



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE SAN LUIS POTOSÍ
FACULTAD DE CIENCIAS



**ANÁLISIS DEL DESEMPEÑO
DE UN SISTEMA DE
COMUNICACIÓN CAÓTICA**

TESIS PROFESIONAL

para obtener el título de

MAESTRÍA EN CIENCIAS APLICADAS

PRESENTA:

EDUARDO JIMÉNEZ LÓPEZ

SAN LUIS POTOSÍ, S. L. P. JULIO 2009



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE SAN LUIS POTOSÍ



FACULTAD DE CIENCIAS

IMPLEMENTACIÓN Y ANÁLISIS
DE UN SISTEMA DE
COMUNICACIÓN CAÓTICA

TESIS
QUE PARA OBTENER EL GRADO DE
MAESTRO EN CIENCIAS APLICADAS

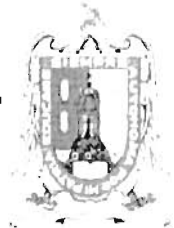
PRESENTA
EDUARDO JIMÉNEZ LÓPEZ

ASESORES DE TESIS:
DR. JOSÉ SALOMÉ MURGUÍA IBARRA
DR. ERIC CAMPOS CANTÓN

SAN LUIS POTOSÍ, SLP. JULIO 2009



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE SAN LUIS POTOSÍ



FACULTAD DE CIENCIAS

ANÁLISIS DEL DESEMPEÑO
DE UN SISTEMA DE
COMUNICACIÓN CAÓTICA

I. E. EDUARDO JIMÉNEZ LÓPEZ

SINODALES

DR. JOSÉ SALOMÉ MURGUÍA IBARRA (ASESOR)

DR. ERIC CAMPOS CANTÓN (ASESOR)

DR. MARCELA MEJÍA CARLOS

DR. RAUL BALDERAS NAVARRO

SAN LUIS POTOSÍ, S.L.P., JULIO 2009

Agradecimientos

Primeramente mi total agradecimiento a la vida que me ha dado tanto y que me ha permitido este logro tan importante.

Así como también he de reconocer el esfuerzo y dedicación de mis padres, por su apoyo, consejos y que siempre estuvieron en esos momentos buenos y malos en esta etapa de mi vida.

A mi esposa Ruth y a su familia por su apoyo durante la realización de este trabajo.

A mis hermanos que con su apoyo y motivación me impulsaron a seguir adelante con mi meta.

También quiero expresar mi total agradecimiento a mis abuelos paternos por su apoyo incondicional que me brindaron durante mi estancia en la U.A.S.L.P. y mi vida académica anterior.

A mis asesores, el Dr. José Salomé Murguía Ibarra y al Dr. Eric Campos Cantón, que gracias a su paciencia y apoyo ha sido posible el desarrollo de este trabajo.

A la administradora C. P. María Natividad Vázquez Orta, y a al director M.I. Jesús Alvarado Llamas del DFM-UASLP por todas las facilidades y ayuda otorgada.

Al laboratorio de Procesamiento de Señales del DFM-UASLP donde se realizó el trabajo para esta tesis, con financiamiento parcial de FAI-UASLP(2008).

Por otro lado no puedo olvidar a los muchos profesores que han ido guiando mi desarrollo académico y personal.

A mis compañeros: Cecilia Vargas, Samuel Kolosovas, Manuel Gutiérrez, Luis Issac Lugo, Emmanuel Segura, Alan Sustaita, Nicolas Ulloa, Emmanuel Rivera, Jorge Barrios por su amistad y ayuda que me brindaron en todo momento.

En general gracias a todas las personas que participaron directa e indirectamente y que hicieron posible este trabajo.

RESUMEN

En este trabajo se realiza la implementación numérica y su respectiva evaluación de un sistema de comunicación basado en la modulación paramétrica y la sincronización de osciladores caóticos considerando el oscilador caótico de Chua.

Como parte de la evaluación, se determina el conjunto de amplitudes y frecuencias de la señal de información que el sistema de comunicación permite para poder recuperar dicha señal con el error mínimo posible. A tal conjunto lo denominamos como la región útil (RU) del sistema.

Además, se realiza un análisis de las series temporales generadas por el sistema con la Transformada Ondeleta (TO), herramienta matemática que nos proporciona información adicional de la dinámica del sistema de comunicación.

Índice general

1. Introducción	1
2. Fundamentos Teóricos	5
2.1. Osciladores Caóticos	5
2.1.1. Sistema Caótico de Chua	5
2.1.2. Sistema caótico tipo Rössler	7
2.2. Esquemas de acoplamiento	9
2.3. Sistema de Comunicación	11
2.3.1. Modulación Paramétrica	12
2.4. Teoría Ondeleta	14
2.4.1. Transformada Ondeleta Continua	14
2.4.2. Transformada Ondeleta Discreta	15
3. Implementación Numérica del Sistema de Comunicación	21
3.1. Bloque Transmisor	21
3.1.1. Señal de información	21
3.1.2. Oscilador caótico	22
3.2. Bloque Receptor	24
4. Caracterización	31
4.1. Cálculo de la región útil(RU)	31
4.1.1. Estimación de τ	32

4.1.2. Estimación de θ	33
4.1.3. Región útil	33
4.2. Repercusión (Influencia) del acoplamiento	37
4.3. Análisis de Series de Tiempo Caóticas	39
4.3.1. Análisis de STC no moduladas	41
4.3.2. Análisis de STC moduladas	45
5. Conclusiones	51
Bibliografía	55

Índice de figuras

1.1. Sistema de comunicación de enmascaramiento caótico	2
1.2. Sistema de dinámica simbólica	3
1.3. Sistema de Comunicación de Modulación Paramétrica.	4
2.1. Diagrama esquemático del autocircuito de Chua y la b) Resistencia negativa no lineal N_{NL} . Los valores de las componentes electrónicas que producen la dinámica del doble enroscado son: $C_1 = 0,001\mu F$, $C_2 = 0,01\mu F$, $L_1 = 18\text{ mH}$, $R = 5\text{ k}\Omega$, $R_1 = 750\Omega$, $R_2 = R_3 = 220\Omega$ y $R_4 = 1,2\text{ k}\Omega$. Los diodos D_1 y D_2 son 1N914 y el amplificador operacional A1 es un TL082.	6
2.2. Curva característica de la resistencia negativa no lineal.	7
2.3. Atractor de Chua proyectado en el plano $x - y$	8
2.4. Diagrama esquemático del circuito caótico de Rössler	8
2.5. Atractor caótico de Rössler obtenido experimentalmente del circuito mostrado en la figura	9
2.6. Acoplamiento Mútuo.	9
2.7. Acoplamiento unidireccional.	10
2.8. Acoplamiento de sistema - sub-sistema.	10
2.9. Diagrama de bloques de un sistema de comunicación caótico.	12
2.10. Espacios vectoriales para la función de escala $\varphi(t)$ y su ondeleta $\psi(t)$	17
2.11. Espacios vectoriales para la función de escala $\varphi(t)$ y su ondeleta $\psi(t)$	18
3.1. Diagrama a bloques del transmisor del sistema de comunicación	22
3.2. Señal de información a considerar, con una amplitud $A = 1$ y frecuencia $f = 1$ KHz.	22

3.3.	(a) Atractor del oscilador caótico de Chua en su versión numérica. (b) Estado del sistema a transmitir.	23
3.4.	Diagrama a bloques del receptor del sistema de comunicación.	24
3.5.	Sincronización del estado y_t del sistema del bloque transmisor, con el estado reconstruido \hat{y}_t , del sistema receptor.	25
3.6.	Comparación de la señal reconstrucción contra la señal original transmitida. A) Señal de información con frecuencia de 2000Hz . B) Señal de información con frecuencia de 1000Hz . C) Señal de información con frecuencia de 6000Hz	26
3.7.	Diseño del bloque transmisor del sistema de comunicación usando el simulador de circuitos Multisim.	27
3.8.	Resultados obtenidos de la simulación del circuito "experimental", mostrando la dinámica caótica correspondiente al atractor de Chua.	27
3.9.	Bloque receptor en Multisim.	28
3.10.	Ventana gráfica de un osciloscopio que despliega la sincronización de los estados y_t, \hat{y}_t	28
3.11.	Ventana gráfica de un osciloscopio que despliega la comparación de la señal de información (mayor amplitud) con la señal recuperada (menor amplitud).	29
4.1.	a) Señal de información a ser transmitida y b) su respectiva estimación en Grafica del barrido de retardos para encontrar el error mínimo mediante τ^* . c) Superposición de la información original y su estimación introduciendo el menor retardo τ^* y la amplificación C^*	34
4.2.	Error entre la señal de información transmitida y la reconstruida en el sistema de comunicación propuesto. a) Amplitud del error para una señal de información de amplitud $A = 1$ y valor de umbral de error 0.5 . b) Comportamiento de los errores obtenidos para una señal de información con amplitud $A = 0.5, 1, 1.5$ y $A = 2$ x umbral de error de 0.5	35
4.3.	a) Señal de información transmitida con frecuencia de 2 kHz . b) señal de información estimada del caso a). c) señal de información con frecuencia 1 kHz y d) su respectiva estimación.	36
4.4.	Región útil del sistema de comunicación considerando un umbral de error igual 0.01	36
4.5.	Valores de los parámetros de retardo τ^* y amplificación C^* para una señal de información con amplitud $A = 1$ considerados en la RU.	37
4.6.	Valores de los parámetros de retardo τ^* y amplificación C^* para una señal de información con amplitud $A = 2$ considerados en la RU.	38

4.7. Histogramas correspondientes al caso de $\sigma_1 = \sigma_2$. (a) Situación en que no se tiene presencia de la señal de información en la dinámica del sistema. Los demás incisos consideran la señal de información presente en la dinámica con amplitud $A = 1$ y frecuencias (b)1 kHz, (c)10 kHz, (d)20 kHz, (e)30 kHz y (f) 40 kHz. 39

4.8. Histogramas correspondientes al caso de $\sigma_1 = \sigma_2$. (a) Situación en que no se tiene presencia de la señal de información en la dinámica del sistema. Los demás incisos consideran la señal de información presente en la dinámica con amplitud $A = 1$ y frecuencias (b)1 kHz, (c)10 kHz, (d)20 kHz, (e)30 kHz y (f) 40 kHz. 40

4.9. Series temporales con dinámica caótica de los estados del sistema caótico del transmisor cuando la señal de información es nula. a) estado r , b) estado y y c) estado z 41

4.10. a) Datos numéricos del estado r , b) logaritmo de la varianza de los coeficientes del estado transformado, c) reconstrucción del estado con 6 niveles de los coeficientes, d) error entre el estado analizado con el estado reconstruido de c). 42

4.11. a) Datos numéricos del estado y , b) logaritmo de la varianza de los coeficientes del estado transformado, c) reconstrucción del estado con 2 niveles de los coeficientes, d) error entre el estado analizado con el estado reconstruido de c). 43

4.12. a) Datos numéricos del estado z , b) logaritmo de la varianza de los coeficientes del estado transformado, c) reconstrucción del estado con 6 niveles de los coeficientes, d) error entre el estado analizado con el estado reconstruido de c). 44

4.13. Comparación entre los estados del transmisor con los del receptor a) r con el estado reconstruido \hat{r} y b) estado z con el reconstruido. 45

4.14. Series temporales de los estados del sistema caótico del transmisor cuando se modula con una señal de información $X = \sin(1000\pi t)$ es decir, $A = 1$ y $f = 2$ kHz, a) estado r , b) estado y y c) estado z 46

4.15. Distribución de la energía para los estados modulados en el sistema de comunicación considerando la señal de información $X = \sin(2\pi ft)$ para diferentes frecuencias, f) estados modulados en el transmisor a) r , b) y y d) z y estados recuperados en el receptor c) \hat{r} y e) \hat{z} 47

4.16. Estado modulado r donde la frecuencia de la señal de información f es a) 2 kHz, b) 26 kHz, c) 60 kHz y d) 100 kHz. 48

4.17. Estado modulado y donde la frecuencia de la señal de información f es a) 2 kHz, b) 26 kHz, c) 60 kHz y d) 100 kHz. 49

1.18. Estado modulado z donde la frecuencia de la señal de información f es a) 2 kHz, b) 20 kHz, c) 60 kHz y d) 100 kHz. 49

Introducción

Por lo general, el comportamiento de muchos fenómenos o procesos de la naturaleza son de carácter no lineal. De ahí el gran interés mostrado por las comunidades de ingeniería y científica para su estudio, implementación y aplicación de sistemas con tales características. Por ejemplo, en el área de sistemas dinámicos la no linealidad está presente, y ha llegado a ser el corazón de osciladores con dinámica caótica. En particular, a principios de la década de los sesenta, el meteorólogo Edward Lorenz trató de hacer una predicción de la atmósfera por más de cuatro o cinco días. Para tal situación se consideró un modelo de tres ecuaciones no lineales con tres variables independientes logrando reducir la gran cantidad de variables que pueden involucrarse en este tipo de sistemas. Dicho modelo describió sólo cualitativamente la forma caótica en que evolucionó el clima []. En sí, el comportamiento de la atmósfera se constituye como un proceso no lineal, con retroalimentación, altamente sensible a las condiciones iniciales, de tal modo que se le considera como un sistema dinámico caótico. Otro de los pioneros de los osciladores con dinámica caótica es Otto Rössler. Otto diseñó el denominado oscilador caótico de Rössler en 1976 [] con la finalidad de reproducir un comportamiento similar al atractor de Lorenz, pero que fuera más fácil de analizar cualitativamente. Como resultado, Rössler propuso un sistema de ecuaciones útil para modelar reacciones químicas.

Una de las principales características de los sistemas con dinámica caótica, es su gran sensibilidad a las condiciones iniciales. Dicho de otra manera, pequeñas variaciones en las condiciones iniciales del proceso conduce a grandes diferencias al final de dicho proceso. Existe una gran variedad de osciladores caóticos implementados físicamente. Por mencionar algunos de ellos se encuentran los sistemas de Lorenz, Rössler y Chua [, ,].

Por otra parte, en la década de los noventa, Pecora y Carroll [] establecieron que dos sistemas con dinámica caótica idénticos pueden ser sincronizados bajo ciertos requerimientos. Lo anterior llamó mucho la atención de muchos investigadores en diferentes disciplinas y desde entonces se ha estudiado el fenómeno de sincronización presente en un par acoplado

de osciladores caóticos. El fenómeno de sincronización entre un par de osciladores caóticos asombrosamente parece contradecir la esencia del caos: dinámica compleja, un sistema determinista imprevisible, sensibilidad extrema a las condiciones iniciales. Una de las grandes aplicaciones del fenómeno de sincronización, presente en un par acoplado de osciladores caóticos, es en el área de las comunicaciones. En particular, el uso de osciladores con dinámica caótica en sistemas de comunicación ha permitido obtener buenos resultados en el tema de seguridad durante la transmisión de información [].

En los sistemas de comunicación que emplean osciladores con dinámica caótica, se tienen varios esquemas básicos: el enmascaramiento caótico, la dinámica simbólica, la modulación paramétrica, entre otros, donde se consideran los esquemas de acoplamiento unidireccional y bidireccional o mutuo [,].

El esquema de enmascaramiento caótico en un sistema de comunicación, propuesto por Cuomo-Oppenheim (1993) [], consiste en sumar la señal de información $\lambda(t)$ a un estado del oscilador caótico, por decir $x(t)$, para posteriormente transmitir la señal resultante. Se puede observar que $\lambda(t)$ en un principio es ajena a la dinámica del oscilador. En el receptor, se tienen dos subsistemas síncronos en cascada, donde el primero de estos subsistemas se utiliza para reconstruir la dinámica del sistema, mientras que en el segundo subsistema se trata de reconstruir el estado que fue transmitido. Una vez que se tenga la reconstrucción del estado, éste se resta de la señal transmitida con el fin de obtener una estimación de la señal de información. La figura muestra la forma general de tal esquema. Es importante señalar que si la señal de información $\lambda(t)$ es más grande en amplitud y frecuencia que el estado considerado para ser transmitido junto con $\lambda(t)$, entonces la información reconstruida puede tener algunas partes caóticas de la forma de onda. Además, este sistema es muy susceptible al ruido, por tanto ofrece un cierto aislamiento y no es todavía capaz de proporcionar un alto nivel de la seguridad en la comunicación [].

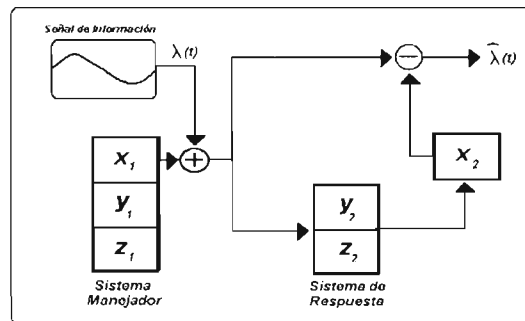


Figura 1.1: Sistema de comunicación de enmascaramiento caótico.

Otro sistema de comunicación que transmite información utilizando osciladores caóticos es el que emplea la dinámica simbólica de dichos osciladores. Tal sistema fue propuesto por Hayes [] y utiliza el acoplamiento unidireccional entre osciladores del mismo tipo [,]. En principio, el enfoque de tal sistema consiste en examinar el comportamiento libre del oscilador y así “extraer” y asignar la dinámica simbólica correspondiente a las orbitas presentes

en el atractor caótico. De hecho, algunas secuencias simbólicas nunca son producidas por el comportamiento libre del oscilador, por lo que se tendría una especie de secuencias permitidas y no permitidas. Posteriormente, se trata de determinar un código por el que cualquier mensaje que pueda ser emitido por la fuente de información pueda ser codificado usando secuencias simbólicas que satisfagan restricciones apropiadas impuestas por la dinámica en presencia de un método de control. En sí, el diseño de códigos es un problema estándar en el área de la teoría de la información. Cabe mencionar que el código seleccionado no debe tomar secuencias muy diferentes de las que se obtuvieron en el comportamiento libre del oscilador, debido a que se considera un control que no altere demasiado la estructura topológica de las órbitas del atractor. Una vez que se seleccionó el código, se debe establecer un método de control para que la órbita del oscilador pueda seguir la secuencia simbólica de la señal de información a ser transmitida. Finalmente, la señal transmitida debe ser detectada, para luego ser decodificada. Se puede observar que este esquema es muy laborioso, además de que requiere de un gran número de etapas de preprocesado y posprocesado en la señal de información, por tanto resulta poco práctico. La figura ilustra de manera general el esquema de tal sistema de comunicación.

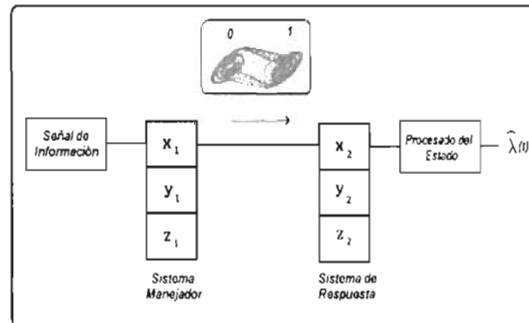


Figura 1.2: Sistema de dinámica simbólica.

Por último, el sistema de comunicación propuesto por Corron y Hash [] emplea la modulación paramétrica de osciladores caóticos para transmitir una señal de información y la adecuación conjunta de un subsistema síncrono y un filtro no-lineal para la detección y recuperación de la información transmitida. Tal sistema utiliza el enfoque basado en el fenómeno de sincronización de sistemas caóticos. La figura muestra un diagrama a bloques que ilustra tal esquema. Se puede observar que la principal componente en el transmisor es un oscilador caótico de tres estados. En esta parte se modula la señal de información $\lambda(t)$ en la dinámica en uno de los estados. La modulación de la información consiste en sumar la señal $\lambda(t)$, multiplicada por una función que depende de los estados del sistema, a la dinámica de uno de los estados del oscilador, por decir, al estado x_1 . La señal a transmitir es el estado resultante de la operación anterior. En el receptor se tienen dos bloques, el subsistema síncrono y un filtro demodulador. El subsistema se conforma de los estados y_2 y z_2 , los cuales son idénticos a los estados del sistema transmisor, y el estado modulado transmitido, x_1 , se usa como señal manejadora para sincronizar los dos sistemas caóticos del sistema de comunicación. El filtro realiza la etapa demoduladora para recuperar y tener una estimación, $\tilde{\lambda}(t)$, de la señal de información.

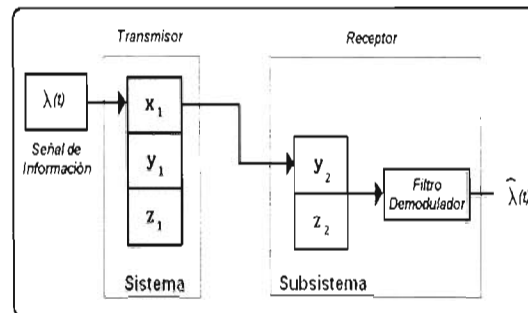


Figura 1.3: Sistema de Comunicación de Modulación Paramétrica.

A pesar de que en la literatura se consideran diferentes esquemas de sistemas de comunicación que emplean osciladores caóticos, de forma general se reporta que es posible transmitir una señal de información [, , ,], sin considerar que tan buen desempeño o que tan mal desempeño tiene el sistema de comunicación. Tratando de responder a esta pregunta, en este trabajo se presenta la caracterización de un sistema de comunicación que utiliza la modulación paramétrica con el oscilador de Chua. La caracterización consiste en determinar un rango de amplitudes y frecuencias que deben tener la señal de información para que se transmita y se recupere de manera satisfactoria. Además, se utiliza la transformada ondeleta para caracterizar las series temporales caóticas en términos de la distribución de su energía y poder dar información adicional del sistema de comunicación considerado [, ,].

La estructura de este trabajo está organizada de la siguiente manera. En el Capítulo se describen los fundamentos básicos requeridos en este trabajo. Se presenta al sistema caótico que se utiliza para la construcción del sistema de comunicación, así como la sincronización del sistema caótico con un subsistema y la forma de construcción del sistema de comunicación. Además, se da un esquema general de la teoría de la transformada ondeleta.

El Capítulo describe la implementación numérica del sistema de comunicación, mientras que el Capítulo presenta la caracterización del sistema de comunicación, donde se determina la región útil del sistema, la afectación la información a la sincronización del sistema y el análisis con la transformada ondeleta de las series temporales caóticas de los estados involucrados en el sistema de comunicación.

Finalmente en el Capítulo se presentan las conclusiones obtenidas al caracterizar el sistema de comunicación, además del trabajo futuro que se puede realizar.

Fundamentos Teóricos

En este capítulo se presenta el marco teórico de un sistema de comunicación basado en osciladores caóticos, así como las bases requeridas para la implementación y caracterización de tal sistema. En un principio se describen diferentes osciladores caóticos y diferentes tipos de acoplamiento y el fenómeno de sincronización presente entre un par de osciladores caóticos acoplados. Posteriormente, se explica de manera general la estructura de un sistema de comunicación basado en osciladores caóticos. Por último, se presenta la teoría básica de la transformada ondeleta para señales no-estacionarias, la cual será empleada para caracterizar parte del desempeño del sistema de comunicación.

2.1 Osciladores Caóticos

En esta sección se estudiarán dos sistemas que tienen elementos no-lineales y exhiben comportamiento caótico en un rango amplio de los valores de los parámetros involucrados.

2.1.1 Sistema Caótico de Chua

El sistema caótico de Chua ha sido estudiado extensamente desde su propuesta inicial y ha servido como plataforma de prueba para muchas de las áreas de investigación que involucran procesos de caos.

A pesar de que la implementación del sistema de Chua de manera electrónica es relativamente fácil, tal circuito ha tenido una gran contribución exitosa en diferentes ámbitos de la ciencia e ingeniería. El circuito de Chua, al cual denominamos oscilador caótico de Chua, puede ser implementado de circuitos con características lineales y de un dispositivo con características no

lineales. La Figura 2.1 muestra un diagrama esquemático del oscilador caótico de Chua.

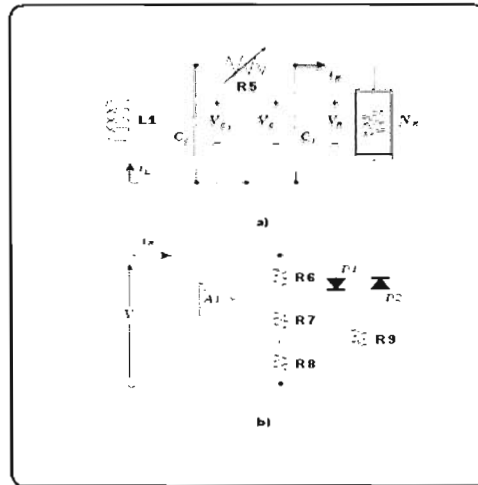


Figura 2.1: Diagrama esquemático del a) Circuito de Chua y la b) Resistencia negativa no lineal N_R . Los valores de las componentes electrónicas que producen la dinámica del doble enrollado son: $C_1 = 0.001\mu\text{F}$, $C_2 = 0.01\mu\text{F}$, $L = 1.8\text{ mH}$, $R = 5\text{ k}\Omega$, $R_1 = 750\Omega$, $R_2 = R_3 = 220\Omega$ y $R_4 = 1.2\text{ k}\Omega$. Los diodos D_1 y D_2 son 1N914 y el amplificador operacional $A1$ es un TL082.

Este circuito consiste de un inductor L , una resistencia variable R , dos capacitores, C_1 y C_2 , y un elemento al que se denomina como resistencia negativa no lineal N_R . El diagrama correspondiente de N_R es mostrado en la figura b), donde se observa que tal elemento se compone de resistores, amplificadores y diodos. El circuito de Chua es también conocido como oscilador de doble enrollado (DSO, por sus siglas en inglés, "double scroll oscillator") [1, 2]. El comportamiento del oscilador de Chua puede describirse por el voltaje de los capacitores, C_1 y C_2 , además de la corriente del inductor L . Por lo que consideramos los estados del sistema a los voltajes en los capacitores, V_{C_1} y V_{C_2} , respectivamente, y a la corriente en el inductor, $i_L(t)$. Con esto tenemos que la dinámica del sistema de Chua puede ser modelada por el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales,

$$\begin{aligned} C_1 \dot{V}_{C_1} &= G(V_{C_2} - V_{C_1}) - i(V_{C_1}), \\ C_2 \dot{V}_{C_2} &= G(V_{C_1} - V_{C_2}) - i_L, \\ L \dot{i}_L &= -V_{C_2}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

donde $G = 1/R$ y la característica $V - I$ de la resistencia negativa no lineal está definida como:

$$i(v) = \begin{cases} -G_1 v - V_B(G_0 - G_1) & \text{si } v > V_B \\ -G_0 v & \text{si } |v| \leq V_B \\ -G_1 v + V_B(G_0 - G_1) & \text{si } v < -V_B \end{cases}$$

donde $G_0 = \frac{R_2}{R_1 R_3}$, $G_1 = \frac{R_2 R_4 - R_1 R_3}{R_1 R_3 R_4}$, y los valores exactos de los puntos de ruptura de los diodos, V_B , dependen de la naturaleza de los diodos (Ge o Si). La Figura muestra gráficamente la relación voltaje-corriente del elemento N_R .

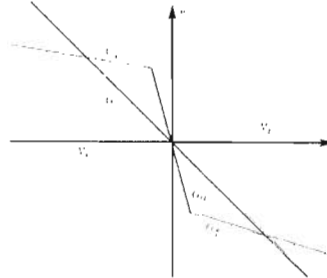


Figura 2.2: Curva característica de la resistencia negativa no lineal.

Si se cumple con $G_1 < G < G_0$, el sistema tiene un comportamiento caótico del tipo DSO y tiene tres puntos fijos. Un punto fijo es aquel punto del espacio fase en el que las variables del sistema presentan una variación nula, es decir, donde la derivada es nula. Por tanto, pueden ser hallados como soluciones de la ecuación $\dot{x} = 0$. Por lo que para este sistema, el primer punto fijo es N, el cual está situado en el origen $(0, 0, 0)$, y los otros dos están situados en los puntos $P^+ = (-V_f, 0, V_f G)$ y $P^- = (V_f, 0, -V_f G)$, donde

$$V_f = V_B \frac{G_0 - G_1}{G - G_1} \quad (2.2)$$

satisface $i(V_f) = -GV_f$. Se puede observar que el sistema () constituye un sistema dinámico autónomo, lo que significa que ninguna señal externa influye en el sistema permitiendo que el sistema evolucione a través de su dinámica natural. Cuando los elementos lineales del sistema de Chua, R , L , C_1 y C_2 , son números positivos, desde el punto de vista de conservación de energía, el elemento N_R debe estar activo para que el circuito oscile, permitiendo que llegue a ser caótico []. La proyección del atractor del sistema de Chua en el plano $x - y$ se muestra en la Figura , donde la información es de tipo experimental.

2.1.2 Sistema caótico tipo Rössler

Otro sistema con comportamiento caótico es el denominado sistema de Rössler. Tal sistema tiene una estructura similar al del sistema de Chua, pero considera un producto de estados, por lo que optamos considerar un sistema que tenga un comportamiento dinámico lo más parecido posible. Para tal situación, consideramos al sistema del diagrama del circuito mostrado en la Figura , el cual corresponde a un sistema tipo Rössler propuesto por Carroll [].

El sistema del circuito de la figura puede ser descrito mediante el siguiente sistema de ecuaciones:

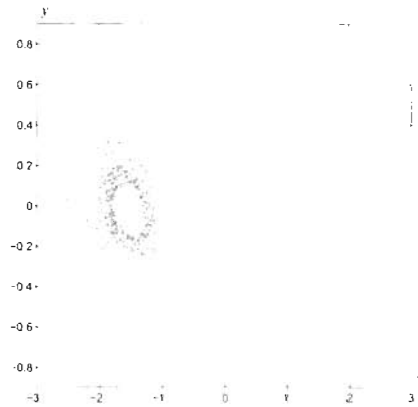


Figura 2.3: Atractor de Chua proyectado en el plano $x - y$.

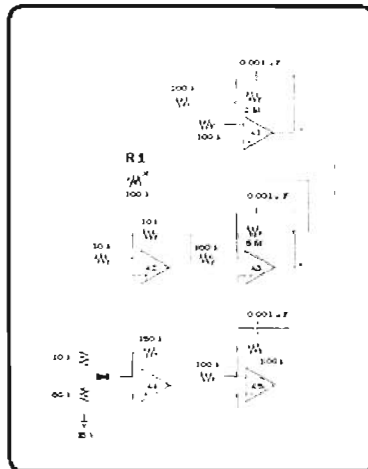


Figura 2.4: Diagrama esquemático del circuito caótico de Rössler.

$$\begin{aligned}
 \frac{dx}{dt} &= \alpha(-\Gamma x - \beta y - \delta z) \\
 \frac{dy}{dt} &= \alpha(x + y(\gamma - 0.02)) \\
 \frac{dz}{dt} &= \alpha[g(x) - z]
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

donde $\alpha = 10^4 \text{s}^{-1}$, $\Gamma = 0.05$, $\delta = 0.133$, $\mu = 15$, y la función $g(x)$ es definida como

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 3, \\ \mu(x - 3) & \text{si } x > 3. \end{cases}$$



Figura 2.5: Atractor caótico de Rössler obtenido experimentalmente del circuito mostrado en la figura .

2.2 Esquemas de acoplamiento

A pesar de que existen en la literatura diferentes investigaciones relacionadas con los esquemas de acoplamiento para lograr la sincronización caótica, generalmente tres formas de acoplamiento son las que más se mencionan o consideran.

Un esquema de acoplamiento puede estar formado por dos sistemas caóticos completos, conectados entre sí por una resistencia o un capacitor, figura . Este tipo de acoplamiento puede ser unidireccional o bidireccional, y se conoce como *acoplamiento mutuo*. En el caso del acoplamiento unidireccional hay un sistema maestro y un sistema esclavo, en el cual un sistema controla al otro sistema. En el caso del acoplamiento bidireccional, los dos sistemas actúan recíprocamente uno con el otro, por lo tanto, no podemos categorizar quien es el sistema maestro y quien es el sistema esclavo [].

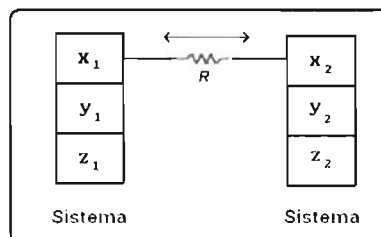


Figura 2.6: Acoplamiento Mutuo.

En la literatura se puede encontrar que un sistema de control acopla a dos sistemas caóticos iguales o diferentes para llegar a la sincronización, figura 2.7. Al sistema que manda la señal se le llama sistema maestro, este sistema fuerza al sistema receptor a seguir la dinámica del sistema maestro por medio del sistema de control. Este tipo de acoplamiento cae en la categoría de los sistemas acoplados de manera unidireccional.

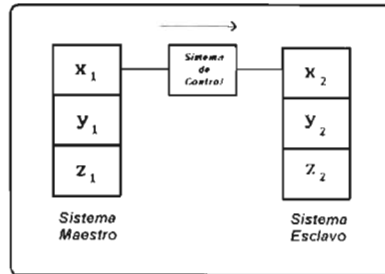


Figura 2.7: Acoplamiento unidireccional.

El método de acoplamiento utilizado en este trabajo es del tipo unidireccional, debido a que transmite un estado del sistema original, que forma parte del transmisor, al sub-sistema que se encuentra en el receptor, figura 2.8.

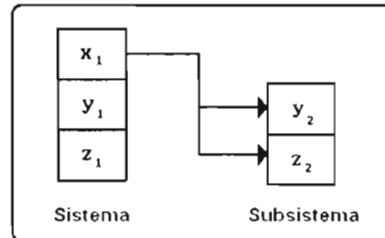


Figura 2.8: Acoplamiento de sistema - sub-sistema.

El sub-sistema se acopla unidireccionalmente con el sistema, por medio de la señal recibida para generar los estados no transmitidos. De manera general, consideraremos al sistema caótico de la siguiente forma

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= f(x, y, z) \\ \frac{dy}{dt} &= g(x, y, z) \\ \frac{dz}{dt} &= h(x, y, z)\end{aligned}\tag{2.4}$$

donde x , y y z son los estados del sistema, t es una variable independiente.

Un sub-sistema caótico a sincronizar para () puede ser construido de la siguiente forma

$$\begin{aligned}\frac{y_r}{dt} &= g(x, y_r, z_r) \\ \frac{z_r}{dt} &= h(x, y_r, z_r)\end{aligned}\quad (2.5)$$

donde el estado x del sistema caótico (), es enviado al sub-sistema (), que se encuentra en el bloque receptor, con esto se trata de lograr tener sincronización. Pecora y Carroll [] mostraron que los estados y_r y z_r en (), pueden ser aproximados a los estados originales y y z en (). Por tanto se puede expresar lo siguiente:

$$\begin{aligned}\Delta y &= |y - y_r| \\ \Delta z &= |z - z_r| \\ \Delta w &= \Delta y + \Delta z\end{aligned}\quad (2.6)$$

si $\Delta w \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$, se dice que el sub-sistema receptor () se sincroniza con el sistema transmisor no lineal ().

Otra aportación importante que no hay que dejar de lado es que si todos los exponentes de Lyapunov del nuevo sistema Δy son negativos, entonces $|y - y_r| \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$. Este proceso lo llamamos sincronización estable [,].

2.3 Sistema de Comunicación

Debido al fenómeno de sincronización presente entre dos osciladores caóticos acoplados es posible construir o diseñar sistemas de comunicación basados en dichos osciladores, aunado al hecho de que en la actualidad existe una gran variedad de sistemas de comunicación. El esquema general del sistema de comunicación que se considera en este trabajo, se muestra en el diagrama a bloques de la figura . Tal sistema está compuesto de dos partes, un bloque transmisor y un bloque receptor, los cuales a su vez se conforman de varias etapas. En el bloque transmisor de la figura , una señal de información es modulada por un parámetro del oscilador caótico. Al modular la señal de información, ésta entra en la dinámica del oscilador caótico. Este tipo de procedimiento es conocido como *modulación paramétrica* y se explicará en la siguiente sección.

En el bloque receptor se considera a un subsistema del oscilador caótico utilizado en el bloque transmisor, el cual se busca sincronizar con la señal del estado recibido y así poder generar los estados no transmitidos. De hecho, el subsistema es idéntico a la parte del oscilador caótico del transmisor pero sin el estado transmitido. Además, se tiene un filtro demodulador no lineal, el cual se encarga de reconstruir la señal de información transmitida. La principal funcionalidad de las etapas fundamentales en el sistema de comunicación se explican a continuación.

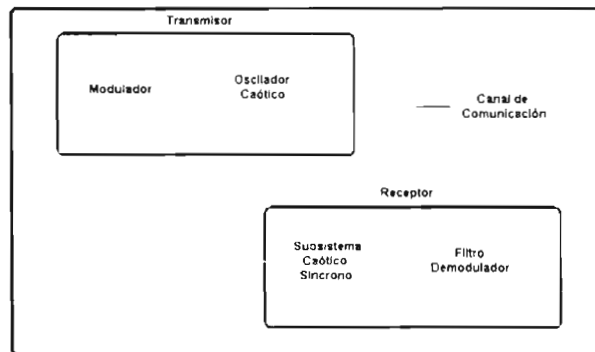


Figura 2.9: Diagrama de bloques de un sistema de comunicación caótico.

2.3.1 Modulación Paramétrica

El método de modulación paramétrica propuesto por Corron y Hahs [] consiste en modular un parámetro del oscilador caótico, ubicado en el bloque transmisor, con la señal de información. En el bloque receptor se encuentra un subsistema, el cual es manejado con la portadora caótica para reconstruir los estados no transmitidos y es seguido por un filtro no lineal para la reconstrucción de la señal de información [].

En el bloque transmisor se considera un oscilador caótico de tercer orden dado por el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= f_0(x, y, z) + \lambda(t)f_1(x, y, z) \\ \frac{dy}{dt} &= g(x, y, z) \\ \frac{dz}{dt} &= h(x, y, z)\end{aligned}\tag{2.7}$$

El parámetro $\lambda(t)$ es una función de tiempo que representa la información que se pretende comunicar. Los valores aceptables de $\lambda(t)$ deben satisfacer la condición $|\lambda(t)| < \epsilon$, para un $\epsilon > 0$ pequeño. Donde el comportamiento de la información debe ser suave sobre alguna región continua de valores permitidos para dicho parámetro.

El receptor tiene la forma

$$\begin{aligned}\frac{dy_r}{dt} &= g(x, y_r, z_r) \\ \frac{dz_r}{dt} &= h(x, y_r, z_r)\end{aligned}\tag{2.8}$$

donde se considera que el estado x del sistema manejador () es transmitida al sistema receptor (), mientras que los estados (y_r, z_r) son independientes de la modulación del parámetro.

Una aproximación fácil para recuperar la información $\lambda(t)$ del sistema (), sería el uso de la estimación siguiente

$$\lambda(t) = \frac{\dot{x} - f_0(x, y_r, z_r)}{f_1(x, y_r, z_r)} \quad (2.9)$$

Sin embargo, la ecuación () conduce a serios problemas cuando f_1 es igual a cero, ya que se presentan singularidades. Además, otro problema que se presenta al derivar x con respecto del tiempo, se amplifica el ruido que introduce errores grandes cuando se estima la información, por lo cual se debe evitar.

Alternativamente Corron y Hahs [] propusieron el diseño de un filtro robusto para la demodulación, comienza utilizando la ecuación (), que no está presente en el subsistema síncrono ().

$$\dot{x} = f_0(x, y_r, z_r) + \lambda(t)f_1(x, y_r, z_r) \quad (2.10)$$

Es deseable integrar () para librarse de \dot{x} ; sumamos un término kx a ambos lados de la ecuación () y multiplicamos por un factor de integración e^{kt}

$$\frac{d}{dt}(xe^{kt}) = e^{kt}[f_0(x, y_r, z_r) + \lambda(t)f_1(x, y_r, z_r) + kx] \quad (2.11)$$

Donde k es una constante arbitraria que sirve para sintonizar la salida del filtro demodulador. Ahora integrando en el intervalo de tiempo $[t, t_0]$ y dividiendo por el factor de integración tenemos

$$x - x_0e^{k(t_0-t)} = \int_{t_0}^t [f_0(x, y_r, z_r) + kx]e^{k(\tau-t)}d\tau + \int_{t_0}^t \lambda(\tau)f_1(x, y_r, z_r)e^{k(\tau-t)}d\tau \quad (2.12)$$

donde x_0 es una condición inicial aplicada al tiempo $t = t_0$, pero $x_0e^{k(t_0-t)} \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$. El parámetro $\lambda(t)$ puede ser considerado como una constante, debido a que varía suavemente comparada con la constante k , entonces $\lambda(t)$ puede ser sacada de la integral () y obtenemos una estimación del parámetro modulado como

$$\hat{\lambda} = \frac{x - w_0}{w_1} \quad (2.13)$$

donde

$$w_0 = \int_{t_0}^t [f_0(x, y_r, z_r) + kx]e^{k(\tau-t)}d\tau \quad (2.14)$$

$$w_1 = \int_{t_0}^t \lambda(\tau) f_1(x, y_\tau, z_\tau) e^{k(\tau-t)} d\tau \quad (2.15)$$

diferenciando () y ()

$$\begin{aligned} \dot{w}_0 &= f_0(x, y_t, z_t) + kx - kw_0 \\ \dot{w}_1 &= f_1(x, y_t, z_t) - kw_1 \end{aligned} \quad (2.16)$$

con condiciones iniciales $w_0(t_0) = 0$ y $w_1(t_0) = 0$. La señal $\hat{\lambda}$ es además pasada a través de un filtro pasa bajas para remover las singularidades de la ecuación () cuando $w_1 = 0$. La ecuación del filtro es como sigue

$$\dot{\lambda}_f = q_f(\hat{\lambda} - \lambda_f), \quad (2.17)$$

donde el parámetro q_f es definido como

$$q_f = \frac{q|w_1|}{1 + |w_1|} \quad (2.18)$$

con q como un parámetro arbitrario que establece la constante de tiempo del filtro [,].

2.4 Teoría Ondeleta

En esta sección se da una breve descripción de la transformada ondeleta (TO), la cual es una herramienta matemática alternativa y complementaria de la transformada de Fourier. La TO en su versión discreta nos auxiliará, en términos de la distribución de la energía de los coeficientes, para determinar información de las portadoras caóticas transmitidas del bloque transmisor al bloque receptor de un sistema de comunicación. En particular, la TO es una herramienta útil para analizar señales dinámicas provenientes de sistemas u osciladores caóticos.

2.4.1 Transformada Ondeleta Continua

Sea $\psi(t) \in L^2(\mathbb{R})$ una función fija y definimos la función $\psi_{a,b}$ como

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \quad (2.19)$$

donde $a \in \mathbb{R}^+(a \neq 0)$ es un parámetro de escala o dilatación, y $b \in \mathbb{R}$ es un parámetro de traslación. De () se observa que el parámetro de escala a controla las dilataciones de la variable temporal $(t - b)$, y que $a^{-1/2}$ controla la dilatación en los valores que toma ψ . La función $\psi(t)$ es conocida en la literatura como *ondeleta madre* o simplemente *ondeleta*, si su transformada de Fourier, $\hat{\psi}(w) = \int \psi(t) e^{-iwt} dt$, cumple la siguiente condición

$$C_v = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\hat{\psi}(w)|^2}{|w|} dw < \infty \quad (2.20)$$

Esta relación se llama condición de admisibilidad, la cual implica que ψ debe tener promedio cero [1, 2]

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = \hat{\psi}(0) = 0 \quad (2.21)$$

por lo tanto debe ser oscilatoria. Según el concepto intuitivo de onda, ψ debe ser una onda, debe tener parte positiva y parte negativa. Al conjunto de funciones generadas en (2.1) se les "llama" ondeletas hijas. Con lo anterior podemos definir lo siguiente. Sea $f(t)$ una señal de energía finita, definimos la Transformada Ondeleta Continua (TOC), de f como

$$W_f(a, b) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi_{a,b}(t) dt = \langle f, \psi_{a,b} \rangle, \quad (2.22)$$

donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es el producto escalar definido en $L^2(\mathbb{R})$. Debido a que las funciones ondeleta que se van a considerar en este trabajo son reales, tenemos que $\psi(t) = \tilde{\psi}(t)$. Por tanto, podemos decir que la TOC (2.22) mide la variación de f en una vecindad del punto b , donde el tamaño de tal vecindad es proporcional a la escala a .

La función f puede ser recuperada a partir de su TOC mediante la siguiente fórmula de reconstrucción [1, 2, 3]

$$f(t) = \frac{1}{C_v} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W_f(a, b) \psi_{a,b}(t) \frac{da db}{a^2} \quad (2.23)$$

De la anterior ecuación, es claro por que se requería la condición de admisibilidad (2.20)

2.4.2 Transformada Ondeleta Discreta

Como sucede con otras transformaciones, la representación de una señal por medio de una transformación continua resulta ser redundante. Sin embargo, en algunas ocasiones resulta deseable tener una representación no redundante, y esto se logra teniendo una representación discreta de la transformación. El diseño de una versión discreta de la TOC, esencialmente consiste en definir una red discreta apropiada de los parámetros de escala y traslación (a, b) , respectivamente. Para propósitos de eficiencia computacional, la discretización de dichos parámetros se realizan mediante una red diádica de la siguiente forma:

$$a = 2^{-j} \quad \text{y} \quad b = k2^{-j} = ka, \quad (2.24)$$

donde j y k denotan los índices de dilatación y traslación, que pertenecen a los números enteros. Bajo esta elección discreta de parámetros, tendremos entonces la siguiente expresión para la familia de ondeletas ():

$$\psi_{j,k}(t) = 2^{j/2} \psi(2^j t - k). \quad (2.25)$$

Al sustituir () dentro de TOC (), resulta que

$$f_{j,k} = W_f(2^{-j}, k2^{-j}) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi_{j,k}(t) dt \quad (2.26)$$

Para la posible reconstrucción de la señal a través de los coeficientes $f_{j,k}$, vamos a considerar el caso donde el conjunto $\psi_{j,k}$ forma una base ortonormal. Por lo tanto

$$f(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_{j,k} \psi_{j,k}(t) \quad (2.27)$$

El conjunto de ecuaciones () y () forman la serie de ondeletas. El hecho de poder representar una señal en una base ortonormal facilita en gran medida sus cálculos analíticos y computacionales.

La contribución de la señal en un nivel particular ondeleta j esta dado por

$$f_j(t) = \sum_n f_{j,k} \psi_{j,k}(t) \quad (2.28)$$

Por otra parte, para el caso de recuperación de la señal donde el conjunto $\psi_{j,k}$ no forma una base ortonormal, se toma otras consideraciones que no se discutirán en este trabajo. Se recomienda al lector revisar tales casos en [, ,].

Análisis Multi-Resolución

Para la implementación numérica de la transformada ondeleta, considerando que la transición de la versión continua de la transformada ondeleta a la situación discreta no es tan simple, se requiere del Análisis Multi-Resolución (AMR), iniciado por Mallat y Meyer []. El AMR es un conjunto de herramientas para derivar bases de ondeletas, además de ser un marco de trabajo matemático, el cual relaciona la descomposición de señales en sub-bandas con la teoría de ondeletas. La fundamentación matemática del AMR se puede revisar, por ejemplo, en [, ,]. La figura ilustra la manera intuitiva de la estructura del AMR en términos de la descomposición de espacios vectoriales.

En el AMR la función ondeleta esta asociada a la función $\varphi(t)$, llamada *función de escala*, que mediante escalación y traslación, generan una base $\{\varphi_{j,k}(t) = 2^{j/2} \varphi(2^j t - k) \cdot k \in \mathbb{Z}\}$ para los espacios V_j . Denotando a los espacios $\{W_j\}$ como el complemento ortogonal de los

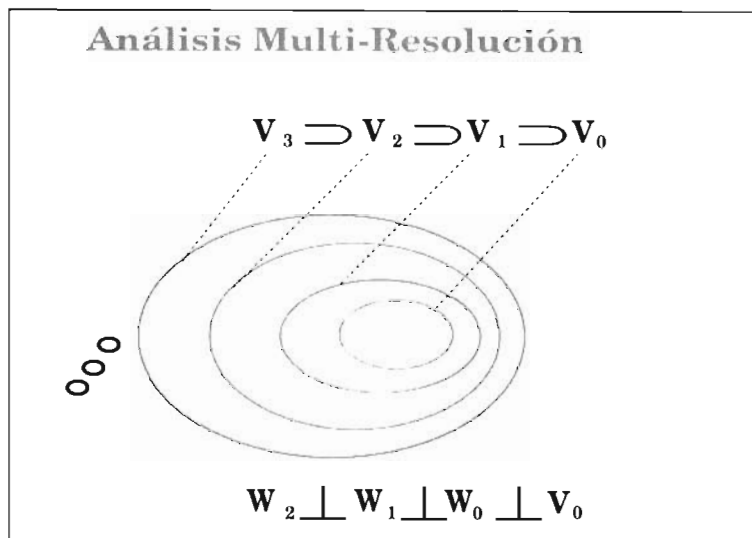


Figura 2.10: Espacios vectoriales para la función de escala $\varphi(t)$ y su ondeleta $\psi(t)$.

espacios V_j , tenemos que $V_{j+1} = V_j \oplus W_j$. En particular, la función ondeleta $\psi(t)$ genera una base ortonormal $\{\psi_{j,k}(t) = 2^{j/2}\psi(2^j t - k) : k \in \mathbb{Z}\}$, para los espacios W_j .

Debido a que $\varphi \in V_0 \subset V_1$ y que $\psi \in W_0 \subset V_1$, la función de escala y la ondeleta satisfacen

$$\varphi(t) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \varphi(2t - k), \quad (2.29a)$$

$$\psi(t) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_k \varphi(2t - k), \quad (2.29b)$$

con $g_k = (-1)^n h_{1-k}$.

En base al AMR, $V_j = V_{j-1} \oplus W_{j-1}$, la descomposición de una señal finita $f \in L_2(\mathbb{R})$ es dada como

$$f(t) = \sum_{k=1}^{2^{j_0}} c_{j_0,k} \varphi_{j_0,k}(t) + \sum_{j=j_0}^{J-1} \sum_{k=1}^{2^j} f_{j,k} \psi_{j,k}(t), \quad (2.30)$$

donde los coeficientes correspondientes de escala y de ondeleta se pueden calcular como $c_{j_0,k} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \varphi_{j_0,k}(t) dt$ y $f_{j,k} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi_{j,k}(t) dt$, respectivamente. La ecuación (2.30) representa la Transformada Ondeleta Discreta.

La Transformada Rápida Ondeleta (TRO), permite determinar de manera recursiva los

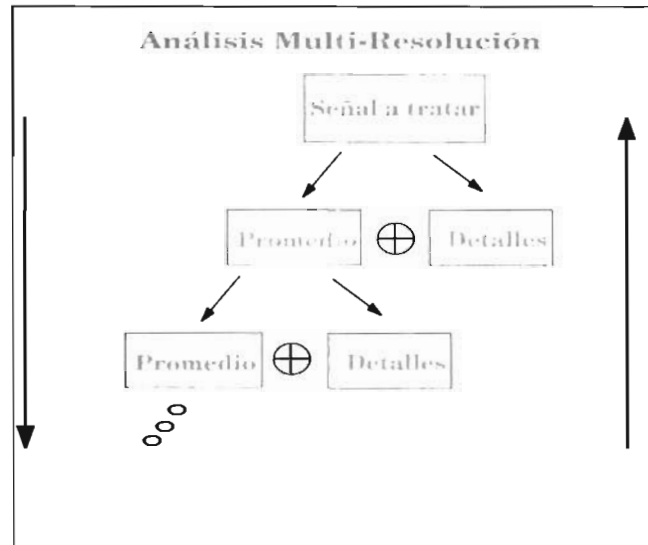


Figura 2.11: Espacios vectoriales para la función de escala $\varphi(t)$ y su ondeleta $\psi(t)$

coeficientes de escala y de ondeleta de () mediante

$$c_{j,k} = \sum_{l \in \mathbb{Z}} h_{l-2k} c_{j+1,k}, \quad f_{j,k} = \sum_{l \in \mathbb{Z}} g_{l-2k} c_{j+1,k} \quad (2.31a)$$

$$c_{j+1,k} = \sum_{l \in \mathbb{Z}} (h_{2l-k} c_{j,k} + g_{2l-k} f_{j,k}), \quad (2.31b)$$

donde () son para el análisis y () para la síntesis.

Debido a la ortogonalidad de las funciones base, la energía de la función f en () es dada en términos de los coeficientes de la función de escala y ondeleta [,], de la siguiente manera

$$\|f(t)\|^2 = \sum_{k=1}^{2^j} |c_{j_0,k}|^2 + \sum_{j=j_0}^{J-1} \sum_{k=1}^{2^j} |f_{j,k}|^2, \quad (2.32)$$

Transformada ondeleta y series de tiempo

En la actualidad, existe una gran cantidad de señales físicas que tienen la propiedad de invariancia con respecto a la escala. Tales funciones son formas de onda con características fractales. En particular, un importante conjunto de funciones que son invariantes a la escala de manera estadística son los procesos aleatorios del tipo $1/f$ []. Al decir que son auto-similares estadísticamente, se refiere a que la señal $f(t)$ obedece la siguiente relación de escala

$$f(t) \equiv a^{-H} f(at). \quad (2.33)$$

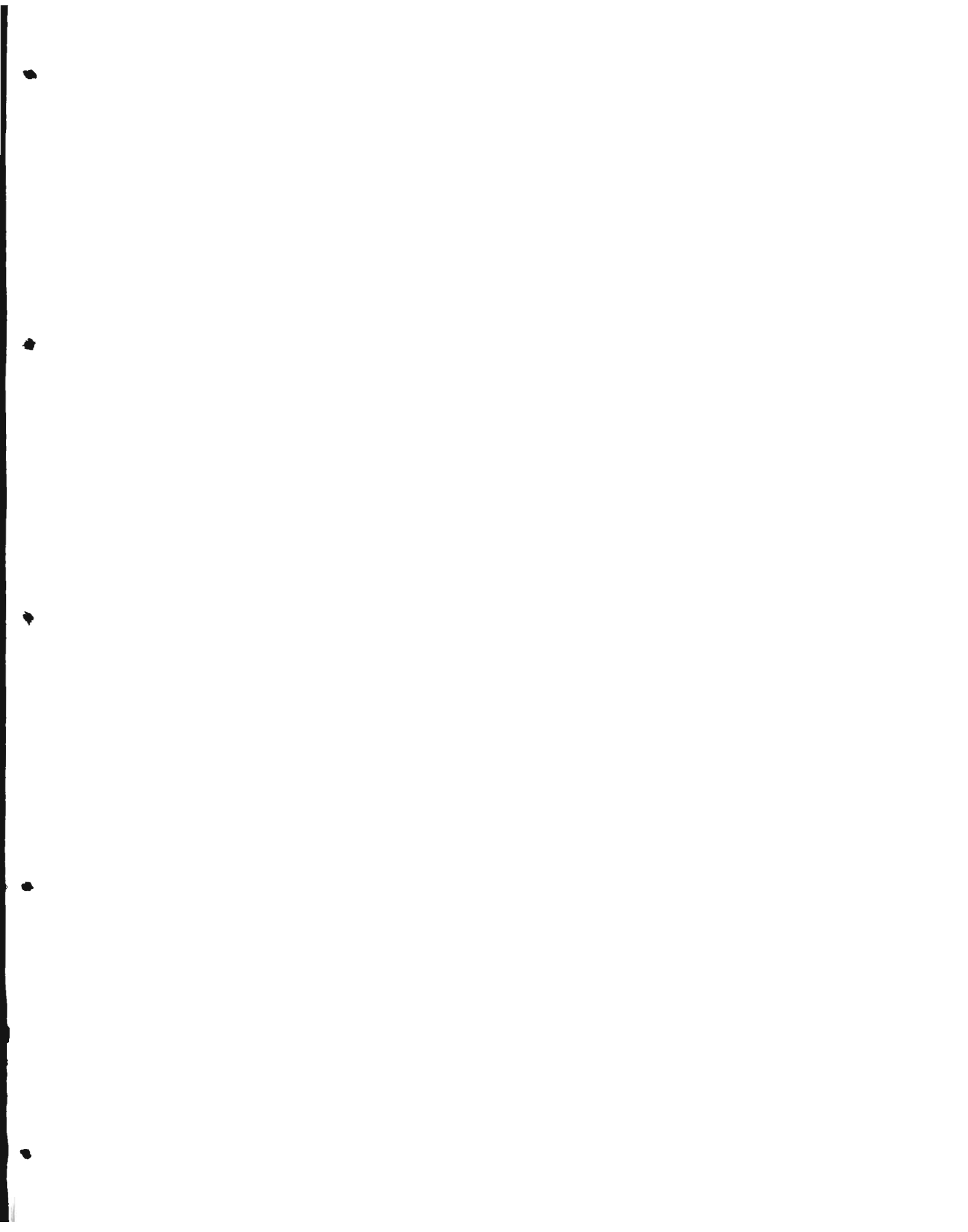
donde $a > 0$ y el símbolo de equivalencia \equiv tiene el significado que las dos señales o procesos tienen las mismas estadísticas.

Debido a la naturaleza o estructura tiempo-escala de la TO, ha resultado ser apropiada para estudiar o analizar funciones, distribuciones o procesos que tienen características auto-similares. De hecho, se puede probar que si una señal $f(t)$ es auto-similar, implica auto-similaridad en su transformada en el dominio tiempo-escala.

En base a lo anterior, para este tipo de señales se tiene que la varianza de los coeficientes de ondeleta, $f_{j,k}$, siguen la siguiente relación

$$\text{var}(f_{j,k}) \approx (2^j)^{-\beta} \quad (2.34)$$

con $\beta = 2H + 1$ y H se denomina como el parámetro de auto-similaridad. La relación () se ha aplicado en los trabajos de [,] con el fin de caracterizar diferentes tipos de series de tiempo. Mediante la relación () se puede determinar si la serie de tiempo tiene un comportamiento de un proceso de ruido, donde se tiene una energía distribuida en la gran mayoría de los niveles, o bien, si tiene una frecuencia portadora, lo que implica una gran concentración de energía en "pocos" niveles. Lo anterior se puede observar mediante la gráfica resultante del logaritmo de la varianza de los coeficientes con respecto a los niveles j . Si se tiene prácticamente una línea con pendiente cero, entonces se considera que tiene un comportamiento de ruido. Si se tiene uno o pocos niveles contiguos con un mayor valor que los demás, se tiene una gran concentración de energía en tales niveles. En la referencia [] se analizaron de manera numérica y experimental series de tiempo provenientes de circuitos electrónicos de dinámica caótica. Este trabajo es nuestro punto de partida para tratar de caracterizar las portadoras caóticas de nuestro sistema de comunicación.



Implementación Numérica del Sistema de Comunicación

En este capítulo se describe la implementación numérica del sistema de comunicación a caracterizar. Dicho sistema de comunicación considera dos osciladores diferentes que exhiben comportamiento caótico en un rango amplio de los valores de los parámetros inmiscuidos. Los osciladores caóticos a considerar son los de Chua y Rössler, los cuales se presentaron en el capítulo .

3.1 Bloque Transmisor

En la descripción del transmisor del sistema de comunicación, ver capítulo , se consideran dos elementos, la señal de información y como parte medular un oscilador caótico. La figura nos muestra las partes que lo componen.

3.1.1 Señal de información

El tipo de señal a considerar es del tipo senoidal, es decir, $\lambda(t) = A \text{sen}(2\pi ft)$, donde A es la amplitud y f su frecuencia en hertz. Dichos parámetros son importantes para describir a la señal de información, pero más aún, nos permitirán poder caracterizar al sistema de comunicación en función de la señal de información, debido a que pueden destruir la dinámica del oscilador caótico y por ende la recuperación de la señal de información transmitida. La implementación numérica de tal señal no es difícil, por lo que no se describe. Una señal con parámetros $A = 1$ y $f = 1$ kHz se muestra en la figura .

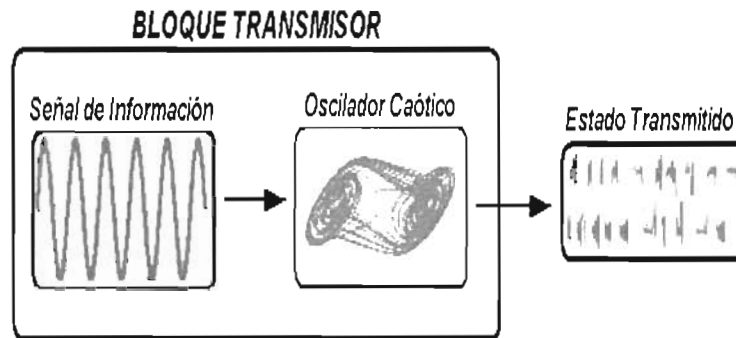


Figura 3.1: Diagrama a bloques del transmisor del sistema de comunicación.

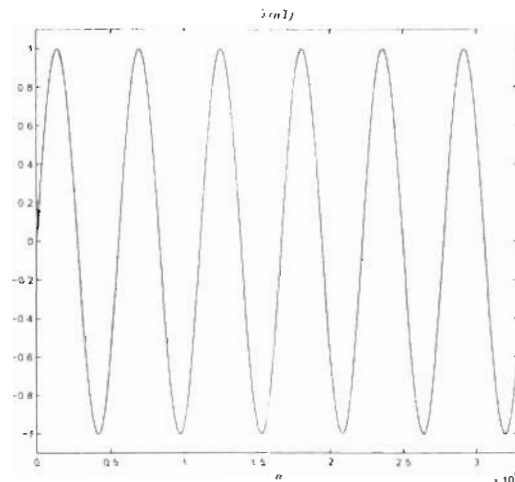


Figura 3.2: Señal de información a considerar, con una amplitud $A = 1$ y frecuencia $f = 1$ kHz.

3.1.2 Oscilador caótico

Por otra parte, para la versión numérica del oscilador caótico se debe considerar un conjunto de ecuaciones diferenciales que modelen la dinámica de tal oscilador para posteriormente resolver mediante el método numérico de Runge-Kutta de cuarto orden. En principio se considera el sistema de Chua.

El sistema de ecuaciones (), que modela al oscilador de Chua, puede ser reescrito por un sistema de ecuaciones diferenciales adimensionales de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= \alpha[y - (1 + \gamma)x - \phi(x)] \\ \frac{dy}{d\tau} &= (x - y + z) \\ \frac{dz}{d\tau} &= -\beta y \end{aligned} \quad (3.1)$$

donde la función $\phi(x)$ se define

$$\phi(x) = bx + \frac{a-b}{2}(|x+1| - |x-1|).$$

La representación del sistema de Chua () es similar a la considerada en []. En la resolución numérica se implemento el método numérico de Runge-Kutta con un paso de tiempo de 0.01. Se puede observar que en (), la variable independiente adimensional es ahora τ , la cual está relacionada con la variable independiente de tiempo t mediante la expresión $\tau = \frac{t}{R_1 C_2}$. Lo anterior se debe al hecho de establecer una relación a toda variable en términos de los parámetros del circuito electrónico []. Con la misma filosofía, los valores de los demás parámetros para tener una dinámica caótica son $\alpha = 10$, $\beta = 14.2$ y $\gamma = 0.133$. La figura muestra el atractor de la versión numérica del sistema de Chua y el estado del mismo sistema que se va a transmitir.

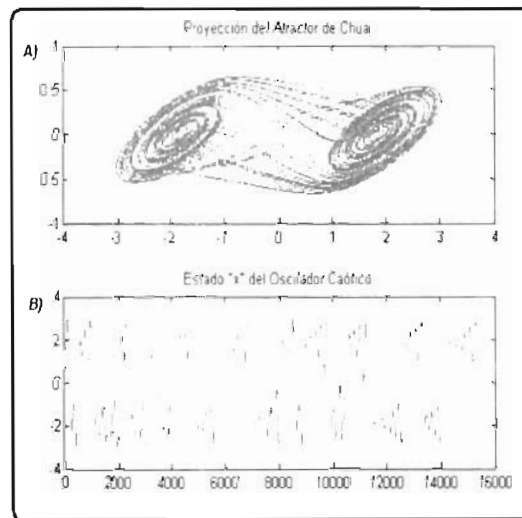


Figura 3.3: (a) Atractor del oscilador caótico de Chua en su versión numérica. (b) Estado del sistema a transmitir.

Con lo anterior y considerando la modulación paramétrica (), se tiene que el sistema () es de la forma

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= \alpha[y - (1 - \gamma)x - \phi(x) - \gamma\lambda] \\ \frac{dy}{d\tau} &= (x - y + z) \\ \frac{dz}{d\tau} &= -\beta y \end{aligned} \tag{3.2}$$

donde se ha considerado al estado x para modular, por lo que será este nuevo estado el que se transmite al receptor. Es claro que se considero el método numérico antes mencionado para la resolución de () con los mismos valores que se consideraron antes de realizar la modulación con la señal de información $\lambda(t)$.

3.2 Bloque Receptor

Como se describió en el capítulo anterior y se observa en la figura , el bloque receptor tiene dos etapas, la del sub-sistema caótico y la del filtro demodulador.

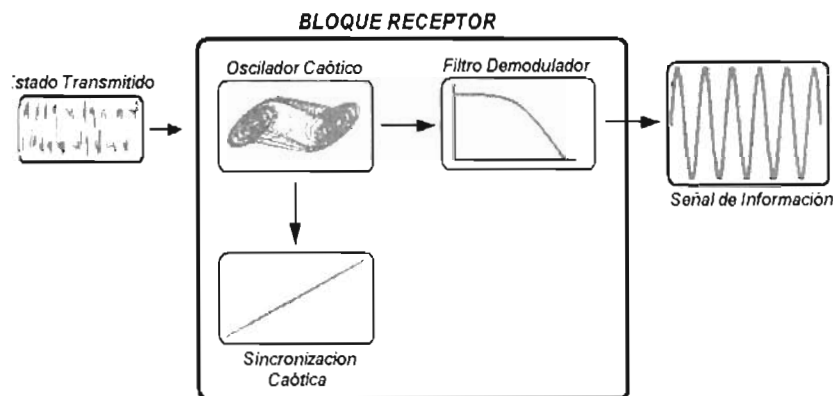


Figura 3.4: Diagrama a bloques del receptor del sistema de comunicación.

Para el sub-sistema en el receptor y de acuerdo a que el estado que se transmite es x , se tiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \frac{dy_r}{d\tau} &= (x - y_r + z_r) \\ \frac{dz_r}{d\tau} &= -\beta y_r \end{aligned} \tag{3.3}$$

En base a lo explicado en el capítulo , se busca establecer la sincronización con el sub-sistema ().

Resolviendo numéricamente () y con las condiciones establecidas, se logra la sincronización del estado del oscilador caótico del bloque transmisor y con un estado reconstruido del subsistema del bloque receptor y_r , como se muestra en la Figura 3.5.

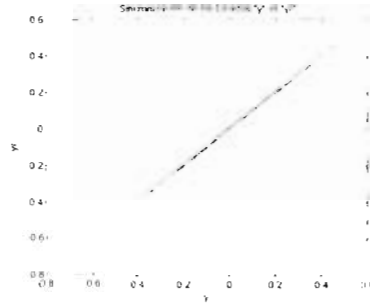


Figura 3.5: Sincronización del estado y , del sistema del bloque transmisor, con el estado reconstruido y_r , del sistema receptor.

Basándonos en el procedimiento de la sección , nos falta considerar la etapa de reconstrucción de la señal de información. Para lograr esto, se tiene que el conjunto de ecuaciones del filtro demodulador, considerando al sistema de Chua, es de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \dot{w}_0 &= \alpha[y_r - (1 + \gamma)x - \phi(x)] + kx - kw_0 \\ \dot{w}_1 &= 1 - kw_1 \\ \tilde{\lambda} &= \frac{q(w_1)}{1 + |w_1|}(x - w_0 - w_1\lambda). \end{aligned} \tag{3.4}$$

donde $k = 10$ y $q = 0.5$ y al igual que en la resolución de los sistemas de ecuaciones anteriores, para () se considero también un paso de integración entre las muestras de 0.01. Para determinar el valor de las constantes en el filtro demodulador () se debe comentar que se consideran las relaciones establecidas en [], en donde se toma en cuenta los valores de los elementos electrónicos que componen al filtro demodulador.

Como resultado, la figura nos muestra la señal de información comparada con la señal estimada o reconstruida para el valor de $A = 1$ y $f = 1$ kHz.

Implementación del sistema de comunicación en Multisim

En esta sección se presenta la implementación del sistema de comunicación mediante el simulador de circuitos Multisim. Este software tiene la finalidad de reproducir el comportamiento “apegado” al que presentaría el circuito electrónico real. Por lo que el principal objetivo de esta sección es el de estudiar la funcionalidad del sistema de comunicación en términos de tal implementación.

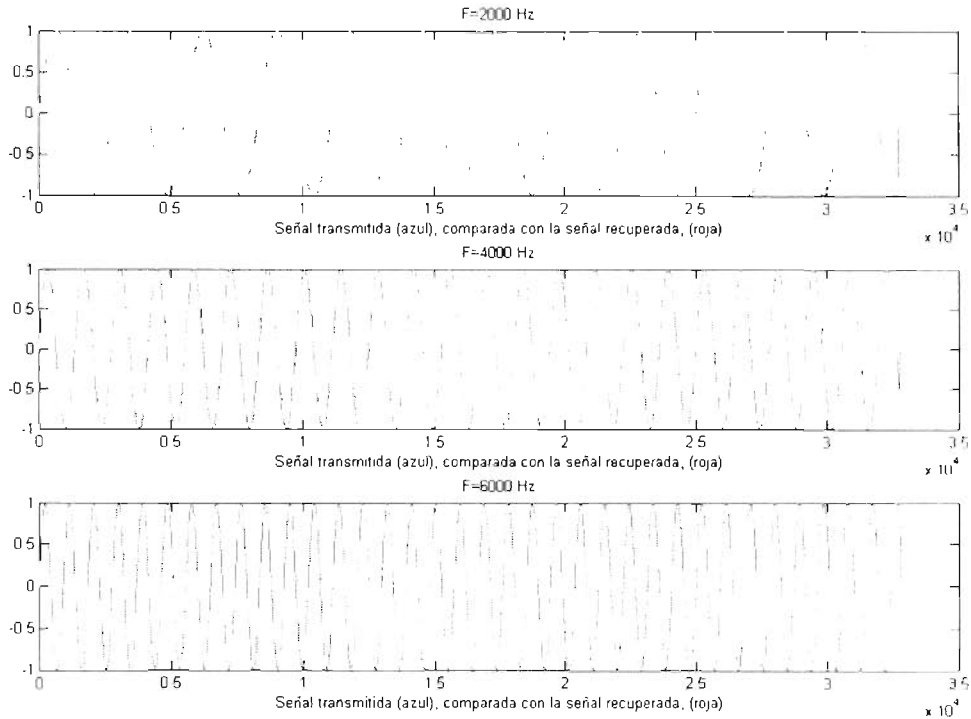


Figura 3.6: Comparación de la señal reconstrucción contra la señal original transmitida. A) Señal de información con frecuencia de 2000Hz , B) Señal de información con frecuencia de 4000Hz , C) Señal de información con frecuencia de 6000Hz .

Siguiendo el procedimiento anterior, la figura muestra la estructura electrónica del transmisor del sistema de comunicación con el sistema de Chua.

Se puede observar que para la señal de información se utiliza un generador de funciones, el cual se encuentra en el lado derecho de la figura, y tal señal es inyectada al oscilador de Chua por medio de la resistencia de $1\text{k}\Omega$. El estado a transmitir se tiene en la parte inferior del lado derecho de la figura.

Mientras que la figura muestra la proyección del atractor de Chua o doble enroscado cuando se tiene una dinámica caótica.

Por otra parte, las partes que componen el bloque receptor, el sub-sistema y el filtro demodulador, se muestran en la figura.

La sincronización del estado y del sistema del bloque transmisor con el estado reconstruido y_r del sistema receptor, se muestran en la figura.

El funcionamiento del sistema de comunicación, se puede observar en la figura. Tal figura muestra una ventana gráfica de un osciloscopio, la cual despliega la comparación entre la señal de información original con la señal recuperada. En el lado derecho se muestra la información que se proporciona al generador de funciones para producir la señal de información a considerar.

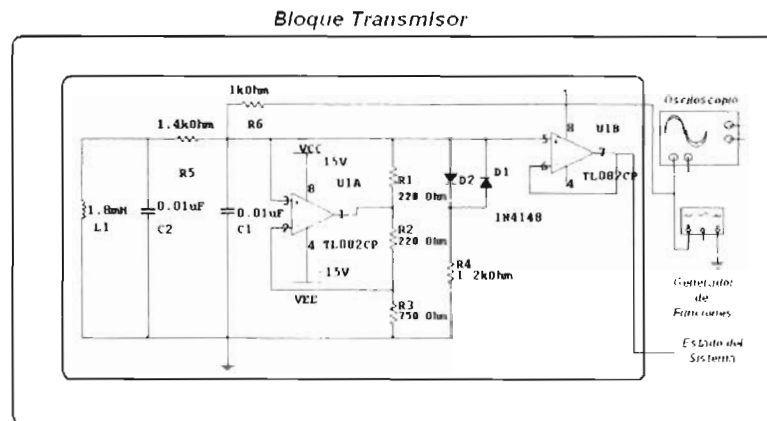


Figura 3.7: Diseño del bloque transmisor del sistema de comunicación usando el simulador de circuitos Multisim.

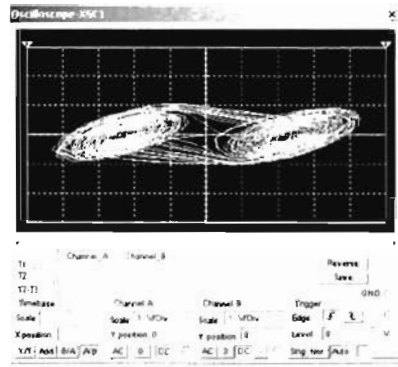


Figura 3.8: Resultados obtenidos de la simulación del circuito “experimental”, mostrando la dinámica caótica correspondiente al atractor de Chua.

Por ejemplo, si se presenta saturación en los amplificadores operacionales, que dependen de la alimentación de la fuente, podría afectar el funcionamiento del circuito.

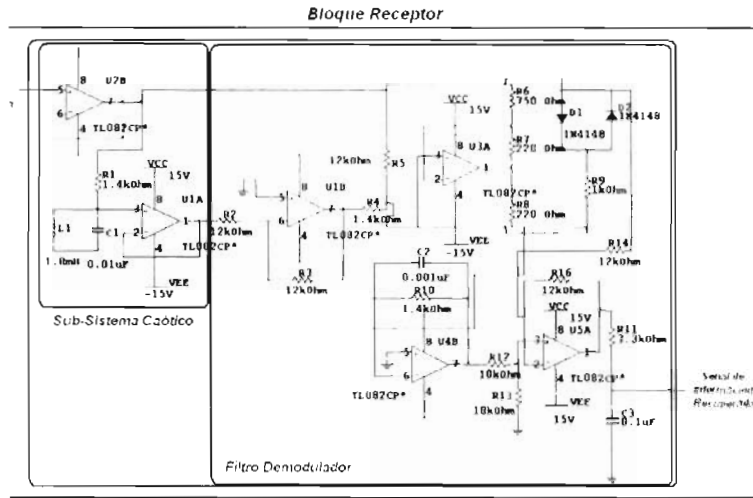


Figura 3.9: Bloque receptor en Multisim.

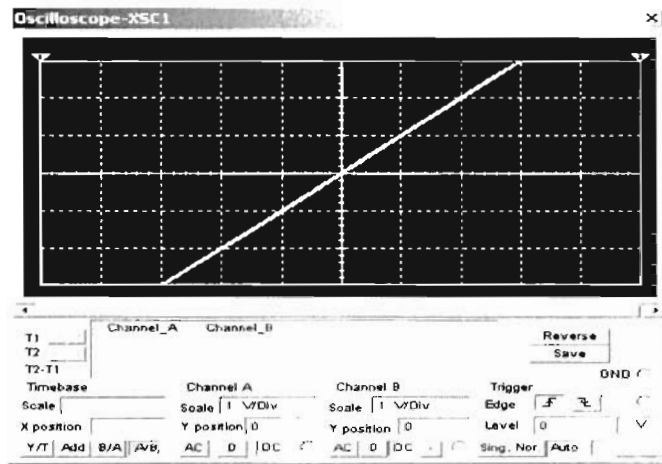


Figura 3.10: Ventana gráfica de un osciloscopio que despliega la sincronización de los estados $0/1$.

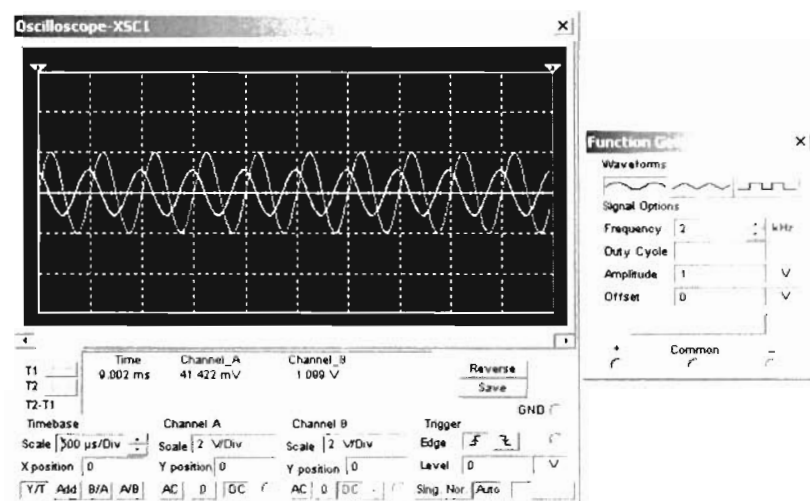


Figura 3.11: Ventana gráfica de un osciloscopio que despliega la comparación de la señal de información(mayor amplitud) con la señal recuperada(menor amplitud).



4

Caracterización

Hay un gran número de trabajos en la literatura de sistemas de comunicación basados en caos. Sin embargo, la mayoría de los trabajos que utilizan este enfoque sólo se limitan a mencionar si el sistema logra la transmisión y recuperación de la señal de información a cierta amplitud y frecuencia, sin presentar el rango útil de frecuencia que se pueden transmitir.

En este Capítulo se tratará de caracterizar el tipo de señales que resultan ser adecuadas para el sistema de comunicación caótico considerado en este trabajo de tesis. En particular, lo anterior consiste en determinar un conjunto de parámetros que nos permitan discernir el tipo de señales que el sistema de comunicación puede transmitir y recuperar de manera satisfactoria. Tal conjunto de parámetros se determinará en base al rango de frecuencias y amplitudes de la señal de información para que el sistema de comunicación funcione “satisfactoriamente”. A tal rango lo denominaremos como Región Útil (RU por brevedad). Además, se utiliza la herramienta de la transformada ondeleta para caracterizar las series temporales inmiscuidas en el sistema de comunicación, con el fin de obtener información del sistema.

4.1 Cálculo de la región útil(RU)

En los capítulos anteriores se describió un sistema de comunicación basado en el esquema de modulación paramétrica. Se mostró que se puede transmitir información utilizando señales con dinámica caótica como portadora de información. Sin embargo, no hay una referencia del tipo de señal que se puede transmitir y recuperar de manera exitosa. Para tratar de tener nociones del funcionamiento del sistema, empezamos por estudiar el rango de frecuencias y de amplitudes que nos permitan recuperar la señal de información original con el mínimo error posible. Como se mencionó anteriormente, a la región dada por el rango de frecuencias y amplitudes, lo

denominaremos como región útil (RU).

Para determinar la RU, la señal de información a ser considerada son del tipo senoidal:

$$\lambda(t) = A \operatorname{sen}(2\pi ft), \quad (4.1)$$

donde f corresponde a la frecuencia en hertz y A es la amplitud en volts. La RU está basada en términos del error entre la señal de información que se desea transmitir y la señal de información recobrada. Para determinar el error en un intervalo de tiempo $[t_i, t_f]$ se considera la expresión:

$$\text{Error} = \frac{1}{t_f - t_i} \int_{t_i}^{t_f} |\lambda(t - \tau) - C\hat{\lambda}(t)| dt, \quad (4.2)$$

donde λ es la información transmitida, $\hat{\lambda}$ es la información recuperada, τ es un valor de retardo para compensar el retraso introducido por la demodulación en el bloque receptor y C es el valor de la amplificación necesaria para obtener el error mínimo, es decir, que la relación () sea mínima.

En muchas ocasiones resulta relevante distinguir la manera en que ciertas cantidades son estimadas de una muestra finita de datos. Además, existen diferentes estimaciones de una misma cantidad de la misma información. Ante tal situación, distinguiremos a la estimación de cierta cantidad mediante un sombrero ó con tilde arriba del símbolo que se considera. Por lo que la estimación de la ecuación () está dada de la siguiente forma:

$$\tilde{E} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n |\lambda[t_k - \tau] - C\hat{\lambda}[t_k]|, \quad (4.3)$$

donde $\lambda[t_k]$ es la señal de información a ser transmitida y $\hat{\lambda}[t_k]$ es la estimación de la información recuperada, los parámetros τ y C se definieron anteriormente. Se puede observar que para que el error \tilde{E} en () sea mínimo, los principales parámetros a considerar son el retardo τ y la amplificación C . Cabe señalar que existen ciertos transitorios, los cuales se presentan debido a la etapa de modulación en la señal de información y posteriormente en la señal recuperada. Por lo que el primer paso es el de remover tales valores antes de calcular τ y C .

4.1.1 Estimación de τ

La estimación de τ se realiza mediante un barrido de retardos de la siguiente manera. Se introduce un valor numérico de retardo inicial τ_1 y se calcula el error utilizando ().

Posteriormente, se aumenta el valor numérico del retardo, $\tau_2 = \tau_1 + \Delta\tau(1)$, donde $\Delta\tau(k)$ es un incremento fijo, y se vuelve a calcular el error \tilde{E} . Se continua con el barrido, $\tau_{m+1} = \tau_m + \Delta\tau(m)$, donde $\Delta\tau(k)$ es fijo y $k = 1, \dots, m$. Debe mencionarse que los valores de

los errores obtenidos se van almacenando en un arreglo para después determinar cual error es menor. A pesar de que la manera de calcular τ no es muy depurada, es suficiente para nuestros propósitos.

4.1.2 Estimación de C'

El siguiente parámetro que se debe determinar es el de la constante de amplificación C' , cuyo valor es estimado mediante la comparación de las amplitudes de las primeras crestas de las señales de la señal transmitida y de la recuperada. La forma de calcular la amplificación se realiza de forma similar a lo realizado con el retardo. Debe señalarse que para calcular el valor de la amplificación se debe tener en principio el valor del retardo τ .

En un principio se introduce un valor de amplificación C'_1 , que por lo general siempre es uno, y se calcula el error \tilde{E} (). Lo que le sigue es el determinar si se debe o no aumentar o disminuir el valor de la amplificación. Si el error para C'_1 es elevado, entonces se le aumenta un valor $\Delta C'_1 > 0$ en decimales y calcular el nuevo error. Ahora la amplificación es $C'_2 = 1 + \Delta C'_1$ y si el error empieza a disminuir, entonces se continua de manera sucesiva hasta que el error sea mínimo. En caso de que suceda lo contrario, entonces se le empieza a disminuir la constante $\Delta C'_1$ y se sigue de manera similar al procedimiento anterior.

Lo anterior se resume en observar el tipo de comportamiento del error para que sea mínimo en función de la amplificación, donde $C'_{k+1}(s) = 1 + k\Delta C' \times s$, para $k = 0, 1, \dots$, $\Delta C' = 0.1$ y $s = 1$ o $s = -1$, según sea aumento o disminución, respectivamente. Cabe mencionar que el incremento $\Delta C'$ puede ser diferente, pero para fines ilustrativos se detalla para el caso en que $\Delta C' = 0.1$.

4.1.3 Región útil

Como primer instancia se realizaron las primeras pruebas a una señal de información para validar nuestra propuesta. Para realizar lo anterior, se considera una señal de información $\lambda(t) = \text{sen}(4000\pi t)$, es decir, de amplitud $A = 1$ y frecuencia $f = 2$ kHz, ver (). La figura

a) muestra la señal transmitida (señal de información después de entrar a la dinámica del oscilador caótico). En la figura b) se presenta la señal de información recuperada del sistema de comunicación. Se puede observar que en los primeros datos es visible la influencia de los transitorios. En este caso, se propuso que el número de datos para eliminar los transitorios fue aproximadamente de 6000, tanto para la señal transmitida como la recuperada. La gráfica del error para este caso, después de haber quitado los transitorios, se muestra en la figura

c), donde se puede observar el comportamiento de los errores obtenidos. De los resultados mostrados seleccionamos el valor del retardo τ en el primer mínimo de \tilde{E} , así $\tau = 200$. Para la amplificación fue relativamente sencillo, ya que fue de valor unitario, esto es $C' = 1$. Por último, la figura d) muestra la comparación de la señal transmitida contra la señal recuperada después de aplicar los parámetros de retardo τ y de amplificación C' . Se puede ver que se logra una buena estimación de la señal de información.

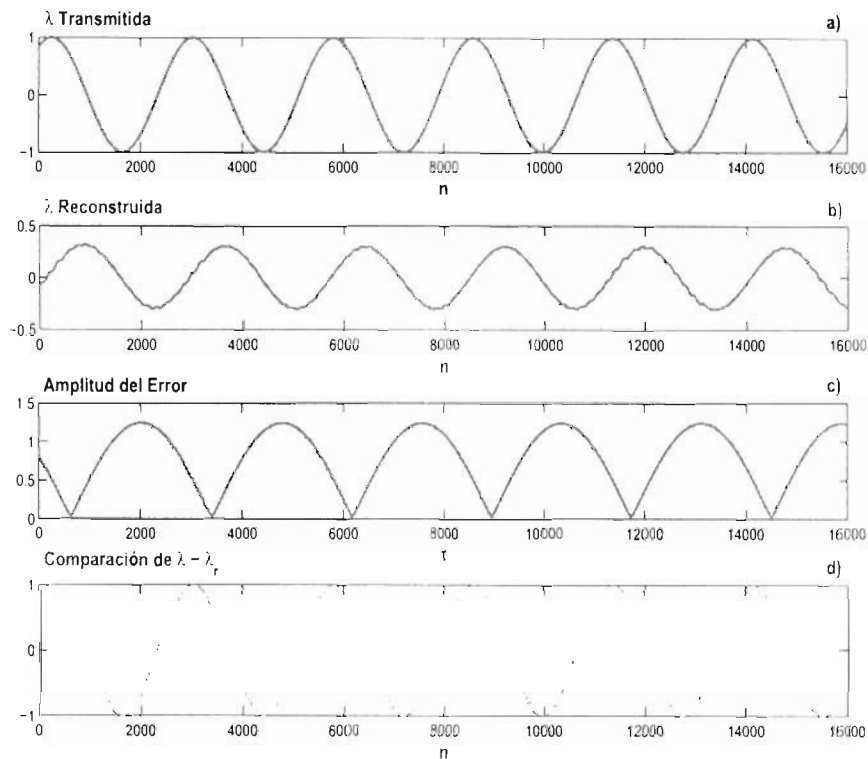


Figura 4.1: a) Señal de información a ser transmitida y b) su respectiva estimación. c) Gráfica del barrido de retardos para encontrar el error mínimo mediante (). d) Superposición de la información original y su estimación introduciendo el menor retardo (τ) y la amplificación (C').

El caso anterior fue para un solo valor de retardo así como de amplificación, pero resulta de mayor interés considerar un conjunto de diferentes frecuencias y amplitudes. La figura a) muestra la evolución del error para diferentes frecuencias al aplicar el enfoque propuesto a una señal con amplitud $A = 1$, ver (), y un valor umbral de 0.5 como error máximo. Se puede percibir que conforme se incrementa la frecuencia de la señal, el error también lo hace, excepto en los casos particulares de $f = 27$ kHz y $f = 28$ kHz, donde el error se dispara abruptamente. Tal situación no se ha podido esclarecer del todo, pero se cree que se debe a que esas frecuencias están próximas de las frecuencias del oscilador, con lo cual destruye la información original. Para este ejemplo, si el valor umbral es 0.5 como error máximo, se encontró que la frecuencia máxima fue $f_{\max} = 195$ kHz, por lo que el sistema de comunicación no transmite información de manera satisfactoria para frecuencias mayores a f_{\max} . Es claro que bajo las condiciones establecidas de este caso, no se deben contemplar las frecuencias 27 kHz y 28 kHz, debido a lo explicado anteriormente. De hecho, podemos referirnos al rango de frecuencias para una RU de señales de información como la unión de dos intervalos de frecuencia, $[0, 27)$ y $(28, 195]$ en unidades de kilo Hertz, o solamente al rango de frecuencias previas a las de cambio abrupto

en el error, es decir, $0 \leq f \leq 26$ kHz con un umbral aproximado de 0.1. En particular, en la figura b) se muestra la evolución del error para los casos en que la señal de información tiene las amplitudes $A = 0.5, 1$ y 2 , con un valor umbral de 0.1 como error máximo. Se puede observar que los rangos de frecuencia se van reduciendo conforme la amplitud se incrementa. De hecho para $A = 2$ se tiene que el error tiene un comportamiento más oscilatorio que los casos anteriores, lo cual nos indica una mayor dificultad para recuperar la señal de información. Además, es claro que en algunas frecuencias se pasa del 0.1 como error, por lo que se considero hasta las frecuencias que al menos una de sus oscilaciones esté dentro de 0.1.

Con lo anterior se puede comentar que mucho va a depender del tipo de aplicación que se considere para ir estableciendo los parámetros idóneos y que el sistema de comunicación transmita y recupere la señal de información con el error mínimo posible.

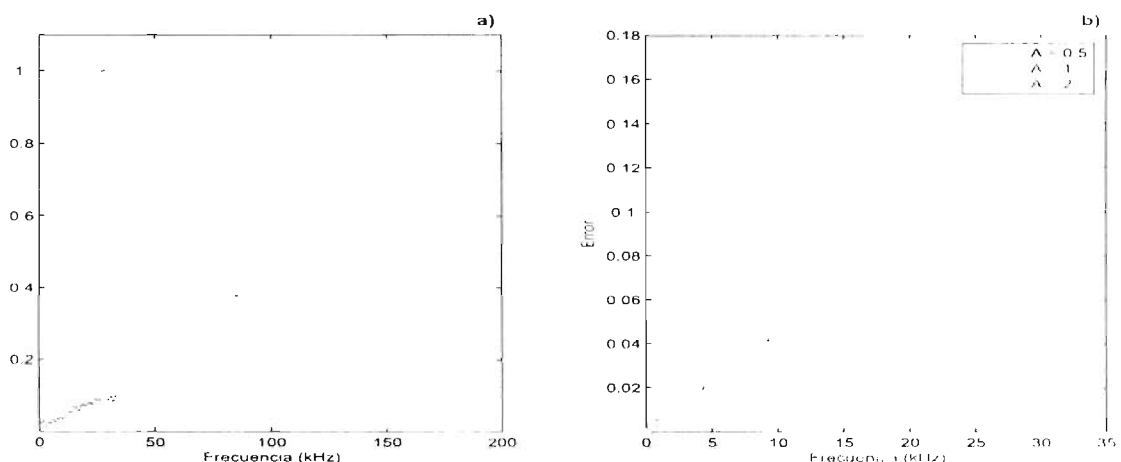


Figura 4.2: Error entre la señal de información transmitida y la reconstruida en el sistema de comunicación propuesto. a) Amplitud del error para una señal de información de amplitud $A = 1$ y valor de umbral de error 0.5. b) Comportamiento de los errores obtenidos para una señal de información con amplitud $A = 0.5, A = 1$ y $A = 2$ y umbral de error de 0.1

Con el fin de ilustrar lo anterior, la figura muestra el desempeño del sistema de comunicación para dos señales de información y las señales estimadas. En la columna izquierda se muestran las señales de información a) $\lambda(t) = \text{sen}(2000\pi t)$ y c) $\lambda(t) = \text{sen}(4000\pi t)$, mientras que en b) y d) las versiones estimadas, respectivamente. Se observa que el sistema de comunicación funciona de manera apropiada considerando el rango de frecuencias que considera la RU.

Debido a que uno de los intereses en este trabajo es determinar la RU en su totalidad, es decir, el rango de frecuencias (f) y amplitudes (A) de las señales que pueden ser transmitidas para que se puedan recuperar con el error mínimo posible, en principio se fijó el rango frecuencias para que el sistema funcionará satisfactoriamente y posteriormente establecer el rango de amplitudes de la señal. Se debe tener en cuenta que para un cierto rango de valores de frecuencia y amplitud pueden destruir el comportamiento caótico, por lo que no sería posible tener una buena estimación de la señal de información. Siguiendo el enfoque para determinar la RU, la figura

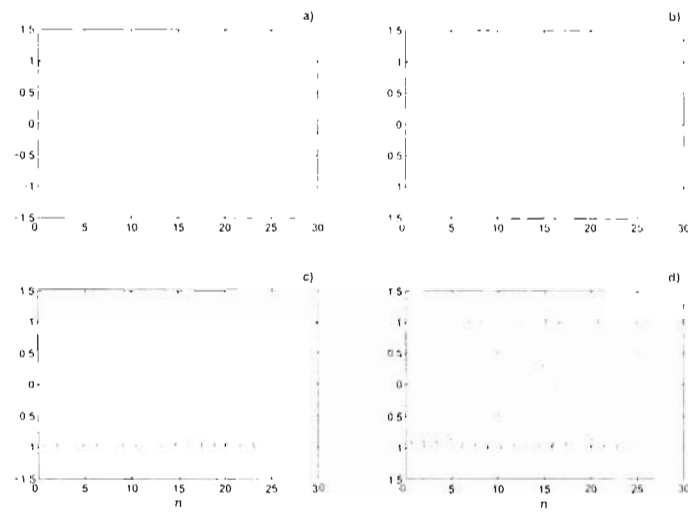


Figura 4.3: a) Señal de información transmitida con frecuencia de 2 kHz, b) señal de información estimada del caso a), c) señal de información con frecuencia 4 kHz y d) su respectiva estimación.

muestra los resultados obtenidos, donde lo sombreado nos indica el rango de las frecuencias en función de la amplitud considerando un umbral del error de 0.1.

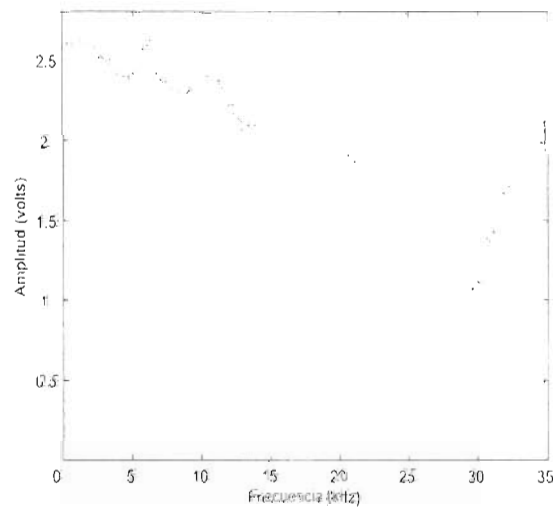


Figura 4.4: Región útil del sistema de comunicación considerando un umbral de error igual a 0.1.

Aunado a los resultados, se tiene la información del conjunto de valores del retardo τ y la amplificación C , correspondiente a cada frecuencia f y amplitud A de la señal de información transmitida. La figura muestra el retardo τ y su respectiva amplificación C para cada señal transmitida con diferente frecuencia f . En esta situación se tomo la amplitud $A = 1$ en la señal de información a ser transmitida y el rango de frecuencias a considerar es hasta 27 kHz. De la figura se tiene que conforme la frecuencia f aumenta, el retardo τ disminuye de manera exponencial, mientras que la amplificación C se incrementa casi linealmente.

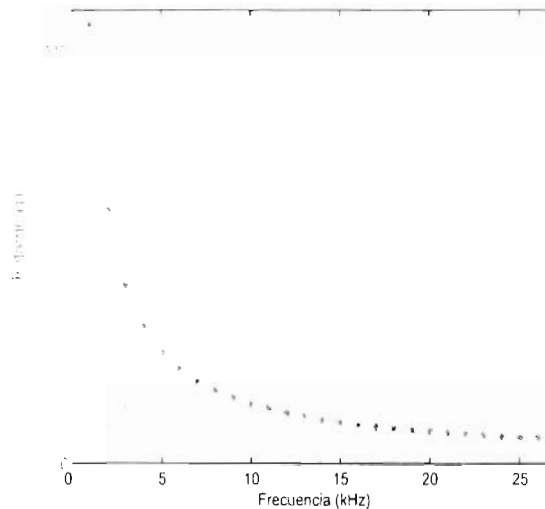


Figura 4.5: Valores de los parámetros de retardo τ y amplificación C para una señal de información con amplitud $A = 1$ considerados en la RU.

De manera similar, la figura muestra los parámetros necesarios para encontrar el error mínimo de la señal transmitida (τ y C). En este caso, la señal senoidal tiene una amplitud de $A = 2$. De acuerdo al criterio del error igual a 0.1, la frecuencia máxima en el rango de frecuencias para la RU, ver figura , es de 18kHz, situación que se considera para los valores de τ y C . De la figura resulta que tiene un comportamiento similar al caso anterior, salvo que el retardo inicial es aproximado a 1000 y la amplificación máxima C tiene un valor aproximado de 30.

4.2 Repercusión(Influencia) del acoplamiento

Para la implementación del sistema de comunicación caótico propuesto es muy importante que se realice la sincronización de los sistemas que se encuentran tanto en el transmisor como en el receptor. En esta sección se discute si causa o no efecto la modulación de la información en el acoplamiento del sistema del transmisor con el sub-sistema del receptor.

Para analizar un posible efecto entre los sistemas, se obtienen los histogramas correspondientes

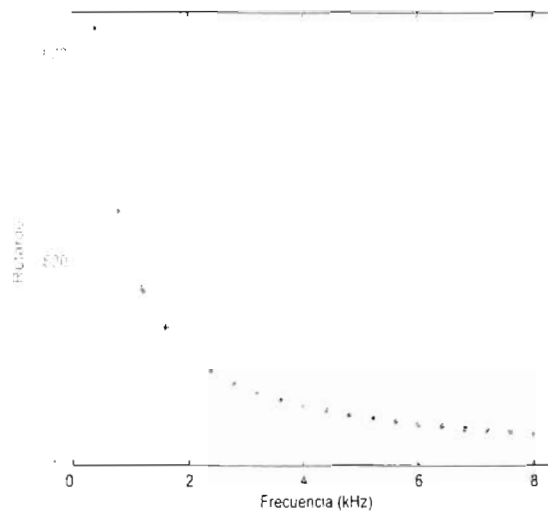


Figura 4.6: Valores de los parámetros de retardo τ y amplificación C' para una señal de información con amplitud $A = 2$ considerados en la RU.

a la diferencia entre los estados del sistema del transmisor con los estados del sub-sistema del receptor. De hecho, solo se consideran los casos para la diferencia de los estados, $(y - y_r)$ y $(z - z_r)$, ya que el estado x es el que se modula con la información y por ende no se encuentra en el sub-sistema del receptor.

La figura muestra los histogramas de las diferencias entre el estado y y su estado reconstruido y_r . El análisis se realiza para los casos en que la señal de información está o no presente en el sistema de comunicación. En caso de que la señal de información λ esté presente en la dinámica del sistema, se consideran los casos de λ con amplitud $A = 1$ y frecuencias $f = 1, 10, 20, 30$ y 40 kHz. Se puede observar de los resultados obtenidos y mostrados en la gráfica de la figura, que la modulación en sí no afecta en el funcionamiento de la sincronización, es decir, los estados inmiscuidos pueden sincronizarse y recuperarse.

De manera similar, la figura muestra los histogramas para la misma información anterior, pero ahora se considera para el caso de $(z - z_r)$. Debido a que los resultados son muy parecidos al caso del segundo estado, $(y - y_r)$, se puede intuir que el proceso de acoplamiento y sincronización entre los sistemas del transmisor y receptor del sistema de comunicación, tienen un buen funcionamiento. Cabe mencionar que resultados similares se obtienen al considerar otras amplitudes en la señal de información, por lo que se optó por ilustrar un sólo caso.

En base a los resultados obtenidos de los histogramas, se piensa que el desempeño de los filtros no lineales, de la etapa del receptor, podría mejorarse, situación que se está considerando para tratar de implementarlos de tal manera que tengan un mejor funcionamiento, pero por el momento no se ha podido llevar a cabo debido a lo extenso que ha sido la caracterización del sistema de comunicación.

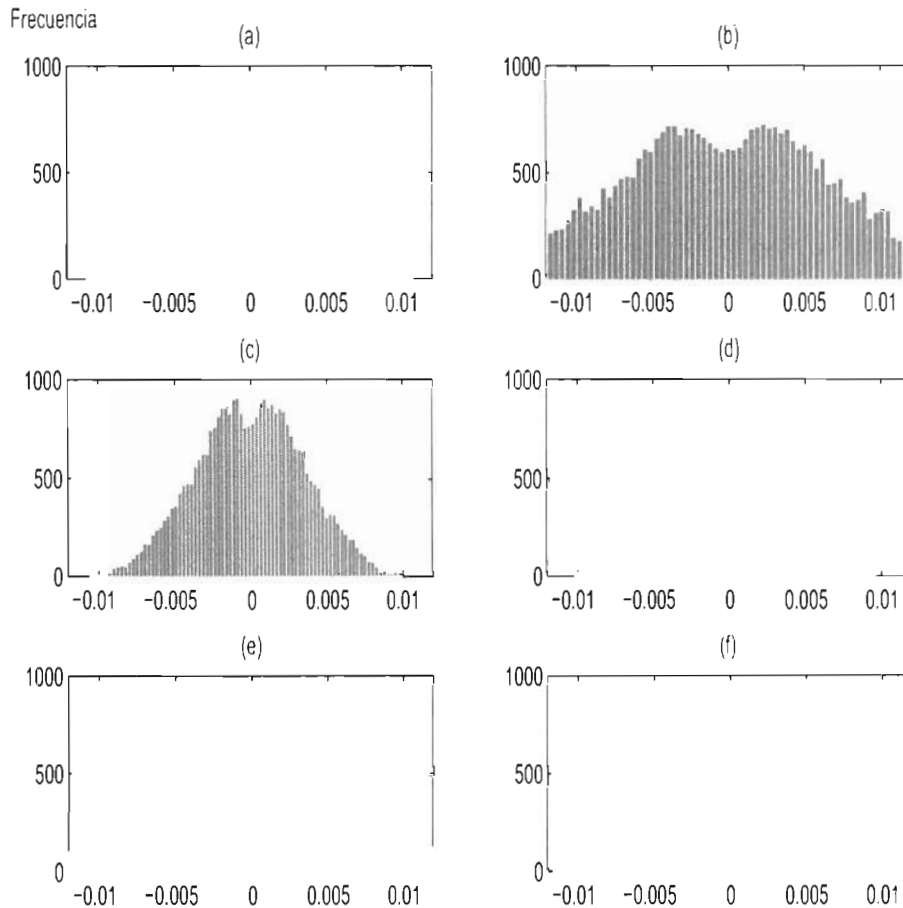


Figura 4.7: Histogramas correspondientes al caso de $(\eta - \eta_r)$. (a) Situación en que no se tiene presencia de la señal de información en la dinámica del sistema. Los demás incisos consideran la señal de información presente en la dinámica con amplitud $A = 1$ y frecuencias (b)1 kHz, (c)10 kHz, (d)20 kHz, (e)30 kHz y (f)40 kHz.

4.3 Análisis de Series de Tiempo Caóticas

En esta sección se analizan series temporales con dinámica caótica (STC), las cuales provienen de los estados involucrados en el sistema de comunicación, específicamente del oscilador caótico de Chua. En el análisis se hace uso de la transformada ondeleta, la cual se aplica a las STC y la interpretación de los resultados se basa en la distribución de la energía de los coeficientes obtenidos en diferentes niveles de resolución. Lo anterior es con el fin de determinar si la distribución de la energía en los diferentes niveles proporciona información adicional del sistema de comunicación.

En las Referencias [1, 2] se analizaron diferentes series temporales estableciendo propiedades dependiendo de la naturaleza de la información. En particular, en [3] se estudiaron series

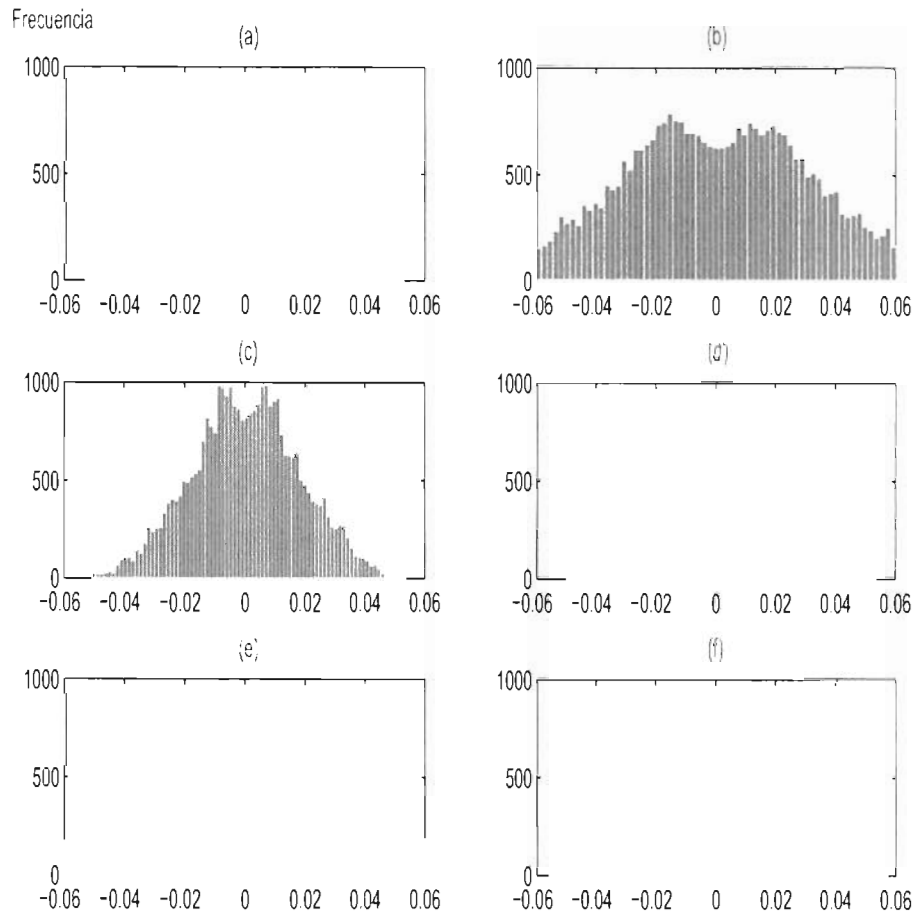


Figura 4.8: Histogramas correspondientes al caso de $(z = z_r)$. (a) Situación en que no se tiene presencia de la señal de información en la dinámica del sistema. Los demás incisos consideran la señal de información presente en la dinámica con amplitud $A = 1$ y frecuencias (b)1 kHz, (c)10 kHz, (d)20 kHz, (e)30 kHz y (f) 40 kHz.

temporales con dinámica caótica de diferentes circuitos electrónicos, lo cual es una base para nuestro estudio. Básicamente, el análisis que se realiza a una STC nos permitirá establecer ciertas características o propiedades del tipo de información que se analice. Para precisar el comportamiento de las STC's y en base a [,] se consideran las siguientes observaciones:

1. Si en la gráfica semi-logarítmica de la varianza se encuentra en un nivel un máximo de manera sobresaliente, implica que se tiene una gran concentración de energía en ese nivel, junto con sus niveles vecinos, lo cual indica que la serie temporal tiene una frecuencia portadora.
2. Si en la gráfica semi-logarítmica de la varianza se encuentra un comportamiento de línea horizontal (gradiente cero), resulta que la concentración de la energía no se encuentra

en un nivel o niveles, dando como resultado un comportamiento correspondiente a ruido Gaussiano [10].

3. Si en la gráfica semi-logarítmica de la varianza se encuentra un comportamiento de línea con pendiente negativa, nos indica un comportamiento fractal en la serie temporal.

De lo anterior se debe tener en cuenta que el logaritmo de la varianza con respecto a los niveles es a partir de la relación (10), donde se involucra a los coeficientes $f_{j,k}$, los niveles de resolución j y al exponente de auto-similaridad β . Además, vale la pena destacar que aunado a las observaciones anteriores, en este trabajo se trata de especificar información del comportamiento de las STC's cuando muestran un comportamiento combinado de las situaciones anteriores que se presentaron.

4.3.1 Análisis de STC no moduladas

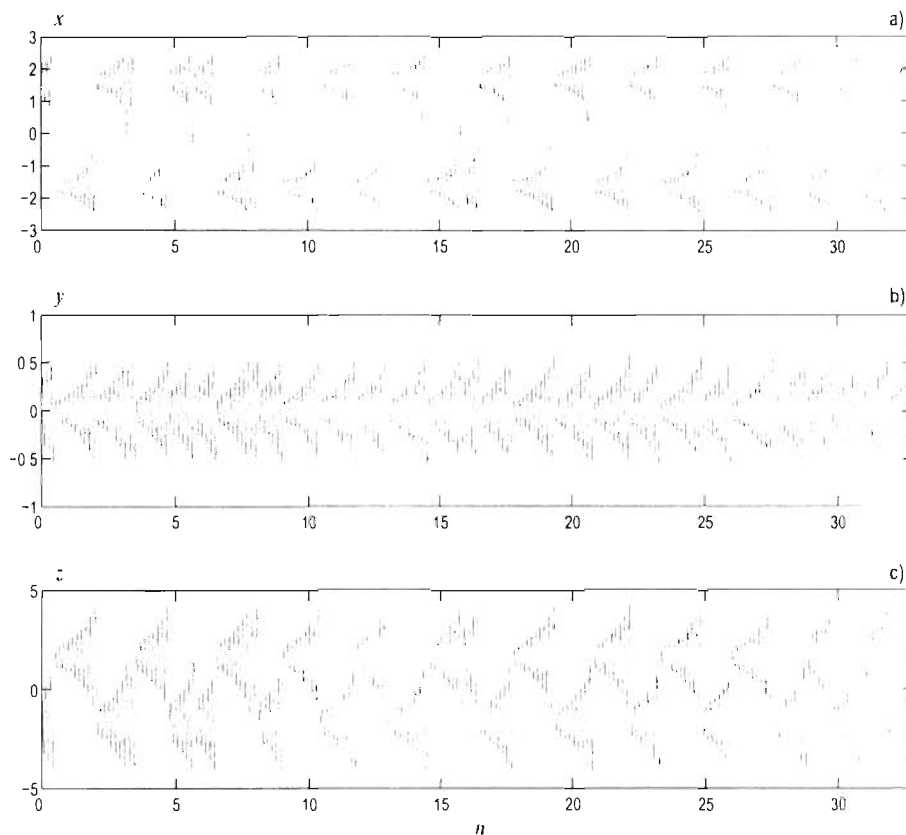


Figura 4.9: Series temporales con dinámica caótica de los estados del sistema caótico del transmisor cuando la señal de información es nula, a) estado x , b) estado y y c) estado z .

El análisis con la TO a las STC's se aplica en principio a las series temporales cuando no se aplicó modulación en el sistema de comunicación. Es decir, la señal de información no está presente en la dinámica del oscilador caótico.

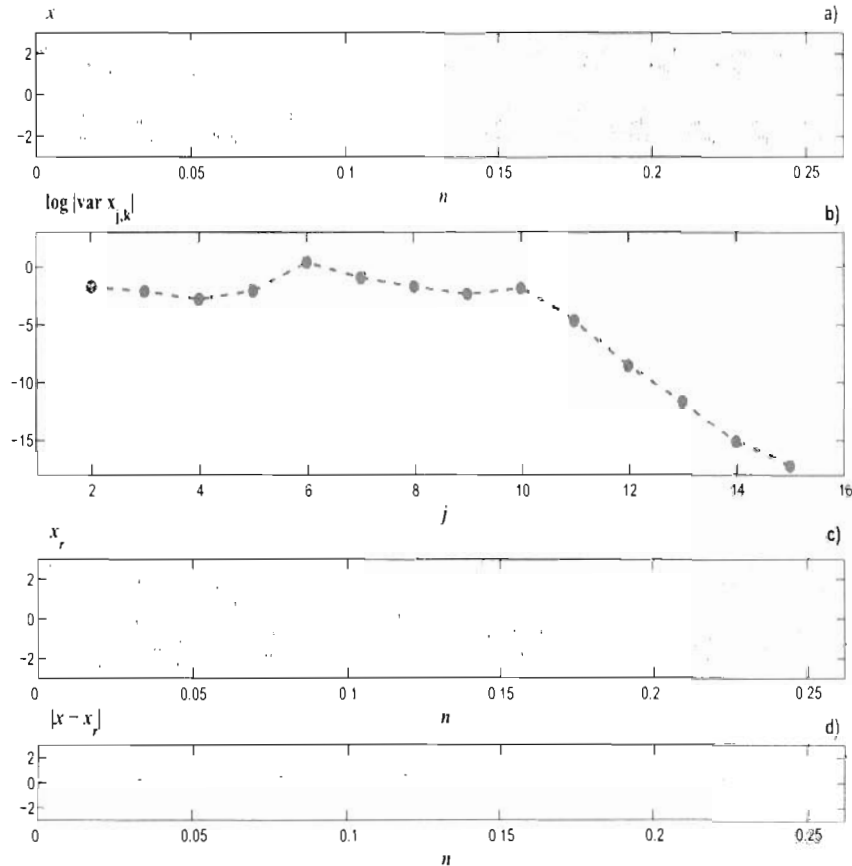


Figura 4.10: a) Datos numéricos del estado x , b) logaritmo de la varianza de los coeficientes del estado transformado, c) reconstrucción del estado con 6 niveles de los coeficientes, d) error entre el estado analizado con el estado reconstruido de c).

La figura muestra las series temporales con dinámica caótica del sistema de Chua en el transmisor para esta situación. En principio, se analizará la STC del estado x (ver figura a)), la cual servirá de base para observar el comportamiento de la serie temporal producida por el sistema de comunicación. En el análisis se considera una longitud o tamaño de la STC numérica de 32768 datos, longitud relacionada al número de niveles a transformar, es decir, el número de niveles a considerar es $m = \log_2(32768) = 15$. En la figura se muestran los resultados obtenidos para este estado. Parte de la información del estado x se muestra en la figura a), mientras que en la figura b) se tiene el logaritmo de la varianza de los coeficientes del estado transformado en función del nivel j . Para realizar la transformada ondeleta se utilizó la función ondeleta de Daubechies $db4$. Se puede observar que hasta el nivel $j = 10$ se tiene

un comportamiento similar al del ruido, es decir, pendiente nula. Después de ese nivel, de $j = 11$ a $j = 15$, se tiene un comportamiento tipo fractal. De lo anterior se puede decir que no hay una concentración de energía en “pocos” niveles en particular. De hecho, se realizó una reconstrucción del estado x al sumar los niveles del $j = 6$ a $j = 11$ de los coeficientes de la TO, lo cual se observa en la figura c). Por último, la figura d) muestra el error existente entre el estado original y el estado reconstruido por los seis niveles. Se puede apreciar que se tiene un error un poco oscilante con amplitud del 25 %, lo cual implica que la energía está distribuida en más niveles y por ende se tienen que considerar más niveles para disminuir el error.

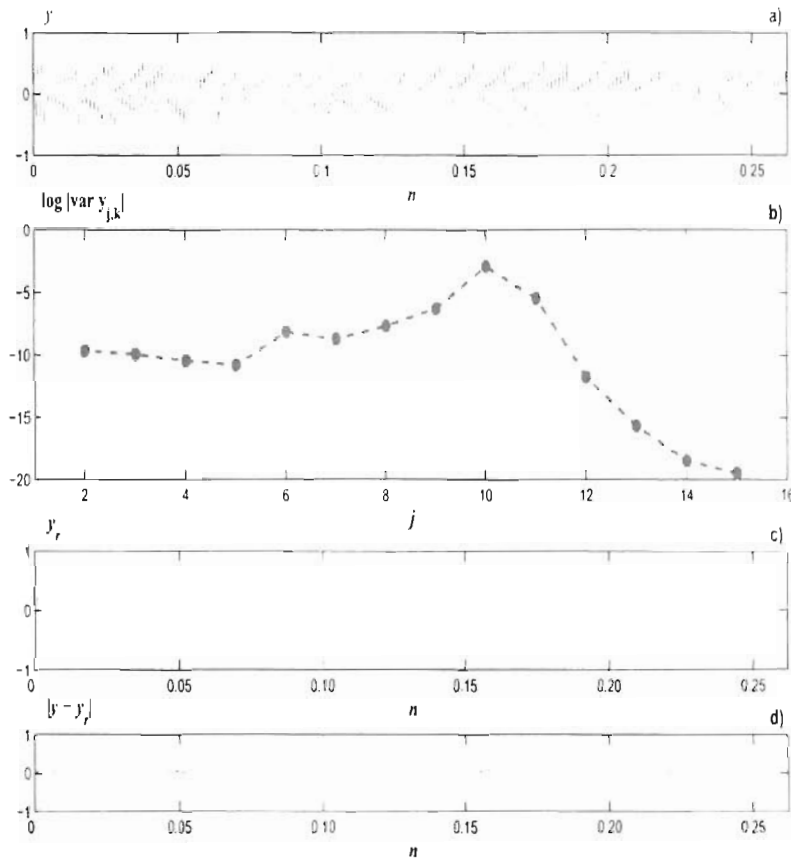


Figura 4.11: a) Datos numéricos del estado y . b) logaritmo de la varianza de los coeficientes del estado transformado, c) reconstrucción del estado con 2 niveles de los coeficientes. d) error entre el estado analizado con el estado reconstruido de c).

Realizando el mismo análisis al estado y , la figura muestra los resultados. Parte de la información del estado y se ilustra en la figura a) y en la figura b) su respectivo logaritmo de la varianza de los coeficientes en función del nivel j . En este caso se puede apreciar una elevación importante en el nivel $j = 10$, por lo que se trata de verificar si este nivel es significativo. Debido a que el nivel $j = 11$ está muy próximo a la amplitud del nivel

$j = 10$, ambos niveles se consideraron en la reconstrucción del estado y . La figura c) muestra tal reconstrucción e indica una gran concentración de energía en estos dos niveles, esto es, se tiene una frecuencia portadora. El error nos confirma lo anterior y se puede observar en la figura d).

La última STC por analizar corresponde al estado z . La información generada por el estado z se muestra en la figura a). El análisis estadístico con la TO se observa en la figura b), donde no hay un nivel sobresaliente. De hecho, la situación es muy similar al caso del estado x . En las figuras c)-d) se observa la reconstrucción de seis niveles y el error de la STC del estado z original y su reconstrucción, de manera respectiva. Como resultado se tienen dos comportamientos, uno de tipo ruido para los niveles de $j = 2$ hasta $j = 10$ y de tipo fractal para $j \geq 11$.

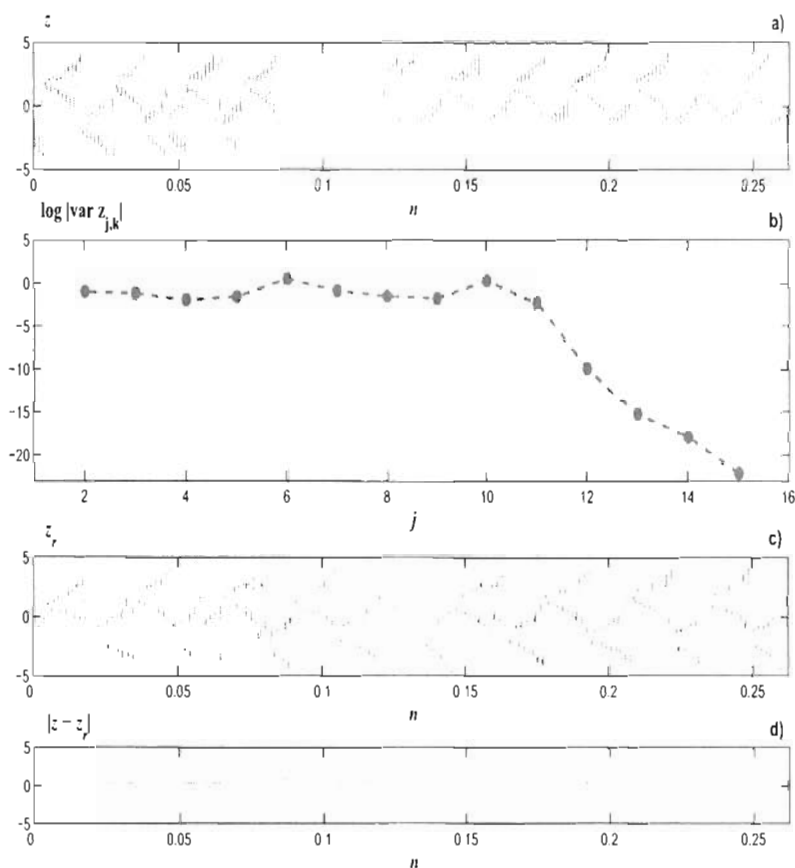


Figura 4.12: a) Datos numéricos del estado z , b) logaritmo de la varianza de los coeficientes del estado transformado, c) reconstrucción del estado con 6 niveles de los coeficientes, d) error entre el estado analizado con el estado reconstruido de c).

Por último, se comparan los estados y y z generados en el transmisor con los los estados reconstruidos en el receptor, y_r y z_r . Al realizar el análisis a los estados reconstruidos en

el receptor, se obtuvieron ligeras modificaciones, sin cambiar en general el comportamiento establecido anteriormente. En la figura se muestra la comparación y se puede constatar los comentarios anteriores.

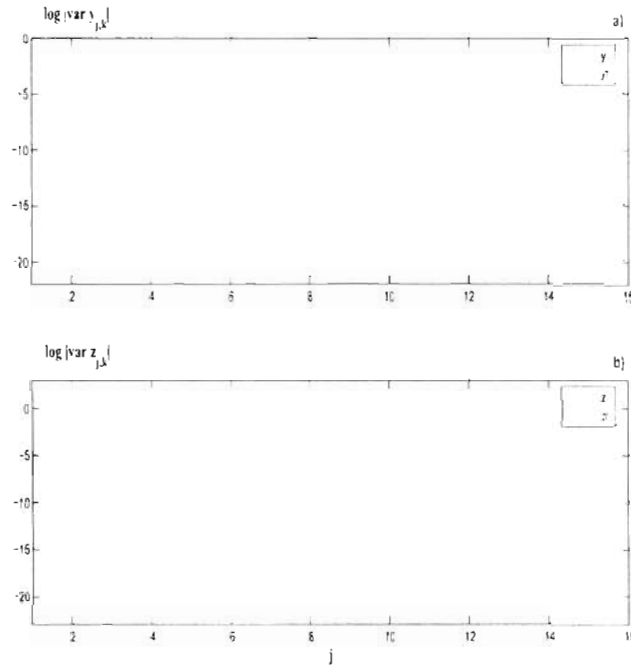


Figura 4.13: Comparación entre los estados del transmisor con los del receptor a) y con el estado reconstruido y_r y b) estado z con el reconstruido z_r .

Como resultado para esta situación, el estado y es el único que presenta una concentración de energía en un par de niveles, mientras que para los estados x y z se pueden observar dos tipos de comportamiento, de ruido y fractal.

4.3.2 Análisis de STC moduladas

Con el fin de estudiar el efecto que causa la modulación de la información en los estados del sistema, se aplica el mismo análisis estadístico con la TO realizado en la sección . En principio se consideran los estados modulados y los posibles estados reconstruidos para una señal de información $\lambda = A \text{sen}(2\pi ft)$ con un valor de amplitud $A = 1$ y diferentes valores de frecuencia f . Para ver si la modulación cambia la dinámica de los estados, en la figura se grafican los estados modulados para $\lambda = \text{sen}(4000\pi t)$. Comparando con los estados modulados de la figura , se puede observar que la dinámica se modifico.

Al considerar una señal de información de amplitud $A = 1$ y diferentes frecuencias f , $\lambda = \text{sen}(2\pi ft)$, las figuras a), b) y d) muestran la distribución de energía en los diferentes niveles de TO para los estados modulados x , y y z en el transmisor, respectivamente, mientras

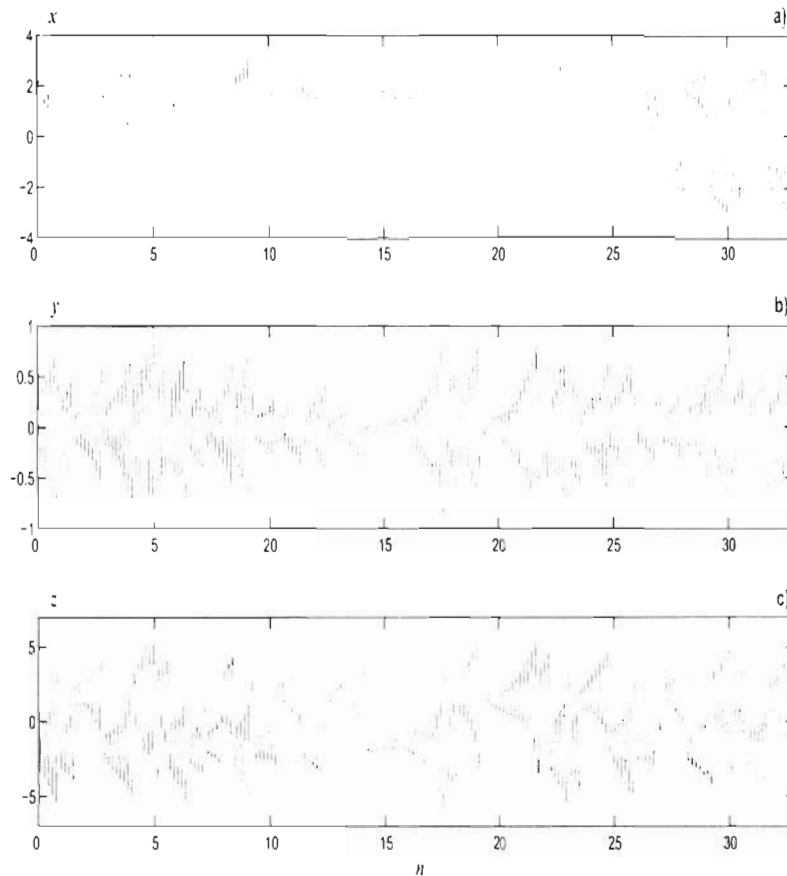


Figura 4.14: Series temporales de los estados del sistema caótico del transmisor cuando se modula con una señal de información $\lambda = \sin(1000\pi t)$, es decir, $A = 1$ y $f = 2$ kHz. a) estado x , b) estado y y c) estado z .

que las figuras c) y e) corresponden a los estados recuperados en el receptor y_r y z_r , de manera respectiva.

La distribución de energía de los tres estados es muy similar para las diferentes frecuencias, así como al comportamiento obtenido en la sección anterior. Esto implica que la modulación no afecta demasiado en la distribución de la energía. Sin embargo, los resultados muestran que el estado y tiene una gran concentración de energía en un par de niveles y por tanto un gran contenido de la señal de información. Lo anterior parece contradecir el hecho que el estado modulado x debería tener un comportamiento similar al del estado y . En la Referencia [] se considero una versión experimental modificada del sistema de comunicación propuesto en este trabajo, donde se mostró que es posible modular el estado x del sistema y enviar un diferente estado, en particular y , y recuperar la señal de información. Por lo que se cree que los resultados

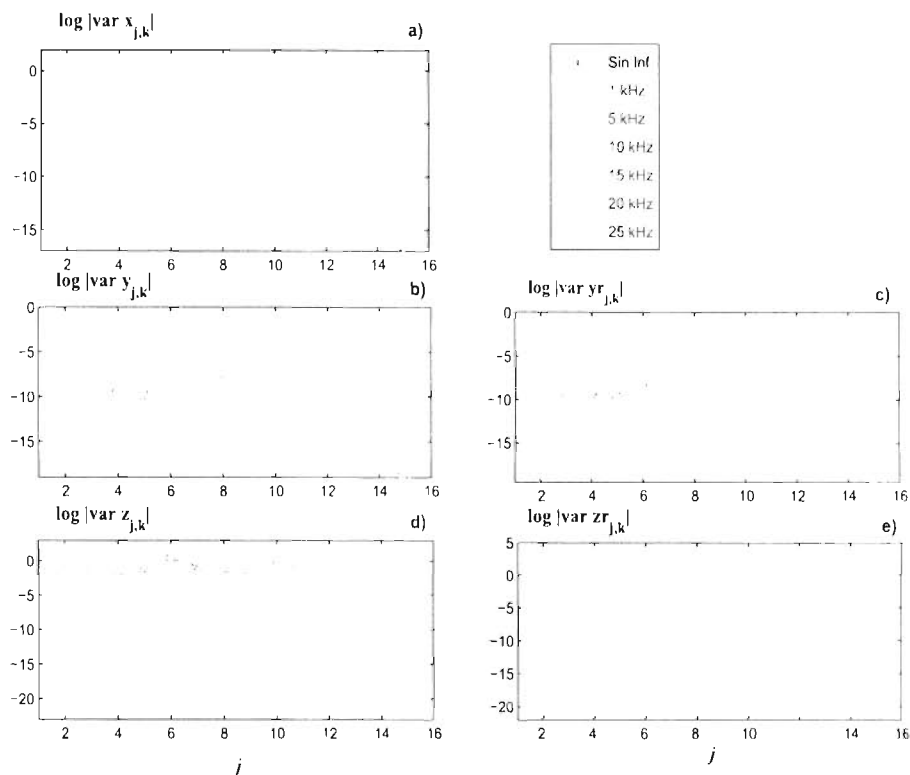


Figura 4.15: Distribución de la energía para los estados modulados en el sistema de comunicación considerando la señal de información $\lambda - \text{sen}(2\pi ft)$ para diferentes frecuencias. Estados modulados en el transmisor a) x , b) y y d) z , y estados recuperados en el receptor c) y_r y e) z_r .

obtenidos en este trabajo podrían auxiliar para explicar los resultados de [].

Como se menciona con anterioridad los parámetros de la señal modulada como son frecuencia y amplitud, toman un papel muy importancia para la transmisión de la información en el sistema de comunicación caótico, ya que un aumento importante de estos parámetros puede destruir el comportamiento caótico de este sistema de comunicación. Por tanto la herramienta de análisis que nos proporciona la transformada ondeleta nos ayuda a analizar la distribución de la energía, con el aumento de los dos parámetros como se observa en las graficas. Como se menciona el comportamiento de los coeficientes de la transformada ondeleta nos proporcionan información adicional de la serie de tiempo que se analiza, por tanto se habla que si la pendiente en este comportamiento era cero sería similar al ruido, si la pendiente de la serie era negativa sería del tipo autisimilar, quiere decir que es fractal y si la pendiente era positiva tendría un comportamiento de concentración de energía, una frecuencia portadora. Por tanto se realizaron análisis aumentando los parámetros de la información modulada para observar como se modifican las pendientes o encontrar un comportamiento que nos indique que sucedera cuando se modifiquen los parámetros.

Aunado a lo anterior, se considero pertinente comentar que debido a la distribución de la energía de los estados caóticos, se presentan dos comportamientos diferentes, de tipo ruido y tipo fractal. Se piensa que tales resultados se deberían cuantificar de manera local y no global como lo establecido en el inicio de esta sección. Para tal caso, se determina el valor de las pendientes de las aproximaciones lineales cuando ocurre el cambio de comportamiento, es decir, en los puntos de cruce. En la figura se muestra la distribución de la energía del estado x cuando se modula con la señal $\lambda = \sin(2\pi ft)$ para $f = 2, 26, 60$ y 100 kHz. El nivel de cruce es $j = 10$, donde se puede decir que para niveles pequeños, $2 \leq j \leq 10$, se tiene un comportamiento de ruido, mientras que para $10 < j$ corresponde al comportamiento fractal. Aunque en los primeros niveles se tienen dos aproximaciones lineales, se puede considerar que corresponderían a un tipo de comportamiento, ya que la pendiente de tales aproximaciones no cambian abruptamente. De hecho, las pendientes de las aproximaciones son positiva-negativa-negativa, donde la tercer pendiente corresponde al segundo comportamiento y es más negativa que la pendiente negativa que ocurre en el primer comportamiento.

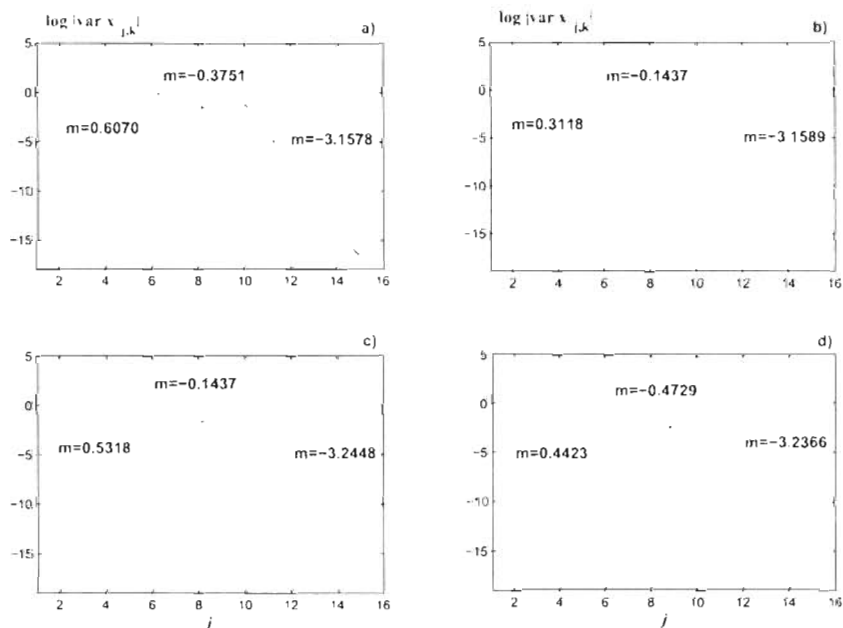


Figura 4.16: Estado modulado x donde la frecuencia de la señal de información f es a) 2 kHz, b) 26 kHz, c) 60 kHz y d) 100 kHz.

Por otra parte, la figura muestra el mismo análisis para el estado y modulado con la misma señal de información que se realizó en el caso anterior. Se puede observar que el comportamiento es muy parecido en las frecuencias consideradas y que en el nivel $j = 10$ se tiene una gran concentración de energía. Cabe mencionar que para su reconstrucción, en la frecuencia $f = 26$ kHz se toma en consideración el nivel a la izquierda, situación diferente para las otras frecuencias. Además, si consideramos los signos de las pendientes en las aproximaciones lineales se tiene son negativa-positiva-negativa, a diferencia del caso anterior.

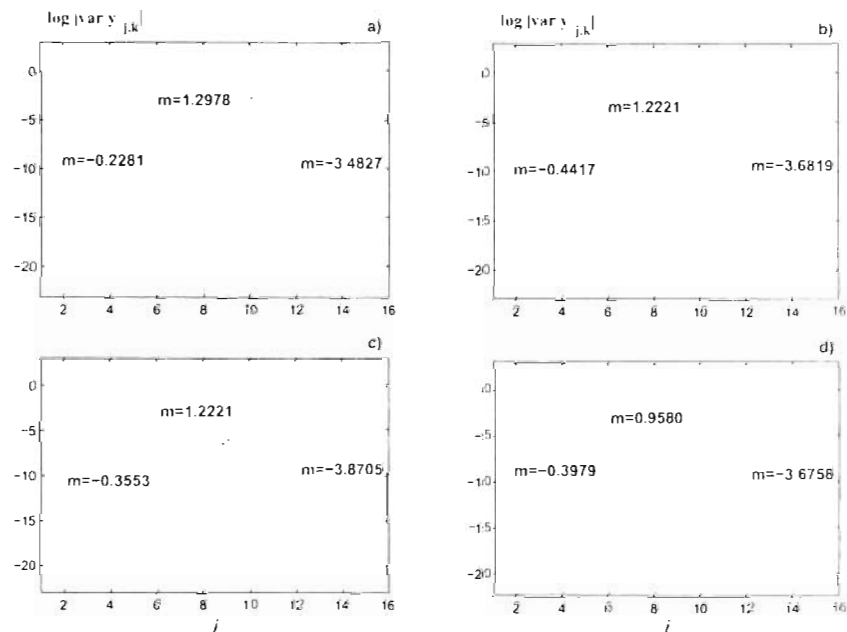


Figura 4.17: Estado modulado y donde la frecuencia de la señal de información f es a) 2 kHz, b) 26 kHz, c) 60 kHz y d) 100 kHz.

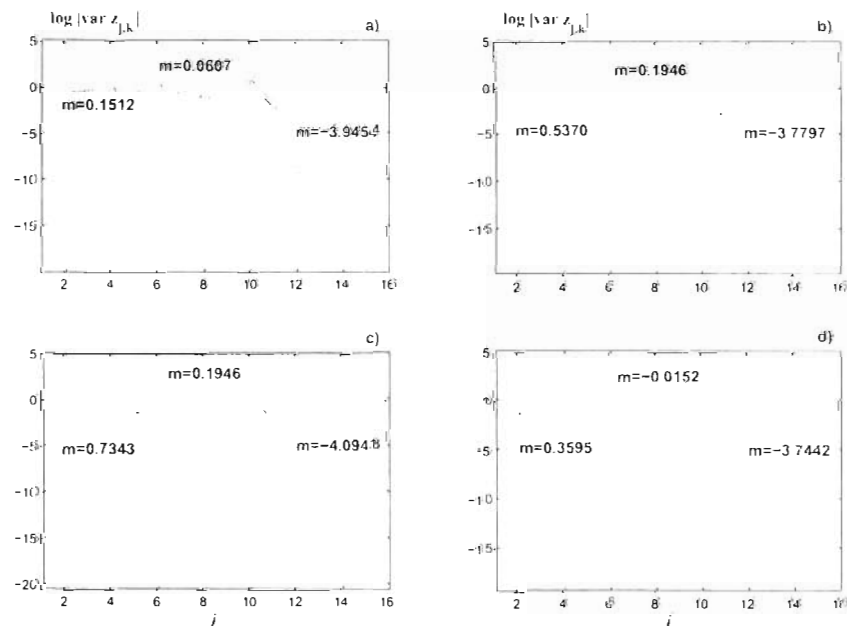


Figura 4.18: Estado modulado z donde la frecuencia de la señal de información f es a) 2 kHz, b) 26 kHz, c) 60 kHz y d) 100 kHz.

Por último, en la figura se muestra el análisis realizado para el estado z . Los resultados son muy parecidos a los del estado x , salvo que el valor de las pendientes de la tercer aproximación lineal decrecen más rápido.

Conclusiones

En este trabajo se realizó la implementación numérica de un sistema de comunicación caótico y su respectivo análisis con el fin de establecer un conjunto de parámetros que nos permita tener una operación robusta de dicho sistema. El sistema de comunicación caótico está basado en el enfoque de la modulación paramétrica donde el oscilador caótico de Chua es parte medular de tal implementación y se utiliza uno de sus estados como portador de información. En particular, se presentó una descripción del sistema de comunicación y de las partes que lo componen, esto es, las bases y características generales del sistema caótico de Chua así como los esquemas de acoplamiento entre sistemas caóticos para lograr la sincronización caótica. De hecho, en la estructura general del sistema de comunicación se considera la modulación paramétrica, la cual está basada en el fenómeno de sincronización caótica.

De acuerdo al enfoque de la modulación anterior, se debe tener especial cuidado en el tipo de información a transmitir, la cual debe “comportada” sin cambios bruscos en su comportamiento, donde la amplitud y la frecuencia de la información juegan un papel muy importante en la conservación de la dinámica caótica del sistema de comunicación, la cual nos permitirá tener un buen funcionamiento en el sistema de comunicación. Por tal motivo, una gran parte de este trabajo se basó en determinar un conjunto de valores de la amplitud y frecuencia de la señal de información para poder transmitirla y recuperarla. A tal conjunto de valores lo denominamos como región útil (RU) y es donde el sistema de comunicación puede operar de manera eficiente sin destruir el comportamiento caótico del sistema.

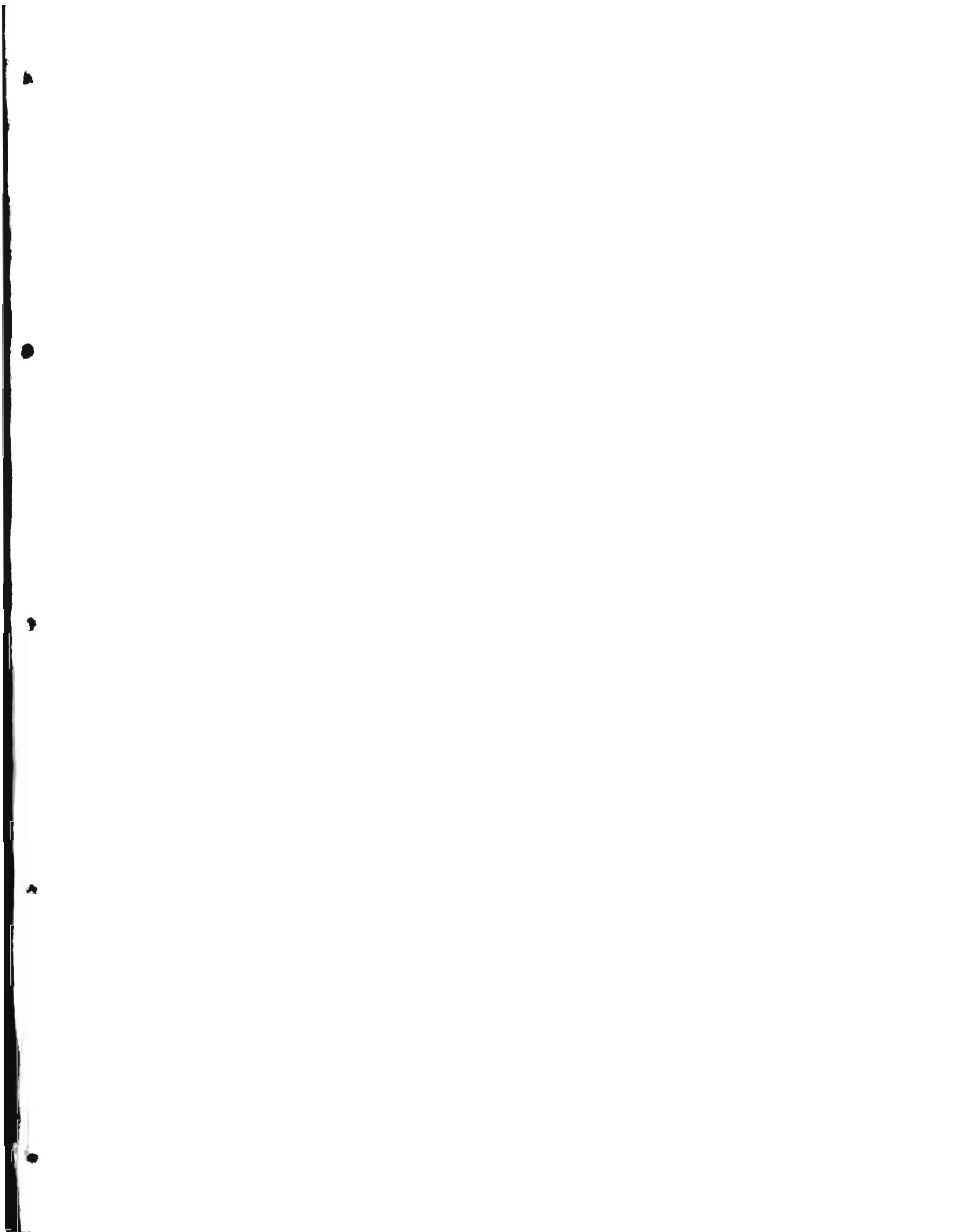
Para calcular la RU se empezó describiendo el proceso para lograr una estimación de la información considerada. En base a dicha descripción se establecieron las condiciones necesarias para encontrar los parámetros con el fin de obtener el error mínimo en la recuperación de la señal de información. Al considerar la RU, se pudo observar que al comparar la señal de información con la señal recuperada en el sistema de comunicación se lograba tener una buena estimación de la señal de información original.

También se pudo suprimir el posible efecto de la modulación de la información para cuando esta toma diferentes amplitudes y frecuencias en el acoplamiento del sistema del transmisor con el sub-sistema del receptor. Para tal caso, se calcularon los histogramas de la diferencia de los estados originales con los reconstruidos, para ser más precisos $(y - y_r)$ y $(z - z_r)$, debido a que el estado x no está presente en el sub-sistema del receptor. Como resultado se obtuvo que la modulación de la información no tiene un gran efecto en la parte de sincronización, por lo que los estados analizados pueden sincronizarse teniendo un buen funcionamiento en las etapas de acoplamiento y sincronización entre los sistemas del transmisor y receptor del sistema de comunicación.

Por último, se realizó un análisis con la transformada ondeleta discreta (TOD) a las series temporales generadas en el sistema de comunicación. Donde podemos concluir que la TOD es una herramienta matemática útil para analizar señales mediante la distribución de la energía en diferentes niveles de resolución. El análisis de las series temporales con la TOD permitió establecer características o propiedades del tipo de información que se considera y se realizó a las series temporales provenientes de los estados con y sin modulación. Los resultados para tales series temporales con dinámica caótica son muy parecidos y su respectiva interpretación del comportamiento nos permitió "obtener" una característica del sistema caótico. Se encontró que la distribución de la energía en los diferentes niveles de resolución para los estados no modulados es muy similar para los estados modulados con una señal de información de diferentes frecuencias y amplitudes. Aunado a lo anterior, las STC's de los estados " x " y " z " tienen un comportamiento similar con respecto a la distribución de la energía con respecto a los niveles de resolución. De hecho, se presentan dos comportamientos diferentes, de tipo ruido Gaussiano y de tipo fractal. El comportamiento tipo ruido se caracteriza por tener un gradiente cero en la gráfica semi-logarítmica del logaritmo de la varianza de los coeficientes ondeleta con respecto a los niveles de resolución j , mientras que para el tipo fractal se requiere de una pendiente negativa continua. Para las STC's de los estados " x " y " z " se tiene un comportamiento de ruido en los niveles $2 \leq j \leq 10$ y tipo fractal para $10 < j$, es decir, $j = 10$ es el nivel de cruce en nuestro análisis. Continuando con el análisis, para la STC del estado " y " se observó que tiene una gran concentración de energía en un nivel de resolución, que considerando con el nivel próximo donde se presenta la segunda mayor amplitud, resulta que la STC tiene presente una frecuencia portadora. Lo anterior se entiende al observar que en la gráfica semi-logarítmica se presenta uno o pocos niveles con una amplitud considerable, es decir, que sean del tipo de "máximos absolutos". El hecho que la STC del estado " y " tenga una mayor concentración de energía en pocos niveles no debería ser sorprendente, ya que tiene contribución de la dinámica de los otros dos estados y de él mismo, como se muestra en la ecuación (). Lo que resulta extraño es que intuitivamente la STC del estado " x " debería presentar un comportamiento similar al del estado " y " en términos de la TOD, debido a que es el estado que se moduló con la señal de información. Sin embargo, debido a lo considerado anteriormente y gracias al análisis con la TOD, se podría justificar el hecho de recuperar la señal de información en un sistema de comunicación con el mismo enfoque pero transmitiendo el estado no modulado " y ", ver Referencia []. Lo anterior resulta interesante ya que nos indica que la TOD pudo identificar que el sistema caótico de Chua presenta diferentes tipo de comportamiento para diferentes niveles de resolución en algunos estados, mientras que en el otro estado se tiene una

gran concentración de energía lo cual nos permite tener mayor información de tal sistema.

Este trabajo da el soporte y una fuerte motivación para continuar trabajando en esta línea de investigación en el área experimental. Además de estudiar la concentración de la energía en el estado donde no se modulo la información. Otra etapa de este estudio sería el considerar que tanto afecta el ruido a este sistema en sus etapas numérica y experimental. Como uno de los propósitos de este sistema de comunicación es la seguridad por medio del enmascaramiento, un trabajo a futuro podría ser la combinación de una etapa de encriptamiento de la señal con el enmascaramiento natural del sistema de comunicación.



Bibliografía

- [1] E. Campos-Cantón. *Comunicación con caos por modulación paramétrica*, Tesis de Maestría. UASLP-FI, 1999.
- [2] I. Campos-Cantón, E. Campos-Cantón, J. S. Murguía, and M. Chavira-Rodríguez, *Secure Communication Systema using Chaotic Signals*, Rev. de Ing. de Inv. y Tec., Vol.9, 21-27, 2009.
- [3] Carroll. T. L. *A simple circuit for demostrating regular and synchonzied chaos*, Am. J . Phys., Vol.63, 377-379, 1995.
- [4] Charles K. Chui, *An Introduction to Wavelets*. San Diego, Academic Press Inc, 1992.
- [5] L.O. Chua, *Circuit realisations of conjunctors and traitors*, Electronics Letters, Vol.6(19), 608-610, 1970.
- [6] N. Corron and Daniel W. Hash. *A new Approach to Communications using Chaotic Signals*. IEEE Transactions on circuits and Systems-I: Fundamental Theory and Applications, Vol.44(5), 373-382, 1997.
- [7] K.M. Cuomo amd A.V.Oppenheim. *Circuit Implementation of Sinchronized Chaos with Applications to Communications*. Phys. Rev. Letters, Vol.71(1),65-68, 1993.
- [8] J. S. González Salas, E. Campos Cantón, F. C. Ordaz Salazar, and I. Campos Cantón. *Forced synchronization of a self-sustained chotic oscillator*. CHAOS, Vol.18, 023136, 2008.
- [9] S. Hayes, C. Grebogi and E. Ott, *Communicating with Chaos*. Phys. Rev. Letters, Vol.70(20), 3031-3034, 1993.
- [10] Ingrid Deubechies, *Ten lectures on Wavelets*. SIAM, Philadelphia, PA, 1992.
- [11] Tomasz Kapitaniak, *Chaos for Engineers*, 2nd. Edition, Springer, 2000.
- [12] E. Jiménez-López. *Análisis de Series de Tiempo Caótica con la Transformada Ondeleta*. Tesis de Licenciatura. UASLP-FC-DFM, 2006.
- [13] Edward N. Lorenz , *Deterministic nonperiodic flow*, Jornal of the Atmospheric Sciences, Vol.20, 130-141, 1963.

- [14] Stéphane Mallat, *A Wavelet Tour of Signal Processing*, 2nd. Edition, Academic Press, 1999.
- [15] S. Mallat and W.L Hwang, *Singularity Detection and Processing with wavelets*, IEEE, Trans. On Information Theory, Vol.38, 617-643, 1992.
- [16] J.S. Murguía, *Tratamiento Multi-Resolución de Señales e Imágenes con Ondeletas de Haar*, Tesis de Maestría, UASLP-FI, 1997.
- [17] J.S Murguía and E.Campos-Cantón, *Wavelet Analysis of Chaotic Time series*, Rev. Mex. de Fis., Vol.52(2), 155-162, 2006.
- [18] L. M. Pecora and T.L. Carroll. *Synchronization in chaos systems*. Phys. Rev. Letters., Vol.64, 821-824, 1990.
- [19] L. M. Pecora, T.L. Carroll, G. A Johnson and D. J. Mar. *Fundamentals of Synchronization in Chaotic Systems, Concepts and Applications*. Chaos. Vol.7, 520-543, 1997.
- [20] Shie Qian, *Introduction to Time-Frequency and Wavelet Transforms*, Prentice Hall PTR, 2002.
- [21] O. E. RöSSLer, *An equation for continuous chaos* , Phys. Letters A, Vol.57(5), 397-398, 1976.
- [22] Staszewski, W.J. and Worden, *Wavelet analysis of time series: Coherent structures, chaos and noise*, Int. Journal of Bif. and Chaos, 255-471, 1999.
- [23] Gilbert Strang and T. Nyugen, *Wavelet and Filter Banks*, Prentice Hall, Englewood Cliffs NJ, 1996.
- [24] Jesús Urías. *Analog modulation and demodulation of a chaotic oscilador*, Rev. Mex. de Fis., Vol.45, 331-335, 1999.
- [25] Martin Vetterli and Jelena Kovacevic. *Wavelets and subband coding*, Prentice Hall, Englewood Cliffs NJ, 1995.