior de X por $\text{int } X = \{x \in X, B_1(x) \subseteq X\}$, donde $B_1(x) = \{y \in V(G), \psi_G(e) = \{y, x\}\}$, la frontera de X es $\partial X = X - \text{int } X$ y la frontera de una partición es $\partial \mathcal{P} = \cup_{P \in \mathcal{P}} \partial P$.

Sean $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \dots, \mathcal{P}_l$ particiones de $V(G)$.

Definición 7. Las $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \dots, \mathcal{P}_l$ *cubren bien* el árbol G si, y sólo si,

$$\partial \mathcal{P}_1 \cap \partial \mathcal{P}_2 \cap \dots \cap \partial \mathcal{P}_l = \emptyset.$$

De aquí en adelante se considerará que todas las partes de una partición son finitas.

En este trabajo obtuvimos que 2 particiones es el mínimo valor de l para cubrir bien un árbol G m -regular. No es posible cubrir bien el árbol G si estas partes no contienen vértices de grado $m - 1$.

4.2 Árbol 2-regular

En esta sección consideraremos un árbol 2-regular.

Proposición 1. *Sea $G(V, E)$ un árbol 2-regular, sean \mathcal{P} y \mathcal{Q} dos particiones de $V(G)$ con todas sus partes isomorfas entre sí y $|P| \geq 4$, entonces con dos particiones cubren bien el árbol.*

Demostración. Para $|P| \geq 4$ todas las partes cumplen que $|\partial P| \leq |int P|$, ya que independientemente del tamaño de la parte siempre tendremos que $|\partial P| = 2$, esto se debe a la estructura del árbol (ver fig. 4.2) y además $|int P| \geq 2$. Una vez fijadas las partes de la primera partición, generamos las partes de la segunda partición de tal forma que estén trasladadas dos vértices de como se encuentran las partes de la primera partición. Por lo que concluimos que con dos particiones se puede cubrir bien el árbol 2-regular, ya que $\partial \mathcal{P} \cap \partial \mathcal{Q} = \emptyset$.



Figura 4.2: Árbol 2-regular.

□

Ejemplo 4.2.1. Sea $G(V, E)$ un árbol 2-regular como el de la fig. 4.2.

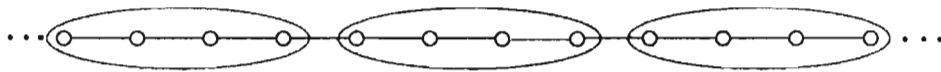


Figura 4.3: Una partición en el árbol.

Al generar una partición en el árbol en la que sus partes cumplen: $\forall i |P_i| = 4$, no se pueden obtener los valores de los vértices frontera (fig. 4.3). Es necesario hacer una segunda partición trasladada dos vértices de las partes de la posición de la primera partición (fig. 4.4), para que todos los valores de los vértices puedan ser determinados.

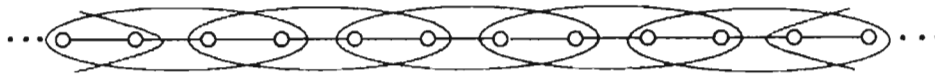


Figura 4.4: Árbol cubierto por dos particiones.

Con dos particiones en las que sus partes cumplen que $|P| = 4$, se cubre bien el árbol 2-regular.

4.3 Árbol m -regular

4.3.1 Partes con raíz y hojas

Todas las particiones que consideraremos en esta subsección son de la siguiente forma: Sea $\mathcal{P} = \{P_1 P_2 \dots\}$, cada parte P_i de la partición genera un subárbol inducido. Todas las partes tienen raíz y hojas de profundidad n . Cada parte tiene un vértice raíz de grado $(m - 1)$ el cual es frontera, las hojas de la parte son vértices de grado uno, los cuales también son frontera y los vértices interiores son vértices intermedios de grado m .

En la fig. 4.5 podemos observar una parte de profundidad 3.

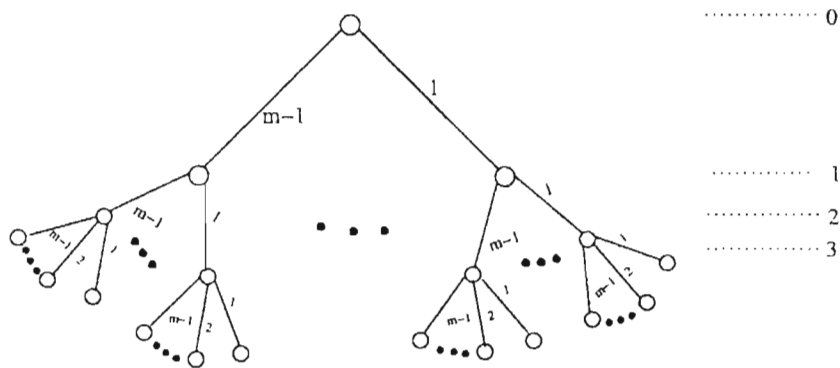


Figura 4.5: Parte de profundidad 3.

La parte con profundidad n (fig. 4.6) cumple:

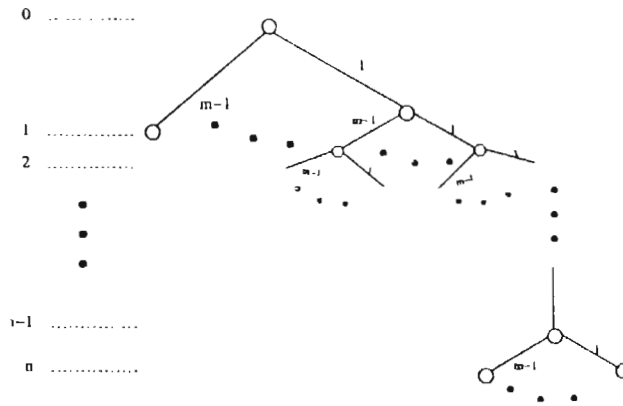


Figura 4.6: Parte con profundidad n .

$|\partial P| = (m-1)^n + 1$ y $|\text{int } P| = \sum_{j=1}^{n-1} (m-1)^{n-j}$,
 por lo que $|P| = |\partial P| + |\text{int } P|$.

Sean \mathcal{P} y \mathcal{Q} en tal modo que $\partial\mathcal{P} \cap \partial\mathcal{Q} = \emptyset$. Sea $Q_i \in \mathcal{Q}$ una parte cuya raíz pertenece a una parte $P_j \in \mathcal{P}$. Queremos ver cuáles son las posibles orientaciones de Q_i respecto de P_j . Consideraremos que la raíz de Q_i se encuentra a profundidad r en P_j . Entonces, debe ser $0 < r < n-1$ para asegurar $\partial P_j \cap \partial Q_i = \emptyset$, ver la fig. 4.7.

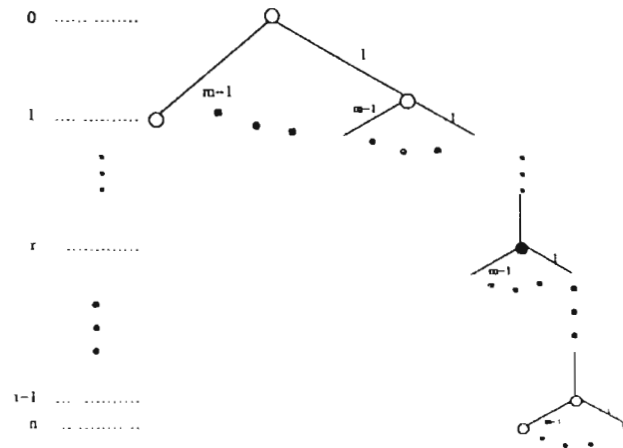


Figura 4.7: Profundidad r , $0 < r < n-1$.

r será la raíz de $Q_i \in Q$, por lo que existen dos maneras de orientar la parte (fig. 4.8) ya que sólo se incluye o no la arista e_0 a la parte.

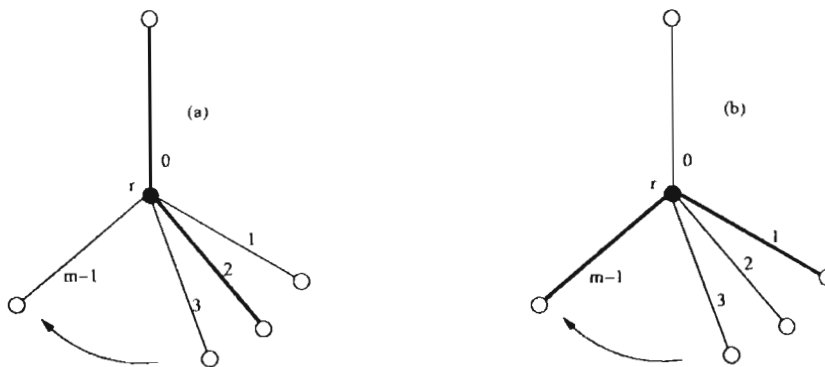


Figura 4.8: Orientación de la parte.

Proposición 2. Si $\partial P \cap \partial Q = \emptyset$, entonces la orientación (a) de la fig. 4.8 es imposible.

Demostración. Sea G un árbol m -regular ($m > 2$), sean P y Q dos particiones de $V(G)$ con todas sus partes isomorfas a la fig. 4.6 y consideremos el caso (a) de la fig. 4.8.

$P_j \in P$ tiene fronteras en la raíz y las hojas, i.e., en las profundidades: 0 y n en el árbol. Los vértices a profundidad $n + 1$ también son fronteras de otras partes, independientemente de cómo se acomoden las partes restantes.

La parte $Q_i \in Q$ inicia a profundidad r , donde $0 < r < n - 1$. Obtenemos que Q_i tiene fronteras en r y $r + n$, esto para las $(m - 2)$ aristas del vértice a profundidad r . Las $(m - 2)$ aristas también tienen vértices frontera de otras partes a una profundidad $r + n + 1$, independientemente de como se acomoden las partes restantes de la partición.

Las partes restantes tendrán fronteras en (ver fig. 4.9):

$n - r + 2i$ y $n - r + 2i + 1$, para $i = 0, \dots, r$, independientemente de cómo se acomoden las partes restantes de la partición.

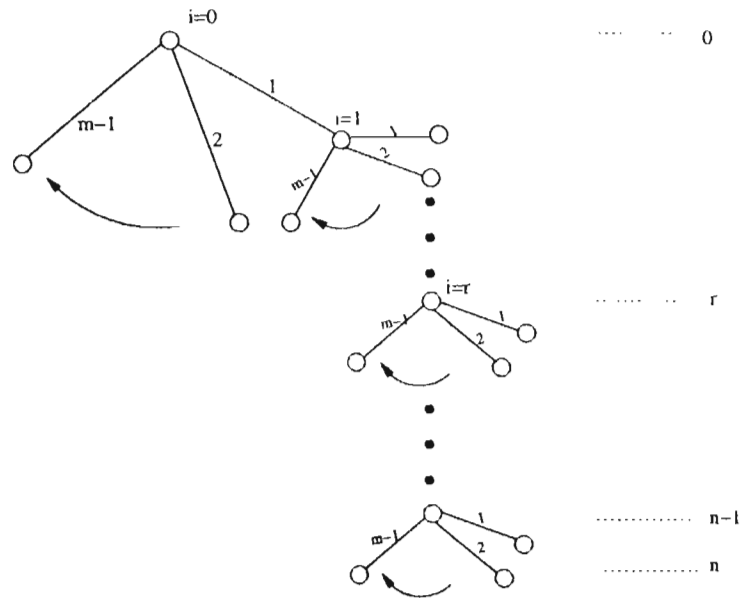


Figura 4.9: Generación de fronteras de algunas partes.

Podemos observar que $\partial P \cap \partial Q \neq \emptyset$ para

$$i = \begin{cases} \frac{r}{2} & \text{si } r \text{ es par} \\ \frac{r-1}{2} & \text{si } r \text{ es impar} \end{cases}$$

Por lo que concluimos que, considerando el caso (a) de la fig. 4.8, no se puede cubrir bien G con dos particiones en las que sus partes son isomorfas a la fig. 4.6. \square

Para el caso (b) de la fig. 4.8 el vértice a profundidad $(r-1)$ es frontera, el cual puede ser hoja o raíz. Si es raíz entra en el caso (a); por lo que consideraremos que el vértice a profundidad $(r-1)$ es hoja de otra parte de la partición.

Teorema 4.2. *Un árbol G m -regular se cubre bien con dos particiones.*

Demostración. Sea G un árbol m -regular, sean \mathcal{P} y \mathcal{Q} dos particiones de $V(G)$ con todas sus partes isomorfas a la fig. 4.6, las partes con una profundidad $n \geq 3$

y no permitiéndose que en la $N(v)$ donde v es una raíz de cierta parte, exista una raíz de otra parte.

Para expresar más fácil las particiones, primero orientamos G en tal modo que de cada vértice salgan $(m - 1)$ aristas y llegue 1 arista.

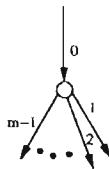


Figura 4.10: Vértice con aristas direccionadas.

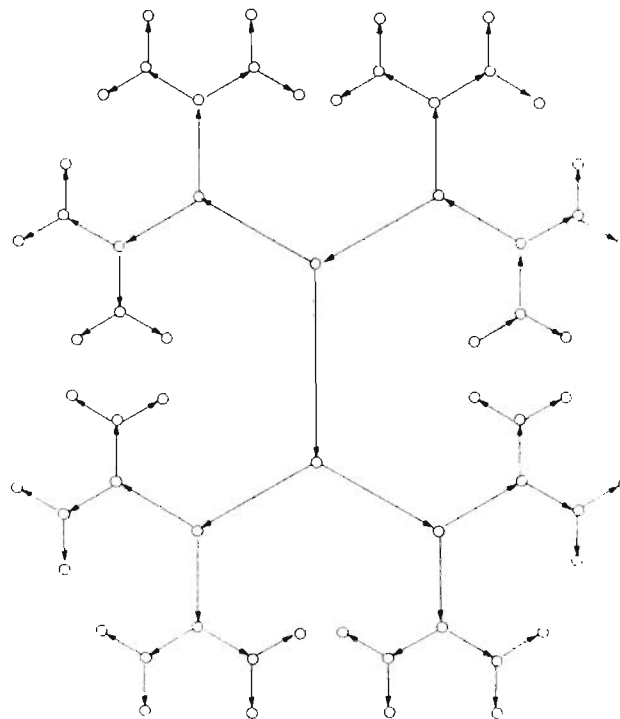


Figura 4.11: Ejemplo de árbol 3-regular direccionado.

Es decir las partes isomorfas a la fig. 4.12.

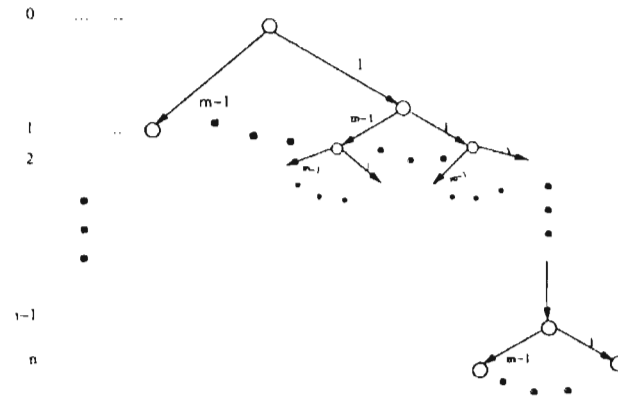


Figura 4.12: Parte de profundidad n con aristas direccionadas.

Fijemos una parte $P_i \in \mathcal{P}$. Se ve fácilmente que no existe intersección de fronteras. Para cualquier vértice del árbol existe un único camino en sentido contrario a la dirección de las aristas. El camino es único ya que de cada vértice salen $(m-1)$ aristas y llega 1. Denotemos a la raíz por r y a la hoja por h , el camino se encuentra de la siguiente forma:

$$\dots, r_{\mathcal{P}}, h_{\mathcal{P}}, r_{\mathcal{Q}}, h_{\mathcal{Q}}, (n-3) \cdot v, r_{\mathcal{P}}, h_{\mathcal{P}}, r_{\mathcal{Q}}, h_{\mathcal{Q}}, (n-3) \cdot v, \dots$$

donde el subíndice de r y h indica a qué partición pertenece y los $(n-3)$ vértices son vértices interiores de \mathcal{P} y \mathcal{Q} . El que el camino sea único y con esa estructura, nos garantiza que no existe intersección de fronteras. Esto se debe a la forma en que se encuentran direccionadas las partes. \square

Ejemplo 4.3.1. Sea G un árbol 3-regular, sean \mathcal{P} y \mathcal{Q} dos particiones de $V(G)$, tales que todas sus partes son isomorfas a la fig. 4.13.

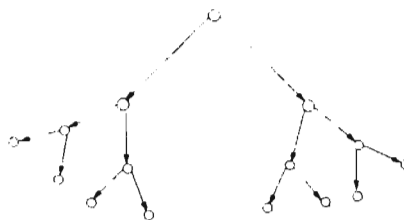


Figura 4.13: Parte de profundidad 3 con aristas direccionadas.

En la fig. 4.14 las partes de la partición \mathcal{P} están denotadas por el color rojo y las partes de Q con el color verde. La raíz r es el vértice relleno, mientras que las hojas h son vértices sin relleno.

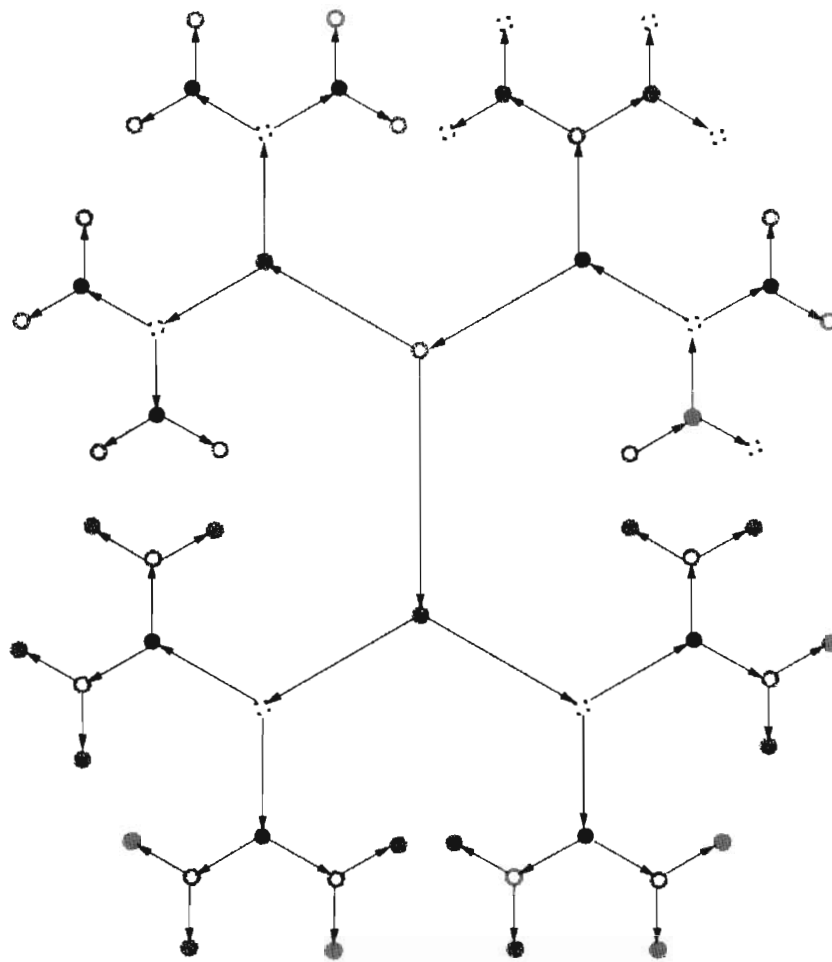


Figura 4.14: Dos particiones en un árbol 3-regular.

Obsérvese que al seleccionar cualquier raíz a una profundidad 4, obtenemos el siguiente camino:

$$r_{\mathcal{P}}, h_{\mathcal{P}}, r_{\mathcal{Q}}, h_{\mathcal{Q}}, r_{\mathcal{P}}, h_{\mathcal{P}}, r_{\mathcal{Q}}, h_{\mathcal{Q}}, r_{\mathcal{P}}, h_{\mathcal{P}}, \dots$$

Ejemplo 4.3.2. Considérese G un árbol 3-regular, sean \mathcal{P} y \mathcal{Q} dos particiones de $V(G)$, tales que todas sus partes son isomorfas a la fig. 4.13, pero ahora ésta con profundidad 4.

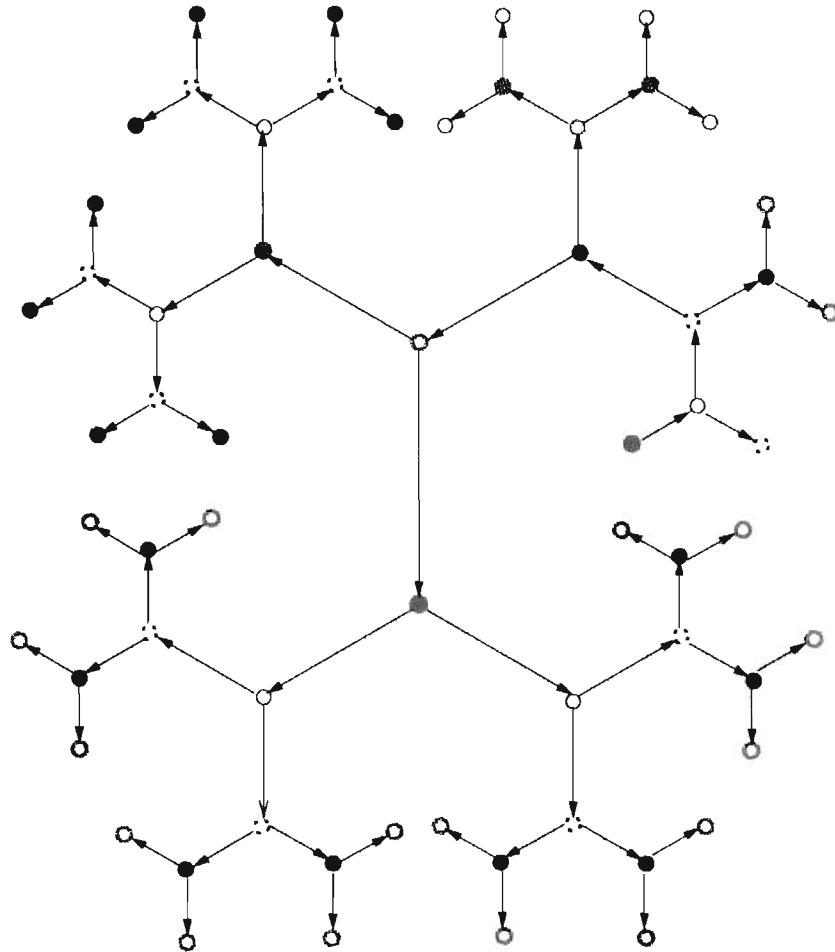


Figura 4.15: Árbol 3-regular cubierto bien con partes de profundidad 4.

A una profundidad 4, obtenemos el siguiente camino

$$h_{\mathcal{P}}, r_{\mathcal{Q}}, h_{\mathcal{Q}}, v, r_{\mathcal{P}}, h_{\mathcal{P}}, r_{\mathcal{Q}}, h_{\mathcal{Q}}, v, r_{\mathcal{P}}, \dots$$

donde v es un vértice interior de \mathcal{P} y \mathcal{Q} .

Sea $X \subseteq V$, definimos el interior de X como $int_r X = \{x \in X, B_r(x) \subseteq X\}$, donde $r \in \mathbb{N}$ y $B_r(x) = \{y \in V(G), \exists \text{ un camino de long. } r \text{ de } x \text{ a } y\}$, la frontera de X por $\partial_r X = X - int_r X$ y $\partial \mathcal{P} = \cup_{P \in \mathcal{P}} \partial P$.

Teorema 4.3. *Un árbol G m -regular se cubre bien con dos particiones.*

Demostración. Sea G un árbol m -regular, sean \mathcal{P} y \mathcal{Q} dos particiones de $V(G)$ con todas sus partes isomorfas a la fig. 4.12, las partes con una profundidad $n \geq 4r - 1$ y no permitiéndose que en la $N(v)$ donde v es una raíz de cierta parte, exista una raíz de otra parte.

Fácilmente podemos apreciar que no existe intersección de fronteras debido a que existe un único camino en sentido contrario a la dirección de las aristas. El camino se encuentra estructurado de la siguiente forma:

$$\dots, 2r \cdot v_{\partial \mathcal{P}}, 2r \cdot v_{\partial \mathcal{Q}}, (n - 4r + 1) \cdot v, 2r \cdot v_{\partial \mathcal{P}}, 2r \cdot v_{\partial \mathcal{Q}}, (n - 4r + 1) \cdot v, \dots$$

donde el subíndice de v indica que pertenece a la frontera de \mathcal{P} o \mathcal{Q} y los $(n - 4r + 1)$ vértices son vértices interiores de \mathcal{P} y \mathcal{Q} .

□

Ejemplo 4.3.3. Considérese G un árbol 3-regular y $r = 2$, sean \mathcal{P} y \mathcal{Q} dos particiones de $V(G)$, tales que todas sus partes son isomorfas a la fig. 4.16.

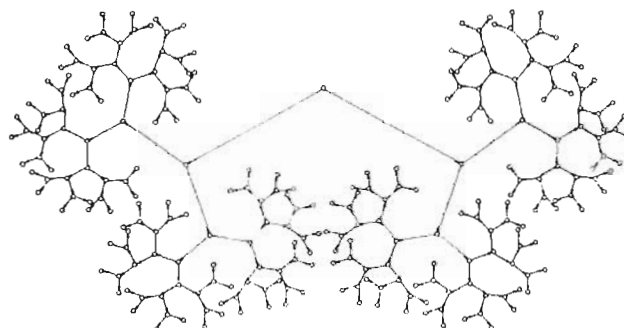


Figura 4.16: Parte de profundidad 7 con aristas direccionadas.

Obtenemos el siguiente camino

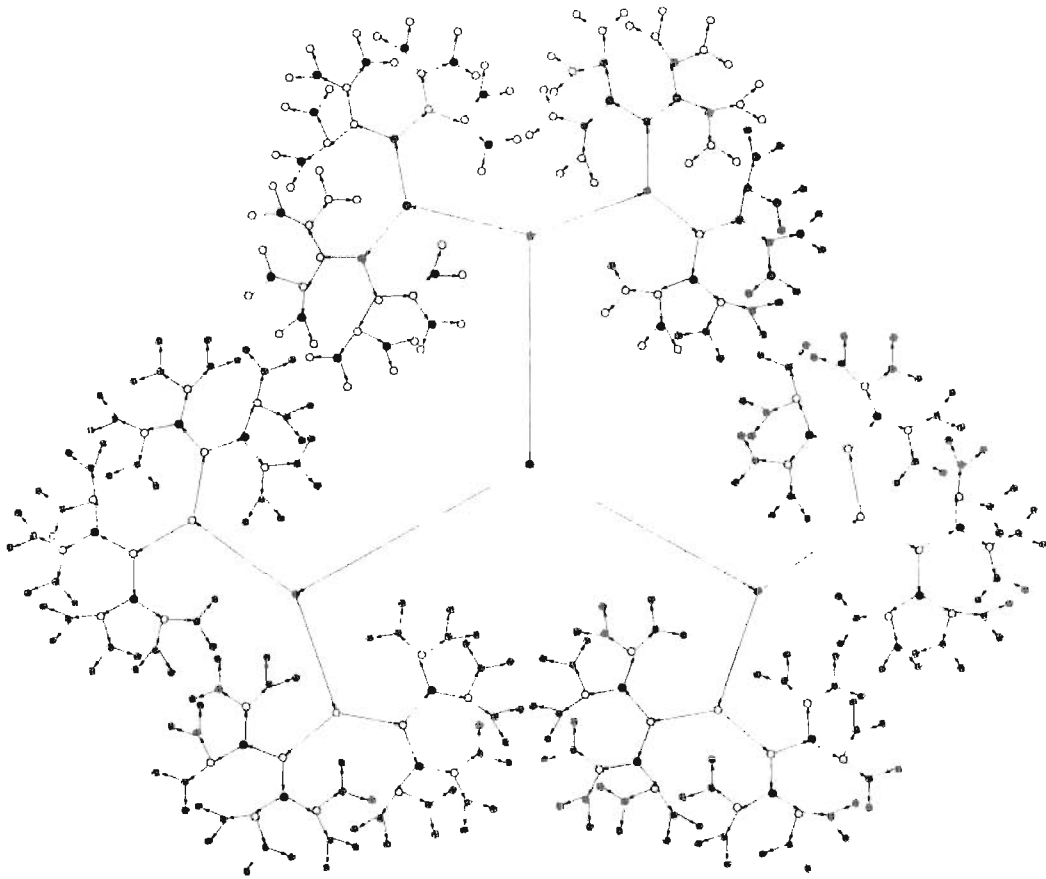


Figura 4.17: Árbol 3-regular cubierto bien con partes de profundidad 7 y $r = 2$.

$v_{\partial P}, v_{\partial P}, v_{\partial Q}, v_{\partial Q}, v_{\partial Q}, v_{\partial Q}, v_{\partial P}, v_{\partial P}, v_{\partial P}, v_{\partial P}, v_{\partial Q}, v_{\partial Q}, v_{\partial Q}, \dots$

4.3.2 Partes que no contienen vértices de grado $m - 1$

En esta subsección consideraremos a todas las particiones de la siguiente forma: Sea $\mathcal{P} = \{P_1 P_2 \dots\}$, cada parte P_i de la partición no contiene vértices de grado $(m - 1)$. Los vértices frontera de cada parte son de grado menor o igual a $(m - 2)$ y los vértices interiores son de grado m .

Al realizar un análisis para ver se cubre bien un árbol m -regular con dos particiones, obtuvimos los siguientes resultados:

Proposición 3. *Sea $G(V,E)$ un árbol m -regular y $\mathcal{P} = \{P_1 P_2 \dots\}$ una partición, $K \subseteq G$ es una subgráfica conexa infinita (camino), entonces $K \cap \partial\mathcal{P} \neq \emptyset$.*

Demostración. Supongamos que $K \subseteq G$ es una subgráfica conexa infinita, existe una parte $P_i \in \mathcal{P}$ tal que $K \cap P_i \neq \emptyset$ y $K \cap \bar{P}_i \neq \emptyset$ esto por ser K infinito, entonces $K \cap \partial P_i \neq \emptyset$ ya que de lo contrario K sería desconexo. Por otro lado sabemos que $\partial\mathcal{P} = \partial P_1 \cup \partial P_2 \cup \dots$, por lo que $K \cap \partial\mathcal{P} \neq \emptyset$. \square

Definamos a $G_i \cong P_i \in \mathcal{P}$ tal que sus vértices sean de grado m y $\leq m - 2$, donde $m \geq 3$.

Proposición 4. *Sea G_i un subárbol de G que no tiene vértices de grado $m - 1$, entonces $\partial\mathcal{P}$ contiene un camino infinito.*

Demostración. El que G_i no tenga vértices de grado $(m - 1)$ significa que si tenemos un $v \in \partial G_i$ ($\deg(v) \leq m - 2$), entonces existen por lo menos dos vértices $u, w \in N(v)$ que también son fronteras de otras partes. Por lo que se puede formar el camino v, u ; a su vez u, w tienen en su vecindad por lo menos dos vértices frontera $u', u'' \in N(u)$, formando el camino v, u, u' . Ya que el árbol es m -regular, podemos seguir hasta formar un camino infinito (v, u, u', \dots) de vértices frontera, los cuales están contenidos en $\partial\mathcal{P}$. \square

Obtenemos así el siguiente resultado en base a las proposiciones mencionadas anteriormente:

Teorema 4.4. *Sea $G(V,E)$ un árbol m -regular, sean \mathcal{P} y \mathcal{Q} dos particiones, donde $\forall P \in \mathcal{P}, P$ no contiene vértices de grado $m - 1$, entonces $\partial\mathcal{P} \cap \partial\mathcal{Q} \neq \emptyset$.*

Capítulo 5

Conclusiones

Durand-Lose demostró que en \mathbb{Z}^d , cualquier ACR puede expresarse como la composición de $d + 1$ PB. Al realizar un análisis del teorema de Durand-Lose se pudo observar que a pesar de que el ACNR, de igual manera se puede realizar la composición de bloques si no borramos c . El que la composición sea de $d + 1$ particiones de bloques se debe a la geometría de \mathbb{Z}^d que a la reversibilidad de AC.

Se realizó un análisis para los árboles m -regulares, para ver si era posible minimizar el número de particiones a dos para cubrir bien un árbol m -regular, observando lo siguiente:

Cuando dos particiones tienen todas sus partes isomorfas a la fig. 4.6, y considerando el caso de que en la vecindad de la raíz de una parte, exista una raíz que pertenece a otra parte, concluimos que es imposible cubrir bien el árbol m -regular.

Si las partes de las dos particiones son isomorfas entre sí a la fig. 4.6 y no se permite que en la vecindad de la raíz de una parte, exista una raíz que pertenece a otra parte, sí se puede cubrir bien el árbol m -regular. De esto se sigue el análogo al teorema de Durand-Lose para AC en un árbol m -regular, el cual se puede expresar como la composición de dos particiones.

Si las partes de las dos particiones no contienen vértices de grado $(m - 1)$ es imposible cubrir bien el árbol con sólo dos particiones. Al cubrir el árbol m -regular con las partes de una partición se generan caminos infinitos de vértices frontera, por lo que existe intersección de las fronteras de las dos particiones.

Bibliografía

- [1] BONDY, J., AND MURTY, U. S. R. *Graph Theory with Applications*. University of Waterloo Ontario, Canada, 1976.
- [2] DURAND-LOSE, J. Representing reversible cellular automata with reversible block cellular automata. *Discrete Mathematical and Theoretical Computer Science AA* (2001), 145–154.
- [3] HEDLUND, G. A. Endomorphisms and automorphisms of the shift dynamical system. *Mathematical System Theory* 3 (1969), 320–375.
- [4] KARI, J. Representation of reversible cellular automata with block permutations. *Mathematical System Theory* 29 (1996), 47–61.
- [5] MARTIN, B. A geometrical hierarch on graphs via cellular automata. *Fundamenta Informaticae* 52 (2002).
- [6] RICHARDSON, D. Tessellation with local transformations. *J. Comp. Syst. Sci* 6 (1972), 373–388.
- [7] TOFFOLI, T., AND MARGOLUS, N. Invertible cellular automata: A review. *Physica D* 45 (1990), 229–253.