

# **SUBCONJUNTOS INVARIANTES DE AUTOMATAS CELULARES**

Tesis que para obtener el grado de  
Doctor en Ciencias  
(Física)

Presenta:

**M. en C. Agustín Enciso Muñoz**

Posgrado en Física  
Universidad Autónoma de San Luis Potosí

Junio de 1996



UNIVERSIDAD AUTONOMA DE SAN LUIS POTOSI  
POSGRADO EN FISICA

TESIS DE DOCTORADO

TITULO: *Subconjuntos Invariantes de Automatas Celulares.*

NOMBRE DEL ESTUDIANTE: *M. en C. Agustín Enciso Muñoz*

JURADO QUE ACEPTA LA TESIS:

N O M B R E

F I R M A


Dr. Jesús Urías Hermosillo (Asesor)

Dr. Jesús G. Dorantes Dávila.

Dr. Hugo Navarro Contreras

Dr. Miguel Angel Vidal Borbolla.

Dr. Raúl Rechtman Schrenzel.  
(Examinador Externo), UNAM.

  
Dr. José Luis Arauz Lara.

Coordinador del Posgrado en Física

FECHA: 14 de junio de 1996.



UNIVERSIDAD AUTONOMA DE SAN LUIS POTOSI  
FACULTAD DE CIENCIAS



*SUBCONJUNTOS INVARIANTES Y SIMETRIAS DE  
AUTOMATAS CELULARES*

TESIS QUE PARA OBTENER EL GRADO DE  
DOCTOR EN CIENCIAS (FISICA)

PRESENTA

Agustin Enciso Muñoz

ASESOR

Dr. Jesús Urías Hermosillo

San Luis Potosí, S.L.P.

Junio de 1996

## AGRADECIMIENTOS

Quiero expresar un gran agradecimiento a mi asesor Dr. Jesús Urias H. por su clara, creativa y brillante guía en la realización de este trabajo y de quien a lo largo de este tiempo he aprendido bases importantes en mi formación como investigador. Es una experiencia de lo mejor tenerlo como asesor.

A los doctores Raúl Rechtman, Jesús Dorantes, Hugo Navarro y Miguel Ángel Vidal, por sus cuidadosas y atinadas recomendaciones a este trabajo.

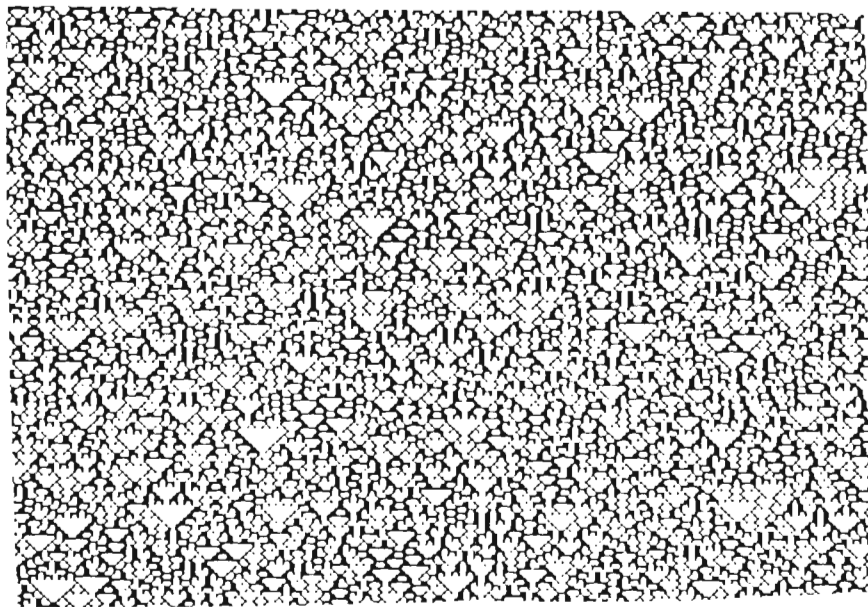
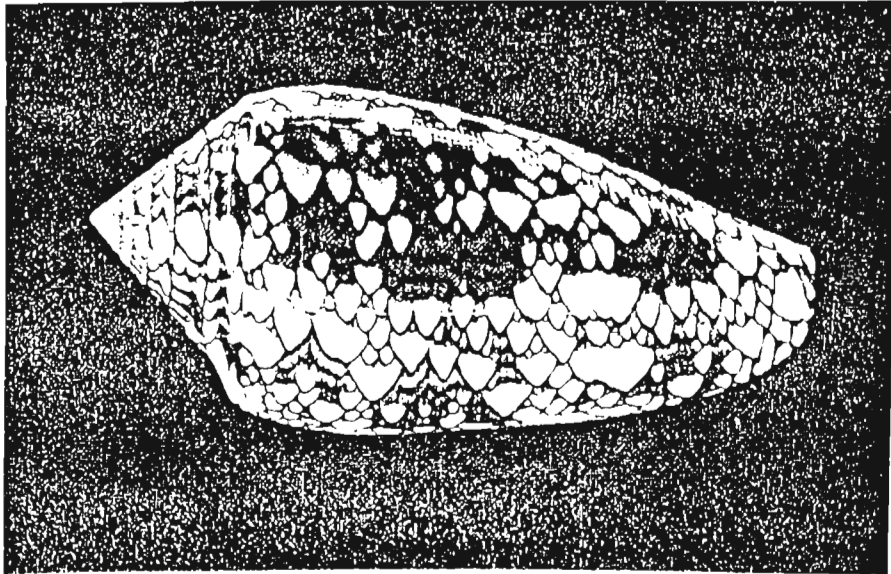
Al los investigadores, compañeros y personal del Instituto de Investigaciones en Comunicación Óptica y del Instituto de Física por su apoyo y amistad.

Al Gallo, Gelasio, Pepe, Armando,

Este trabajo se realiza con el apoyo de la Escuela de Física de la Universidad Autónoma de Zacatecas y del CONACYT bajo el programa de apoyo a profesores e investigadores de instituciones públicas para obtener el doctorado y en el proyecto No.2109-E.

*A Claudia, Guty y Claudia.*

*A mis padres, hermanos y amigos*



## Resumen

Presentamos los autómatas celulares (AC) mediante grafos dirigidos, conocidos como traductores, se logra (1) caracterizar al AC por su traductor determinista mínimo (tdm), (2) usar como parámetro de clasificación la ramificación promedio de los vértices del tdm, (3) calcular la entropía topológica de la primera imagen del espacio de configuraciones, (4) usar un método para encontrar los subconjuntos invariantes de configuraciones viajeras y su entropía topológica. Se presentan resultados de (1)-(4) para la clase completa de los AC elementales (ACE). Se establece la entropía topológica del conjunto límite de 25 ACE, adicionalmente a los 30 ACE sobrejectivos. Se presenta el grupo completo de transformaciones internas más la reflexión para las reglas que definen a los AC. Se refina la clasificación de la ramificación promedio con el orden del grupo de simetrías del autómata. Y finalmente se extienden las simetrías de reglas a simetrías de autómatas mediante un traductor dual del autómata.

# Contenido

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| <b>1</b> | <b>Introducción</b>  | <b>2</b>  |
| <b>2</b> | <b>Elementos Básicos</b>                                       | <b>10</b> |
| 2.1      | Autómata Celular . . . . .                                     | 10        |
| 2.2      | Traductores presentando autómatas . . . . .                    | 13        |
| 2.3      | Entropía topológica . . . . .                                  | 19        |
| 2.4      | Subconjuntos invariantes de configuraciones viajeras . . . . . | 21        |
| 2.5      | Simetrías de autómatas . . . . .                               | 24        |
| <b>3</b> | <b>Resultados</b>  | <b>32</b> |
| 3.1      | Clasificación Topológica . . . . .                             | 32        |
| 3.2      | Entropía de conjuntos límites . . . . .                        | 39        |
| 3.3      | Simetrías de reglas . . . . .                                  | 39        |
| <b>4</b> | <b>Discusión y conclusiones</b>                                | <b>46</b> |
| <b>A</b> | <b>Traductores mínimos deterministas</b>                       | <b>57</b> |
| A.1      | Reducción de traductores. . . . .                              | 57        |
| A.2      | Traductor mínimo determinista . . . . .                        | 62        |
| <b>A</b> | <b>Compendio de reglas y sus simetrías</b>                     | <b>65</b> |



# Capítulo 1

## Introducción

### Resumen

*Se ubica el problema de clasificar autómatas celulares. Se describe cual es el camino que seguimos en este trabajo para dar una caracterización de los AC unidimensionales.*

Los autómatas celulares (AC) unidimensionales consisten de una red bi-infinita de celdas que llamamos configuraciones. Cada una de las celdas toma valor en un conjunto  $A$  de  $k$  símbolos que llamamos el alfabeto y que sin pérdida de generalidad lo tomaremos como  $Z_k$ . El espacio de configuraciones de un AC es  $\Sigma = Z_k^Z$  y la evolución es llevada a cabo por la iteración de un mapeo  $f : Z_k^Z \rightarrow Z_k^Z$ . La evolución resultante es discreta en el tiempo.

La forma como actúa  $f$  sobre las configuraciones, consiste en actualizar simultáneamente los valores de cada celda en una configuración, de acuerdo a una regla local  $f_l$ . Por regla local entendemos una función que depende de una vecindad finita formada por  $l \in N$  celdas. Esta vecindad incluye a la celda que vamos actualizar[1]. La regla del autómata  $f_l$  puede ser vista como una tabla: una lista de todos los bloques de tamaño  $l$  mapeados a valores en  $Z_k$ .

A pesar de la sencillez del modelo, la dinámica resultante es en general complicada. Esto ha hecho a los autómatas celulares muy útiles para modelar fenómenos

complejos. Automata celulares sirven como modelos simples y han sido ampliamente investigados en Física [2][3], Química, Biología y Computación [4]. Los AC presentan una gran variedad de estructuras en su evolución. La noción de ondas solitarias o solitones es llevada en forma natural a AC por Park et. al [5] como sigue: El término onda solitaria o partícula en un autómata significa que un patrón periódico de celdas o sitios con valores distintos de cero se propaga con velocidad finita fija. Una colisión entre partículas se dice que es una colisión solitónica si las partículas retienen su identidad después de la colisión. Este comportamiento es similar a las soluciones de ondas solitarias en ecuaciones de onda no lineales. Recientemente Tokihiro et.al.[6] mostraron como la versión discreta en tiempo y espacio de una ecuación de onda no lineal como lo es la llamada ecuación de Korteweg-de Vries, es llevada a una forma que resulta en una regla para la evolución de configuraciones unidimensionales que presentan solitones interactuando como en la ecuación continua. Algunos tipos de AC los cuales poseen estructuras de solitones y muchos hechos de estos sistemas han sido clarificados en las referencias [7] [8] [9].

Un problema fundamental y actual en teoría de autómatas celulares, es su clasificación y caracterización para determinar la estructura del espacio de estos mapeos. Una clasificación basada en características intrínsecas de los AC's es *genotípica*. Una clasificación basada en la dinámica mostrada por el autómata celular es *fenotípica*. Rumbo a una clasificación nosotros estudiaremos los subconjuntos invariantes, los conjuntos límites y las simetrías.

La clasificación más conocida, propuesta por S.Wolfram [10], es fenotípica y está basada en la observación directa de experimentos de computadora del comportamiento de los patrones espacio-temporales. Los patrones se obtienen al aplicar el mapeo  $f$  a configuraciones iniciales de tamaño finito con condiciones de frontera periódicas. Wolfram distingue cuatro clases:

**Clase I** La evolución lleva a una configuración en la que todas las celdas tienen

el mismo valor (homogéneas), independientemente del estado inicial del autómata. El conjunto límite es un solo punto atractivo.

**Clase II** La evolución lleva a patrones estables simples ó periódicos. El conjunto límite es una colección de órbitas periódicas atractivas.

**Clase III** La evolución lleva a patrones caóticos

**Clase IV** La evolución lleva a patrones localizados de comportamiento complejo, algunas veces de larga vida.

Esta clasificación es cualitativa y abierta a muchas interpretaciones y objeciones. Por ejemplo, el número de configuraciones crece exponencialmente con el número de celdas y aparece el problema de determinar si persiste el comportamiento de un autómata en el límite de tamaño infinito y/o con el cambio de condiciones de frontera.

Basados en la clasificación de Wolfram, los autores Culik y Yu [11] dan una definición más precisa de las cuatro clases de autómatas celulares. Ellos definen configuraciones finitas respecto a un valor  $a$ , como aquellas en las que todas las celdas, excepto un número finito de ellas, tienen el valor  $a$ . Su clasificación se basa en las mismas clases de comportamiento cualitativo definidas por Wolfram, pero aplicadas a estas configuraciones especiales. Culik y Yu [12] muestran que el problema de pertenencia a una clase es en general indecidible para las cuatro clases. El hecho de considerar configuraciones finitas para definir los comportamientos y las clases precisa y limita la clasificación de Wolfram. Las tres primeras clases de Culik y Yu coinciden con las tres primeras de Wolfram para los autómatas celulares totalísticos de rango dos.

Una clasificación genotípica es propuesta por Gutowitz en la Ref.[13]. La clasificación agrupa autómatas celulares de acuerdo a la acción de los autómatas sobre las medidas de probabilidad que no incluyen correlación espacial. La clasificación es jerárquica y paramétrica. Gutowitz establece una concordancia con las

clases de Wolfram, con la ventaja de que la pertenencia a una clase se deduce de parámetros obtenidos de la regla que define al autómata. Sin embargo, no toma en cuenta la correlación espacial entre celdas durante la evolución del autómata.

Otro esquema de clasificación es propuesto por W. Li en la Ref.[14]. Allí, la estructura del espacio de reglas es analizada mediante dos parámetros. En el caso de los autómatas elementales, uno de ellos se define como la razón del número de bloques mapeados a 1 respecto al total de bloques en el dominio de la tabla de definición de la regla. El otro parámetro es la distancia de Hamming definida para las reglas. Se observa que reglas cercanas generan autómatas con comportamientos similares, excepto en regiones del espacio de reglas que Li llama de bifurcación. Usando los parámetros definidos, Li divide el espacio de autómatas en cinco clases, basado en el comportamiento cualitativo a partir de configuraciones finitas "típicas" con condiciones de frontera periódicas. Las cinco clases de Li son:

- (A) Reglas nulas o reglas de punto fijo homogéneas
- (B) Reglas de punto fijo inhomogéneas.
- (C) Reglas periódicas.
- (D) Reglas localmente caóticas: dinámica caótica confinada por paredes.
- (E) Reglas globalmente caóticas.

La relación entre estas cinco clases y las cuatro clases definidas por Wolfram es como sigue: La clase I de reglas de Wolfram es igual a la clase (A); La clase II de reglas de punto fijo y periódicas de Wolfram son la unión de las clases (B) y (C); la clase III de reglas globalmente caóticas para Wolfram, es la clase (E) y la clase IV de Wolfram requiere de mayor especificación para poderla incluir en alguna de las clases de W. Li.

El objetivo de nuestro trabajo es:

1. caracterizar en base a la dinámica global del espacio de configuraciones los autómatas celulares (clasificación fenotípica)
2. definir parámetros de control para la clasificación de los AC's
3. encontrar métodos para identificar subconjuntos invariantes que sean relevantes dinámicamente
4. definir y encontrar los grupos de simetrías de los autómatas celulares
5. clasificar los autómatas por sus simetrías (clasificación genotípica).
6. relacionar el comportamiento dinámico y los parámetros intrínsecos de los autómatas celulares.

Notese que, una vez identificado el conjunto límite o los subconjuntos invariantes, el comportamiento del autómata dentro de éstos conjuntos es un problema adicional. Así que lo que hacemos es distinto a definir tipos de comportamiento y clasificar los AC's en base a estos comportamientos. Pero tampoco nos limitamos a considerar una clasificación de acuerdo al comportamiento cualitativo de las orbitas de algún tipo especial de configuraciones iniciales, elegidas de subconjuntos particulares del espacio de configuraciones, como podría ser el caso para configuraciones iniciales con requisitos espaciales como el de azarosidad, o con homogeneidad excepto en una región, etc.[14].

En el trabajo se usa ampliamente la presentación de autómatas celulares a través de traductores que definen la acción del autómata y presentan a dos conjuntos, el dominio y la imagen o conjunto de salida [15]. Los traductores son una forma sencilla de representar conjuntos y funciones. Es posible calcular con ellos características globales como lo es la entropía topológica espacial del conjunto de salida. Los vértices y flechas en nuestros traductores representan bloques de celdas de tamaños  $l - 1$  y  $l$ , respectivamente. Una flecha  $c$  conecta al vértice  $u$  con el vértice  $v$ , si hay un traslape completo de  $u$  con las primeras  $l - 1$  celdas de

$c$ , y de  $v$  con las últimas  $l - 1$  celdas de  $c$ . La etiqueta que se pone en la flecha  $e$  es  $f_l(c)$ . Con esto generamos una presentación de la imagen de un autómata  $f$  sobre el espacio de configuraciones  $\Sigma$ ,  $f(\Sigma)$  y que son las configuraciones que obtenemos leyendo las etiquetas del traductor, es decir el conjunto de salida del traductor. Si ponemos atención solo en el conjunto de salida, el traductor puede ser en general redundante, en el sentido de que traductores con un número menor de vértices, pueden representar al mismo conjunto. Por eso, los traductores son llevados a una representación mínima en el número de vértices y sin ambigüedad en las etiquetas de las flechas que salen de cada vértice.

Representando a los conjuntos imagen mediante un traductor mínimo determinista único, definimos un parámetro  $\rho$  muy fácil de calcular y que está relacionado con que tan triviales o no, son los conjuntos imagen representados por el traductor. El parámetro  $\rho$  es la ramificación promedio de los vértices del grafo. Se define como la razón del número de flechas al número de vértices del traductor que presenta al conjunto. Definido así, cumple con los requisitos que deseamos, i.e., nos genera el valor de 1 para los autómatas triviales y el de  $k$  para los autómatas sobreyectivos. Esto difiere de la cantidad que define Wolfram [16], porque él se limita al número de vértices y se da el caso de que autómatas cuyos conjuntos imagen son presentados por traductores con el mismo número de vértices son totalmente distintos, aún para casos tan simple como lo son los autómatas elementales definidos por las reglas locales  $f_l(c) = 0$  y  $f_l(c) = c_0 + c_2 \pmod 2$ , donde  $c = c_2c_1c_0$  es un bloque de tres celdas. Para la primera regla, conocida como la regla 0, el conjunto imagen es solo una configuración y para la siguiente, conocida como la regla 90, es todo el espacio. Sin embargo, los conjuntos de salida para ambos AC's están presentados por un traductor mínimo determinista de un solo vértice.

Usamos como un parámetro de clasificación de los AC's, el parámetro  $\rho$  del traductor mínimo determinista [17] que presenta la primera imagen del autómata. Esto nos da 15 clases con la misma ramificación promedio  $\rho$  de los grafos mínimos

deterministas en cada clase.

Usando la descripción en traductores, calculamos la entropía topológica espacial de la primera imagen de los autómatas para todas las reglas elementales que los definen. Wolfram hace un cálculo análogo, pero solo para las 32 reglas elementales que él llama legales. Extendido a todas las reglas, obtenemos un total de 21 clases, cada una con un valor de entropía topológica diferente. Los valores obtenidos son cotas superiores para la entropía topológica de los conjuntos límites.

Adicionalmente a las cotas superiores, cotas inferiores para la entropía de los conjuntos límites se pueden obtener de subconjuntos invariantes, que desde luego están incluidos en el conjunto límite. Nos proponemos encontrar subconjuntos invariantes que nos acerquen desde adentro al conjunto límite.

Consideramos los subconjuntos invariantes formados por las configuraciones para las cuales el autómata  $f$  se comporta como una potencia del *shift* [18]. Damos presentaciones de los subconjuntos invariantes a través de traductores. Calculamos la entropía topológica de los subconjuntos invariantes descritos, para todos los autómatas elementales que los presentan.

El estudio de patrones finitos o dominios viajeros, que son bloques finitos que aparecen en las configuraciones viajeras, nos ha hecho ver que para algunos casos la dinámica de los autómatas puede ser caracterizada como una interacción entre estos dominios. La importancia del rol que juegan los dominios en la dinámica de varios autómatas que presentamos, está en que la entropía del conjunto límite es igual a la de su conjunto de configuraciones viajeras. De la coincidencia de las cotas inferiores y superiores se obtiene el valor de la entropía topológica para los conjuntos límites de 55 de los 256 autómatas elementales.

Como otra vía hacia la clasificación, consideramos las simetrías de las reglas locales que son características intrínsecas del autómata, es decir su *gnolipo*. Definimos transformaciones internas para las reglas y determinamos el grupo completo de las transformaciones de simetría de las reglas elementales. Comen-

tamos su extensión a rangos y alfabetos mayores. Con las orbitas generadas por la acción de este grupo sobre el espacio de reglas obtenemos 22 conjuntos, que forman clases de equivalencia. El orden de la clase de equivalencia es una medida de la asimetría de las reglas que pertenecen a esa clase.

Extendemos las simetrías de reglas a simetrías de autómatas. Establecemos una conexión entre las simetrías, que son propiedades intrínsecas, con la dinámica del autómata [19].

La presentación de este trabajo se organiza como sigue. En el Capítulo 2 damos las definiciones y los elementos necesarios. En el Capítulo 3 presentamos los resultados para las clases, definidas mediante el parámetro  $\rho$ . Encontramos las cotas superior e inferior de la entropía de los conjuntos límites de los autómatas y con esto el valor para algunos conjuntos límites. Presentamos el grupo completo de simetrías sobre las reglas de autómatas y encontramos las clases que se generan por la acción de este grupo sobre el espacio de reglas. Hacemos una refinación de nuestras clases con el parámetro de ramificación y presentamos la extensión de las simetrías a los autómatas.

En el Capítulo 4 hacemos una discusión de los resultados y damos nuestras conclusiones.



# Capítulo 2

## Elementos Básicos

### Resumen

*En esta parte presentamos las características del espacio de configuraciones, definimos qué son autómatas celulares, traductores, ramificación promedio, entropía topológica, etc. Presentamos los métodos para encontrar los traductores, la ramificación promedio, la entropía topológica, los subconjuntos invariantes de configuraciones viajeras y las simetrías de las reglas locales y los autómatas.*

### 2.1 Autómata Celular

**Definición 1** *Una configuración es una secuencia doblemente infinita de símbolos.*

La forma como vemos el espacio de configuraciones nos lleva a darle una estructura topológica y métrica específica. Dado el conjunto finito  $Z_k$  dotado con la topología discreta, es decir en donde el conjunto de abiertos es el conjunto potencia  $2^{Z_k}$ , definimos el espacio de configuraciones  $\Sigma$  como el *producto topológico*

$$\Sigma = Z_k^{\mathbb{Z}} = \dots Z_k \times Z_k \times Z_k \dots = \prod_{i=-\infty}^{\infty} (Z_k)_i = \{(x_i)_{\Sigma} \mid x_i \in Z_k\}. \quad (2.1)$$

Definimos la distancia entre dos configuraciones  $x, y \in \Sigma$  como,

$$d(x, y) = d(\dots x_{-1}x_0x_1\dots, \dots y_{-1}y_0y_1\dots) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{|x_i - y_i|}{k^{|i|+1}}. \quad (2.2)$$

Así el espacio de configuraciones  $\Sigma$  es un espacio métrico compacto y los conjuntos abiertos (cilindros) son inducidos por la topología de  $Z_k$ , estos son

$${}_h[a_h, \dots, a_l]_l = \{(x_i)_{i \in \mathbb{Z}} \mid x_j = a_j, \text{ para } h \leq j \leq l\}. \quad (2.3)$$

Además,  $\Sigma$  es completo.

Se define el mapeo de traslación  $\sigma : \Sigma \rightarrow \Sigma$  tal que si  $x_i$  denota el valor en la posición  $i$ -ésima de  $x \in \Sigma$  entonces  $(\sigma x)_i = x_{i+1}$ . Adoptaremos la palabra *shift* como nombre propio para el mapeo de traslación  $\sigma$ .

Dotando con una medida de probabilidad  $\mu$  al conjunto  $Z_k$ , obtenemos el espacio de probabilidad  $(Z_k, \mathcal{B}, \mu)$  donde  $\mathcal{B}$  es el campo de Borel generado por los conjuntos  $\{i\}$  con  $i \in Z_k$ , y la medida  $\mu$  queda definida asignando a  $\mu(\{i\})$  el valor  $p_i$  donde  $\sum_i p_i = 1$ . Esta medida se extiende a los cilindros del espacio producto. Los cilindros son los generadores del campo de Borel del espacio producto y la medida producto viene dada por  $\mu({}_h[a_h, \dots, a_l]_l) = \prod_{j=h}^l p_{a_j}$ .

Con la medida adoptada para el espacio producto, el *shift*  $\sigma$  es una transformación medible y que preserva medida (ie)  $\mu(\sigma^{-1}B) = \mu(B)$  con  $B$  un conjunto de Borel en el espacio producto.

**Definición 2** *Un autómata celular es un mapeo  $f : \Sigma \rightarrow \Sigma$ , que es continuo en la topología producto y que conmuta con  $\sigma$ .*

En la Ref.[21] se demuestra que un mapeo de este tipo es siempre realizado por una función a bloques  $f_l : Z_k^l \rightarrow Z_k$  y viceversa. La función global o autómata celular  $f : \Sigma \rightarrow \Sigma$  queda definida por una función a bloques, tal que

$$(f(x))_i = f_l(x_{i-r}, \dots, x_i, \dots, x_{i+r}). \quad (2.4)$$

Para un autómata celular  $f$  las imágenes sucesivas de su dominio están anidadas

$$f^{t+1}(\Sigma) \subseteq f^t(\Sigma). \quad (2.5)$$

En efecto, si  $x \in f^{t+1}(\Sigma)$  entonces existe un  $w \in \Sigma$  tal que  $x = f^{t+1}(w) = f^t(f(w))$  y como  $f(w) \in \Sigma$  entonces  $x \in f^t(\Sigma)$ . Un hecho a tener en cuenta es el de que para cada valor de  $k = \text{car}(Z_k)$  y de  $l$  (el tamaño de la vecindad) el número de reglas  $f_l$  viene dado por  $k^{kl}$ .

Al conjunto  $f^t(\Sigma)$  le llamamos el conjunto de salida al tiempo  $t$  del autómata celular  $f$ .

Sea  $B_l$  el conjunto de bloques de tamaño  $l$  y  $c = c_{l-1} \dots c_1 c_0$  un elemento de  $B_l$ , la forma usual de identificar la regla es con el número dado por

$$|f_l| = \sum_{c \in B_l} f_l(c) k^{kl}, \quad (2.6)$$

donde  $|c| = \sum_i c_i k^i$ . Como ejemplo, para el caso elemental  $k = 2$  y  $l = 3$  en la Tabla 3.0 se ilustra como calcular el número de la regla

$$\begin{aligned} f_3(000) &= 0 & f_3(010) &= 0 & f_3(100) &= 0 & f_3(110) &= 1 \\ f_3(001) &= 1 & f_3(011) &= 1 & f_3(101) &= 1 & f_3(111) &= 0 \end{aligned}$$

Tabla 3.0. Ejemplo regla 106.  $f_l(c)$  es el  $|c|$ -ésimo dígito de  $|f_l|$  en base  $k$ .  $(106)_2 = 01101010$

El conjunto límite de un autómata celular es definido como

$$\Lambda(f) = \bigcap_{t=0}^{\infty} f^t(\Sigma). \quad (2.7)$$

Un subconjunto  $Y \subseteq \Sigma$  es  $f$ -invariante si  $f(Y) = Y$ . El conjunto límite es el máximo subconjunto  $f$ -invariante de  $\Sigma$ . Los autómatas tienen la propiedad de

que los conjuntos imagen que generan, como ya dijimos, son invariantes ante el *shift*  $\sigma$ . A un subconjunto de  $\Sigma$  que es invariante ante el *shift* se le denomina *subshift* [22]. La secuencia de imágenes  $f^i(\Sigma)$  es una secuencia de *subshifts*.

## 2.2 Traductores presentando autómatas

El conjunto de todas las secuencias, o bloques, de tamaño finito que aparecen en las configuraciones de un *subshift*  $C \subseteq \Sigma$  es denotado por  $\mathcal{L}(C)$  y se denomina el lenguaje asociado a  $C$ . Una forma en la que podemos estudiar un *subshift* de  $\Sigma$  es a través de su lenguaje asociado. Esto lo garantiza el siguiente teorema, que ha sido probado en la ref.[23].

**Teorema 3** Sean  $C_1$  y  $C_2$  *subshifts*. Entonces  $\mathcal{L}(C_1) = \mathcal{L}(C_2) \Leftrightarrow C_1 = C_2$

El Teorema 3 nos permite aplicar ideas de la teoría de lenguajes formales para estudiar los AC's. El Teorema 3 nos garantiza que una presentación de  $\mathcal{L}(C)$ , como lo puede ser un traductor, se traduce en una presentación para  $C$ . Sin embargo, lo que se diga de  $\mathcal{L}(C)$  no es necesariamente todo lo que podamos decir de  $C$ .

Nuestro objetivo es dar representaciones de los conjuntos imagen de forma simple. Para esto comencemos con definiciones básicas

**Definición 4** Sea  $Q$  un conjunto. Un grafo dirigido  $G(Q)$  es una relación  $R$  sobre  $Q$ . A los elementos de  $Q$  los llamamos *vértices* y a los elementos de  $R$  *flechas*.

De esta forma decimos que hay una flecha del vértice  $p$  al vértice  $q$  si  $(p, q) \in R$ .

**Definición 5** Una trayectoria  $\gamma$  es una sucesión doblemente infinita de flechas a través de un grafo dirigido. El conjunto de trayectorias lo denotaremos por  $X_G$ .

**Definición 6** Dado un grafo dirigido  $G(Q)$  mediante la relación  $R$ . Un traductor es el par  $(G(Q), E)$  donde  $E$  es la función  $E : R \rightarrow Z_k$  que etiqueta las flechas del grafo con valores de  $Z_k$

Así un traductor es un grafo con etiquetas en las flechas y podemos definir de manera biunívoca una función  $\delta : Q \times Z_k \rightarrow Q$  de la siguiente manera  $\delta(p, a) = q$  si y solo si  $E((p, q)) = a$ , es decir a cada  $T$  corresponde una  $\delta$  y viceversa. La función  $\delta$  puede extenderse para considerar como segundo argumento palabras en el conjunto  $\mathcal{L}(Z_k)$ . Todas las secuencias de etiquetas que obtenemos al leerlas de las flechas de trayectorias del grafo subyacente al traductor, nos generan un conjunto invariante ante el shift  $\sigma$ , que le llamaremos *conjunto de salida* del traductor.

El espacio de configuraciones puede ser ahora presentado por un traductor en el que los bloques de símbolos son las secuencias de etiquetas leídas en caminos finitos del traductor.

Autómatas finitos son traductores en los que se tiene identificado un vértice inicial y vértices finales. El lenguaje aceptado por un autómata finito, son todas las palabras que obtenemos por leer las etiquetas en el traductor, siguiendo los caminos que nos llevan del vértice inicial hacia algún vértice final. Este tipo de lenguajes se conocen como lenguajes regulares. Configuraciones pueden representarse mediante la secuencia de etiquetas de las trayectorias en el traductor, y los bloques que pertenecen a estas configuraciones son las palabras que obtenemos considerando al traductor como un autómata finito en donde todos los vértices son iniciales y finales [21]. Las expresiones regulares proveen de una notación conveniente para los lenguajes regulares, por ejemplo la expresión regular  $(0^*(10)^*)^*$  denota las configuraciones que podemos formar siguiendo los caminos del traductor de la fig.2.1.

Vamos a construir el traductor que presenta a un autómata celular como sigue [15].

**Definición 7 (Traductor)** Un Traductor  $T_f$  para un AC  $f$  definido por la función a bloques  $f_l : Z_k^l \rightarrow Z_k$  se construye como sigue. El conjunto de vértices es  $Z_k^{l-1}$  y el conjunto de flechas es  $Z_k^l$ . La flecha  $c \equiv (c_{l-1}, \dots, c_0)$  tiene como vértice de salida al bloque  $u \equiv (c_{l-1}, \dots, c_1)$  y como vértice de llegada al bloque  $v \equiv (c_{l-2}, \dots, c_0)$ . El símbolo que etiqueta a la flecha  $c$  es  $f_l(c)$ .

El traductor para un AC elemental, con  $k = 2$  y  $r = 1$ , definido por la función a bloques  $f_l$ , se muestra en la figura 2.1.

Las configuraciones que formamos considerando la secuencias de flechas que podemos seguir representan al conjunto dominio del autómata, las flechas representan a los bloques de tamaño  $l$  y las etiquetas de cada flecha nos determinan la regla local, de esta forma la secuencia de etiquetas que obtenemos por seguir las trayectorias en el traductor nos dan el conjunto imagen o conjunto de salida del autómata.

El traductor  $T_f$  es una representación de la función  $f_l$ , del conjunto dominio y del conjunto imagen. Cada vértice de  $T_f$  tiene  $k$  flechas que salen y  $k$  flechas que llegan a ese vértice.

Nos vamos a concentrar en el conjunto de salida del traductor y vamos a pedir que para cada trayectoria del traductor corresponda una secuencia de símbolos de manera biunívoca, esto quiere decir que no debe de haber ambigüedad en la flecha de salida de cada vértice.

**Definición 8** Un traductor es determinista si para cada vértice  $p$ , y cualquier  $a \in Z_k$ , la cardinalidad de  $\delta(p, a)$  es menor o igual a 1.

Cuando al menos dos de las flechas que salen de un mismo vértice tienen etiquetas iguales, se dice que el traductor es *no determinista*. Vamos a aplicar un procedimiento, que se puede en general aplicar a cualquier traductor [17], para (1) convertirlo en un traductor determinista y otro procedimiento para (2) reducir un traductor determinista a un traductor equivalente con el mínimo número de vértices.

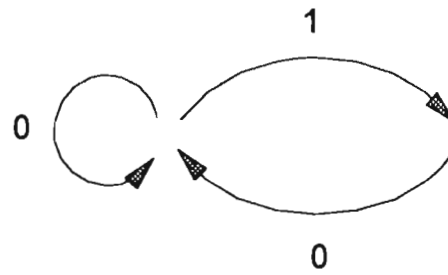


Figura 2.1: Grafo correspondiendo a configuraciones en las que nunca ocurre el bloque 11. El conjunto de configuraciones queda descrito por la expresión regular  $(0^*(10)^*)^*$ .

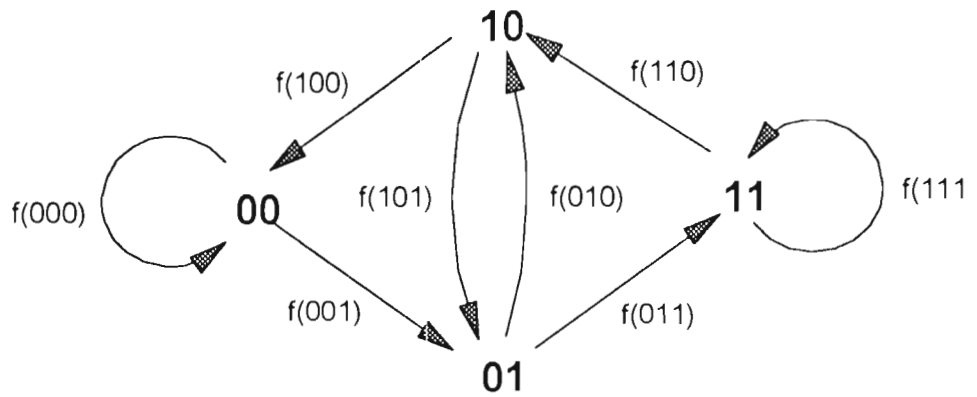


Figura 2.2: Traductor para un Autómata Celular elemental, para  $k=2$  y  $r=1$

Para obtener el traductor determinista definimos un nuevo conjunto de vértices, como el conjunto potencia de  $Q$ ,  $2^Q$  y cada elemento de este conjunto representa un vértice. El nuevo traductor queda ahora determinado por

$$\delta' : 2^Q \times Z_k \longrightarrow 2^Q$$

de esta forma  $\delta'(s, a) = t$ , para  $s, t \in 2^Q$  y  $\delta'(p, a) = \delta(p, a)$  para  $p \in Q$  y  $a \in Z_k$ . También  $\delta'(B, a) = \bigcup_{p \in B} \delta(p, a)$  con  $B \subset Q$ .

Para transformar el traductor determinista en el mínimo traductor determinista, establecemos la siguiente equivalencia de vértices que es una adaptación del teorema Myhill-Nerode para traductores de Fischer [17]

**Definición 9** *Dos vértices  $p$  y  $q$  son equivalentes  $p \equiv q$  si para cada  $a \in \mathcal{L}(Z_k)$ ,  $\delta(p, a) \neq ()$  si  $\delta(q, a) \neq ()$*

Generamos un nuevo traductor en el que cada vértice representa una clase de equivalencia. De la misma forma decimos que  $p$  es *distinguible* de  $q$  si existe un  $x \in \mathcal{L}(Z_k)$  tal que  $\delta(p, x) \neq ()$  y  $\delta(q, x) = ()$ . El nuevo traductor así formado presenta al mismo conjunto de salida que el traductor inicial ref.[17]. Los procedimientos se describen en detalle en el apéndice A.

Un traductor presenta subconjuntos de  $\Sigma$  en los que cada secuencia bi-infinita de etiquetas, es un camino de flechas en el traductor. Los bloques que aparecen en una configuración, es una secuencia finita de etiquetas de las flechas en el traductor y decimos que es un bloque aceptado por el traductor.

El número de bloques distintos de tamaño  $n$ ,  $I(n)$ , que aparecen en las configuraciones de un subconjunto de  $\Sigma$  presentado por un traductor, puede ser calculado con la matriz de adyacencia  $M$  del traductor ref.[15].

Los elementos  $a_{uv}$  de la matriz de adyacencia  $M$  valen 1 si hay una flecha del vértice  $u$  al vértice  $v$  y cero de otra forma. La suma de todos los elementos de  $M^n$  es el número  $I(n)$  ya que  $a_{u_0 u_1} a_{u_1 u_2} \dots a_{u_{n-2} u_{n-1}} = 1$  para los bloques que



acepta el traductor,

$$I(n) = \sum_{u_0, \dots, u_{n-1}=0}^{k-1} a_{u_0 u_1} a_{u_1 u_2} \dots a_{u_{n-2} u_{n-1}} = \sum_{u_0, u_{n-1}=0}^{k-1} (M^{n-1})_{u_0 u_{n-1}}. \quad (2.8)$$

Definiendo la norma para las matrices de  $k \times k$ , tenemos.

$$I(n) = \sum_{u_0, u_{n-1}=0}^{k-1} (M^{n-1})_{u_0 u_{n-1}} \equiv \| M^{n-1} \|. \quad (2.9)$$

Nosotros estamos interesados en extraer propiedades de los conjuntos que presentamos a través de traductores. Como ejemplo si tenemos que de cada vértice del traductor sale solo una flecha, entonces este traductor presenta a un conjunto con un número finito de configuraciones, en cambio entre más flechas salgan de cada vértice en el traductor determinista, más posibles configuraciones obtenemos. De aquí resulta conveniente poner atención en la cantidad de flechas que salen de un vértice, es decir, en la ramificación de los vértices. La ramificación promedio del traductor da una medida de la "cantidad" de configuraciones en el conjunto presentado por el traductor.

**Definición 10** La ramificación promedio  $\rho$  de un grafo  $G(Q)$  definimo mediante la relación  $R$  es

$$\rho = \frac{\text{card}(R)}{\text{card}(Q)}$$

i.e., la razón del número de flechas al número de vértices.

La ramificación  $\rho$  es una propiedad intrínseca al grafo. Es decir, si el traductor no es ni mínimo ni determinista,  $\rho$  podría, no tener comparación con la cantidad de configuraciones del conjunto representado por ese traductor, porque ya no habría necesariamente una relación biyectiva entre las configuraciones y las trayectorias del grafo subyacente al traductor. Así, nosotros nos referiremos a la ramificación  $\rho$  solo para los traductores mínimos deterministas.

## 2.3 Entropía topológica

En el espacio completo  $\Sigma$  aparecen todos los bloques posibles de cualquier tamaño en las configuraciones. Sin embargo, en el conjunto de salida  $Y \equiv f(\Sigma) \subset \Sigma$ , para cada tamaño  $n$  solo algún número de bloques  $I(n)$ , de los posibles  $k^n$ , están presentes. El hecho de que ya no podamos tener todas las secuencias posibles después de aplicar la evolución del AC al espacio  $\Sigma$  dice que el proceso de evolución es irreversible. Una forma de medir los conjuntos de salida en relación al espacio  $\Sigma$  es a través de una dimensión del conjunto, de manera similar a como se mide la dimensión fractal para conjuntos como los de Cantor en el intervalo  $[0,1]$ . Como una ilustración, considerese el caso de la dimensión fractal de subconjuntos del intervalo. Para ello dividimos el intervalo en  $k^n$  subintervalos de tamaño  $1/k^n$  y contamos el número  $N(n)$  de subintervalos conteniendo elementos del conjunto. Para  $n$  grande,  $N(n)$  crece como  $k^{dn}$ , y al exponente  $d$  se le conoce como la dimensión de Kolmogorov. Como ejemplo, si para toda  $n$ , en todos los subintervalos hay elementos del conjunto, entonces  $d = 1$ . Como otro ejemplo, considerese el conjunto formado por los números que en su representación en base  $k$  contienen solo los dígitos 0 y 1. Para este conjunto, de los  $k^n$  subintervalos solo encontramos  $2^n$  de ellos que contienen elementos del conjunto. Para  $n$  grande,  $d = \log_k 2$ .

La dimensión de Kolmogorov es definida [25] por:

$$d = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log_k N(n)$$

Para el caso que nos ocupa, hagamos la analogía de las particiones del intervalo  $[0,1]$  con la partición de  $\Sigma$  en  $k^n$  cilindros ajenos. El análogo a  $N(n)$  es en nuestro caso el número  $I(n)$  de  $n$ -bloques  $[i_0, \dots, i_{n-1}]$  tal que los cilindros  $0[i_0, \dots, i_{n-1}]_{n-1}$  incluyen elementos del conjunto  $Y$ . El análogo a la dimensión de Kolmogorov es

la entropía topológica espacial [26], [27], [23],

$$s = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log_k I(n). \quad (2.10)$$

También podemos verla como una medida de la incertidumbre en nuestro conjunto. Por ejemplo la entropía topológica  $s$  es cero para un conjunto presentado por un traductor que es un ciclo simple (cada vertice tiene solo una flecha de salida), este traductor presenta realmente a un número finito de configuraciones, es decir no tenemos incertidumbre al elegir un elemento de éste conjunto. Entre las cualidades de la entropía topológica  $s$  está el de que es siempre una cantidad finita para cualquier subconjunto de  $\Sigma$  invariante ante el *shift*  $\sigma$  y esto nos da la posibilidad de comparar subconjuntos con cardinalidades infinitas. Además para dos *subshifts*  $C \subset C'$  se tiene que  $s(C) \leq s(C')$ .

Cabe aclarar que la entropía topológica  $s$  es distinta de la entropía de la teoría de la medida, en la cual se asigna una medida a los cilindros. La entropía métrica [27] está dada por

$$h = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{w \in B_n} p(w) \log_k p(w) \quad (2.11)$$

donde  $w$  es el cilindro  ${}_0[i_0, \dots, i_{n-1}]_{n-1}$ ,  $B_n$  es el conjunto de todos los cilindros presentados por bloques de tamaño  $n$ , módulo una traslación al origen, y  $p(w)$  es la medida del cilindro  $w$ . La entropía en teoría de la medida, como podemos ver, depende de la medida que se asigna a los cilindros. Cuando aplicamos la evolución a las configuraciones, es distinto considerar si éstas pertenecen a un cilindro dado, que el considerar la probabilidad con que aparecen en los cilindros. Así, la diferencia entre la entropía topológica y la métrica está en que en el primer caso el espacio es considerado solo como conjunto, en la estricta definición de la palabra, y en el otro caso como un espacio de medida. Goodwyn, Dinaburg y Goodman [27] prueban que la entropía topológica  $s$  es igual al supremo de la entropía métrica  $h$  del mismo conjunto, donde el supremo es sobre las medidas

de probabilidad que son ergódicas respecto al *shift*. Esto es porque los conjuntos que tratamos son invariantes ante el *shift* [27]. Hay autores que definen la entropía topológica  $s$  como el supremo de la entropía métrica  $h$  [28].

Para obtener el número de bloques de tamaño  $n$ ,  $I(n)$ , que están presentes en las configuraciones que pertenecen al conjunto  $Y$ , usamos la ecuación 2.9 y la fórmula para el radio espectral de  $M$  [?]. En el límite se tiene que

$$s = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log_k I(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \log_k (\| M^{n-1} \|^{1/n}) = \log_k \lambda_{\max}. \quad (2.12)$$

El número  $\lambda_{\max}$  es el eigenvalor real más grande de la matriz de adyacencia. Si para toda  $n$  nuestro conjunto tiene todos los posibles bloques  $k^n$ , entonces  $s = 1$ .

Además de las entropías mencionadas, hay otra cantidad que es la entropía temporal, que puede ser métrica o topológica. Para la entropía temporal el refinamiento de las particiones no se lleva a cabo por el *shift*  $\sigma$ , sino por el mismo mapeo del autómata  $f$ . La entropía temporal puede interpretarse como una cantidad que mide el contenido de información de las secuencias temporales por celda. Resultados sobre el cálculo de esta última entropía están dados en [29] y [30].

## 2.4 Subconjuntos invariantes de configuraciones viajeras

Presentamos un método para identificar un tipo de subconjuntos invariantes que llamamos configuraciones viajeras. Un conjunto de configuraciones viajeras es caracterizado por una velocidad  $\nu \in \mathbb{N}$ , y es definido como el subconjunto  $S_{(\nu, f)}$  más grande de  $\Sigma$  con la propiedad de que la restricción de  $f$  sobre  $S_{(\nu, f)}$  se comporta como la potencia  $\nu$  del *shift*,

$$f|_{S_{(\nu, f)}}(x) = \sigma^\nu x. \quad (2.13)$$

Los puntos  $x \in S_{(\nu, f)}$  son configuraciones que se mueven con velocidad  $\nu$ , preservando su forma. El conjunto  $S_{(\nu, f)}$  es invariante,  $f(S_{(\nu, f)}) = S_{(\nu, f)} \subset \Lambda$ . La velocidad límite es  $r$ , el rango del autómata. Estamos interesados en los conjuntos de configuraciones viajeras con entropía topológica distinta de cero.

Hemos encontrado que también con el uso de traductores podemos dar una presentación para los conjuntos de configuraciones viajeras. El traductor  $T_f$  provee una presentación del subshift  $f(\Sigma) \subset \Sigma$  y queremos ver cuáles son los vértices y las flechas que intervienen para presentar el conjunto  $S_{(\nu, f)}$ . La parte del traductor que presente a  $S_{(\nu, f)}$  debe de cumplir con lo siguiente para sus flechas

$$\begin{aligned} i) \quad & f_l(c) = \sigma^\nu c = c_{-l-\nu} \quad \text{con } |\nu| \leq r, \quad l = 2r + 1 \\ ii) \quad & c \text{ es parte de un camino cerrado en el traductor} \end{aligned} \tag{2.14}$$

La primera condición es que el bloque  $c$  se mapee a uno de sus propios símbolos. Puede ser al símbolo central, alguno de la izquierda, o de la derecha, según sea que  $\nu = 0$ ,  $\nu > 0$  o  $\nu < 0$  respectivamente. La condición (i) puede escribirse en aritmética módulo  $k$  como:

$$\left[ \frac{|c|}{k^{|\nu|}} \right] \equiv \left[ \frac{|f|}{k^{|l|}} \right] \pmod{k} \tag{2.15}$$

con  $|c|$  y  $|f|$  según se definieron en la ec.2.6, y los paréntesis cuadrados denotan la parte entera. La segunda condición en la ec.2.14 es para eliminar las flechas que presentan bloques que no aparecen en las configuraciones viajeras, las cuales son doblemente infinitas.

Así, para una regla dada, la ecuación 2.15 es usada para primero eliminar las flechas que no cumplen con la condición (i) de la ec.2.14. El conjunto de flechas que satisfacen la ec.2.15 es luego limpiado, eliminando las flechas que no cumplen con la condición (ii) de 2.14. La parte del traductor que presenta al subshift  $S_{(\nu, f)}$

es un subtructor de  $T_f$ . Damos a  $S_{(\nu,f)}$  el valor

$$|S_{(\nu,f)}| \equiv \sum_{e \in G_f} c_e k^{|e|} \quad (2.16)$$

con coeficientes  $c_e$  dados como  $c_e = 1$  si la flecha  $e$  esta en el subtructor presentando  $S_{(\nu,f)}$  y  $c_e = 0$  de otra forma.

El lenguaje regular asociado al *subshift*  $S_{(\nu,f)}$  le llamamos el lenguaje de los tropones  $\mathcal{L}(S_{(\nu,f)})$ , es decir un tropon es cualquier palabra que pertenece a este lenguaje. Vamos a llamar dominios a los tropones que aparecen en una configuración de un AC localizados entre palabras que no son tropones. Así que no todo tropon es un dominio. El lenguaje de los dominios  $\mathcal{D}(S_{(\nu,f)})$  es un subconjunto de  $\mathcal{L}(S_{(\nu,f)})$ .

Podemos filtrar los tropones del diagrama espacio-temporal para un AC. Para el conjunto  $S_{(\nu,f)}$  de configuraciones viajeras el filtro es un mapeo celular  $\varphi : \Sigma \rightarrow \Sigma$  y que es definido por la función a bloques  $\varphi_l : Z_k^l \rightarrow Z_k$  tal que  $\varphi_l(\epsilon) = c_\epsilon \text{id}_l(\epsilon)$ . La función  $\text{id}_l$  define el mapeo identidad  $\text{id}(x) = x$ , y el coeficiente  $c_\epsilon$  está dado por

$$c_\epsilon \equiv 1 + \left[ \frac{|S_{(\nu,f)}|}{2^{|\epsilon|}} \right] \quad (2.17)$$

Así,  $|S_{(\nu,f)}|$  provee de la herramienta de tal forma que  $\varphi_l(\epsilon) = 0$  para toda  $\epsilon$  que es un tropón, es decir a las configuraciones viajeras las manda a la configuración nula  $\dots 0000 \dots$  y solo vemos en el diagrama espacio temporal aquello que no son tropones.

Una generalización de lo que son configuraciones viajeras, son las configuraciones que se trasladan, hasta después de un número finito  $\tau$  de aplicaciones del mapeo  $f$  y no antes. Una configuración de estas cumple con la siguiente condición

$$f^\tau(x) = \sigma^r x. \quad (2.18)$$

Al conjunto de configuraciones que cumplen con la ecuación 2.18 le llamamos

arpegio y lo denotamos con  $\beta(\tau, \nu)$ .

$$\beta(\tau, \nu) = \{x^{(i)} = f^i(x) \mid i = 0, 1, \dots, \tau - 1; f^\tau(x) = \sigma^\nu x\}. \quad (2.19)$$

En esta sección hemos definido un tipo de subconjuntos invariantes que pertenecen al conjunto límite y constituyen una aproximación al conjunto límite desde adentro.

## 2.5 Simetrías de autómatas

Sabemos que una presentación de un AC  $f$  es a través de una función a bloques  $f_l : Z_k^l \rightarrow Z_k$ , la cual se puede presentar en forma tabular. Para buscar simetrías, la transformación natural a considerar es la de cambiar el contenido de las celdas tanto en el dominio de la función a bloques como en las celdas imagen. Transformaciones que cambian el valor de las celdas y no cambian el sitio de las celdas las llamamos *internas*. De las transformaciones definidas sobre  $f_l$ , tenemos que distinguir las que pueden ser extendidas al autómata, es decir a la función global  $f$ . No cualquier transformación de  $f_l$  puede extenderse a  $f$ . Cuando la hay, la extensión a  $f$  requiere cierto cuidado.

Una transformación interna cambia el valor de las celdas, es decir es una permutación de los símbolos de  $Z_k$  y ésta puede no ser la misma para cada celda. El conjunto de transformaciones sobre una celda es  $S_k$ , el grupo simétrico en  $k$  símbolos. Para bloques de tamaño  $l$ , una transformación  $\mu \in S_k^l$  actúa sobre el bloque  $c \in Z_k^l$  para producir el bloque  $\mu c \in Z_k^l$ , tal que  $(\mu c)_i = \mu_i c_i$ . Para la regla local  $f_l$  definimos la transformación interna  $g f_l \equiv (\mu, \alpha) f_l$  con  $g \equiv (\mu, \alpha) \in S_k^l \times S_k$  de la siguiente manera  $g f_l(c) = [\alpha^{-1}(f_l \circ \mu)](c) = \alpha^{-1} f_l(\mu c)$ . La composición de las transformaciones es definida como  $g_2 g_1 \equiv (\mu_1 \mu_2, \alpha_1 \alpha_2)$  que es consistente con nuestra definición de su acción sobre  $f_l$ . La órbita de una regla  $f_l$ , es el conjunto  $\vartheta_{f_l} \equiv (S_k^l \times S_k) \cdot f_l$ .

Decimos que  $g$  es una simetría de  $f_l$  si  $gf_l = f_l$ . Lo cual significa que  $f_l(\mu\epsilon) \equiv \alpha f_l(\epsilon)$  para toda  $\epsilon \in Z_k^l$ . Esto es que si  $f_l$  tiene la simetría  $g = (\mu, \alpha)$ , el conjunto de bloques  $f_l^{-1}(a)$  para  $a \in f_l(Z_k^l)$  se transforma bajo  $\mu$  tal y como el símbolo  $a$  se transforma bajo  $\alpha$ . Para consideraciones de simetrías es conveniente ver qué le sucede al dominio y a la imagen cuando son transformados. Podría pensarse que tenemos el problema de que quizás algunos elementos del rango no estarían en la imagen de  $f_l$ , pero sin pérdida de generalidad podemos considerar funciones a bloques que sean sobreyectivas. Lo relevante que podamos decir de  $f_l$ , lo decimos también de su restricción al conjunto de bloques con símbolos que permanecen en imágenes sucesivas.

Así, es conveniente hacer la partición  $\Pi_l = \{f_l^{-1}(a) \mid a \in Z_k\}$  del conjunto de bloques  $Z_k^l$ . Por la sobreyectividad de  $f_l$ ,  $f_l^{-1}(a) \neq \emptyset$  para toda  $a \in Z_k$  y la partición  $\Pi_l$  está en correspondencia biyectiva con  $Z_k$ . Para el caso en que  $f_l$  tenga la simetría  $g$ , se cumple el siguiente diagrama conmutativo,

$$\begin{array}{ccc}
 \Pi_l & \xrightarrow{\mu} & \Pi_l \\
 f_l \downarrow & & \downarrow f_l \\
 Z_k & \xrightarrow{\alpha} & Z_k
 \end{array} \tag{2.20}$$

El requisito de que  $f_l$  tenga la simetría  $g$  es equivalente a que se cumpla el diagrama (2.20).

No es difícil verificar que si  $g_1$  y  $g_2$  son simetrías de  $f_l$  entonces  $g_1g_2$  y  $g_1^{-1}$  son simetrías de  $f_l$ . Es decir el conjunto de simetrías de una regla forman un grupo, el cual lo denotamos  $L_{f_l}$ .

Estamos interesados en cuál es la acción de grupo  $S_k^l \times S_k$  sobre el espacio de reglas, porque esto nos permite agrupar reglas con propiedades de simetría similares. Consideremos para una regla  $f_l$  el grupo cociente  $C_{f_l} = (S_k^l \times S_k)/L_{f_l}$  este grupo tiene la particularidad de que para cada clase, los elementos en ella tienen la misma acción sobre  $f_l$ , de esta forma el orden de la órbita de  $f_l$  es igual



al orden de  $C_{f_l}$ . Sumando sobre los elementos en una orbita tenemos que

$$\sum_{f'_l \in \mathcal{O}_{f_l}} |L_{f'_l}| = |S_k^l \times S_k|$$

Si tenemos en total  $M$  orbitas entonces

$$M |S_k^l \times S_k| = \sum_{f_l} |L_{f_l}|. \quad (2.21)$$

Esto nos permite saber el número de orbitas que se generan bajo la acción del grupo  $S_k^l \times S_k$ , y por lo tanto el número de reglas independientes que podríamos considerar.

Otra propiedad a tener en cuenta, es que si  $g'$  conmuta con una simetría  $g$  de  $f_l$ , entonces  $g$  también es simetría de  $g'f_l$ . De esta forma los elementos del grupo  $\langle g \rangle$  generado por  $g$ , son simetrías de  $\Upsilon_g f_l$ , donde  $\Upsilon_g$  es el normalizador de  $g$  (i.e.) el subgrupo de elementos que conmutan con  $g$ .

El grupo de simetrías  $L_{f_l}$  puede ser presentado a través de una función a bloques  $F_l : B \rightarrow C$ . En donde si  $g = (\mu, \alpha) \in L_{f_l}$  entonces  $\mu$  pertenece al dominio  $B \subset S_k^l$  de  $F_l$  y  $\alpha$  a la imagen  $C \subset S_k$ . Así tenemos el siguiente teorema probado en la ref.[32]

**Teorema 11** *El grupo de simetrías de  $f_l$ ,  $L_{f_l}$  define un homomorfismo  $F_l : B \rightarrow C$  tal que  $F_l(\mu) = \alpha$  para  $g = (\mu, \alpha) \in L_{f_l}$ .*

La función a bloques  $F_l$  es llamada la función de simetría, que es dual a  $f_l$ . Esta función contiene todas las simetrías internas de  $f_l$ ,  $f_l(\mu c) = F_l(\mu)f_l(c)$ . En si, el grupo de simetrías  $L_{f_l}$  es la gráfica de  $F_l$  sobre  $B \times C$ . De esta forma hay una equivalencia entre el grupo  $L_{f_l}$  y la función  $F_l$ . El algoritmo que describimos para encontrar el grupo de simetrías está basado en el diagrama conmutativo ec.2.20. La entrada para el algoritmo es la partición  $\Pi_f$  y el algoritmo regresa el conjunto  $L_{f_l}$ .

### Algoritmo (1)

1. Para  $\mu \in S_k^l$ , si  $\mu f_l^{-1}(a)$  esta en  $\Pi_f$  para cada símbolo  $a \in Z_k$ , entonces incluya los elementos  $\langle \mu \rangle$  en  $B$ . Reemplace  $S_k^l$  por  $S_k^l - \langle \mu \rangle$  y repita el proceso hasta terminar con el conjunto de transformaciones de bloques. Con esto obtenemos el conjunto  $B$ .
2. Para cada  $\mu \in B$ , encuentre una permutación  $\alpha \in S_k$  tal que  $\mu f_l^{-1}(a) = f_l^{-1}(\alpha a)$  para cada símbolo  $a \in Z_k$ . Para verificar esta condición solo requerimos un elemento en cada clase de la partición  $\Pi_f$ . Si encontramos que sucede esto, incluimos en  $L_{f_l}$  todas las parejas  $(\mu^n, \alpha^n)$  con  $n = 0$  hasta el orden de  $\hat{\mu}$ . Reemplazamos  $B$  por  $B - \langle \mu \rangle$  hasta agotar el dominio de  $F_l$  que es  $B$ .

Al final nos quedamos con el grupo de simetrías  $L_{f_l}$ .

Como cualquier otra función a bloques  $F_l$  tiene una presentación a través de traductores y lo llamaremos el traductor del grupo de simetría  $T_H$ . Traductores grupo han sido introducidos en la ref.[33]. Aquí damos una definición apropiada a nuestra discusión. Igual que como para  $T_f$  tomaremos como vértices, bloques de transformaciones de tamaño  $l-1$ , es decir elementos de  $S_k^{l-1}$  y como flechas bloques de transformaciones de tamaño  $l$ . Igual que como para  $T_f$  hay una flecha  $\mu$  del vértice  $\eta$  al vértice  $v$  si  $\eta_i = \mu_i$  y  $v_i = \mu_{i+1}$  para  $i = 0, \dots, l-2$ .

Una diferencia importante entre el traductor para el grupo de simetrías y el traductor para los AC es que el dominio de  $F_l$  no son todos los bloques de tamaño  $l$ , sino solo aquellos que forman parte de una simetría de  $f_l$ . De esta forma solo tomamos los vértices que forman bloques que pertenecen a  $B$ . Finalmente a cada flecha  $\mu \in B$  la etiquetamos con  $F_l(\mu)$ . El traductor obtenido no es necesariamente completamente conectado y algunos de sus vértices pueden no pertenecer a caminos cerrados dentro del traductor. Sin embargo tampoco es vacío el traductor, porque al menos tenemos a la identidad. Es importante remarcar que el

conjunto de flechas  $B$ , el conjunto de vértices y el conjunto de etiquetas  $F_l(B)$  son todos grupos, ver ref.[33] y si consideramos un traductor para todas las posibilidades de  $S_k^l \times S_k$ , el tipo de subtraductores de este traductor que pueden ser traductores del grupo de simetrías de  $f_l$  deben cumplir con esta condición.

Transformaciones internas para configuraciones serán secuencias bi-infinitas de permutaciones  $\gamma = \dots\gamma_{-1}\gamma_0\gamma_1\dots \in S_k^Z$  que actúan sobre una configuración  $x \in \Sigma$  de la forma  $\gamma x$  tal que  $(\gamma x)_i = \gamma_i x_i$ . Ahora la transformación  $g_\bullet = (\gamma, \theta) \in S_k^Z \times S_k^Z$  actúa sobre la función global o autómeta  $f$  para transformarlo en el autómeta  $g_\bullet f$  tal que para una configuración  $x \in \Sigma$  se tiene  $g_\bullet f(x) = \theta^{-1} f(\gamma x)$ . De la misma forma que para las funciones a bloques decimos que la transformación  $g_\bullet = (\gamma, \theta) \in S_k^Z \times S_k^Z$  es una simetría interna de  $f$  si  $g_\bullet f = f$ , esto es si  $f(\gamma x) = \theta f(x)$  para cada configuración  $x \in \Sigma$ . El siguiente lema da una condición necesaria para  $g_\bullet$  sea una simetría de  $f$ , ref.[32].

**Lema 12** *Sea  $g_\bullet = (\gamma, \theta)$  una simetría interna del autómeta  $f$  entonces  $(\gamma_{i-r} \dots \gamma_i \dots \gamma_{i+r}, \theta_i)$  es una simetría de  $f_l$ , para cada  $i \in Z$ .*

Para entender como  $g_\bullet$  puede ser simetría de  $f$  es importante tener en cuenta que el dominio  $B$  de  $F_l$  no son todos los bloques de permutaciones de tamaño  $l$ , y que además, las simetrías de  $f_l$  pueden corresponder a flechas en el traductor del grupo de simetrías  $T_B$  en las que no podemos concatenar una flecha a la otra, es decir un bloque con otro.

De esta forma para poder tener secuencias bi-infinitas de elementos en  $S_k$  y que sean una simetría de  $f$  requerimos que cada bloque de tamaño  $l$  sea un elemento en el dominio de  $F_l$ , la función de simetría dual a  $f_l$ . Esto lo que quiere decir es que solo vamos a poder formar secuencias bi-infinitas en el traductor del grupo de simetrías de  $f_l$ , quitando todas las flechas que son flechas extremas es decir, flechas que llegan a un vértice del que ya no salen más flechas o flechas que vienen de un vértice al que no llega ninguna flecha. Este proceso se repite hasta limpiar el traductor y que queden solo flechas que forman secuencias bi-infinitas

de transformaciones internas. El traductor así limpiado  $T_H^0$  es una restricción  $F_l^0$  de la función de simetría dual de  $f_l$ .

El conjunto de secuencias bi-infinitas que son aceptadas por el traductor  $T_H^0$  lo denotaremos como  $\Omega(B^0) \subset S_k^Z$ . El siguiente teorema es probado en la referencia [32]

**Teorema 13** *La transformación  $g_* = (\gamma, \theta)$  es una simetría del autómata  $f$  que es presentado por la función a bloques  $f_l$ , si y solo si  $\gamma \in \Omega(B^0)$  y  $F(\gamma) = \theta$ , donde  $F$  es la función global presentada por la función a bloques  $F_l^0$ . Además  $F : \Omega(B^0) \rightarrow S_k^Z$  es un homomorfismo.*

El problema de encontrar las simetrías internas de un autómata  $f$ , se reduce así al problema de encontrar  $F_l^0$  y  $T_H^0$  que es el traductor que presenta a la  $F$  del teorema anterior. Para encontrar  $T_H^0$  seguimos los siguientes pasos.

#### Algoritmo (2)

1. calculamos  $F_l$ , la función de simetría dual a  $f_l$ , con el uso del algoritmo (1). El dominio  $B$  de  $F_l$  es el conjunto de flechas de  $T_H$ .
2. Eliminamos las flechas extremas en  $T_H$ . Este proceso de limpiado se repite si aún quedan flechas extremas. Después de un número finito de iteraciones nos quedamos con el conjunto de flechas que forman parte de secuencias bi-infinitas de transformaciones.

Con el Algoritmo 2 uno puede calcular para cualquier autómata la función a bloques  $F_l^0$ , que presenta a su simetría dual  $F$ .

Para el caso de autómatas celulares elementales lineales el traductor del grupo de simetrías internas es isomorfo al traductor de la regla.

Una simetría nueva que vamos a considerar es de caracter distinto a las hasta aquí consideradas y es la reflexión de sitios en un bloque respecto al sitio central

del bloque, así para un bloque  $c = c_{l-1} \dots c_1 c_0$

$$rc = c_0 \dots c_{l-2} c_{l-1}$$

Si incluimos esta nueva transformación para los bloques nuestro grupo de transformaciones resulta ahora  $S_k^l \langle r \rangle$ . Para las funciones a bloques seguimos definiendo una transformación como  $gf_l(c) = (\mu, \alpha)f_l(c) = \alpha^{-1}f_l(\mu c)$  con  $(\mu, \alpha) \in S_k^l \langle r \rangle \times S_k$ .

La extensión de la reflexión para una configuración  $x = \dots x_{-1} x_0 x_1 \dots \in \Sigma$  es definida como

$$r_* x = \dots x_1 x_0 x_{-1} \dots$$

Y la transformación que es el producto de  $\theta \in S_k^Z$  con  $r_*$  es entonces

$$\theta r_* x = \dots (\theta_{-i} x_i) \dots (\theta_{-1} x_1) (\theta_0 x_0) (\theta_1 x_{-1}) \dots (\theta_i x_{-i}) \dots$$

Para un autómata  $f$  definimos la transformación  $g_* = (\varphi, \chi)$  con  $\varphi, \chi \in S_k^l \langle r \rangle \times S_k^l \langle r \rangle$  como  $g_* f(x) = \chi^{-1} f(\varphi x)$ . De esta forma un autómata tiene la simetría  $g_*$  si  $g_* f = f$  esto quiere decir que  $\chi f(x) = f(\varphi x)$  para todo  $x \in \Sigma$ . En un diagrama esto significa que

$$\begin{array}{ccc} \Sigma & \xrightarrow{\varphi} & \Sigma \\ f \downarrow & & \downarrow f \\ \Sigma & \xrightarrow{\chi} & \Sigma \end{array} \quad (2.22)$$

**Lema 14** Si la función a bloques  $f_l$  es simétrica bajo  $(r\vartheta_l, \gamma)$  con  $\vartheta_l = \vartheta \dots \vartheta \vartheta \in S_k^l$ , entonces el autómata  $f$  es simétrico bajo  $(r_* \vartheta_*, r_* \gamma_*)$ , con  $\vartheta_* = \dots \vartheta \vartheta \vartheta \dots \in S_k^Z$  y  $\gamma_* = \dots \gamma \gamma \gamma \dots \in S_k^Z$ .

Prueba. Sea  $x = \dots x_{-1} x_0 x_1 \dots \in \Sigma$  entonces

$$f(r_* \vartheta_* x) = \dots f_l(\vartheta x_{i+1} \vartheta x_i \vartheta x_{i-1}) \dots f_l(\vartheta x_1 \vartheta x_0 \vartheta x_{-1}) \dots f_l(\vartheta x_{-i+1} \vartheta x_{-i} \vartheta x_{-i-1}) \quad (2.23)$$

Ahora como  $f_l(\vartheta x_{i+1} \vartheta x_i \vartheta x_{i-1}) = \gamma^{-1} f(x_{i-1} x_i x_{i+1})$  para todo  $i \in \mathbb{Z}$

$$(r_* \gamma_*)^{-1} f(x) = \dots \gamma^{-1} f_l(x_{i-1} x_i x_{i+1}) \dots \gamma^{-1} f_l(x_1 x_0 x_{-1}) \dots \gamma^{-1} f_l(x_{-i+1} x_{-i} x_{-i-1}) \quad (2.24)$$

De esta forma las expresiones 2.23 y 2.24 son iguales.  $\square$

# Capítulo 3

## Resultados

### Resumen

*Clasificamos con el parámetro  $\rho$  y con la entropía topológica los traductores mínimos deterministas que presentan la imagen del espacio  $\Sigma$  bajo los AC. Encontramos los subconjuntos invariantes de configuraciones viajeras y una cota inferior para la entropía topológica del conjunto límite. De aquí concluimos cual es el valor de la entropía topológica para los conjuntos límites de 25 autómatas aparte de los 30 sobreyectivos. Generamos el grupo completo de simetrías y las órbitas que se generan cuando el grupo es aplicado al espacio de reglas. Finalmente hacemos una refinación de la clases de ramificación con las simetrías y extendemos las simetrías a los autómatas.*

### 3.1 Clasificación Topológica

Según se explicó en la sección 2.2, el conjunto  $f(\Sigma)$  es presentado por un traductor mínimo determinista único. Usamos los traductores para caracterizar  $f(\Sigma)$ . Como hemos señalado en la Sec.2.2 un *subshift*  $C \subset \Sigma$ , admite presentaciones a través de traductores diversos, con características aparentemente distintas.

Los traductores deterministas establecen una relación biyectiva entre las con-

figuraciones del conjunto  $C \subset \Sigma$  que presenta el traductor, y los caminos de flechas en el traductor, ver Sec.2.2. Por consistencia trabajamos con los traductores deterministas que presentan a nuestro conjunto con el menor número de vértices. Así los traductores mínimos deterministas proveen de una descripción de  $C$  y del lenguaje asociado,  $\mathcal{L}(C)$  [17].

Dado el traductor  $T_f$  (definición 7) que presenta a un autómata  $f$ , a su dominio y a su imagen  $f(\Sigma)$ , nos hemos avocado a la tarea de encontrar partiendo de este traductor, (1) un traductor determinista que presenta al mismo conjunto de salida  $f(\Sigma)$  y (2) el traductor determinista con el menor número de vértices. Los detalles del procedimiento se presentan en el Apéndice A. Esto lo hemos hecho para todos los autómatas elementales. Los traductores resultantes de este proceso, no los presentamos aquí por razones obvias de espacio, en cambio presentamos propiedades que extraemos de ellos.

Como ya hemos señalado en la misma sección 2.2 la ramificación promedio  $\rho$  del traductor, definición 4, nos ofrece una primera aproximación al "tamaño" del conjunto que presenta el traductor, además que es muchísimo más sencilla de calcular que la entropía topológica.

Para el caso elemental, encontramos que las reglas presentando un valor de la ramificación  $\rho = 2$  son todas aquellas en las que para cada vértice tenemos dos flechas. Ya que estamos hablando de traductores deterministas en los que el alfabeto consiste de dos símbolos, esto significa que los autómatas son sobreyectivos en el espacio de configuraciones. En el extremo opuesto tenemos aquellos en las que para cada vértice tenemos solo una flecha  $\rho = 1$  esto significa que todo el espacio es colapsado, a la primera imagen  $f(\Sigma)$ , a un conjunto finito de configuraciones. Para aquellas reglas con traductores mínimos cuyo valor de  $\rho$  es cercano a 2, el autómata definido por esa regla lleva el espacio de configuraciones hacia conjuntos amplios, en el lado opuesto, i.e., reglas para las que  $\rho \rightarrow 1$  se tienen los autómatas que generan conjuntos en los que hay excluidos muchos bloques para cualquier tamaño de bloques que intervienen en las secuencias de símbolos.



En la Ref.[10] Wolfram da una definición de complejidad para el lenguaje asociado a los conjuntos imagen  $\mathcal{L}(f(\Sigma))$ , como el número de vértices del traductor. Esta definición no es representativa de alguna complejidad, si no se consideran las flechas que emerjen de cada vértice, por ejemplo ya hemos señalado, para el caso tan simple como lo son los autómatas elementales definidos por las reglas locales  $f_l(\epsilon) = 0$  y  $f_l(c) = c_0 + c_2 \text{ mod } 2$ , donde  $c = c_2c_1c_0$  es un bloque de tres celdas. Para la primera regla, la regla 0, el conjunto imagen es solo una configuración y para la siguiente, la regla 90, es todo el espacio. Sin embargo, la imagen de ambos AC's esta presentada por un traductor mínimo determinista de un solo vértice. La ramificación promedio  $\rho$  nos da más información sobre la topología del traductor.

Siguiendo el procedimiento que indicamos en el Apéndice A, obtuvimos los traductores mínimos deterministas para todos los AC's elementales y con ellos obtuvimos la ramificación promedio  $\rho$ . Agrupamos las reglas que definen los autómatas y cuya imagen está presentada por traductores con la misma ramificación promedio, esto nos genera una primera clasificación del conjunto de autómatas, y los resultados se presentan en la tabla 3.1. Las reglas que son sobreyectivas tienen un valor de  $\rho$  igual a 2. Esta clasificación nos da una visión de la magnitud del conjunto imagen y no es todavía una descripción completa del comportamiento de las configuraciones ante la evolución del autómata. Por ejemplo aquí aparecen en la misma clase las reglas  $f_3(c_2c_1c_0) = c_2 + c_0 \text{ mod } 2$  y  $f_3(c_2c_1c_0) = c_1$  que tienen números de regla 90 y 201, y sin embargo la 90 es considerada como caótica, y la 201 es la identidad, toda configuración queda fija [4].

Otra propiedad de  $f(\Sigma)$  que podemos calcular con los traductores mínimos deterministas que obtenemos del traductor  $T_f$  es la entropía topológica *s* ec.(2.10).

Calculamos la entropía topológica *s* para la primera imagen  $f(\Sigma)$  de todos los autómatas elementales y los agrupamos en conjuntos con el mismo valor de *s*. Encontramos 21 subconjuntos del espacio de reglas que se presentan en la tabla

| $\rho$ | REGLAS   | #  |
|--------|--|----|
| 2      | 15,30,45,51,60,75,85,86,89,90,101,102,105,106,120,135,149,150,153,154,165,169,170,180,195,204,210,225,240  | 30 |
| 1.933  | 22,37,73,91,94,104,109,122,133,146,151,161,164,182,218,233   | 16 |
| 1.928  | 41,97,107,121,134,148,158,214  | 8  |
| 1.923  | 26,74,82,88,167,173,181,229  | 8  |
| 1.833  | 61,67,188,194  | 4  |
| 1.800  | 18,23,25,33,44,52,57,62,69,72,77,93,99,103,110,118,123,124,131,132,137,145,152,156,162,178,183,186,193,198,203,211,222,230,232,237   | 36 |
| 1.778  | 20,27,39,40,65,78,114,125,130,141,177,190,215,216,228,235  | 16 |
| 1.750  | 7,21,29,31,35,43,49,54,58,59,71,87,92,108,113,115,140,142,147,163,168,184,196,197,201,206,212,220,224,226,234,248  | 32 |
| 1.714  | 53,83,172,202  | 4  |
| 1.700  | 6,96,159,249   | 4  |
| 1.667  | 3,5,9,11,14,17,19,28,36,38,42,47,50,55,56,63,70,76,81,84,95,98,100,111,112,117,119,126,129,136,138,143,144,155,157,160,171,174,179,185,192,199,200,205,208,213,217,219,227,236,241,238,244,246,250,252 | 56 |
| 1.6    | 13,79,176,242  | 4  |
| 1.5    | 1,4,10,12,24,32,34,46,48,66,68,80,116,127,128,139,175,187,189,207,209,221,223,231,243,245,251,254  | 28 |
| 1.333  | 2,8,16,64,191,239,247,253  | 8  |
| 1      | 0,255  | 2  |

**Tabla 3.1.** Clasificación de los AC elementales mediante la ramificación promedio  $\rho$  de los vértices en los grafos mínimos deterministas que presentan su primera imagen  $f(\Sigma)$ .

3.2. Por la propiedad de inclusión de las imágenes sucesivas ec.(2.5), la entropía de  $f(\Sigma)$  es una cota superior para la entropía topológica de los conjuntos límites  $\Lambda_f$ . Los conjuntos límites  $\Lambda_f$  ec.(2.7) nunca son vacíos por el hecho de que  $\Sigma$  es compacto y completo y los autómatas celulares son funciones continuas.

De las tablas 3.1 y 3.2 podemos ver que, para la primera y las tres últimas filas de cada una de las tablas, los conjuntos de reglas coinciden respectivamente, así  $\rho$  y  $s$  nos dan una clasificación similar para estos conjuntos.

Procedemos ahora a determinar una cota inferior para la entropía de los conjuntos límites  $\Lambda_f$ . La obtenemos buscando conjuntos invariantes ante la evolución. Usamos el método que construimos en la sección 2.4 para encontrar los conjuntos invariantes de configuraciones viajeras, ec.(2.13).

Para los AC elementales solo tenemos tres posibilidades para la velocidad de las configuraciones viajeras  $\nu = \pm 1, 0$ . Con el método descrito en la sección 2.4 hemos encontrado el subtraductor del traductor  $T_f$  que presentan a los conjuntos de configuraciones viajeras  $S_{(\nu, f)}$ , para los autómatas elementales. De la misma manera que como hicimos para la primera imagen de los autómatas, calculamos la entropía topológica.

Para algunos autómatas tenemos conjuntos de configuraciones viajeras de velocidades distintas, con entropías distintas de cero, como lo es la regla 172 con valores para  $\nu = 1, 0$  y entropía topológica  $s = 0.55162$  en ambos casos. Puede verse que esto no significa que los conjuntos con diferentes velocidades sean disjuntos. El método que usamos nos permite identificar también los conjuntos de puntos fijos del autómata  $f$ , es decir aquellas configuraciones para las que se cumple la ecuación (2.13) con  $\nu = 0$ .

En la tabla 3.3 se presentan los autómatas que tienen conjuntos de configuraciones viajeras con entropía distinta de cero para el caso elemental. Hay en la bibliografía[16] resultados de cotas inferiores para la entropía topológica de algunos autómatas, que han sido calculadas identificando conjuntos de configuraciones periódicas. Estos conjuntos están incluidos en los arpegios que definimos

| ENTROPIA | REGLAS  | #  |
|----------|---|----|
| 1        | 15,30,45,51,60,75,85,86,89,90,101,102,105,106,120,135,149,150,153,154,165,166,169,170,180,195,204,210,225,240   | 30 |
| 0.923856 | 62,110,118,124,131,137,145,193  | 8  |
| 0.919606 | 25,61,67,103,152,188,194,230  | 8  |
| 0.918681 | 57,99,156,198   | 4  |
| 0.907162 | 41,107,148,214  | 4  |
| 0.902106 | 26,88,167,229   | 4  |
| 0.900537 | 7,21,31,35,49,54,58,59,78,87,92,108,114,115,140,141,147,163,168,177,196,197,201,206,220,224,234,248   | 28 |
| 0.896085 | 37,91,164,218   | 4  |
| 0.887294 | 97,121,134,158  | 4  |
| 0.882193 | 22,104,151,233  | 4  |
| 0.879146 | 14,27,28,29,38,39,42,43,44,50,52,53,56,70,71,76,83,84,98,100,112,113,142,143,155,157,171,172,179,184,185,199,202,203,205,211,212,213,216,217,226,227,228,241, | 44 |
| 0.873363 | 73,109,146,182  | 4  |
| 0.870449 | 74,82,173,181   | 4  |
| 0.857205 | 94,122,133,161  | 4  |
| 0.8356   | 13,23,33,69,77,79,93,123,132,162,176,178,186,222,232,242,   | 16 |
| 0.825647 | 6,20,40,96,159,215,235,249  | 8  |
| 0.818958 | 65,125,130,190  | 4  |
| 0.81137  | 3,5,9,11,17,18,19,36,47,55,63,72,81,95,111,117,119,126,129,136,138,144,160,174,183,192,200,208,219,236,237,238,244,246,250,252,                               | 36 |
| 0.694242 | 1,4,10,12,24,32,34,46,48,66,68,80,116,127,128,139,175,187,189,207,209,221,223,231,243,245,251,254   | 28 |
| 0.551463 | 2,8,16,64,191,239,247,253   | 8  |
| 0        | 0,255   | 2  |

**Tabla 3.2.** Clasificación de los AC elementales mediante el valor de la entropía topológica obtenida de la matriz de adyacencia del grafo mínimo determinista que presenta a su imagen  $f(\Sigma)$ . La columna a la derecha es el número total de reglas con la entropía dada.

| ENTROPIA | REGLAS  | #  |
|----------|---|----|
| 1        | 170, 204, 240   | 3  |
| 0.879149 | 42,76,112,171,205,241   | 6  |
| 0.811372 | 138,208,236   | 3  |
| 0.694238 | 4,10,12,34,43,48,56*,68,77,80,98*,106,108,113,120,132,140,142,162,168,169,175,176,184*,185*,186,187,196,201,206,207,212,220,221,222,223,224,225,226*,227*,232,234,242,243,245,248 | 46 |
| 0.554163 | 2,23,24,36,44,46,49,66,72,74,88,100,116,130,139,144,152,164,172*,173,174,188,189,190,191,194,200,202*,203,209,216*,217,218,219,228*,229,230,231,237,244,246,247                   | 42 |
| 0.464961 | 14,84,104   | 3  |
| 0.405687 | 5,13,35,40,41,57*,58,59,69,78,79,92,93,94,95,96,97,99*,107,114,115,121,133,141,163,177,197,235,249  | 29 |
| 0.287756 | 11,47,73,81,109,117   | 6  |

**Tabla 3.3.** AC's elementales con conjuntos invariantes de configuraciones viajeras con entropía topológica positiva. Las reglas marcadas con \* tienen patrones viajeros de distintas velocidades, con entropía distinta de cero

en las ecs.(2.17) y (2.18), para un valor de  $\nu = 0$ .

## 3.2 Entropía de conjuntos límites

Los conjuntos invariantes de configuraciones viajeras, los cuales pueden bien tener una presencia compleja dentro del conjunto límite  $\Lambda_f$ , nos dan una aproximación desde adentro al conjunto límite. La primera imagen  $f(\Sigma)$  nos da una aproximación desde afuera a  $\Lambda_f$ . Podemos dar la entropía topológica de los conjuntos límites  $\Lambda_f$  de los autómatas para los cuales coinciden las cotas superiores e inferiores. Los resultados se presentan en la tabla 3.4.

En la tabla 3.4 la primera columna es el valor de la entropía topológica para el conjunto límite del autómata definido por las reglas de la segunda columna. La columna final es el total de reglas con el mismo valor para la entropía topológica de su conjunto límite.

## 3.3 Simetrías de reglas

Como primera etapa en la caracterización de reglas a través de sus simetrías, damos la tabla de multiplicación del grupo de todas las posibles transformaciones internas, para las reglas elementales  $k = 2, l = 3$ . El grupo de permutaciones en dos símbolos  $S_2$  es isomorfo a  $Z_2$ , los elementos de  $S_2 = \{I, \sim\}$  son la identidad "I" y el intercambio de símbolos " $\sim$ ". El dominio de la función local para el caso elemental son bloques de tres celdas. Las transformaciones que podemos aplicar a bloques de este tipo pertenecen a  $S_2^3$  y son ocho. Las denotaremos por números tachados, signiando el espíritu de la base en binario. Por ejemplo, la transformación  $(\sim, I, \sim)$ , la denotaremos como  $\bar{7}$ .

El orden del grupo de transformaciones internas  $S_2^3 \times S_2$  de las reglas es 16. Si, adicionalmente, consideramos la transformación de reflexión  $r$  en los bloques,

| Entropía de $\Lambda$ | REGLAS  | #  |
|-----------------------|---|----|
| 1                     | 15,30,45,51,60,75,85,86,89,90,101,102,105,106,120,135,149,150,153,154,165,166,169,170,180,195,204,210,225,240 | 30 |
| 0.879146              | 42, 76, 112, 171, 205, 241  | 6  |
| 0.81137               | 138,208,236   | 3  |
| 0.694242              | 4,10,12,34,48,68,80,175,187,207,221   | 11 |
| 0.551463              | 2,191,247   | 3  |
| 0                     | 0,255   | 2  |
| 0.551463-0.694242     | 24,46,66,116,139,189,209,231  | 8  |

**Tabla 3.4.** Entropía topológica para el conjunto límite  $\Lambda_f$  de los AC elementales en la columna central. La columna final es el número total de reglas que llevan a la entropía dada. En el último renglón de la tabla se da el rango de valores en que se puede encontrar la entropía topológica del conjunto límite para las reglas de su derecha.

i.e.,

$$c = (c_{l-1}, \dots, c_{r+1}, c_r, c_{r-1}, \dots, c_0) \rightarrow r \cdot c = (c_0, \dots, c_{r-1}, c_r, c_{r+1}, \dots, c_{l-1})$$

El grupo se amplía a 32 transformaciones para el caso elemental. Como hemos señalado la reflexión  $r$  es de un carácter muy distinto a las transformaciones internas,  $r$  cambia los sitios de las celdas y las transformaciones internas cambian los valores de las celdas sin cambiar sitios. La reflexión solo tiene sentido para bloque de dos o mas celdas, de aquí que su acción se limita a los bloque y no a las celdas, esto es otra gran diferencia con las transformaciones internas. La tabla de multiplicación para el grupo completo  $(\langle r \rangle \cdot S_2^3) \times S_2$  se muestra en la tabla 3.5, así como todos sus subgrupos. En la tabla 3.5 hemos omitido la segunda componente de los elementos del grupo, es decir, para la transformación  $g = (\mu, \alpha)$  solo nos quedamos con  $\mu$ , ya que en el caso elemental la tabla de multiplicación de  $S_2$  es muy simple. Una tabla completa se compondría de cuatro repeticiones de la tabla 3.5 formando una tabla cuadrada. La segunda componente de las transformación en cada una de estas tablas sería

$$\begin{array}{cc} \text{Tabla 3.5 } / & \text{Tabla 3.5 } \sim \\ \text{Tabla 3.5 } \sim & \text{Tabla 3.5 } / \end{array}$$

El grupo de transformaciones internas es conmutativo, más al agregar la reflexión  $r$ , el grupo resultante ya no es conmutativo, aunque posee varios subgrupos conmutativos. La mayoría de los elementos del grupo son idempotentes. Solo tenemos dos subgrupos cíclicos de orden 4 que están representados por los nombres XII y XIII de la tabla 3.5. En los demás subgrupo de orden 4 sus elementos son idempotentes. De los subgrupos de orden 8 el que tiene menos generadores es C con dos generadores.

Aplicamos el grupo  $G$  de 32 elementos a cada regla para obtener su órbita. Las órbitas son conjuntos disjuntos del espacio de reglas. De esta forma lo que



**TABLA DE MULTIPLICACION DEL GRUPO G**

|    | 0  | 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | R  | R1 | R2 | R3 | R4 | R5 | R6 | R7 |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 0  | 0  | 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | R  | R1 | R2 | R3 | R4 | R5 | R6 | R7 |
| 1  | 1  | 0  | 3  | 2  | 5  | 4  | 7  | 6  | R4 | R5 | R6 | R7 | R  | R1 | R2 | R3 |
| 2  | 2  | 3  | 0  | 1  | 6  | 7  | 4  | 5  | R2 | R3 | R  | R1 | R6 | R7 | R4 | R5 |
| 3  | 3  | 2  | 1  | 0  | 7  | 6  | 5  | 4  | R6 | R7 | R4 | R5 | R2 | R3 | R  | R1 |
| 4  | 4  | 5  | 6  | 7  | 0  | 1  | 2  | 3  | R1 | R  | R3 | R2 | R5 | R4 | R7 | R6 |
| 5  | 5  | 4  | 7  | 6  | 1  | 0  | 3  | 2  | R5 | R4 | R7 | R6 | R1 | R  | R3 | R2 |
| 6  | 6  | 7  | 4  | 5  | 2  | 3  | 0  | 1  | R3 | R2 | R1 | R  | R7 | R6 | R5 | R4 |
| 7  | 7  | 6  | 5  | 4  | 3  | 2  | 1  | 0  | R7 | R6 | R5 | R4 | R3 | R2 | R1 | R  |
| R  | R  | R1 | R2 | R3 | R4 | R5 | R6 | R7 | 0  | 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  |
| R1 | R1 | R  | R3 | R2 | R5 | R4 | R7 | R6 | 4  | 5  | 6  | 7  | 0  | 1  | 2  | 3  |
| R2 | R2 | R3 | R  | R1 | R6 | R7 | R4 | R5 | 2  | 3  | 0  | 1  | 6  | 7  | 4  | 5  |
| R3 | R3 | R2 | R1 | R  | R7 | R6 | R5 | R4 | 6  | 7  | 4  | 5  | 2  | 3  | 0  | 1  |
| R4 | R4 | R5 | R6 | R7 | R  | R1 | R2 | R3 | 1  | 0  | 3  | 2  | 5  | 4  | 7  | 6  |
| R5 | R5 | R4 | R7 | R6 | R1 | R  | R3 | R2 | 5  | 4  | 7  | 6  | 1  | 0  | 3  | 2  |
| R6 | R6 | R7 | R4 | R5 | R2 | R3 | R  | R1 | 3  | 2  | 1  | 0  | 7  | 6  | 5  | 4  |
| R7 | R7 | R6 | R5 | R4 | R3 | R2 | R1 | R  | 7  | 6  | 5  | 4  | 3  | 2  | 1  | 0  |

**SUBGRUPOS DE ORDEN 8**

$T = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

$A = \{0, 1, 4, 5, R2, R3, R6, R7\}$      $B = \{0, 1, 4, 5, R, R1, R4, R5\}$      $C = \{0, 2, 5, 7, R1, R3, R4, R6\}$

$D = \{0, 2, 5, 7, R, R2, R5, R7\}$      $E = \{0, 3, 5, 6, R, R3, R5, R6\}$      $F = \{0, 3, 5, 6, R1, R2, R4, R7\}$

**SUBGRUPOS DE ORDEN 4**

$I = \{0, 1, 2, 3\}$

$II = \{0, 1, 4, 5\}$

$III = \{0, 1, 6, 7\}$

$IV = \{0, 2, 5, 7\}$

$V = \{0, 2, 4, 6\}$

$VI = \{0, 3, 4, 7\}$

$VII = \{0, 3, 5, 6\}$

$VIII = \{0, 2, R, R2\}$

$IX = \{0, 2, R5, R7\}$

$X = \{0, 5, R, R5\}$

$XI = \{0, 5, R2, R7\}$

$XII = \{0, 5, R1, R4\}$

$XIII = \{0, 5, R3, R6\}$

$XIV = \{0, 7, R, R7\}$

$XV = \{0, 7, R2, R5\}$

**SUBGRUPOS DE ORDEN 2**

$\{0, 1\}$     $\{0, 2\}$     $\{0, 3\}$     $\{0, 4\}$     $\{0, 5\}$     $\{0, 6\}$     $\{0, 7\}$     $\{0, R\}$     $\{0, R2\}$     $\{0, R5\}$     $\{0, R7\}$

**Tabla 3.5.** El grupo completo de transformaciones, su tabla de multiplicación y todos sus subgrupos. Los números corresponden a las transformaciones de los bloques de tamaño 3.

tenemos son clases de equivalencia en donde dos reglas,  $f'_l$  y  $f''_l$  son equivalentes si hay un elemento  $g \in G$  tal que  $g f'_l = f''_l$ .

Para la regla  $f_l$ , el orden de la órbita  $|G \cdot f_l|$  nos da un indicador de la asimetría de la regla respecto al grupo  $G$ . El número de órbitas es el número de reglas independientes que podemos considerar. Para los AC's elementales las simetrías consideradas en la literatura son, la reflexión la conjugación y la composición de reflexión con conjugación, esto es equivalente a considerar el grupo formado por las transformaciones  $\{(\emptyset, =), (\bar{\cdot}, \sim), (r, =), (r \bar{\cdot}, \sim)\}$  y el cual nos genera 88 órbitas.

Al aplicar el grupo  $G$  a los autómatas elementales hemos encontrado 22 órbitas distintas tabla 3.6, es decir 22 clases de equivalencia, como era de esperarse por la ec.2.21, el orden de una clase está en relación inversa con el número de simetrías que poseen las reglas de esa clase. Las clases se presentan en la tabla 3.6. De esta tabla encontramos reglas con muchas simetrías como la 0, 51,90,105 y cuyas órbitas son de tamaño 2 y reglas sin simetrías no triviales como la 7 y 25 que generan órbitas de tamaño 32. Las clases identificadas por cada una de las órbitas nos proporciona una clasificación, en la que el tamaño de la orbita lo tomamos como medida de asimetría de las reglas que pertenecen a esa orbita. Presentamos un compendio de las reglas y las simetrías en el Apendice B.

Con dos parametros intrínsecos como la ramificación y las simetrías generamos un refinamiento de nuestra clasificación tabla 3.7

Al extender las simetrías a los autómatas como lo mostramos en la última sección del capítulo anterior, el algoritmo (2) nos permite encontrar el traductor que presenta al conjunto de simetrías extendidas a secuencias bi-infinitas. Al hacer esto encontramos que el conjunto de autómatas con subgrafos no triviales para sus simetrías, es el conjunto de autómatas lineales, es decir autómatas definidos por funciones a bloques que se pueden representar usando aritmética modulo  $k$  como  $f_l(t) = \sum_{i=0}^{l-1} c_i c_t + a$ . Para el caso elemental esto hace un total de 16 autómatas.

| tamaño 2    | tamaño 4             | tamaño 8                               |
|-------------|----------------------|--|
| {0, 255},   | {15, 85, 170, 240},  | {5, 10, 80, 95, 160, 175, 245, 250},   |
| {51, 204},  | {60, 102, 153, 195}, | {18, 33, 72, 123, 132, 183, 222, 237}, |
| {90, 165},  |                      | {23, 43, 77, 113, 142, 178, 212, 232}, |
| {105, 150}, |                      | {24, 36, 66, 126, 129, 189, 219, 231}, |
|             |                      | {29, 46, 71, 116, 139, 184, 209, 226}, |
|             |                      | {54, 57, 99, 108, 147, 156, 198, 201}, |

tamaño 16

- {1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 127, 128, 191, 223, 239, 247, 251, 253, 254},
- {3, 12, 17, 34, 48, 63, 68, 119, 136, 187, 192, 207, 221, 238, 243, 252},
- {6, 9, 20, 40, 65, 96, 111, 125, 130, 144, 159, 190, 215, 235, 246, 249},
- {19, 35, 49, 50, 55, 59, 76, 115, 140, 179, 196, 200, 205, 206, 220, 236},
- {22, 41, 73, 97, 104, 107, 109, 121, 134, 146, 148, 151, 158, 182, 214, 233},
- {26, 37, 74, 82, 88, 91, 94, 122, 133, 161, 164, 167, 173, 181, 218, 229},
- {27, 39, 53, 58, 78, 83, 92, 114, 141, 163, 172, 177, 197, 202, 216, 228},
- {30, 45, 75, 86, 89, 101, 106, 120, 135, 149, 154, 166, 169, 180, 210, 225},

tamaño 32

- {7, 11, 13, 14, 21, 31, 42, 47, 69, 79, 81, 84, 87, 93, 112, 117, 138, 143, 162, 168, 171, 174, 176, 186, 208, 213, 224, 234, 241, 242, 244, 248},
- {25, 28, 38, 44, 52, 56, 61, 62, 67, 70, 98, 100, 103, 110, 118, 124, 131, 137, 145, 152, 155, 157, 185, 188, 193, 194, 199, 203, 211, 217, 227, 230}

**Tabla 3.6.** Orbitas generadas por la acción del grupo  $G$  sobre las reglas de automatas



## Capítulo 4

### Discusión y conclusiones

En lo que sigue haremos una discusión de los resultados. En la figura 4.1 se presenta la ramificación promedio  $\rho$  graficada contra la entropía topológica  $s$  para la primera imagen de los AC's elementales. Ahí puede verse, al trazar las líneas horizontales que muestra la figura, que hay puntos para los que teniendo un mismo valor de la entropía topológica tienen distinto valor para la ramificación promedio. Sucede en forma similar si trazamos líneas verticales, solo que en el eje de  $\rho$  hay mejor definición. Aquellos puntos en los que para un valor de  $\rho$  tenemos solo un valor de  $s$  y viceversa, dan una clasificación similar para la imagen de los AC's y la jerarquía de estos conjuntos es igual si consideramos  $\rho$  o si tomamos  $s$ . Para un valor de  $\rho \approx 1.9$  y de  $s$  entre  $0.85 - 0.90$  se tiene un grupo aglutinado de 32 autómatas. Es importante señalar que la ramificación promedio es una cantidad muchísimo más simple de calcular que la entropía topológica con resultados en la clasificación semejantes como puede verse también en las tablas 3.1 y 3.2.

La figura 4.2 muestra la entropía topológica contra la entropía métrica, esta última calculada por Grassberger [31]. En los resultados de Grassberger se estima el comportamiento asintótico de la entropía métrica ec.2.11 para los autómatas elementales. Los valores de la entropía métrica no son mayores que los de la

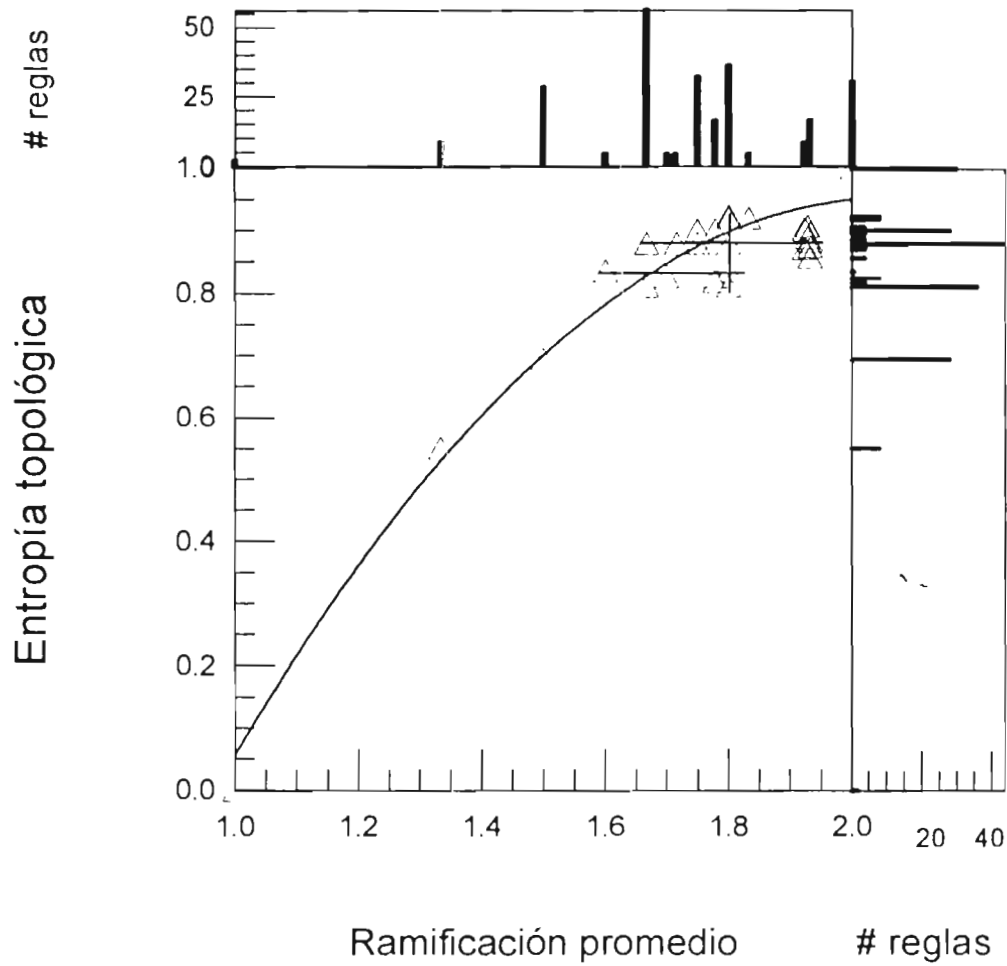


Figura 4.1: Se grafica la ramificación promedio contra la entropía topológica de la primera imagen para todos los Ac's elementales. Cada símbolo representa a un conjunto de autómatas. La grafica en la parte superior, muestra el número de reglas con la ramificación dada y la grafica de la derecha es el número de reglas con la entropía topológica dada.

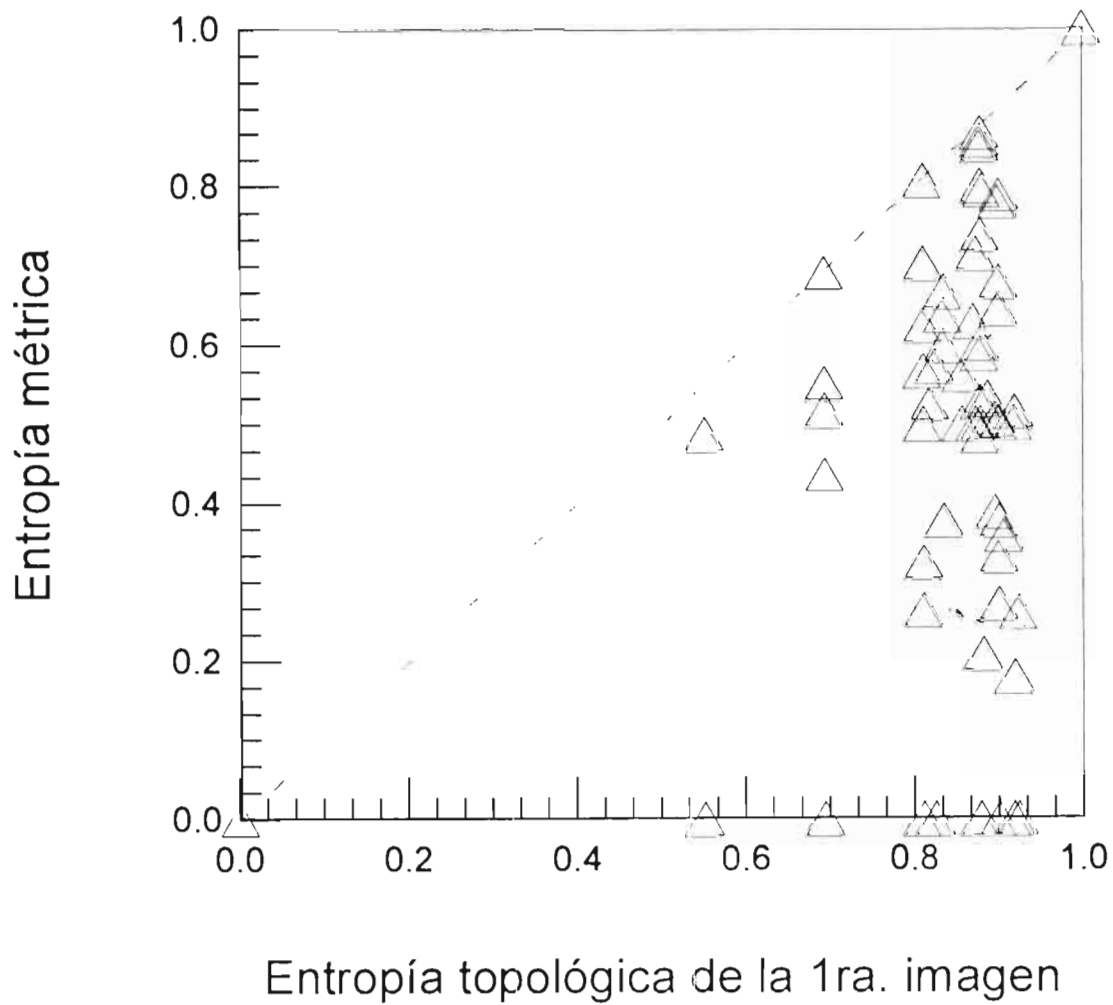


Figura 4.2: Se grafica la entropía topológica contra la entropía métrica calculada por Grassberger [26] para todos los Ac's elementales

entropía topológica, por ello todos los puntos se ubican por debajo de la diagonal de la gráfica. Hay reglas con números de regla como la 10, 12, 29, 138 cuyos valores difieren poco de los dados por Grassberger. Esto indica que se está próximo al valor límite para la entropía topológica. Wolfram ref.[16] obtiene valores para la entropía topológica solo de las reglas elementales que llama “legales” y que son 32.

Las estimaciones anteriores para los conjuntos límites son hechas desde afuera es decir partimos del espacio completo de configuraciones y las cantidades son calculadas una vez que aplicamos los autómatas a este espacio. Los subconjuntos invariantes como lo son las configuraciones viajeras nos dan una aproximación desde adentro al conjunto límite. La figura 4.3 grafica la ramificación promedio contra la entropía topológica de las configuraciones viajeras con velocidad 0. Podemos ver que conforme nuestro parámetro de estructura como lo es la ramificación, va aumentando la aparición de conjuntos de autómatas con subconjuntos importantes de configuraciones viajeras también aumenta. Con los ejes en la misma escala los puntos sobre la diagonal representan a autómatas cuya aproximación a la entropía topológica del conjunto límite, desde adentro coincide con la aproximación desde afuera, es decir, el valor correspondiente, es la entropía topológica para el conjunto límite. En aquellos autómatas que se ubican cerca de la diagonal, los conjuntos de configuraciones viajeras son una parte muy importante del conjunto límite. También presentamos la figura 4.4 considerando ahora las velocidades 1 y -1 para las configuraciones viajeras.

La relevancia de los conjuntos de configuraciones viajeras o de bloques que pertenecen a estas configuraciones depende de la frecuencia de aparición de estos, bajo la dinámica del autómata[35]. Para ello vale notar que para los AC<sup>s</sup> elementales, de los 256 solo 8 no presentan configuraciones viajeras y más del 53 por ciento de todos tiene conjuntos de configuraciones viajeras con entropía topológica distinta de cero.

Podemos filtrar de la dinámica a los dominios viajeros (ver sección 2.4) y



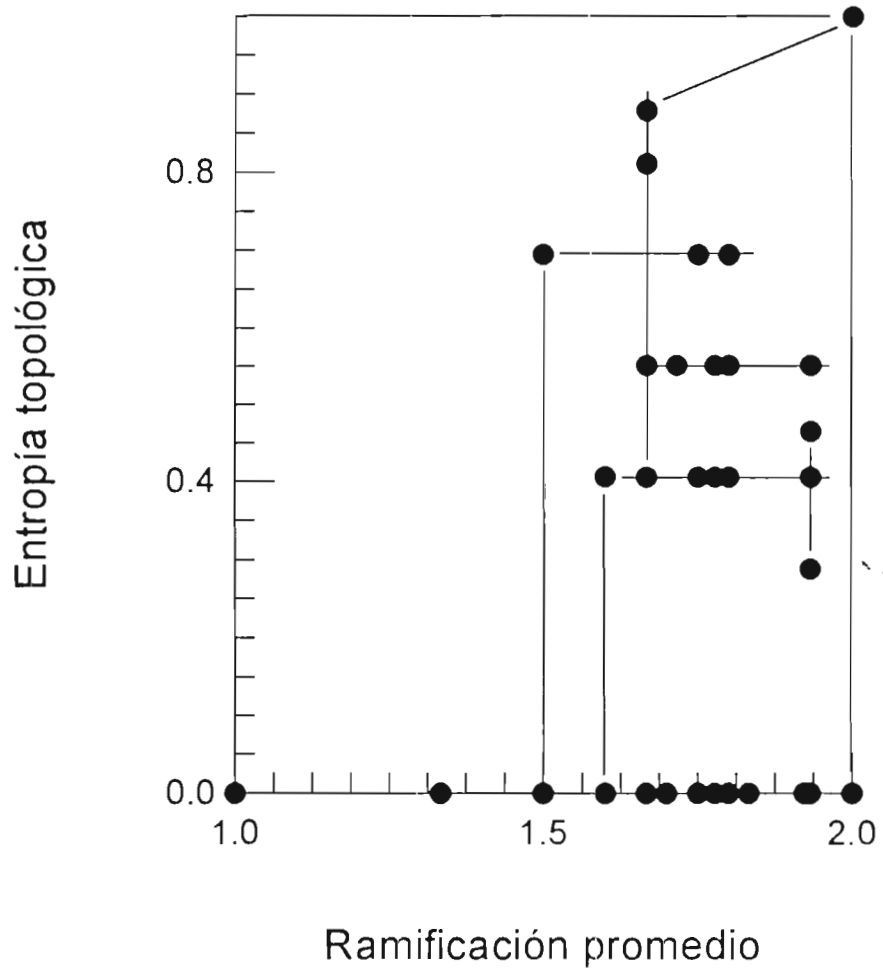


Figura 4.3: La ramificación promedio para los Ac's elementales graficada contra la entropía topológica de los conjuntos de configuraciones viajeras con  $\nu = 0$ .

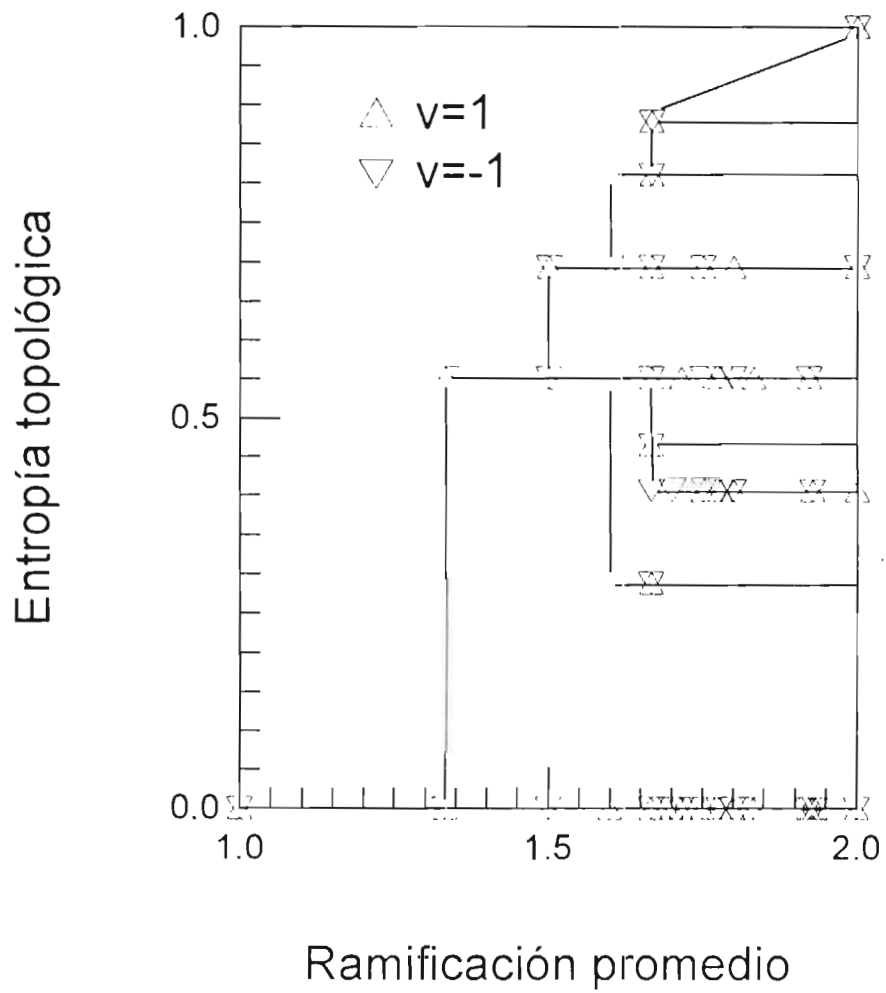


Figura 4.4: La ramificación promedio para los Ac's elementales graficada contra la entropía topológica de los conjuntos de configuraciones viajeras con  $\nu = 1, -1$ .

quedarnos con la parte de la dinámica que no son dominios viajeros. Esto nos da ya una simplificación para entender el comportamiento de los autómatas.

Subconjuntos invariantes son muchas veces encontrados a través de el examen minucioso de los diagramas espacio- temporales para los autómatas, en los que los patrones presumiblemente invariantes, son puestos luego a prueba para mostrar su invarianza temporal [36]. Con el método que presentamos sección 2.4 los subconjuntos invariantes son encontrados de manera efectiva y esto es relevante.

Como ejemplo de uso del procedimiento de la sección 2.4, para encontrar subconjuntos invariantes en autómatas de rangos mayores y para contrastar nuestro método con el trabajo de Crutchfield [36], usamos la regla de autómatas de rango 2 ( $l = 5$ ), con número de regla 2614700074. Obtenemos los conjuntos de configuraciones viajeras que tiene entropía distinta de cero. Estos conjuntos tienen velocidades  $\nu = -2$  y  $\nu = 0$  y entropía topológica de  $s = 0.405685$  y  $\bar{s} = 0.182342$  respectivamente. Los lenguajes asociados corresponden a las expresiones regulares  $(11(001^*)^*(110^*)^*)^*$  y  $(10100(c + 0))^*$ . Crutchfield identifica dominios, directamente sobre los diagramas espacio- temporales generados en la computadora usando una técnica de reconstrucción de máquina. Esta técnica actúa como un sustituto computarizado de la identificación visual de los dominios. Los subconjuntos invariantes que reporta Crutchfield, son otros diferentes a los conjuntos de configuraciones viajeras que encontramos nosotros.

En lo que se refiere a las simetrías de los AC's hemos visto cómo al generar un grupo completo de transformaciones para las reglas locales, esto nos da una simplificación para estudiar el espacio de reglas. El orden de la órbita que se genera al aplicar el grupo completo de simetrías a una reglas, lo interpretamos como la asimetría de la regla, ya que, reglas con muchas simetrías generan órbitas pequeñas.

Podemos dar una caracterización para las reglas de autómatas si usamos los parámetros intrínsecos que hemos encontrado como la ramificación promedio y el grupo de simetrías de una regla. Al hacer esto generamos un mapa con clases de

conjuntos de reglas fig.4.5.

Al hacer una comparación con reglas que se consideran con comportamientos específicos como reglas nulas, periódicas, caóticas y complejas ref.[38], en nuestro mapa podemos ver fig.4.6 que las reglas simples se ubican en zonas de alta simetría y baja ramificación y reglas complejas están en zonas de baja simetría y alta ramificación.

Al extender las simetrías de las reglas a los autómatas como ya lo hemos señalado en la última sección del capítulo anterior obtenemos que para las reglas lineales tenemos un traductor que presenta al grupo de simetrías de la regla. Este traductor es isomorfo en el caso elemental al presentado para los autómatas estos resultados se presentan en la figura 4.7

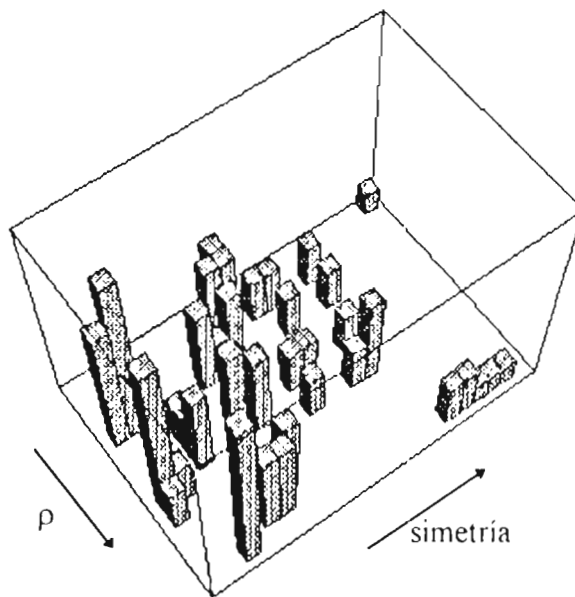


Figura 4.5: Clasificación de los AC elementales. En el plano base representamos los conjuntos de reglas en orden creciente de su ramificación promedio y en orden creciente de la cardinalidad de su grupo de simetrías. La altura en esta figura es el número de reglas que se ubican en el punto dado

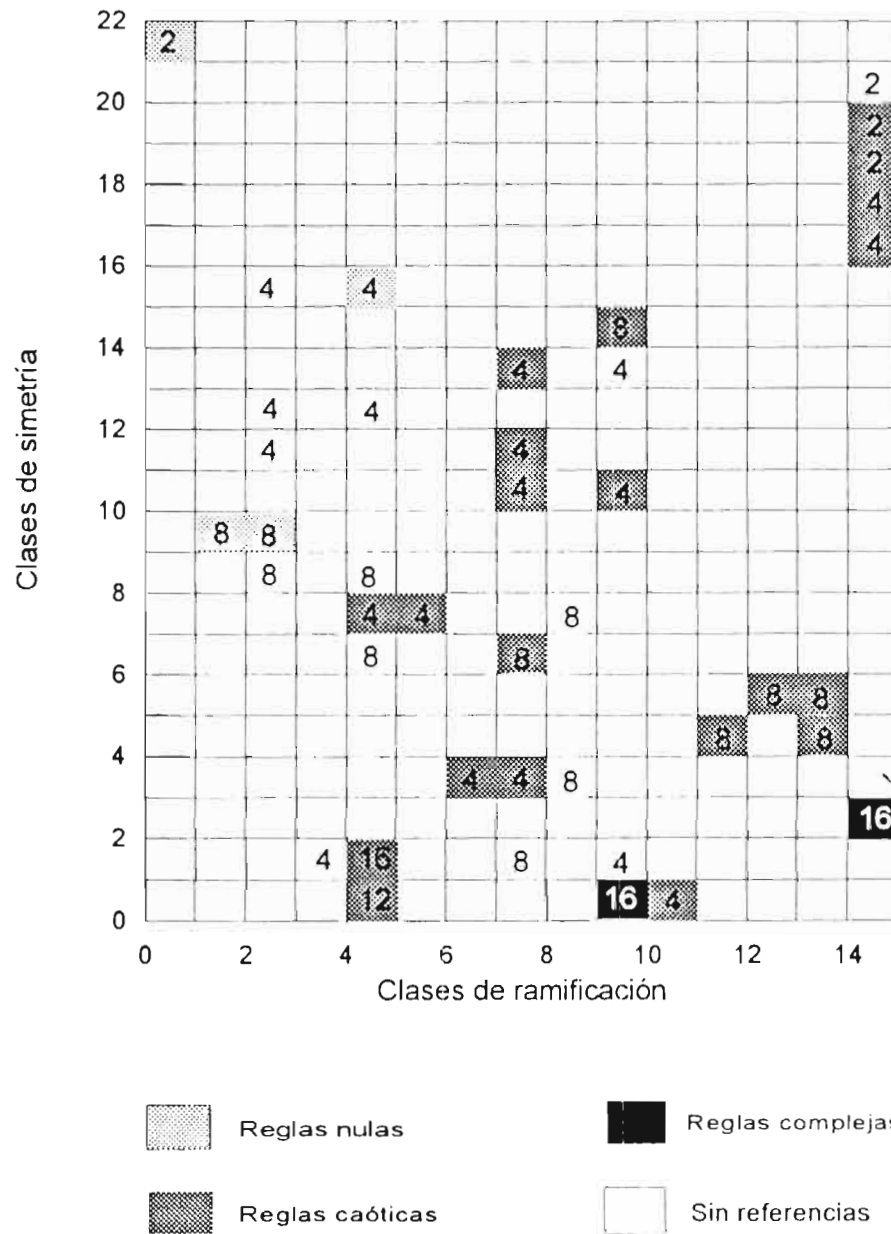
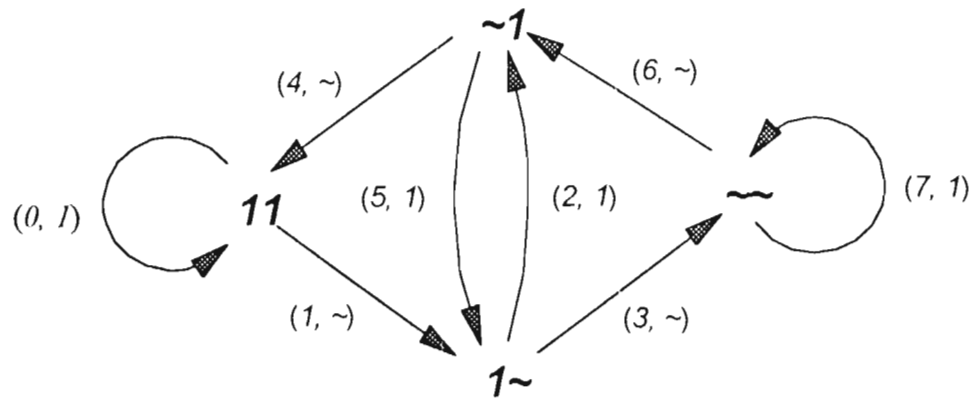


Figura 4.6: Mapa, en el cual en el eje horizontal se jerarquiza las 15 clases obtenidas para la ramificación promedio de los ACE, en orden creciente y en el eje vertical las clases obtenidas de acuerdo al orden del grupo de simetrías de los AC. El número en cada cuadro es la cardinalidad del conjunto. Automatas con comportamientos conocidos aparecen en los conjuntos indicados.



(a)

| Reglas  | Grupo de simetrías internas elementales |              |              |              |              |              |              |              |
|---------|---|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| 0,250   | (0,1)                                   | (1,1)        | (2,1)        | (3,1)        | (4,1)        | (5,1)        | (6,1)        | (7,1)        |
| 51,204  | (0,1)                                   | (1,1)        | (2, $\sim$ ) | (3, $\sim$ ) | (4,1)        | (5,1)        | (6, $\sim$ ) | (7, $\sim$ ) |
| 90,165  | (0,1)                                   | (1, $\sim$ ) | (2,1)        | (3, $\sim$ ) | (4, $\sim$ ) | (5,1)        | (6, $\sim$ ) | (7,1)        |
| 105,150 | (0,1)                                   | (1, $\sim$ ) | (2, $\sim$ ) | (3,1)        | (4, $\sim$ ) | (5,1)        | (6,1)        | (7, $\sim$ ) |
| 15,204  | (0,1)                                   | (1,1)        | (2,1)        | (3,1)        | (4, $\sim$ ) | (5, $\sim$ ) | (6, $\sim$ ) | (7, $\sim$ ) |
| 60,195  | (0,1)                                   | (1,1)        | (2, $\sim$ ) | (3, $\sim$ ) | (4, $\sim$ ) | (5, $\sim$ ) | (6,1)        | (7,1)        |
| 85,170  | (0,1)                                   | (1, $\sim$ ) | (2,1)        | (3, $\sim$ ) | (4,1)        | (5, $\sim$ ) | (6,1)        | (7, $\sim$ ) |
| 102,153 | (0,1)                                   | (1, $\sim$ ) | (2, $\sim$ ) | (3,1)        | (4,1)        | (5, $\sim$ ) | (6, $\sim$ ) | (7,1)        |

(b)

Figura 4.7: (a) El traductor presentando al grupo de simetrías de la regla 90. (b) AC elementales que tienen grupos de simetría de orden infinito.

# Apéndice A

## Traductores mínimos deterministas

### Resumen

*Presentamos el procedimiento para reducir traductores a su forma mínima determinista y que presentan al mismo conjunto.*

### A.1 Reducción de traductores.

Para un conjunto de salida específico existen muchos traductores con los que podemos representar este conjunto. Por ejemplo, el conjunto de todas las secuencias de ceros y unos puede representarse con un vértice y dos flechas que salen y entran al mismo vértice, una flecha etiquetada con cero y la otra con uno. También puede representarse con un número finito arbitrario de vértices en los que salen siempre dos flechas de cada uno, una etiquetada con cero y la otra con uno y en los que siempre llega al menos una flecha. Estamos interesados en traductores con el menor número de vértices. También podemos tener traductores en los que uno o varios vértices tengan flechas de salida con la misma etiqueta



esta ambigüedad entre las flechas y sus etiquetas puede corregirse convirtiendo el traductor, a un traductor en el que para las flechas que salen de un vértice, correspondan etiquetas diferentes. Nos proponemos encontrar traductores mínimos (con el menor número de vértices) y sin la ambigüedad señalada.

Un traductor puede en general ser no determinista pero podemos construir uno determinista, entre otros propositos porque en estos, se puede hacer una reducción hacia un traductor mínimo determinista [16] que presente al mismo conjunto de salida. Esto pone una limitante a nuestro traductor final el cual será determinista

Para obtener el traductor determinista definimos un nuevo conjunto de vértices, como el conjunto potencia de  $Q$ ,  $2^Q$  y cada elemento de este conjunto representa un vértice. El nuevo traductor queda ahora determinado por

$$\delta' : 2^Q \times Z_k \longrightarrow 2^Q$$

de esta forma  $\delta'(s, a) = t$ , para  $s, t \in 2^Q$  y  $\delta'(p, a) = \delta(p, a)$  para  $p \in Q$  y  $a \in Z_k$ . También  $\delta'(B, a) = \cup_{b \in B} \delta(b, a)$  con  $B \subset Q$ .

Pongamos el caso de un traductor con cuatro vértices y dos valores posibles para las etiquetas, definido por la tabla:

| <i>vértice</i> | <i>a</i>       | <i>b</i>       |
|----------------|----------------|----------------|
| <i>p</i>       | $\delta(p, a)$ | $\delta(p, b)$ |
| <i>q</i>       | $\delta(q, a)$ | $\delta(q, b)$ |
| <i>r</i>       | $\delta(r, a)$ | $\delta(r, b)$ |
| <i>s</i>       | $\delta(s, a)$ | $\delta(s, b)$ |

El traductor determinista queda dado por la tabla A.1

| <i>vértice</i>   | $a$                             | $b$                             |
|------------------|---------------------------------|---------------------------------|
| $p$              | $\delta(p, a)$                  | $\delta(p, b)$                  |
| $q$              | $\delta(q, a)$                  | $\delta(q, b)$                  |
| $r$              | $\delta(r, a)$                  | $\delta(r, b)$                  |
| $s$              | $\delta(s, a)$                  | $\delta(s, b)$                  |
| $\{p, q\}$       | $\cup_{x=p,q} \delta(x, a)$     | $\cup_{x=p,q} \delta(x, b)$     |
| $\{p, r\}$       | $\cup_{x=p,r} \delta(x, a)$     | $\cup_{x=p,r} \delta(x, b)$     |
| $\{p, s\}$       | $\cup_{x=p,s} \delta(x, a)$     | $\cup_{x=p,s} \delta(x, b)$     |
| $\{q, r\}$       | $\cup_{x=q,r} \delta(x, a)$     | $\cup_{x=q,r} \delta(x, b)$     |
| $\{q, s\}$       | $\cup_{x=q,s} \delta(x, a)$     | $\cup_{x=q,s} \delta(x, b)$     |
| $\{r, s\}$       | $\cup_{x=r,s} \delta(x, a)$     | $\cup_{x=r,s} \delta(x, b)$     |
| $\{p, q, r\}$    | $\cup_{x=p,q,r} \delta(x, a)$   | $\cup_{x=p,q,r} \delta(x, b)$   |
| $\{p, q, s\}$    | $\cup_{x=p,q,s} \delta(x, a)$   | $\cup_{x=p,q,s} \delta(x, b)$   |
| $\{p, r, s\}$    | $\cup_{x=p,r,s} \delta(x, a)$   | $\cup_{x=p,r,s} \delta(x, b)$   |
| $\{q, r, s\}$    | $\cup_{x=q,r,s} \delta(x, a)$   | $\cup_{x=q,r,s} \delta(x, b)$   |
| $\{p, q, r, s\}$ | $\cup_{x=p,q,r,s} \delta(x, a)$ | $\cup_{x=p,q,r,s} \delta(x, b)$ |

Tabla A.1. La función  $\delta'$  representada en forma tabular

Para eliminar vértices que no participan en la formación de secuencias doblemente infinitas, hacemos lo siguiente [15]

**Definición 15** *Un subconjunto  $Q_0$  de vértices de un traductor  $G$  está fuertemente conectado si y solo si para cualesquiera dos vértices  $u, v$  en  $Q_0$  existe una trayectoria de  $u$  a  $v$ . Un componente conectado fuertemente (CCF) es un subconjunto maximal de  $Q_0$  fuertemente conectado.*

Con la tabla A.1 estamos en condiciones de encontrar los CCF y después de esto podemos formar un nuevo grafo dirigido  $D$ , que le llamamos el colapso de  $G$ .  $D$  contiene un vértice para cada CCF de  $G$ , hay una flecha en  $D$  de  $c$  a  $c'$  sii hay

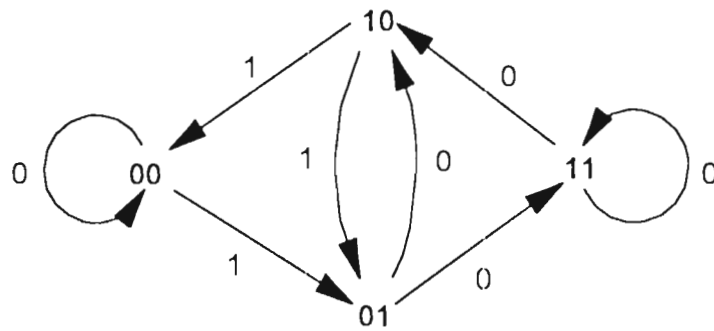


Figura A.1: Traductor para el autómata con número de regla 50

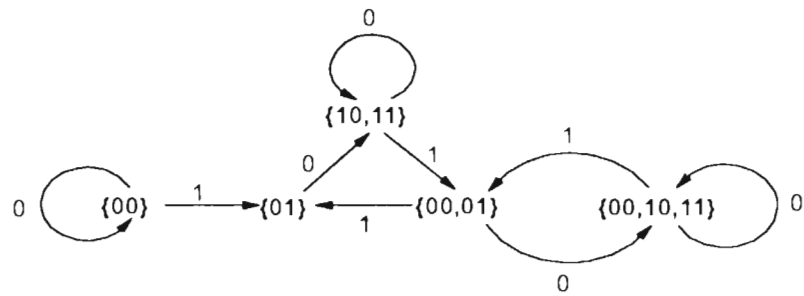
una trayectoria en  $G$  de algún vértice en  $c$  a algún vértice en  $c'$ . De esta forma  $D$  es acíclico y podemos enumerar los vértices en  $D$  con  $\{c_1, c_2, \dots, c_k\}$  de tal forma que si hay una flecha  $(c_i, c_j)$  en  $D$  entonces  $i < j$ . Esto nos sirve para eliminar los vértices que no participan en CCF. Así un vértice no es transitorio si participa en un CCF o en la trayectoria de un CCF a otro. Esto significa que si tenemos que  $\delta'(s, a) = \emptyset$ , para todo  $a \in Z_k$ , este vértice no participa en nuestras secuencias, igualmente si existe  $t \in Q$  tal que para todo vértice y algún  $a \in Z_k$ ,  $\delta'(s, a) \equiv t$  no es cierto, entonces este vértice tampoco participa, esto se repite hasta que se termine con los vértices que no participan en las secuencias doblemente infinitas.

Como ejemplo tomemos el traductor de la figura A.1 (este traductor corresponde al traductor para el autómata con número de regla 50) con  $Q = \{00, 01, 10, 11\}$  Generamos el traductor determinista con la ayuda de la tabla A.1

Con la tabla A.1 formamos un traductor en el cual identificamos los CCF y limpiamos este traductor quitando todos los vértices que no intervienen en configuraciones doblemente infinitas. Esto hace que solo nos quedemos con los vértices marcados con \*. El traductor determinista se muestra en la figura A.2.

| Vértice          | 0              | 1           |
|------------------|----------------|-------------|
| $\{00\}^*$       | $\{00\}$       | $\{01\}$    |
| $\{01\}^*$       | $\{10,11\}$    | $\emptyset$ |
| $\{10\}$         | $\emptyset$    | $\{00,01\}$ |
| $\{11\}$         | $\{10,11\}$    | $\emptyset$ |
| $\{00,01\}^*$    | $\{00,10,11\}$ | $\{01\}$    |
| $\{00,10\}$      | $\{00\}$       | $\{00,01\}$ |
| $\{00,11\}$      | $\{00,10,11\}$ | $\{01\}$    |
| $\{01,10\}$      | $\{10,11\}$    | $\{00,01\}$ |
| $\{01,11\}$      | $\{10,11\}$    | $\emptyset$ |
| $\{10,11\}^*$    | $\{10,11\}$    | $\{00,01\}$ |
| $\{00,01,10\}$   | $\{00,10,11\}$ | $\{00,01\}$ |
| $\{00,01,11\}$   | $\{00,10,11\}$ | $\{01\}$    |
| $\{00,10,11\}^*$ | $\{00,10,11\}$ | $\{00,01\}$ |
| $\{01,10,11\}$   | $\{10,11\}$    | $\{00,01\}$ |
| $00,01,10,11\}$  | $\{00,10,11\}$ | $\{00,01\}$ |

**Tabla A.2.** la función  $\delta'$  en forma tabular, los vertices con \* son los que forman el traductor determinista.



**Figura A.2:** Traductor determinista presentando la imagen del espacio completo de configuraciones para la regla 50

## A.2 Traductor mínimo determinista

Nosotros vamos a tratar con los traductores que representan a las reglas elementales. La forma de llevar a cabo una reducción para los traductores, consiste en establecer, si estamos usando vértices de más para representar al conjunto, de tal forma que usemos el mínimo números de ellos. El procedimiento es como sigue: primero transformamos nuestro traductor, a uno determinista con el procedimiento ya descrito, después de esto establecemos una equivalencia entre vértices para quedarnos con el menor número que nos describa el mismo conjunto. Esta equivalencia la definimos a continuación y que es una adaptación del teorema de Myhill-Nerode para traductores de Fischer ref.[17].

**Definición 16** *Dos vértices  $p$  y  $q$  son equivalentes  $p \equiv q$  si para cada  $a \in \mathcal{L}(Z_k)$   $\delta(p, a) \neq ()$ . si  $\delta(q, a) \neq ()$*

De la misma forma decimos que  $p$  es *distinguible* de  $q$  si existe un  $x \in \mathcal{L}(Z_k)$  tal que  $\delta(p, x) \neq ()$  y  $\delta(q, x) = ()$ .

Generamos un nuevo traductor en el que cada vértice representa una clase de equivalencia. El nuevo traductor representa al mismo conjunto que el traductor inicial ref.[17]. El procedimiento podemos llevarlo a cabo tal y como se ilustra en el siguiente ejemplo, donde hemos considerado el traductor determinista que presenta a la regla 50 figura A.2.

Tomemos los vértices con asterisco de la tabla A.1 por parejas y los renombramos como sigue  $e = \{00\}$ ,  $f = \{01\}$ ,  $g = \{00, 01\}$ ,  $h = \{10, 11\}$  y  $m = \{00, 10, 11\}$ , comencemos con las palabras de tamaño uno y los vértices  $(e, f)$ , con un 0 este par va a  $(e, h)$  con 1 son distinguibles, el par  $(e, g)$  con 0 va a  $(e, m)$  y con 1 va a  $(f, f)$ , de esta forma el par  $(e, g)$  lo colocamos en la lista de  $(e, m)$ , siguiendo con las palabras de tamaño uno para este último par de vértices que equivale a considerar palabras de tamaño dos que comienzan con un 0 para el par  $(e, g)$ , vemos que  $(e, m)$  con un 0 van a  $(e, m)$  y con un 1 a  $(f, g)$ , así el

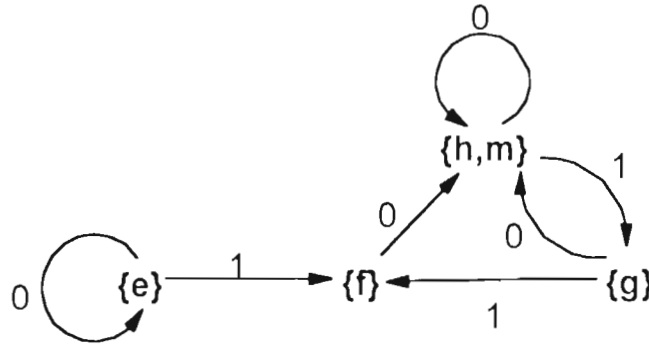


Figura A.3: Traductor mínimo determinista que presenta a la imagen del espacio de configuraciones bajo la regla 50

par  $(e, m)$  lo colocamos en la lista de  $(f, g)$ , ahora  $f$  y  $g$  son distinguibles a través de 1 y por lo tanto también son distinguibles  $e$  y  $m$  así como  $e$  y  $g$ . Todos los vértices son distinguibles con  $f$  porque todos tienen salida con el 1 y  $f$  no. Continuando con las demás parejas

$$\begin{array}{ll}
 (c, h) \xrightarrow{0} (c, h) & (c, h) \xrightarrow{1} (f, g) \\
 (g, m) \xrightarrow{0} (m, m) & (g, m) \xrightarrow{1} (f, g) \\
 (g, h) \xrightarrow{0} (m, h) & (g, h) \xrightarrow{1} (f, g) \\
 (h, m) \xrightarrow{0} (h, m) & (h, m) \xrightarrow{1} (g, g)
 \end{array}$$

de esto concluimos que solo  $h$  y  $m$  son equivalentes y el traductor mínimo que resulta se presenta en la figura A.3

Para otros casos, como el de la figura A.4, una vez que tenemos el traductor mínimo determinista, admite una reducción adicional, la que genera el mismo conjunto de salida y que resulta ser un traductor no determinista. No hay un procedimiento general para esta reducción. Además ya no hay una relación biyectiva entre las trayectorias en el traductor y las configuraciones de símbolos.

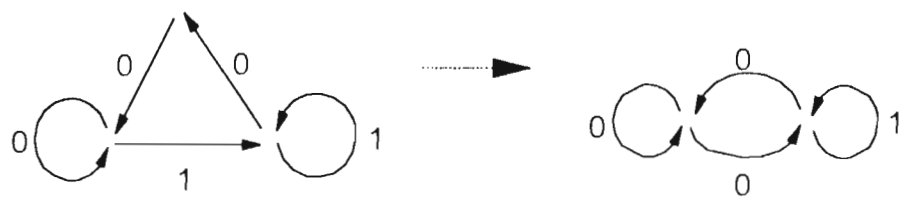


Figura A.1: Reducción de vértices del traductor sin conservar una relación biyectiva entre configuraciones y trayectorias

# Apéndice A

## Compendio de reglas y sus simetrías

En la siguiente tabla presentamos las reglas de autómatas elementales y sus respectivas simetrías. En la tabla aparece marcado con una X cuando las reglas que aparece en la primera columna tienen las simetrías indicadas en la cabeza de la tabla o primera fila. Hemos omitido las transformaciones  $(\emptyset, =)$  y  $(\emptyset, \sim)$ , ya que obviamente la primera es simetría de todas las reglas y la segunda de ninguna.













# Bibliografia

- [1] S.Wolfram, *Statistical Mechanics of Cellular Automata* Rev. Mod. Phys **55** (1983) 569
- [2] T. Toffoli, *Cellular automata as an alternative (rather than an approximation of) differential equations in modeling physics*. Physica D **10** (1984)
- [3] G. Y. Vichniac. *Simulating physics with cellular automata*, Physica D **10** (1984) 96-116
- [4] S.Wolfram, *Theory and Applications of Cellular Automata*, World Scientific Publishing 1986
- [5] K. Park, K. Steiglitz, W. P. Thurston. *Soliton-like in cellular automata*, Physica D **19** (1986) 423
- [6] T. Tokihiro et. al. *From soliton equations to integrable cellular automata through a limiting procedure*, Phy. Rev. Lett. **76** (1996) 3217
- [7] Y. Aizawa, I. Nishikawa, K. Kaneko. *Soliton turbulence in one-dimensional cellular automata*, Physica D **45** (1990) 307
- [8] T. S. Papatheodrou, et. al. Stud. Appl. Math. **79** 173 (1988)
- [9] M. Bruschi, P.M. Santini, and O. Ragnisco, Phys. Lett. A **169** 151 (1992), M. Bruschi, P.M. Santini, Physica D **70**, 185 (1994)

- [10] S.Wolfram, *Universality and Complexity in Cellular Automata*, Physica 10D (1984) 1-35
- [11] K.CulikII, S.Yu, *Undecidability of CA classification schemes*, **2** (1988) 177-190
- [12] K.CulikII, L.Hurd, S.Yu. *Computation Theoretic Aspects of Cellular Automata* Physica D **45** (1990) 357-378 North-Holland
- [13] H.A.Gutowitz, *A hierarchical classification of cellular automata*, Physica D **45** (1990) 136-156
- [14] W.Li, N.Packard, *The Structure of elementary cellular automata rule space*, Complex Systems **4** (1990) 281-297
- [15] K. Sutner, *De Bruijn Graphs and linear cellular automata*, Complex Systems **5** (1991) 19-30
- [16] S.Wolfram, *Computation theory of cellular automata*, Commun. Math. Phys. **96** (1984) 15
- [17] J.E. Hopcroft and J.D. Ullman, *Introduction to Automata theory, Languages, and Computation*. Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1979.
- [18] J. Urias, G. Salazar-Anaya, E. Ugalde, and A. Enciso *Travelling patterns in cellular automata*, in press Chaos (1996)
- [19] O.Martin, A.Odlyzko, S.Wolfram, *Algebraic properties of cellular automata* Commun. Math. Phys. **93** (1984) 219
- [20] J.L. Kelley, *General Topology*, Van Nostrand, New York 1955
- [21] G.A. Hedlund, *Endomorphisms and automorphisms of the shift dynamical system*, Math. Syst. Theor. **3** (1969) 177

- [22] B. Weiss, *Subshifts of finite type and sofic systems*, Monatsh. Math. **77** (1973) 462
- [23] L.P.Hurd, *Formal language characterization of cellular automata limit set*, Complex Systems **1** (1987) 69-80
- [24] R.Fischer, *Sofic Systems and Graphs*, Monatsh. Math. **80** (1975), 179-186
- [25] P.Billingsley, *Ergodic Theory and Information*. Wiley New York (1965)
- [26] J.-P. Eckman, D. Ruelle, *Ergodic theory of chaos and strange attractors*, Rev. Mod. Phys. vol.**57**, Part 1 (1985) 617-656
- [27] P. Walters, *An introduction to ergodic theory*. Springer, Berlin, 1982
- [28] J.R. Brown, *Ergodic Theory and Topological Dynamics*, Academic Press 1976
- [29] L.P.Hurd, J.Kari and K.Ciuk, *The topological entropy of cellular automata is uncomputable*, Ergod. Th.& Dynam. Sys. **12** (1992) 255-265
- [30] R.M.A. Diñão. *Periodic points and entropies for cellular automata*, Complex Systems **3** (1989) 117-128.
- [31] L.P. Hurd, *Recursive Cellular Automata Invariant Sets*, Complex Systems **4** (1990) 119-129
- [32] J.Uriás and A. Enciso, *Internal Symmetries of Cellular Automata*, Submitted to Physica D, (1995)
- [33] E. Ugaldé, J. Urias, *Symetry groups of automata*, Physica D **70**, 178-184 (1991)
- [34] P.Grassberger, Table 6 of *Theory and Applications of Cellular Automata* S. Wolfram, World Scientific (1986)



- [35] N. Boccara, J. Nasser, and M. Roger, *Particle-like structures and their interaction in spatio-temporal patterns generated by one-dimensional deterministic cellular automaton rules* Phys. Rev A **44**, 866-875 (1991).
- [36] J.E. Hanson, J.P. Crutchfield, *The Attractor-Basin Portrait of Cellular Automata*. Journal Statistical Physics **66** 1992
- [37] J.P. Crutchfield, *Turbulent Pattern Bases for Cellular Automata*, Physica D **69** (1993) 279-301
- [38] S. Wolfram, *Cellular Automata and Complexity*, Collected papers, Addison-Wesley (1994)