

SOBRE EL ATRAPE ÓPTICO DE PARTÍCULAS COLOIDALES

Tesis que para obtener el grado de
Maestro en Ciencias
(Física)

presenta:

Ildefonso León Monzón

Instituto de Física
Manuel Sandoval Vallarta
Universidad Autónoma de San Luis Potosí

Febrero de 1996

Dedico la presente tesis a mis padres,
mis hermanos, a Adelaida y mi hija
Leslie.

Agradecimientos

Agradezco al Dr. José M. Mendez Alcaráz por conducirme en la elaboración de éste trabajo y por darme parte de su valioso tiempo para mi formación. Al Dr. José Luis Arauz Lara por facilitarme incondicionalmente su equipo de laboratorio. A Mauricio Tinoco por su ayuda en la elaboración de las muestras analizadas en éste trabajo. Al Ing. Saucedo por la elaboración del software para la digitalización de imágenes. A Francisco Castro, quien me brindo gran ayuda en la comprensión del proceso de análisis de imágenes.

A mis amigos y compañeros Román, Donato, Luís Fernando (pooh), Miguel Angel, Martín Chávez, y todos aquellos que me faltan, pero que igualmente son mis amigos.

A mi familia por haberme apoyado constantemente.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología, CONACyT y al Fondo de Apoyo a la Investigación de la Universidad Autónoma de San Luís Potosí.

Índice General

1	Introducción	1
2	Teoría	7
2.1	Explicación cualitativa	7
2.2	Ecuaciones de Maxwell	8
2.3	Haz incidente	10
2.4	Fuerza y torca de radiación	11
3	Videomicroscopía y procesamiento de imágenes	17
3.1	Videomicroscopía	17
3.1.1	Videomicroscopio	17
3.2	Digitalización de imágenes	18
3.2.1	Representación de la imagen digital	18
3.2.2	Fundamentos en el procesamiento de imágenes	19
3.3	Cuantización de una imagen	20
4	Trampas ópticas	21
4.1	Preparación del material	21
4.2	Preparación de las muestras	22
4.3	Montaje experimental y atrape óptico de las partículas	22
4.4	Análisis del sistema	24
4.4.1	Adquisición de imágenes	24
4.4.2	Procesamiento de imágenes	24
4.5	Caracterización de una trampa óptica	26
4.5.1	Simetría en la fuerza de atrape	26
4.5.2	Funciones de distribución	28
4.5.3	Cálculo de la frecuencia de oscilación de la fuerza de atrape	32
4.5.4	Desplazamiento cuadrático medio y coeficiente de autodifusión	33
5	Conclusiones	41
A	Método de solución de las ecuaciones de Maxwell	43
B	Solución de la ecuación de Langevin para el oscilador armónico Browniano	51

Capítulo 1

Introducción

La presión de radiación es un fenómeno conocido desde hace ya mucho tiempo [1]. El campo electromagnético contiene energía, momento lineal y momento angular. Cuando una onda electromagnética que se propaga es dispersada al incidir sobre un objeto, parte de su energía se pierde, por absorción, y parte de sus momentos cambia en magnitud y dirección. El resultado se ve como onda dispersada. Como la energía y los momentos totales del sistema deben conservarse, los del objeto cambian según las leyes de conservación. Al dispersar los campos, los cuerpos se calientan y experimentan fuerzas y torcas de retroceso. Sobre su superficie actúa la presión óptica. Este es, por ejemplo, el origen de las fuerzas que el viento solar ejerce sobre la atmósfera terrestre.

El fenómeno de la presión óptica a servido en el pasado como fuente de inspiración para la imaginación de muchas personas. Es frecuente encontrar historias en las que se describen veleros espaciales que viajan por el sistema solar impulsados por la luz del sol, o rayos laser con los que es posible inmovilizar naves completas con sólo sumergirlas en luz. Esta última fantasía es, aunque parezca un cuento, el origen de este trabajo.

La idea de sujetar cuerpos con rayos de luz empieza a cobrar forma al advertir que el haz debe contener un gradiente radial de intensidades. De esta forma, un cuerpo que abandona el eje del rayo irá dispersando de forma distinta conforme se aleja. Si el haz es más intenso en su centro, el resultado de la asimetría en la dispersión será una fuerza restauradora de la posición actuando sobre la partícula, es decir, una fuerza apuntando hacia el eje del cilindro de luz. El motivo es evidente, pues habrá más fotones del centro, dispersados hacia afuera que fotones de la periferia dispersados hacia el centro,

ya que el haz es más intenso en su eje. La pregunta es si las fuerzas generadas de esta forma pueden ser lo suficientemente intensas como para sujetar a la partícula dispersora. La respuesta es afirmativa.

La primera realización experimental de trampas ópticas, también conocidas como pinzas ópticas, fue elaborada por Ashkin en 1970 [1]. El sujetó partículas de poliestireno inmersas en agua enfocando sobre ellas una haz de luz proveniente de un laser de Argón. ¡Las fuerzas reastauradoras que pudo medir alcanzaron valores de 10^5 gravedades!. Posteriormente, ha sido desarrollada toda una técnica de atrape y aceleración óptica que ha encontrado aplicaciones en la separación de isótopos en la industria nuclear, en el enfriamiento de vapores hasta alcanzar temperaturas cercanas al cero absoluto y en la construcción de nuevos relojes atómicos. En la biofísica ha permitido medir las constantes elásticas de moléculas de DNA y de membranas celulares [2], así como observar la difusión de partículas en el núcleo de una célula que ha sido aislada para este fin. Se ha realizado la cirugía interna de células sujetándolas con trampas ópticas, y la manipulación de un organelo dentro de un protozooario [2], como se muestra en la figura (1.1). En uno de los experimentos más relevantes de este año (1995) [3] se utilizaron trampas ópticas para un primer enfriamiento de un gas de rubidio logrando la condensación de Bosse-Einstein, que nunca antes había sido observada.

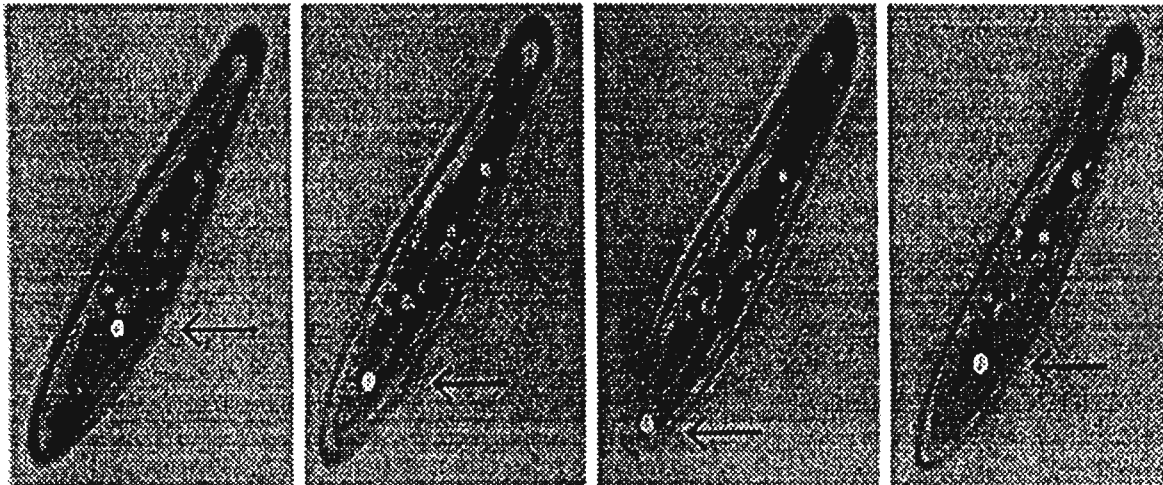


Figura 1.1: Manipulación de un organelo dentro de un protozooario con ayuda de una trampa óptica ; este (señalado por la flecha) es trasladado, del centro de la célula al extremo inferior, y de nuevo al centro bajo la acción de la fuerza óptica de atrape.

Un resumen del estado actual del campo fue escrito por Steven Chu en

1992 [2]. La primera explicación teórica completa del fenómeno fue dada por Barton *et al.* en una serie de cuatro artículos aparecidos en 1988 y 1989 [4, 5, 6, 7]. Ellos modelaron el rayo enfocado como una haz Gaussiano y resolvieron numéricamente las ecuaciones de Maxwell con condiciones de frontera en la superficie de la partícula. Calculando el tensor de esfuerzos de Maxwell e integrándolo sobre la superficie del objeto dispersor encontraron las fuerzas y torcas ópticas que sobre ella actúan. Además de explicar todas las observaciones experimentales existentes a la fecha, pudieron describir con todo detalle la existencia de tres puntos de atrape a lo largo del eje del haz, de los cuales Ashkin y Dziedzic habían encontrado evidencias al utilizar las trampas para hacer levitar partículas en el aire [8]. Recientemente, en la Física de Fluidos Complejos, ha surgido interés por el atrape óptico de partículas coloidales, pues al aplicar esta técnica se abren nuevas posibilidades en la investigación experimental de estos sistemas, como por ejemplo la de manipulación, como se muestra en la figura (1.2). De esta manera se podría, eventualmente,

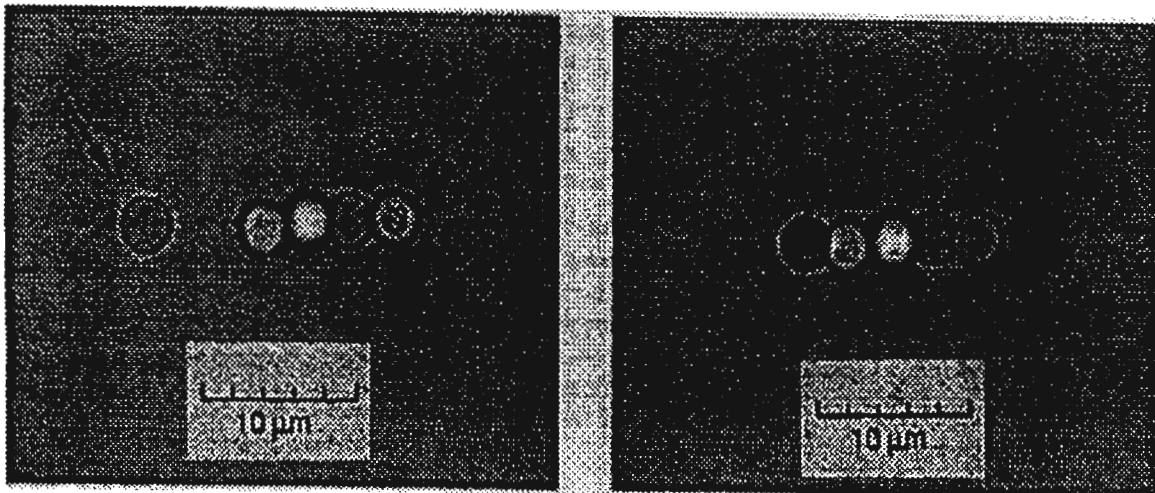


Figura 1.2: Manipulación óptica de partículas coloidales de poliestireno suspendidas en agua. Sujetando a las partículas se les coloca, de una por una, formando una cadena.

construir estructuras para modelar, por ejemplo, medios porosos. También podría medirse directamente la fuerza de interacción entre partículas [9], o las fuerzas de interacción hidrodinámicas. Con esto en mente, en este trabajo nos hemos fijado el objetivo de construir y caracterizar trampas ópticas para el atrape de cuerpos coloidales. Para ello es necesario generar pozos de atrape óptico de profundidad mayor que la energía de agitación térmica de

ópticas, así como su caracterización. Finalmente cerramos el trabajo con un capítulo de conclusiones. Los apéndices A y B contienen detalles técnicos sobre la solución de las ecuaciones de Maxwell y de Langevin, respectivamente.

Capítulo 2

Teoría

2.1 Explicación cualitativa

Para entender como se puede confinar a una partícula con un haz de luz enfocado, es necesario abordar el problema como un fenómeno puramente electromagnético. Antes de dar las expresiones de la fuerza que actúa sobre la partícula sujetandola veamos un caso sencillo para tener una idea clara de cómo se da el confinamiento. Supongamos que la interacción del haz con la partícula está en el rango de la óptica geométrica, es decir la longitud de onda de luz es mucho menor que el tamaño de la partícula.

En la figura 2.1 se muestra esquemáticamente un montaje típico de una trampa óptica. En ella se muestran dos rayos, a y b, que emergen de la lente de un microscopio; estos rayos convergerían en el punto focal f de la lente si no fueran desviados por la partícula, la cual actúa como una lente extra, dado que existe una diferencia entre su índice de refracción y el del medio en el cual esta inmersa. En el caso A, por ejemplo el centro de la partícula se encuentra por debajo del punto f . Debido a esto, los rayos de luz se refractan hacia abajo (en la figura) tanto al entrar en la partícula como al salir de ella. Esto ocasiona un cambio de momento de los fotones del haz incidente, el cual, por el principio de conservación de momento lineal, se ve compensado con un cambio de igual dirección y sentido contrario en el momento de la partícula, dando lugar a una fuerza restauradora F , que intenta regresar el centro de la partícula al punto f . En el caso B se tiene el mismo efecto de restauración de la posición, pero ahora el centro de la partícula se encuentra por arriba del punto focal. El caso C muestra que lo mismo ocurre cuando el desplazamiento de la partícula, respecto a f , es horizontal. En general siempre que el centro

de la partícula se separa del punto focal se genera una fuerza restauradora que intenta regresarlo a su posición original. El origen de esta descanza en el principio de conservación de momento lineal. A continuación estudiamos este fenómeno con más detalle, en el marco de la Teoría Electrmagnética.

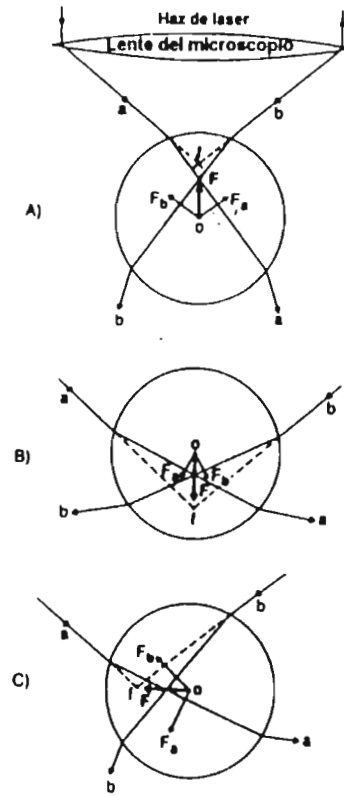


Figura 2.1: Vista cualitativa de una esfera dieléctrica atrapada por presión óptica. La refracción de un par de rayos, a y b, da lugar a las fuerzas F_a y F_b , cuya suma vectorial es siempre restauradora para desplazamientos axiales y transversales de la esfera respecto al punto focal. Aquí se supone que el índice de refracción de la partícula es mayor que el del medio que la rodea.

2.2 Ecuaciones de Maxwell

La generación de trampas ópticas involucra la interacción de ondas electromagnéticas no-planas con la materia. Por lo tanto, la teoría que puede explicar este fenómeno de confinamiento es la Teoría Electromagnética. En otras

palabras, para explicar nuestros resultados es necesario resolver las ecuaciones de Maxwell con condiciones de frontera en la superficie de las partículas atrapadas y así obtener las expresiones para la fuerza neta que actúa sobre estas. Las ecuaciones de Maxwell para un medio macroscópico vienen dadas en la forma siguiente [11]:

$$\nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = 4\pi\rho(\mathbf{r}, t), \quad (2.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}(\mathbf{r}, t), \quad (2.2)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = 0, \quad (2.3)$$

y

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0. \quad (2.4)$$

Aquí, $\mathbf{D}(\mathbf{r}, t)$ es el campo de desplazamiento en el punto \mathbf{r} al tiempo t , $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$ es el campo magnético, $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ el campo eléctrico $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ es el campo de inducción magnética, $\rho(\mathbf{r}, t)$ la densidad de carga libre y $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ la densidad de corriente. Para resolver estas ecuaciones es necesario hacer una serie de suposiciones sobre la naturaleza de la partícula y del medio en el que se encuentra inmersa. Al medio se le considerará lineal, isotrópico, no magnético, no conductor y homogéneo. A la partícula se le considerará lineal, isotrópica, no magnética, con conductividad finita y esférica de radio a . Además, los campos se suponen armónicos, es decir, que temporalmente varían como $e^{-i\omega t}$ donde ω es la frecuencia de oscilación de los campos. Con estas suposiciones, las ecuaciones de Maxwell toman la siguiente forma,

$$\nabla \cdot \epsilon \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0, \quad (2.5)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) = -ik_0 \bar{\epsilon} \mathbf{E}(\mathbf{r}), \quad (2.6)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = ik_0 \mathbf{B}(\mathbf{r}), \quad (2.7)$$

y

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0. \quad (2.8)$$

Aquí, $k_0 = \omega/c$, $\bar{\epsilon} = \epsilon + \frac{4i\pi\sigma}{\omega}$ y además se supuso que no hay cargas ni corrientes libres, es decir, $\rho = 0$ y $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$. Las constantes k_0 , c , ϵ y σ son el número de onda, la velocidad de la luz, la constante dieléctrica del medio y su conductividad eléctrica respectivamente, de este modo, $\bar{\epsilon}$ representa la constante dieléctrica compleja del medio.

2.3 Haz incidente

Ya sabemos la forma que toman las ecuaciones de Maxwell que debemos resolver, y para esto es claro que debemos conocer las expresiones analíticas de la onda que incide sobre la partícula. En la gran mayoría de las construcciones de trampas ópticas la fuente de radiación es luz láser sintonizada en el modo TEM_{00} . Entonces, es muy importante conocer la forma que tienen estos campos electromagnéticos al ser fuertemente enfocados. Se sabe que el perfil de intensidades del haz enfocado tiene una distribución de que es muy parecida a una gaussiana. En la figura (2.2) se aprecian dos de estas, la gaussiana a es para un corte perpendicular al vector de onda, y la b es para un corte longitudinal.

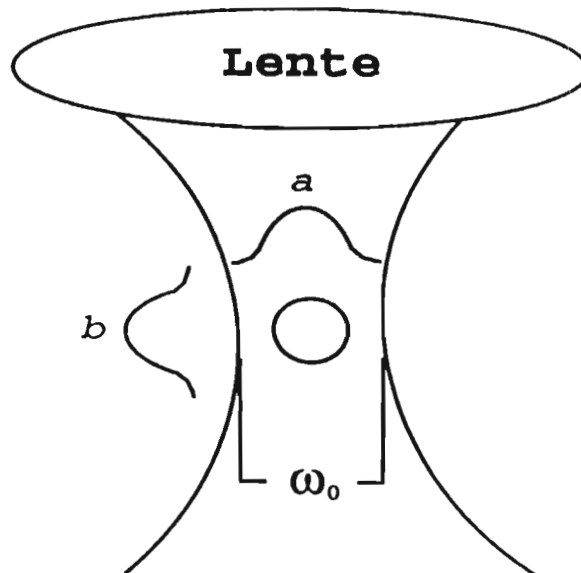


Figura 2.2: Cuando un haz láser en el modo TEM_{00} es enfocado, el perfil de intensidades que se forma en el punto focal es muy parecido a uno gaussiano. La figura muestra dos gaussianas, a y b , que corresponden a un corte perpendicular y a uno longitudinal al haz, respectivamente.

La expresión analítica para modelar un haz gaussiano fue calculada por L. W. Davies [12], bajo las siguientes condiciones: una variación armónica en el tiempo, que el potencial vectorial fuera de polarización lineal transversal a la dirección de propagación y que cumpliera con la norma de Lorentz. Aplicando estas condiciones en las ecuaciones de Maxwell y adimensionando las coordenadas como $x = w_0\xi$, $y = w_0\eta$ y $z = l\zeta$, donde l y w_0 tienen

unidades de longitud y son conocidos como la longitud de dispersión y la anchura o cintura del láser enfocado. Davies encontró que los campos podían ser expandidos en series en función de un parámetro adimensional, dado por $s = 1/k_{ext}w_0$. Además encontró que las expresiones para los campos quedaban en forma recursiva, es decir, la segunda aproximación dependía de la primera y así sucesivamente. La forma que los campos tienen en primera aproximación en coordenadas cartesianas es

$$E_x^i = E_0\psi^* \exp(ik_{ext}z), \quad (2.9)$$

$$E_y^i = 0, \quad (2.10)$$

$$E_z^i = -(2Q^*x/l)E_x^i, \quad (2.11)$$

$$H_x^i = 0, \quad (2.12)$$

$$H_y^i = \sqrt{\epsilon_{ext}}E_x^i, \quad (2.13)$$

y

$$H_z^i = -(2Q^*y/l)H_y^i. \quad (2.14)$$

Aquí k_{ext} es el número de onda en el medio donde la partícula se encuentra inmersa. ξ , η y ζ son las nuevas variables que definen a los ejes de coordenadas, $Q = \frac{1}{i+2\zeta}$, $\psi = iQ \exp(-iQ\rho)$ y $\rho = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{w_0}$

2.4 Fuerza y torca de radiación

Hasta ahora sabemos que en la interacción de un campo electromagnético con una partícula surge una fuerza, pero no conocemos cuál es la ecuación que describe su dinámica. Con ayuda de la Teoría Electromagnética se puede encontrar la forma que la fuerza tiene. Para llegar a ella se inicia con la siguiente ecuación,

$$\langle \mathbf{F} \rangle = \left\langle \oint_s \mathbf{n} \cdot \vec{\mathbf{T}} \right\rangle, \quad (2.15)$$

donde $\langle \rangle$ representa el promedio en el tiempo, s es una superficie cualquiera tal que encierra a la partícula, \mathbf{n} representa el vector unitario normal saliendo de s , y $\vec{\mathbf{T}}$ es el tensor de esfuerzos de Maxwell. La forma apropiada de este último en condiciones estacionarias y para medios lineales es la siguiente [11],

$$\vec{\mathbf{T}} = \frac{1}{4\pi} (\epsilon \mathbf{E} \mathbf{E} + \mathbf{H} \mathbf{H} - \frac{1}{2} (\epsilon E^2 + H^2) \vec{\mathbf{I}}), \quad (2.16)$$

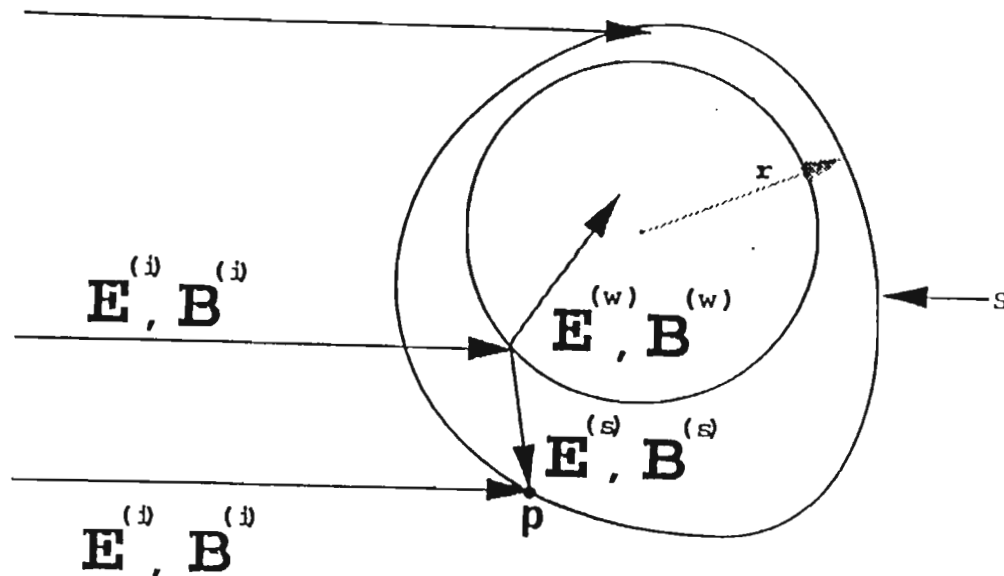


Figura 2.3: La figura representa a una esfera dieléctrica que interactúa con un campo electromagnético $\mathbf{E}^{(i)}$ y $\mathbf{H}^{(i)}$. El resultado es el de un campo dispersado representado por $\mathbf{E}^{(s)}$ y $\mathbf{H}^{(s)}$. También se observa una superficie s que encierra a la esfera. como se puede apreciar, el campo total externo es simplemente la superposición de los campos incidente y dispersado.

Aquí $\vec{\mathbf{I}}$ es el tensor identidad, \mathbf{E} y \mathbf{H} son los campos eléctrico y magnético respectivamente. Dado que la integral es sólo sobre una superficie que encierra a la partícula, los campos que definen al tensor son la suma vectorial de los campos incidente y dispersado, denotados por los subíndices i y s , respectivamente, es decir $\mathbf{E} = \mathbf{E}^{(i)} + \mathbf{E}^{(s)}$ y $\mathbf{H} = \mathbf{H}^{(i)} + \mathbf{H}^{(s)}$. En otras palabras, \mathbf{E} y \mathbf{H} son los campos externos. En la figura (2.3) se muestran los campos que intervienen en el tensor.

De esta manera, vemos que es necesario conocer la forma que tiene el campo dispersado para calcular $\langle \mathbf{F} \rangle$, lo que implica resolver las ecuaciones de Maxwell con las condiciones de frontera en s . El método con que se obtiene esta solución puede ser consultado en el apéndice A.

Sustituyendo (2.16) en (2.15) y tomando a s como una superficie esférica

de radio r centrada en la partícula de radio a obtenemos,

$$\langle \mathbf{F} \rangle = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \langle (\epsilon_{ext} E_r \mathbf{E} + H_r \mathbf{H} + \frac{1}{2}(\epsilon_{ext} E^2 + H^2) \mathbf{r}) \rangle r^2 \sin \theta d\theta d\phi |_{r>a}, \quad (2.17)$$

que al expresarse en forma consistente con los campos \mathbf{E} y \mathbf{H} dados en el apéndice A se tiene,

$$\begin{aligned} \frac{\langle \mathbf{F} \rangle}{a^2 E_0^2} = & \frac{1}{8\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left(\frac{1}{2} [\epsilon_{ext} (E_r E_r^* - E_\theta E_\theta^* - E_\phi E_\phi^*) \right. \\ & + (H_r H_r^* - H_\theta H_\theta^* - H_\phi H_\phi^*)] \mathbf{r} + (\epsilon_{ext} E_r E_\theta^* \\ & + H_r H_\theta^*) \theta + (\epsilon_{ext} E_r E_\phi^* + H_r H_\phi^*) \phi \left. \right) \\ & \tilde{r}^2 \sin \theta d\theta d\phi |_{\tilde{r}>1}, \end{aligned} \quad (2.18)$$

donde $\tilde{r}=r/a$ y Re denota la parte real.

Los campos electromagnéticos contienen momento lineal; así como momento angular y cuando interaccionan con la materia estos cambian tanto en dirección como en magnitud lo que provoca que sobre el objeto dispersor se produzca una torca, es decir, el objeto puede ser rotado por el efecto de la dispersión. La ecuación principal es la siguiente [11],

$$\langle \mathbf{N} \rangle = \left\langle \oint_s \mathbf{n} \cdot (\vec{\mathbf{T}} \times \mathbf{r}) \right\rangle, \quad (2.19)$$

donde \mathbf{n} s y $\vec{\mathbf{T}}$ son como antes, y \mathbf{r} es un vector que localiza a la superficie s (ver figura 2.3). Al igual que antes si se toma a s como una superficie esférica de radio r centrada en la partícula la integral se transforma en la siguiente,

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{N} \rangle = & \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \langle (\epsilon_{ext} E_r E_\phi^* + H_r H_\phi^*) \theta \\ & - (\epsilon_{ext} E_r E_\theta^* + H_r H_\theta^*) \phi \rangle r^3 \sin \theta d\theta d\phi |_{r>a}. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Escribiéndola en forma consistente con los campos del apéndice A, la torca toma su forma final,

$$\begin{aligned} \frac{\langle \mathbf{N} \rangle}{a^3 E_0^2} = & \frac{1}{8\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi [(\epsilon_{ext} E_r E_\phi^* + H_r H_\phi^*) \theta \\ & - (\epsilon_{ext} E_r E_\theta^* + H_r H_\theta^*) \phi] \tilde{r}^3 \sin \theta d\theta d\phi |_{\tilde{r}>a}. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Barton *et al* calcularon las integrales angulares numéricamente. En particular uno de sus trabajos que más nos intereza, es el que se refiere a partículas con solo dos grados de libertad. Los cálculos correspondientes para la fuerza y la torca en estas direcciones se muestran en las figuras (2.4), (2.5), (2.6), y (2.7). Prestemos especial atención a las figuras (2.4) y (2.5). En estas se muestra que para desplazamientos del orden de $2\mu\text{m}$ el comportamiento de la aceleración es lineal y negativa; por lo tanto es restauradora y armónica, es decir, las expresiones para la fuerza en las direcciones x y y son $F_x = -k_x x$ y $F_y = -k_y y$, respectivamente. Esto es de gran importancia para nuestros propósitos, ya que permitirá modelar a nuestros sistemas como osciladores armónicos brownianos en dos dimensiones [13].

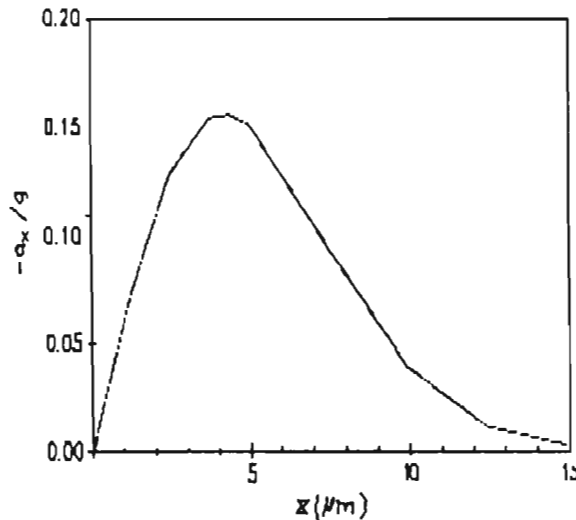


Figura 2.4: Aceleración lineal en la dirección x vs. desplazamiento en x para una gota de agua de $5\mu\text{m}$ de diámetro atrapada en aire usando un rayo láser linealmente polarizado (en la dirección x) y sintonizado en el modo TEM_{00} . Como se observa, la aceleración tiene un comportamiento aproximadamente lineal hasta desplazamientos del orden de $3\mu\text{m}$.

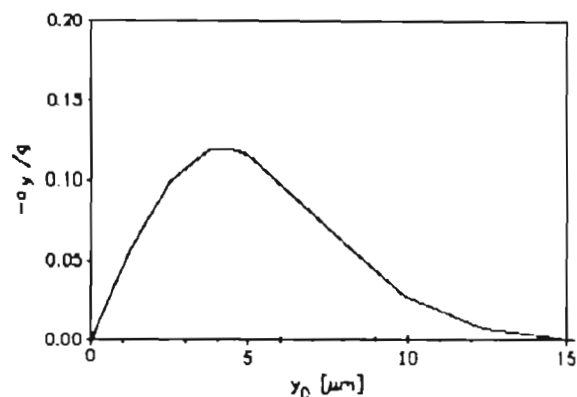


Figura 2.5: aceleración lineal en la dirección y vs. desplazamiento en y de una gota de agua de $5\mu\text{m}$ de diámetro atrapada en aire usando un rayo láser linealmente polarizado (en la dirección x) y sintonizado en el modo TEM_{00} . Como se observa, al igual que en la figura anterior, la aceleración tiene un comportamiento aproximadamente lineal hasta desplazamientos del orden de $3\mu\text{m}$. De esta y la figura anterior vemos que el potencial óptico de atrape, en primera aproximación, es armónico.

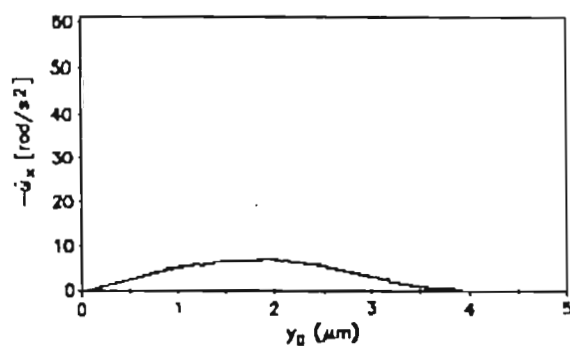


Figura 2.6: Aceleración angular en el eje x vs desplazamiento en el eje y para una gota de agua de $5\mu\text{m}$ de diámetro atrapada en aire usando un rayo láser linealmente polarizado (en dirección del eje x) y sintonizado en el modo TEM_{00} .

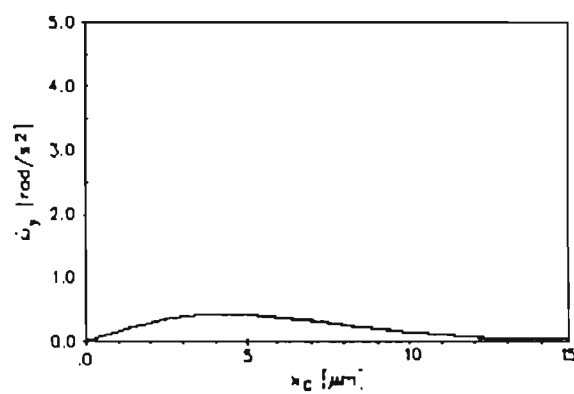


Figura 2.7: Aceleración angular en el eje y vs desplazamiento en el eje x para una gota de agua de $5\ \mu\text{m}$ de diámetro atrapada en aire usando un rayo láser linealmente polarizado (en dirección del eje x) sintonizado en el modo TEM_{00} .

Capítulo 3

Videomicroscopía y procesamiento de imágenes

En este capítulo presentamos los componentes básicos de un videomicroscopio, y los fundamentos de la digitalización de imágenes y procesamiento de imágenes. Elementos que utilizamos en nuestro trabajo para la adquisición y cuantización de imágenes.

3.1 Videomicroscopía

La videomicroscopía es una técnica que ha tenido gran uso dentro del desarrollo científico, ya que permite observar fenómenos que a simple vista están ocultos o no se encuentran a nuestro alcance visual. En la física de fluidos complejos, por ejemplo, permite adentrarnos en el fascinante mundo del movimiento browniano, el cual queda fuera del alcance de nuestros sentidos, y determinar con cierta precisión algunas de sus características más importantes.

3.1.1 Videomicroscopio

Los componentes esenciales de un videomicroscopio son una videocámara montada sobre un microscopio a través de un sistema de acoplamiento, un monitor para desplegar la imagen y un cable coaxial que conecta a estos dos, como se muestra esquemáticamente en la figura (3.1). Una imagen real del espécimen bajo observación es proyectado por el microscopio sobre la cámara. Esta convierte la imagen óptica *bidimensional* en un tren de impulsos

eléctricos de alta frecuencia llamado *video señal*. La video señal viaja al monitor a través del cable coaxial donde finalmente puede ser observada.

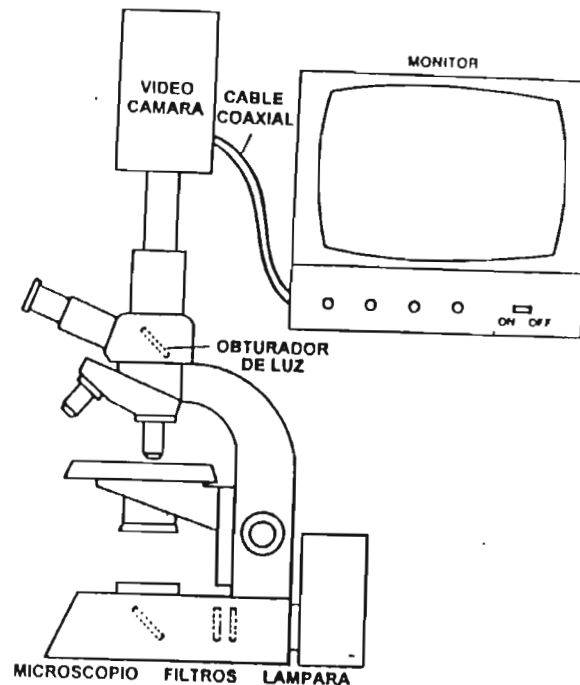


Figura 3.1: Componentes básicos de un video microscopio.

3.2 Digitalización de imágenes

3.2.1 Representación de la imagen digital

El término imagen digital monocromática se refiere a una función bidimensional $f(x, y)$ de la intensidad de luz, donde x y y denotan las coordenadas espaciales, y el valor de f en el punto (x, y) es proporcional al nivel de gris (o brillo) de la imagen en este punto. Una imagen digital es una imagen que ha sido discretizada tanto en coordenadas espaciales como en niveles de gris. Esta también puede ser considerada como un arreglo matricial cuyos índices de renglón y columna identifican un punto en la imagen, y el valor del correspondiente elemento de matriz es el nivel de gris en este punto. Los elementos de tal arreglo son llamados píxeles.

3.2.2 Fundamentos en el procesamiento de imágenes

El procesamiento de imágenes abarca una amplia cantidad de software, hardware y bases teóricas. Podemos enumerar siete pasos fundamentales en el procesamiento de imágenes [14]:

1.- *Adquisición.*

Para adquirir una imagen se requiere de un sensor de imágenes y la capacidad de digitalizar su señal. Este puede ser, por ejemplo, una cámara de TV en color o monocromática que produzca una imagen cada $\frac{1}{30}$ seg.

2.- *Preprocesamiento.*

La función clave del preprocesamiento es mejorar la imagen de tal forma que incremente la probabilidad de sucesos, es decir, que no haya pérdida de información de la imagen. Para esto, el preprocesamiento trata con técnicas de realce de contraste removiendo ruido y aislando regiones, de esta manera se tendrá una imagen mas limpia para analizarse.

3.- *Segmentación.*

La segmentación se define como las particiones de una imagen en sus partes constituyentes u objetos. Por ejemplo, en nuestras imágenes, las regiones más brillantes corresponden a las partículas, ahora, la segmentación lo que hace es buscar cambios bruscos en los niveles de gris, y a la regiones más brillantes las aísla y las identifica como partículas. En general, la segmentación autónoma por computadora es una de las tareas más difíciles en el proceso de digitalización.

4.- *Descripción o selección de características.*

Ésta trata con extraer características que resultan en alguna forma información cualitativa de interés, o que son básicas para diferenciar una clase de objetos de otra. Por ejemplo, la textura de un objeto puede se usada para describilo. Para esta diferenciación se debe hacer uso de los descriptores, que pueden ser líneas, lagunas u hoyos que son trazadas en regiones donde la textura es muy parecida.

5.- *Reconocimiento.*

Aquí lo que se hace es asignar un patrón a la imagen, tal patrón es un arreglo (vectorial) de descriptores. En otras palabras, trata con asignar una etiqueta a un objeto basándose en la información suministrada por los descriptores.

6.- *Interpretación.*

Ésta involucra asignar un significado a un ensamble de objetos que han sido

reconocidos.

7.- Conocimiento de datos.

Este paso puede ser tan simple como tratar con regiones de una imagen donde la información de interés se sabe está localizada (una imagen limpia). También puede ser muy compleja, tal como una lista intercorrelacionada de una gran cantidad de defectos de la imagen.

3.3 Cuantización de una imagen

Para hacer apropiado el procesamiento por computadora, una función $f(x, y)$ deberá ser cuantizada tanto en el espacio como en su amplitud, es decir, se discretiza el espacio en la forma de un arreglo matricial y a cada elemento de matriz se le asigna un color, el cual es un valor entero del nivel de gris. Supongamos que una imagen continua $f(x, y)$ es aproximada por muestras igualmente espaciadas en la forma de un arreglo de $N \times M$, como se muestra a continuación:

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} f(0, 0) & f(0, 1) & \cdots & f(0, M - 1) \\ f(1, 0) & f(1, 1) & \cdots & f(1, M - 1) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ f(N - 1, 0) & f(N - 1, 1) & \cdots & f(N - 1, M - 1) \end{pmatrix}$$

El proceso de digitalización requiere de los valores de M, N y el número de nivel de gris del pixel correspondiente. Comúnmente, en la práctica del proceso de digitalización estas cantidades son potencias enteras de dos, es decir,

$$N = 2^n, M = 2^m \quad (3.1)$$

y

$$G = 2^g, \quad (3.2)$$

donde G denota el número de niveles de gris. El número, b , de bits requeridos para almacenar una imagen digital viene dado por,

$$b = N \times M \times g, \quad (3.3)$$

por ejemplo, en nuestras imágenes el arreglo matricial es de $N = 640$ y $M = 480$ con 256 niveles de gris ($g=8$). Esto nos da un total de 2457600 bits o lo que es lo mismo 307200 bytes.

Capítulo 4

Trampas ópticas

En este último capítulo se describe cómo se llevó a cabo la preparación del material y la síntesis de las muestras analizadas, el montaje experimental para lograr el confinamiento de las partículas, el método de análisis de las imágenes y por último los resultados obtenidos que corresponden a las funciones de distribución estacionarias de las partículas atrapadas, a su desplazamiento cuadrático medio y a su coeficiente de autodifusión. De aquí se obtiene el valor de la fuerza de atrape. Los sistemas analizados son suspensiones coloidales cuasibidimensionales, las cuales fueron preparadas colocando un poco de la suspensión original sobre dos placas de vidrio. Para fines prácticos, se considera que las partículas suspendidas entre las placas tienen sólo dos grados de libertad. De esta manera, los efectos de la presión óptica sobre ellas pueden ser entendidos en términos de los cálculos teóricos de Barton *et al.* para sistemas bidimensionales, presentados en el capítulo 2.

4.1 Preparación del material

En la preparación del material necesario para construir las muestras, la limpieza juega un papel de gran importancia. Las placas de vidrio contenedoras de la suspensión, las cuales no son más que un cubreobjetos y un portaobjetos, pasan por un proceso de limpieza que consiste en introducirlos en una caja de Petri (las placas deben estar separadas para evitar que queden impurezas entre ellas) que contiene agua desionizada y detergente. Enseguida, la caja de Petri se pone encima de un calentador de resistencias eléctricas durante un periodo de aproximadamente 25 min., con el fin de que al hervir el agua con detergente, su movimiento provoque que la superficie de los vi-

drios se libere de las impurezas. Posteriormente, se procede a enjuagar. Para ello se vierte sobre los vidrios agua desionizada y se calienta de nuevo, pero ahora por un periodo de 15 min. Esto último se hace 5 veces más. Para aumentar la limpieza de las superficies de los vidrios se repiten de nuevo los pasos anteriores.

4.2 Preparación de las muestras

Al terminar con el proceso de limpieza se introducen los vidrios en una cápsula herméticamente sellada a la que se le ha extraído el aire inyectando nitrógeno, el cual formará la atmósfera donde se llevará a cabo la preparación de la muestra. Primero, se coloca el cubreobjetos sobre el portaobjetos y se presionan con ayuda de una prensa mecánica. Después, se pegan dos bordes del cubreobjetos y portaobjetos con una resina epóxica que endurece y no permite que se separen. Enseguida, por uno de los costados sin resina se coloca una gota de la muestra coloidal, que consta de bolitas de poliestireno de $0.5\ \mu\text{m}$ de diámetro y una densidad de $1.05\ \text{g/ml}$ suspendidas en agua, las que penetrarán entre los vidrios por efecto de la capilaridad. Por último, pegamos los dos bordes restantes también con resina.

4.3 Montaje experimental y atrape óptico de las partículas

Para atrapar partículas por efectos de presión óptica hicimos uso de un microscopio, un objetivo de $100\times$ y 1.3 de abertura numérica. Para obtener imágenes de las partículas atrapadas, al microscopio le adaptamos una videocámara del tipo CCD. Esta está conectada a un monitor y a una videograbadora, donde se grabarán los movimientos de la partícula por espacio de varios minutos, para después analizarlos.

El rayo de luz incidente se enfoca con ayuda del objetivo en una pequeña región entre las dos placas de vidrio generando un fuerte gradiente de intensidades. Como fuente de radiación se utilizó un láser de argón sintonizado en el modo TEM_{00} con polarización lineal a una frecuencia de 488nm (azul) y una potencia de 10mw . La partícula se atrapa simplemente enfocando el rayo de luz dentro o ligeramente debajo de ella. Cuando el atrape ocurre, se

observa una brusca atenuación del movimiento browniano de la partícula, a tal grado que incluso puede quedar inmóvil. Posteriormente, puede ajustarse la fuerza de atrape variando la posición vertical del punto focal. Este ajuste es necesario, dado que el movimiento mínimo que puede ser detectado es de 1 pixel, por lo que debe dársele a las partículas en el pozo de potencial al menos esa libertad de movimiento. Esto último se hace con el fin de poder obtener información de la forma del potencial de atrape.

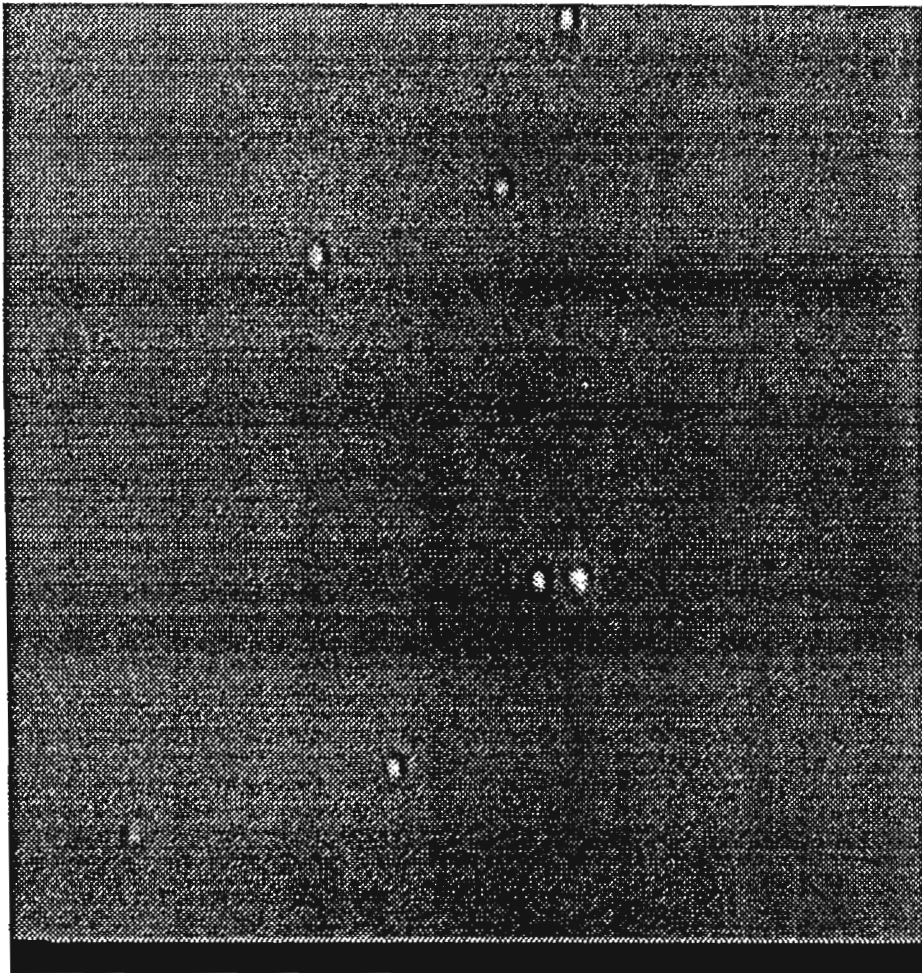


Figura 4.1: Esta figura muestra una imagen digitalizada de una de las muestras estudiadas. En la región central de la figura observamos a dos partículas. La del lado izquierdo corresponde a una que se difunde libremente. La de la derecha es otra que, al igual que la primera, tenía difusión libre, pero en este justo instante recibe la radiación láser para luego ser atrapada; como se ve, la dispersión de luz es notable.

4.4 Análisis del sistema

Una vez que hemos preparado el sistema coloidal cuasibidimensional y atrapado a la partícula deseada, proseguimos extrayendo la información requerida del sistema. En este trabajo nos interesa conocer la forma en que se distribuyen las partículas dentro de la región de atrape y la forma en que se difunden, para poder estimar la forma e intensidades de la fuerza de atrape generada por la presión óptica. A esta fuerza la caracterizaremos con la frecuencia de oscilación de la partícula atrapada, es decir, su constante de resorte. En otras palabras, necesitamos conocer el movimiento de la partícula en la trampa, esto es, conocer los puntos (x, y) que la partícula muestrea en el tiempo.

4.4.1 Adquisición de imágenes

Una vez confinada la partícula, lo que sigue es filmar su movimiento por espacio de varios minutos. Teniendo el movimiento filmado proseguimos digitalizando las imágenes. Esto se hace con ayuda de un programa especial de digitalización, el cual toma la información de una imagen, la traduce a un formato binario apropiado y la guarda en el disco duro de una computadora. La digitalización se hace a razón de $\frac{1}{30}$ de segundo, que es el intervalo entre imágenes consecutivas en la grabación. La cantidad de imágenes para cada análisis fue de 600. Es decir una película de 20 seg.

4.4.2 Procesamiento de imágenes

Para el procesamiento de las imágenes utilizamos un software conocido como IDL (Interactive Data Language), que es un lenguaje de programación desarrollado especialmente para este fin. En el procesamiento de imágenes, el paso más importante es eliminar el ruido. La manera de hacerlo se explica a continuación. Como a las partículas generalmente les corresponden los puntos más brillantes, o tonos de gris más elevados de la imagen (como se muestra en la figura 4.1), lo que se hace es suponer que la distribución de brillo de las partículas es gaussiana; el punto más brillante de la partícula corresponde al punto más alto de una gaussiana, la cual disminuye su altura conforme los tonos de gris disminuyen. Así, el programa ajusta una gaussiana a cada región brillante de la imagen. Los parámetros que definen a la gaussiana que

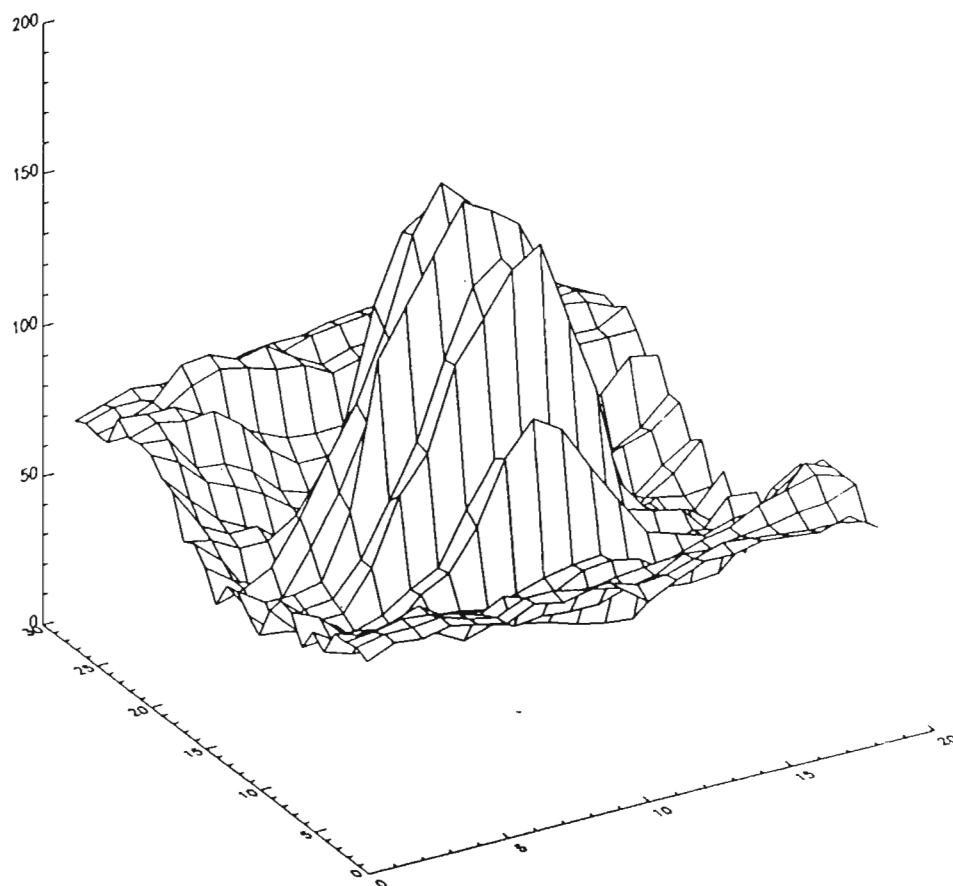


Figura 4.2: Gráfica de los tonos de gris correspondientes a la superficie de la partícula libre en la región central de la figura 4.1 En los ejes horizontales tenemos pixeles y en los verticales unidades arbitrarias de tonos de gris.

identifica a las partículas, altura y ancho medio, se dan como datos de entrada al programa. Si esta gaussiana es del mismo ancho, o más delgada, que la que ajusta a la distribución de brillo, esta última se tomará como partícula, y las coordenadas del punto más brillante se almacenarán en un archivo como su centro. En caso de que el ancho de la distribución de brillo sea menor que el ancho de la gaussiana que define a las partículas el programa desechará el área analizada y proseguirá con el análisis de otro punto. En la figura (4.2) se puede observar una típica distribución de intensidades de una partícula coloidal.

4.5 Caracterización de una trampa óptica

En esta sección presentaremos los resultados de las mediciones realizadas con el fin de caracterizar a las trampas ópticas haciendo uso de la función de distribución espacial estacionaria de las partículas atrapadas.

4.5.1 Simetría en la fuerza de atrape

Las figuras (4.3) y (4.4) muestran las posiciones y trayectorias, respectivamente, que una partícula atrapada siguió dentro de la trampa durante un periodo de 20 segundos. El intervalo entre dos posiciones consecutivas es de $\frac{1}{30}$ de segundo. Como puede observarse, la mancha formada por las posiciones, o por la trayectoria, es aproximadamente circular. Esto significa que la fuerza de atrape actúa aproximadamente de igual forma en todas las direcciones. Dentro de un modelo armónico del potencial óptico de atrape, esto significa que las constantes de resorte en las direcciones x y y son iguales; $k_x = k_y$. De acuerdo a los resultados teóricos [7] descritos en el capítulo 2, esto es sólo posible si la luz incidente es depolarizada. Sin embargo, la luz láser por nosotros utilizada está polarizada linealmente. La explicación a esta aparente contradicción se reduce a los efectos depolarizadores de dispersiones internas en el microscopio, en las componentes ópticas y en partículas de polvo que no pudieron ser retiradas. Los efectos de la polarización remanente son tan pequeños que no pueden ser detectados dentro de la resolución de nuestros experimentos. Estas conjeturas están respaldadas por la observación directa de que el rayo de luz emergente del objetivo del microscopio se encuentra parcialmente depolarizado, a pesar de que al entrar al microscopio el rayo estaba casi totalmente polarizado. Por otro lado, los efectos inducidos por tener polarización lineal son relativamente pequeños, de un 5.4% aproximadamente, como puede verse en las figuras (2.4) y (2.5). En las figuras (4.3) y (4.4) también puede observarse un punto muy alejado de la región central de la mancha, en el extremo superior derecho. Este corresponde a una fluctuación poco probable que muestra la no linealidad de la fuerza de atrape a grandes distancias del centro de la mancha; si la fuerza fuera lineal la probabilidad de este evento sería mucho menor que $\frac{1}{600}$ y sería muy improbable observarlo en nuestros experimentos. Estas ideas se ilustran mejor en la siguiente sección.

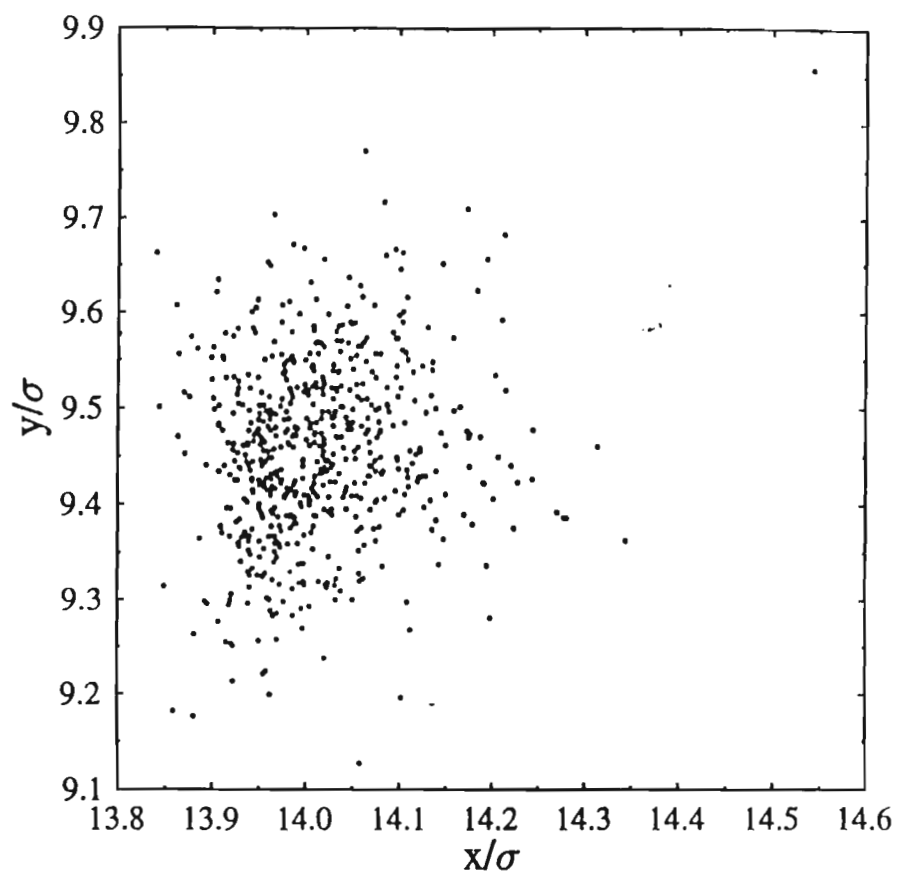


Figura 4.3: Los puntos corresponden a veinte segundos de grabación de una partícula en la trampa, σ denota el diámetro de la partícula. El origen de coordenadas se escoge arbitrariamente.

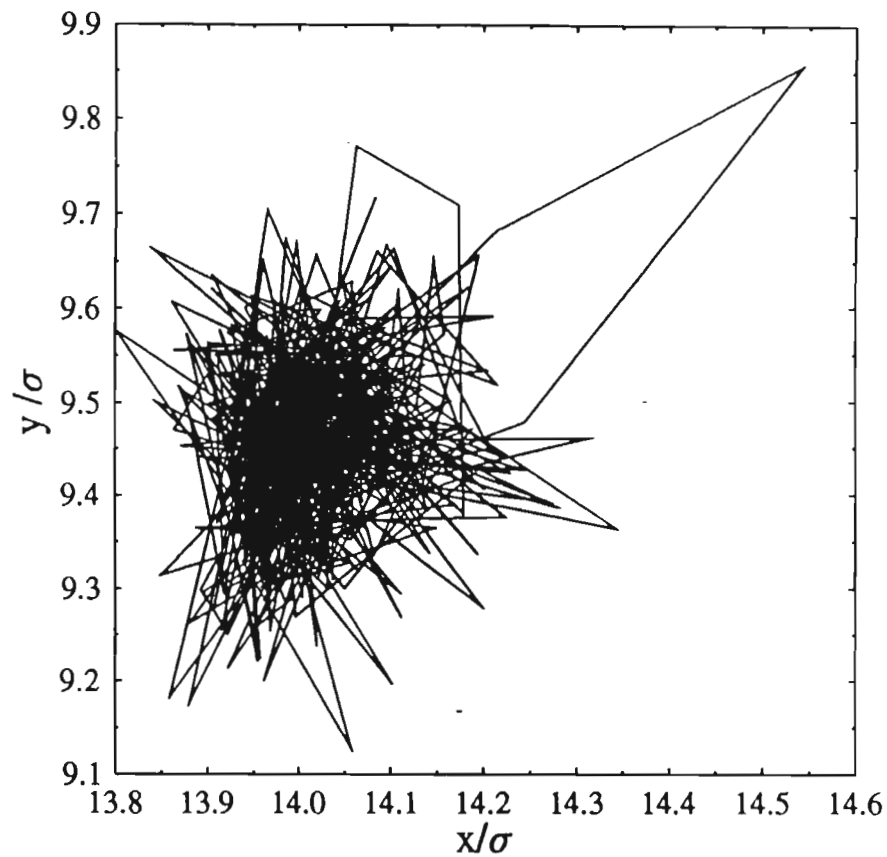


Figura 4.4: Trayectoria de la partícula de la figura 4.3, σ denota el diámetro de la partícula. El origen se escoge arbitrariamente.

4.5.2 Funciones de distribución

Como podemos ver en las figuras (4.3) y (4.4) las posiciones de la partícula están más concentradas en el área central de la trampa, es decir, es más probable encontrar a la partícula en el centro de la trampa que en cualquier otro lugar. La función de distribución de las posiciones se determina experimentalmente construyendo un histograma normalizado con los puntos de la figura (4.3).

Por otro lado están las predicciones teóricas cuya base es un modelo teórico

para describir el movimiento browniano de las partículas atrapadas. El movimiento browniano de una partícula libre es descrito por la ecuación de Langevin (4.1)

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -\beta\frac{d\mathbf{r}}{dt} + \mathbf{a}(t), \quad (4.1)$$

donde \mathbf{r} es la posición de la partícula, β el coeficiente de fricción del medio y $\mathbf{a}(t)$ la aceleración estocástica suministrada por aproximadamente 10^{21} colisiones entre las moléculas del solvente y la partícula coloidal. En el caso de que sobre la partícula actúe una fuerza externa, esta ecuación debe ser modificada. En nuestro caso, la fuerza externa proviene de la presión óptica. Si modelamos a ésta como armónica, la ec (4.1) se escribe

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} + \beta\frac{d\mathbf{r}}{dt} - \omega^2\mathbf{r} = \mathbf{a}(t). \quad (4.2)$$

Aquí, ω es la frecuencia de oscilación de resorte de la fuerza de atrape. $\mathbf{a}(t)$ es una función desconocida que varía extremadamente rápido, y de la que sólo podemos conocer ciertas propiedades estadísticas. En particular, esperamos que el promedio de la aceleración $\mathbf{a}(t)$ sea nulo, y que su correlación se anule a tiempos t_1 y t_2 , siempre que $t_1 \neq t_2$, es decir,

$$\langle \mathbf{a}(t) \rangle = 0 \quad (4.3)$$

y

$$\langle \mathbf{a}(t_1)\mathbf{a}(t_2) \rangle = A\delta(t_1-t_2). \quad (4.4)$$

De esta forma, resolver (4.2) se entenderá sólo en el sentido de especificar la distribución más probable para \mathbf{r} , la que se denota por $W(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}_0, \mathbf{u}_0)$ y representa la probabilidad de encontrar a la partícula en \mathbf{r} al tiempo t , dado que estaba en \mathbf{r}_0 con velocidad \mathbf{u}_0 en $t = t_0$. La ecuación (4.2) puede ser escrita en la forma

$$\left(\frac{d^2x}{dt^2} + \beta\frac{dx}{dt} - \omega_x^2x, \frac{d^2y}{dt^2} + \beta\frac{dy}{dt} - \omega_y^2y \right) = (a_x(t), a_y(t)). \quad (4.5)$$

siempre que la fricción sea isotrópica. De (4.5) vemos que es irrelevante para cuál de las dos direcciones se obtenga la solución, así que daremos la solución sólo para la variable x , la de y se obtiene haciendo el cambio $y \rightarrow x$. Los pasos para encontrar la solución no los daremos, pero pueden ser consultados

en el apéndice B. La solución estacionaria ($t \rightarrow \infty$) es

$$W(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{mw_x^2}{KT}} e^{-x^2 \sqrt{\frac{mw_x^2}{2KT}}}, \quad (4.6)$$

donde m es la masa de la partícula, K la constante de Boltzmann y T la

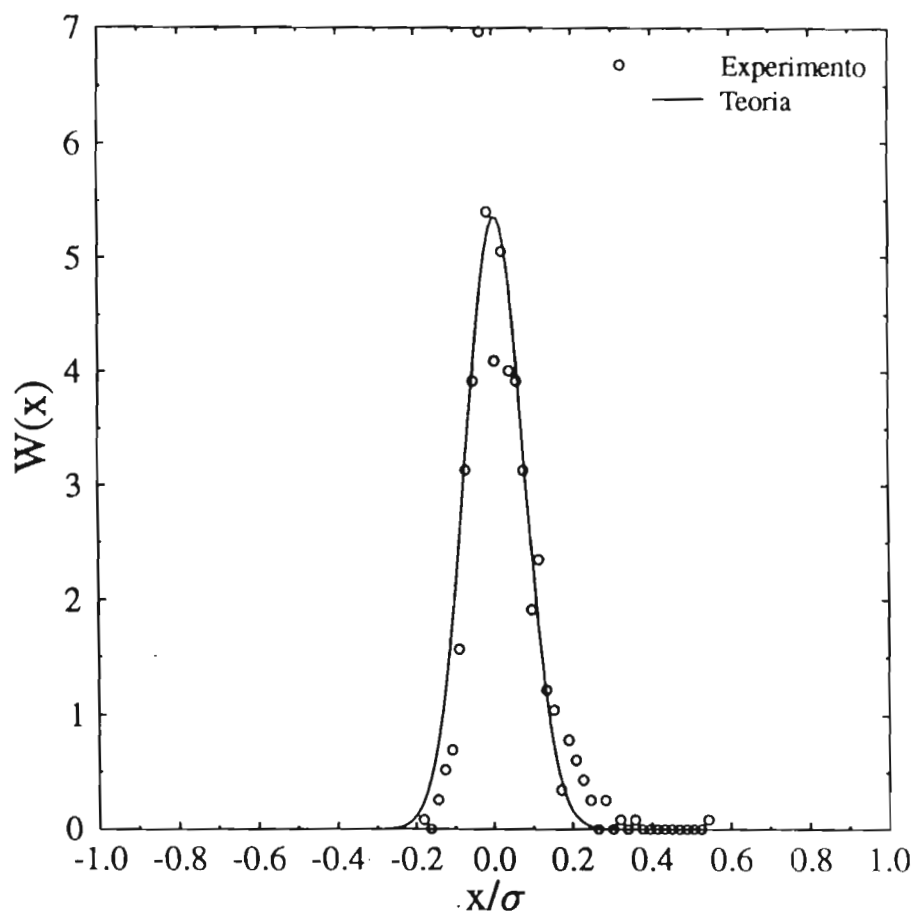


Figura 4.5: Función de distribución para la componente x de los puntos de la figura 4.3.

temperatura medida en grados Kelvin. De (4.6) se observa que si se conoce la desviación estándar de la distribución de posiciones, dada por

$$\sigma_x = \frac{KT}{mw_x^2} \quad y \quad \sigma_y = \frac{KT}{mw_y^2}, \quad (4.7)$$

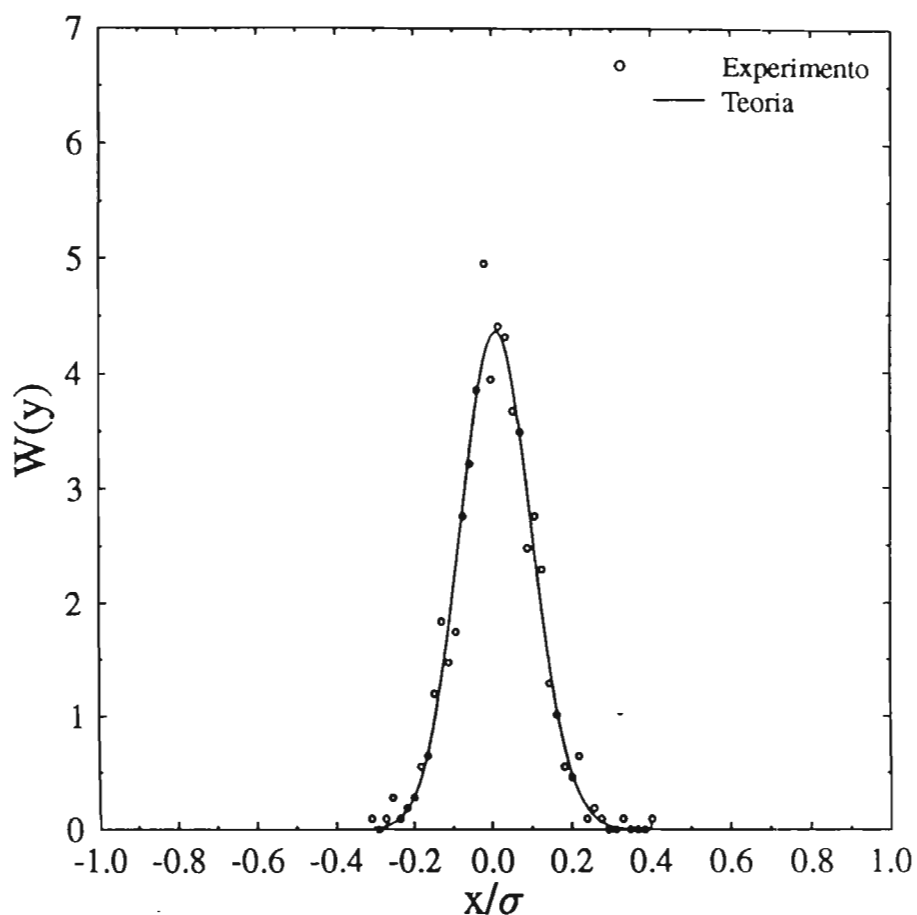


Figura 4.6: Función de distribución para la componente y de los puntos de la figura 4.3.

puede encontrarse la frecuencia de oscilación de la fuerza de atrape, ya que K es constante, y T y m son variables controlables. Por lo tanto, lo que hacemos es ajustar una gaussiana a los histogramas experimentales y calculamos su desviación estandar, para así obtener la frecuencia de oscilación para cada una de las direcciones. Las figuras (4.5) y (4.6) muestran los histogramas de posiciones en x y y , respectivamente, de la partícula en las figuras (4.3). También se muestra el ajuste gaussiano (línea continua). Los valores de ω_x y ω_y obtenidos de este ajuste y de (4.7) se muestran en la siguiente sección.

Como puede observarse, en (4.6) no aparece ningún parámetro dinámico

del sistema. En particular, no aparece el coeficiente de fricción β . Esto quiere decir que los valores así obtenidos de ω_x y ω_y no dependen de las interacciones entre partículas y placas de vidrio, mediadas por el solvente. Es en este sentido que a la caracterización de la fuerza de atrape por medio de la función de distribución estacionaria le llamaremos caracterización estática.

4.5.3 Cálculo de la frecuencia de oscilación de la fuerza de atrape

Después de hacer los ajustes para los histogramas de varias corridas experimentales, tomamos la desviación estandar para cada una de las gaussianas y de estas calculamos las frecuencias de oscilación con ayuda de la ecuación (4.7). En la tabla (4.1) se muestran los resultados para tres corridas; los primeros corresponden a las figuras mostradas.

$w_x(\text{seg}^{-1})$	$w_y(\text{seg}^{-1})$
209510.8	1703118
190473.4	165876.7
169539.6	233413.9

Tabla 4.1: Frecuencias de oscilación de la fuerza de atrape.

También podemos estimar un valor característico de la fuerza de atrape, según

$$\bar{F}_x = -m\omega^2 \bar{x}, \quad (4.8)$$

donde

$$\bar{x} = \frac{1}{2} \sqrt{\langle x^2 \rangle} \quad (4.9)$$

y

$$\langle x^2 \rangle = \frac{KT}{m\omega^2}. \quad (4.10)$$

Sustituyendo (4.10) en (4.8) obtenemos

$$\bar{F}_x = \sqrt{-m\omega^2 KT}. \quad (4.11)$$

Los valores obtenidos, en Newtons, se muestran en la tabla (4.2).

Como podemos observar, las fuerzas son pequeñas a nivel macroscópico,

$F_x(N)$	$F_y(N)$
1.194E-13	9.11E-14
1.01E-13	8.87E-14
9.07E-14	1.24E-13

Tabla 4.2: Valores característicos, en Newtons, de las fuerzas de atrape.

pero en el nivel microscópico son realmente muy elevadas. Esto resulta claro al calcular la aceleración a la que está sujeta la partícula. Tomando los valores característicos de la fuerza de atrape de la tabla (4.2) calculamos la aceleración, en gravedades terrestres g , a la que está sujeta la partícula. Los resultados se muestran en la tabla (4.3). La aceleración promedio para las direcciones x y y son $150.87 g$ y $149.23 g$ respectivamente. Como vemos, la partícula está sujeta a aceleraciones verdaderamente elevadas, y aproximadamente iguales. Su diferencia, de un 1.08%, puede ser el resultado de que la luz se encuentra parcialmente polarizada.

a_x/g	a_y/g
166.51	135.36
151.38	131.83
134.74	185.51

Tabla 4.3: Aceleración, en gravedades terrestres, de la partícula atrapada.

4.5.4 Desplazamiento cuadrático medio y coeficiente de autodifusión

En la presente sección se muestra un método alternativo de caracterización de trampas ópticas. Este se basa en la determinación experimental de propiedades dinámicas de la partícula atrapada. Específicamente el desplazamiento cuadrático medio ($\langle \Delta r^2(t) \rangle$) y el coeficiente de autodifusión a tiempos cortos (D_s^s). Al determinar dichas propiedades se puede obtener el valor de la frecuencia del oscilador armónico browniano (ω), asociado con la partícula, en función de las propiedades mencionadas.

A diferencia de una partícula no browniana, cuyo movimiento es descrito determinando su posición y momento como funciones del tiempo, el carácter estocástico del movimiento browniano, producto de las colisiones del solvente con la partícula coloidal, conducen a que la cantidad más simple que caracteriza a dicho movimiento no sea su momento o posición, sino su desplazamiento cuadrático medio, $\langle \Delta r^2(t) \rangle$, definido (en una dimensión) por

$$\langle \Delta r^2(t) \rangle = \frac{1}{2} \langle [\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(0)]^2 \rangle, \quad (4.12)$$

donde $\mathbf{r}(t)$ es el vector de posición de la partícula al tiempo t , y los paréntesis angulares significan promedio sobre un ensamble en equilibrio térmico. Además, su cálculo se lleva a cabo fácilmente una vez que conocemos las trayectorias de la partícula. Es preciso, sin embargo, aprovechar al máximo la información contenida en los archivos de datos de posiciones de la partícula. Una forma de lograr esto se basa en el hecho de que el sistema está en equilibrio, por lo que todas las configuraciones son equivalentes, y por tanto cualquiera puede ser tomada como origen de tiempo. Esto nos permite hacer un promedio temporal, por lo que el $\langle \Delta r^2(t) \rangle$ al tiempo t estará dado por

$$\langle \Delta r^2(t) \rangle = \frac{1}{2N_\tau} \sum_{\tau=\tau_1}^{\tau_{600}} [\mathbf{r}(t - \tau) - \mathbf{r}(\tau)]^2, \quad (4.13)$$

donde la suma corre sobre todos los orígenes de tiempo, representados por τ , que sea posible tomar para el tiempo t . Para t pequeños hay muchos de estos orígenes, y la estadística obtenida es mejor entre más pequeño sea t . N_τ es el número de orígenes de tiempo, es decir, el número de saltos que pueden construirse con un intervalo temporal t .

Se sabe que $\langle \Delta r^2(t) \rangle$ crece linealmente con el tiempo [13], siempre y cuando la concentración de partículas en el sistema sea baja, lo cual implica que las interacciones entre ellas puedan ser despreciadas. La expresión correspondiente es

$$\langle \Delta r^2(t) \rangle = D_0 t, \quad (4.14)$$

donde a la constante de proporcionalidad, D_0 , se le conoce como coeficiente de difusión de partícula libre, y está dada por la relación de Stokes-Einstein

$$D_0 = \frac{KT}{3\pi\eta\sigma}. \quad (4.15)$$

Aquí, K es la constante de Boltzmann, T la temperatura, σ el diámetro de la partícula y η la viscosidad de corte del solvente.

La forma en que se llevaron a cabo los cálculos de las cantidades mencionadas fué la siguiente: primeramente se calculó experimentalmente el $\langle \Delta r^2(t) \rangle$ correspondiente a la partícula atrapada, con ayuda de la ecuación (4.12) y los archivos de datos de sus posiciones. Esto se hizo para cada coordenada. Después, se calculó $\langle \Delta r^2(t) \rangle$ mediante la aproximación teórica representada por la ecuación (B.47) del apéndice B (para cada coordenada). En dicha expresión aparece el parámetro β , el cual representa al coeficiente de fricción dinámico que aparece en la ecuación de Langevin. Este coeficiente se encuentra directamente relacionado con la viscosidad del solvente, η , según

$$\beta = \frac{3\pi\sigma\eta}{m}. \quad (4.16)$$

Además, existe la relación $D_0 = \frac{KT}{m\beta} = \frac{KT}{3\pi\sigma\eta}$ entre D_0 y β , obtenida usando (4.15). Por esto, la forma en que se introduce β en la ec. (B.47) es mediante el cálculo experimental del $\langle \Delta r^2(t) \rangle$ correspondiente a una partícula *libre* (fuera de la trampa). Al moverse las partículas inducen flujos en el solvente que se propagan y son reflejados por las paredes. Estos flujos reflejados pueden encontrar en su camino a las partículas que originalmente los produjeron. De esta forma, las partículas interactúan con las paredes a través del solvente. A estas interacciones se les conocen como hidrodinámicas. En el nivel más sencillo de su descripción, puede considerarse que sus efectos en el movimiento de las partículas pueden describirse a través de una viscosidad efectiva. De esta forma, al determinar β de la manera arriba descrita, estamos considerando, en nuestros cálculos, los efectos de las interacciones hidrodinámicas.

En la figura (4.7) se muestra el desplazamiento cuadrático medio, en la dirección x , para la partícula en la trampa. La curva punteada corresponde al cálculo experimental y la línea continua al teórico. Esto último con la ecuación (B.47). Como podemos ver, el acuerdo entre teoría y experimento para tiempos de 0.3 segundos en adelante. Sin embargo, para tiempos menores que 0.1 segundos, el buen acuerdo se pierde. Esto puede ser debido a que el coeficiente de fricción dinámico β , calculado a partir de la expresión de Stokes-Einstein, no es correcto. Esta razón es justificable, puesto que el coeficiente de difusión que calculamos corresponde al movimiento de la par-

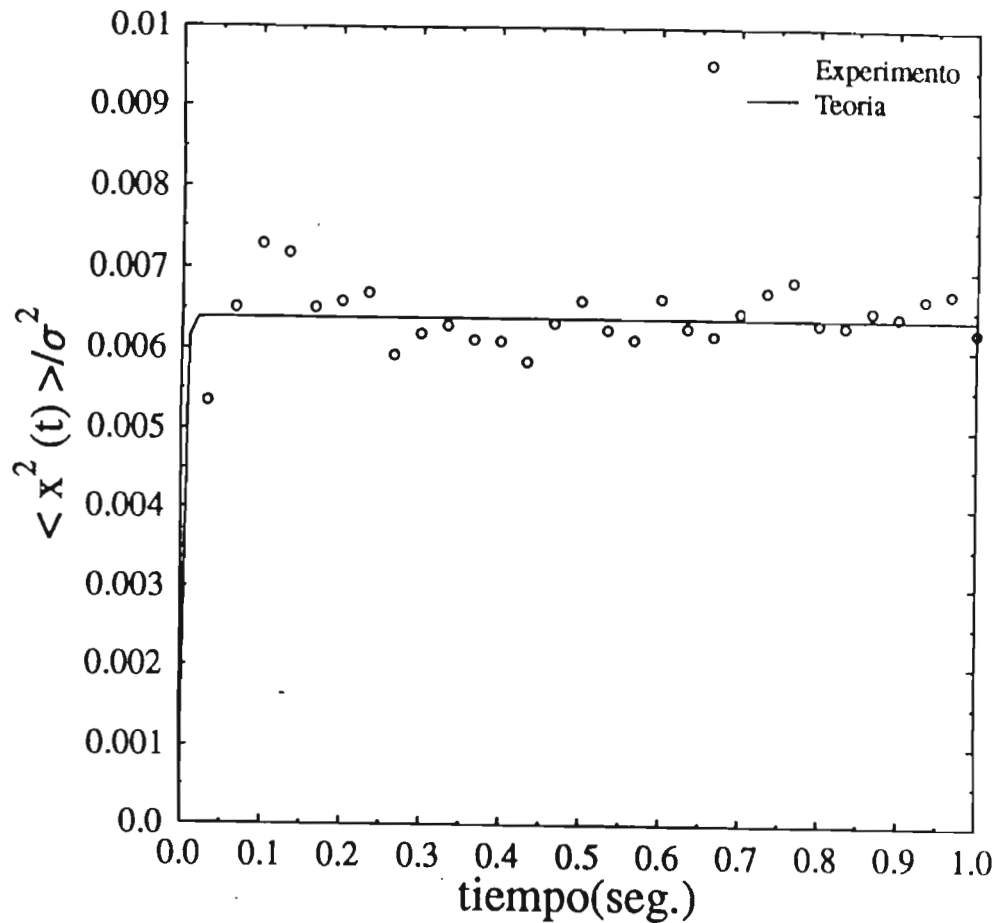


Figura 4.7: Desplazamiento cuadrático medio en la dirección x correspondiente a la figura 4.4.

tícula libre, pero confinada por dos paredes, mientras que la relación de Stokes-Einstein es para una partícula que se mueve libremente, pero sin paredes. Es importante mencionar que la separación entre las paredes y partícula atrapada fue menor a dos veces su diámetro, es decir, $1\mu m$. Esto indica que las interacciones hidrodinámicas pueden ser muy intensos. Esto puede traer como consecuencia que la partícula sienta una fricción más elevada que la calculada. Usando la ecuación (B.47) y variando el coeficiente de fricción β , encontramos que el resultado teórico se ajusta bien al desplazamiento

cuadrático medio experimental, si aumentamos β en un orden de magnitud más. Esto puede significar que las interacciones hidrodinámicas en estos sis-

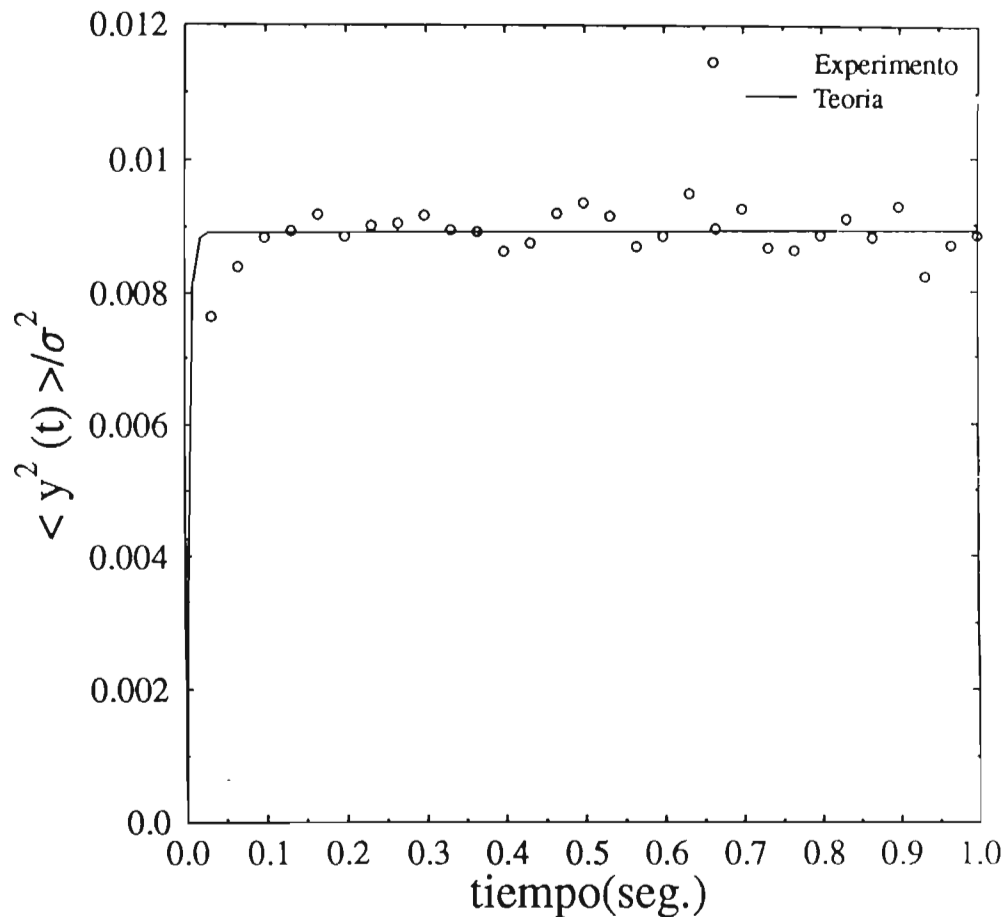


Figura 4.8: Desplazamiento cuadrático medio en la dirección y correspondiente a la figura 4.4.

temas son mucho más importantes de lo previsto. Al mismo tiempo, este puede ser un método para cuantificar sus efectos. Sin embargo, mucho más trabajo es necesario en esta dirección para poder entender el fenómeno de las interacciones hidrodinámicas entre una partícula y las paredes.

En la figura (4.8) se muestra el desplazamiento cuadrático medio en y . Como vemos, también ocurre que para tiempos mayores a 0.3 segundos la

curva y los puntos se comportan de manera similar. El motivo de esto es que para estos tiempos el desplazamiento cuadrático medio ya alcanzó su valor estacionario, dado por (4.10), como puede verse de (B.47). La frecuencia de resorte, fuerza característica y aceleración de la trampa calculadas con el valor asintótico de $\langle \Delta r^2(t) \rangle$ muestran valores muy parecidos a los de la sección anterior, como puede verse de la tabla (4.4).

$\omega_x(\text{seg}^{-1})$	$\omega_y(\text{seg}^{-1})$	$F_x(N)$	$F_y(N)$	a_x/g	a_y/g
194911.7	164945.7	1.04E-13	8.82E-14	159.91	131.10
167579.6	167661.0	8.96E-14	8.97E-14	133.18	133.25
166050.9	175062.5	8.88E-14	9.37E-14	131.97	139.13

Tabla 4.4: Frecuencia de oscilación, fuerza y Aceleración, de la partícula atrapada.

Las figuras (4.9) y (4.10) muestran el coeficiente de autodifusión correspondientes a las figuras (4.7) y(4.8). Debido al cambio de escala, en estas figuras el acuerdo entre teoría y experimento aparenta ser excelente.

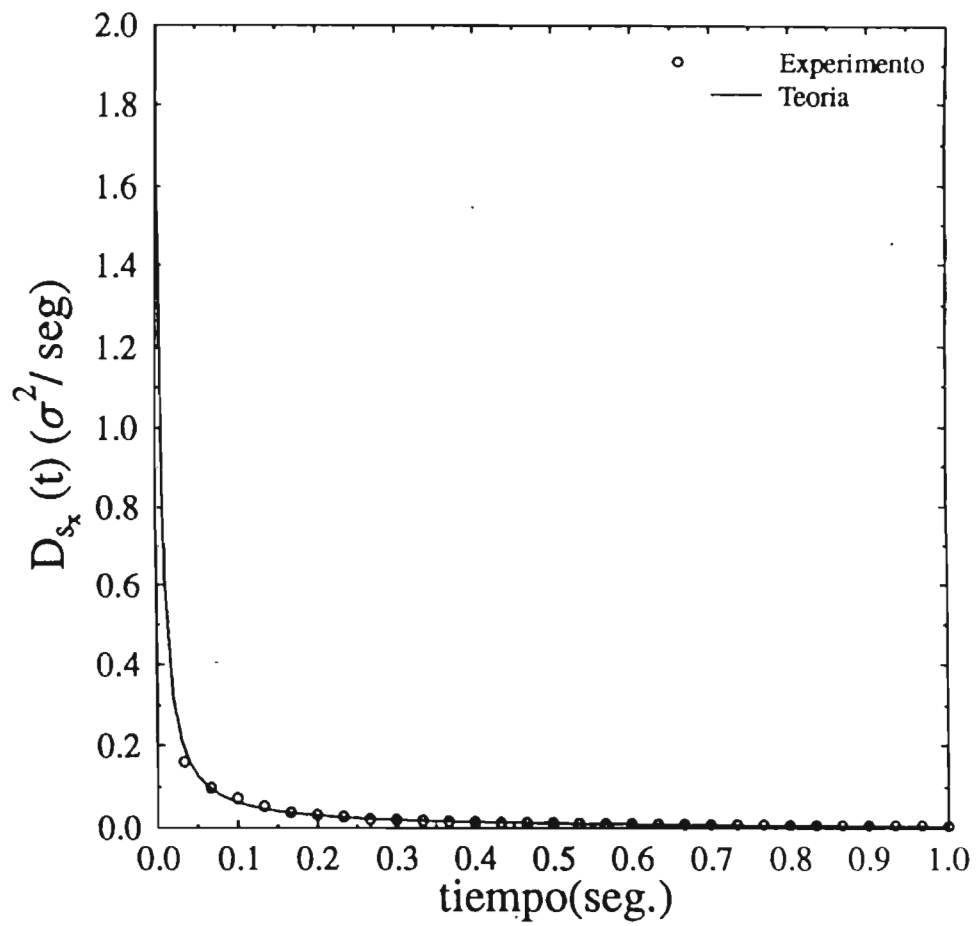


Figura 4.9: Coeficiente de autodifusión en la dirección x para la partícula en la trampa.

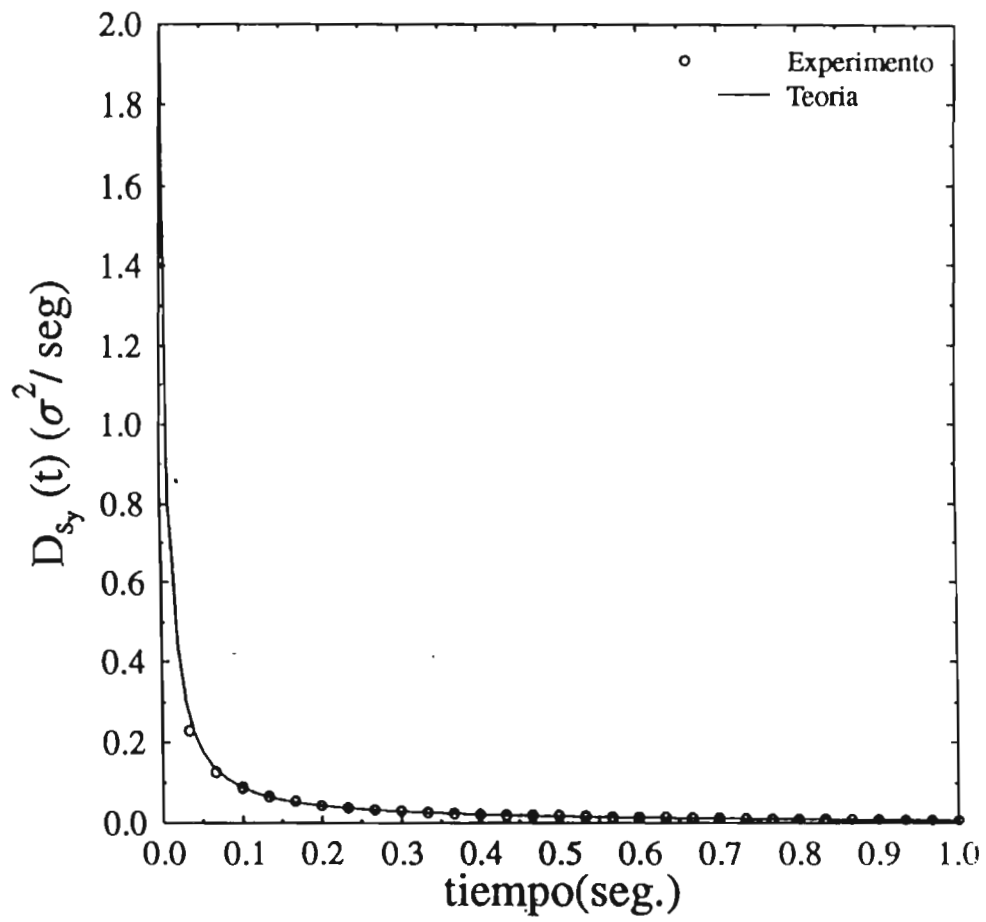


Figura 4.10: Coeficiente de autodifusión en la dirección y para la partícula en la trampa.

Capítulo 5

Conclusiones

Al finalizar este trabajo hemos conseguido la construcción de trampas ópticas y de la regulación de su fuerza de atrape. Lo hemos logrado enfocando con el objetivo de un microscopio óptico un haz de luz láser sobre una muestra compuesta por una suspensión acuosa de bolitas de poliestireno entre dos placas de vidrio, manteniendo bajo control la posición de la región focal y la intensidad del haz. Controlando la posición horizontal de la región focal se han obtenido avances en la manipulación de las partículas atrapadas, por ejemplo, su traslado a través del sistema o la separación de partículas adheridas a las paredes de vidrio.

La caracterización de las trampas se hizo sujetando partículas de tal forma que la región de atrape quede limitada al mínimo del potencial efectivo creado por la presión óptica ejercida por los fotones dispersados. Logrado esto, se utilizaron técnicas de videomicroscopía para medir la función de distribución de las posiciones de la partícula atrapada, su desplazamiento cuadrático medio y su coeficiente de autodifusión. Modelando al sistema como un oscilador armónico browniano bidimensional e invirtiendo por ajuste de los datos experimentales la solución estacionaria a la ecuación de Langevin correspondiente, se calculó la constante de resorte de la fuerza de atrape. Se obtuvieron aceleraciones restauradoras de la posición del orden de 10^2 gravedades.

Una vez implementada esta técnica, ella podría ser usada en el futuro para crear estructuras modelo de medios porosos, medir la fuerza de interacción entre partículas y los efectos de las interacciones hidrodinámicas mediadas por el solvente, entre otras posibilidades. En este último ejemplo ya hemos dado un pequeño paso adelante al incluir los efectos de las paredes en forma efectiva dentro de la viscosidad que siente una partícula libre browniana moviéndose

entre dos placas de vidrio, modelando la difusión de acuerdo a la aproximación de Stokes-Einstein. De esta manera hemos considerado los efectos de las interacciones hidrodinámicas en la caracterización de nuestras trampas.

Apéndice A

Método de solución de las ecuaciones de Maxwell

Como ya conocemos la forma analítica del campo electromagnético generado al enfocar un rayo laser en el modo TEM_{00} (ver cap. 2), nos queda encontrar la solución de las ecuaciones de Maxwell con condiciones de frontera en la superficie de la partícula dispersora. El sistema de coordenadas en el cual se resolverán las ecuaciones de Maxwell es el de coordenadas esféricas, con origen localizado en el centro de la partícula, como se muestra en la figura (A.1).

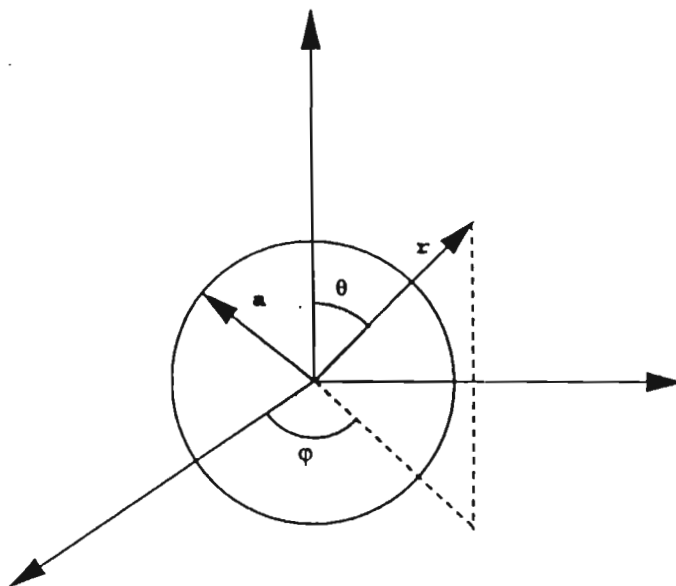


Figura A.1: En la figura se muestra esquemáticamente el sistema de coordenadas que se tomará para resolver las ecuaciones de Maxwell.

Donde r es el radio vector que localiza un punto en el espacio, y a el radio de la partícula. Se supondrá que los campos son armónicos, es decir, que varían como $e^{-i\omega t}$. La solución general de las ecuaciones de Maxwell [4] se obtiene expresando el campo como una suma de dos subcampos: el campo de onda eléctrico (designado por el superíndice e) para el cual se supone que la componente radial de campo magnético (${}^e H_r$) es nula, y el campo de onda magnética (designado por el superíndice m) para el cual se supone que la componente radial del campo eléctrico (${}^m E_r$) es nula. La ventaja de hacer esto, es que cada subcampo puede ser expresado como una función de un solo potencial escalar, el cual denotaremos por Π . En términos del potencial escalar asociado con el campo de onda eléctrico (${}^e \Pi$) y del campo de onda magnético (${}^m \Pi$), las expresiones para las componentes del campo electromagnético son las siguientes:

$$E_r = \frac{\partial^2(r^e \Pi)}{\partial^2 r^2} + k^2 r^e \Pi, \quad (\text{A.1})$$

$$E_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial^2(r^e \Pi)}{\partial \theta \partial r} + \frac{k^{II}}{r \sin \theta} \frac{\partial(r^m \Pi)}{\partial \phi}, \quad (\text{A.2})$$

$$E_\phi = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial^2(r^e \Pi)}{\partial \phi \partial r} - \frac{k^{II}}{r} \frac{\partial^2(r^m \Pi)}{\partial \theta^2}, \quad (\text{A.3})$$

$$H_r = \frac{\partial^2(r^m \Pi)}{\partial^2 r^2} + k^2 r^m \Pi, \quad (\text{A.4})$$

$$H_\theta = -\frac{k^I}{r \sin \theta} \frac{\partial(r^e \Pi)}{\partial \phi} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2(r^m \Pi)}{\partial \theta \partial r}, \quad (\text{A.5})$$

y

$$H_\phi = \frac{k^I}{r} \frac{\partial^2(r^e \Pi)}{\partial \theta^2} - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial^2(r^m \Pi)}{\partial \phi \partial r}. \quad (\text{A.6})$$

En las ecuaciones (A.1)-(A.6), $k^I = ik_0 \bar{\epsilon}$, $k^{II} = ik_0$ y $k = k_0 \sqrt{\bar{\epsilon}}$, donde $k_0 = \omega/c$, $\bar{\epsilon} = \epsilon + i4\pi\sigma/\omega$ y σ es la conductividad eléctrica de la partícula. Tanto ${}^e \Pi$ como ${}^m \Pi$ satisfacen la ecuación de Helmholtz

$$\nabla^2 \Pi + k^2 \Pi = 0. \quad (\text{A.7})$$

Las ecuaciones (A.1)-(A.6) con la ecuación (A.7) satisfacen las ecuaciones de Maxwell. La solución de la ecuación de Helmholtz es

$$r\Pi = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l [\tilde{A}_{lm}\psi_{lm}(kr) + \tilde{B}_{lm}\chi_{lm}(kr)]Y_{lm}(\theta, \phi), \quad (\text{A.8})$$

donde \tilde{A}_{lm} y \tilde{B}_{lm} son constantes arbitrarias, ψ_l y χ_l son las funciones de Bessel-Ricatti y $Y_{lm}(\theta, \phi)$ los armónicos esféricos. Los potenciales de las ondas eléctrica y magnética para los campos incidentes, dispersado e internos, los cuales están designados por los superíndices i , s y w deben expresarse en forma consistente con la ecuación (A.8). En lo que sigue, los subíndices int y ext se refieren a las propiedades dentro y fuera de la esfera, respectivamente. El potencial del campo incidente toma la forma,

$$r^e\Pi^i = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{i=-l}^l A_{lm}\psi_{lm}(k_{ext}r)Y_{lm}(\theta, \phi) \quad (\text{A.9})$$

y

$$r^m\Pi^i = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{i=-l}^l B_{lm}\psi_{lm}(k_{ext}r)Y_{lm}(\theta, \phi), \quad (\text{A.10})$$

en estas expresiones se han omitido las funciones χ_l , ya que estas no están definidas en el origen. Para los campos dispersados la forma de los potenciales eléctrico y magnético es

$$r^e\Pi^s = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{i=-l}^l a_{lm}\psi_{lm}(k_{ext}r)Y_{lm}(\theta, \phi) \quad (\text{A.11})$$

y

$$r^m\Pi^s = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{i=-l}^l b_{lm}\psi_{lm}(k_{ext}r)Y_{lm}(\theta, \phi), \quad (\text{A.12})$$

donde $\xi_l^{(1)} = \psi_l - i\chi_l$. Esta forma de construir $\xi_l^{(1)}$ asegura que para $r \rightarrow \infty$ la forma límite es el de una onda esférica saliente, la cual es la forma apropiada para un campo dispersado en la región de radiación. La forma del campo interno

$$r^e\Pi^w = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{i=-l}^l C_{lm}\psi_{lm}(k_{int}r)Y_{lm}(\theta, \phi) \quad (\text{A.13})$$

y

$$r^m\Pi^w = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{i=-l}^l d_{lm}\psi_{lm}(k_{int}r)Y_{lm}(\theta, \phi) \quad (\text{A.14})$$

Como ya tenemos la forma apropiada para los potenciales escalares, sólo necesitamos sustituir estas expresiones en las ecuaciones (A.1)-(A.6) para

conocer la forma radial y angular de los campos eléctricos y magnéticos. Después de hacer ésto, el campo eléctrico incidente toma la forma

$$E_r^{(i)} = \frac{1}{r^2} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l [l(l+1)A_{lm}\psi_l(k_{ext}r)Y_{lm}(\theta, \phi)], \quad (\text{A.15})$$

$$E_{\theta}^{(i)} = \frac{1}{r^2} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left(k_{ext}A_{lm}\psi'_{lm}(k_{ext}r) \frac{\partial Y_{lm}(\theta, \phi)}{\partial \theta} + imk_{ext}^{II}B_{lm}\psi_l(k_{ext}r) \frac{Y_{lm}(\theta, \phi)}{\sin \theta} \right) \quad (\text{A.16})$$

y

$$E_{\phi}^{(i)} = \frac{1}{r^2} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left(k_{ext}A_{lm}\psi'_{lm}(k_{ext}r) \frac{\partial Y_{lm}(\theta, \phi)}{\partial \theta} + imk_{ext}^{II}B_{lm}\psi_l(k_{ext}r) \frac{Y_{lm}(\theta, \phi)}{\sin \theta} \right) \quad (\text{A.17})$$

El campo dispersado queda

$$E_r^{(s)} = \frac{1}{r^2} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l [l(l+1)a_{lm}\xi_l^{(1)}(k_{ext}r)Y_{lm}(\theta, \phi)], \quad (\text{A.18})$$

$$E_{\theta}^{(s)} = \frac{1}{r} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left(k_{ext}a_{lm}\xi_l^{(1)'}(k_{ext}r) \frac{\partial Y_{lm}(\theta, \phi)}{\partial \theta} + imk_{ext}^{II}b_{lm}\xi_l^{(1)}(k_{ext}r) \frac{Y_{lm}(\theta, \phi)}{\sin \theta} \right) \quad (\text{A.19})$$

y

$$E_{\phi}^{(s)} = \frac{1}{r} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left(imk_{ext}a_{lm}\xi_l^{(1)'}(k_{ext}r) \frac{Y_{lm}(\theta, \phi)}{\sin \theta} - k_{ext}^{II}b_{lm}\xi_l^{(1)}(k_{ext}r) \frac{\partial Y_{lm}(\theta, \phi)}{\partial \theta} \right). \quad (\text{A.20})$$

Para el campo interno tenemos

$$E_r^{(w)} = \frac{1}{r^2} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l [l(l+1)c_{lm}\psi_l(k_{int}r)Y_{lm}(\theta, \phi)], \quad (\text{A.21})$$

$$E_{\theta}^{(w)} = \frac{1}{r} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left(k_{int} c_{lm} \psi_l'(k_{int} r) \frac{\partial Y_{lm}(\theta, \phi)}{\partial \theta} + im k_{int}^{II} d_{lm} \psi_l(k_{int} r) \frac{Y_{lm}(\theta, \phi)}{\sin \theta} \right) \quad (\text{A.22})$$

y

$$E_{\phi}^{(w)} = \frac{1}{r} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left(im k_{int} c_{lm} \psi_l'(k_{int} r) \frac{Y_{lm}(\theta, \phi)}{\sin \theta} - k_{int}^{II} d_{lm} \psi_l(k_{int} r) \frac{\partial Y_{lm}(\theta, \phi)}{\partial \theta} \right). \quad (\text{A.23})$$

Los campos magnéticos toman la forma siguiente:

Campo incidente

$$H_r^{(i)} = \frac{1}{r^2} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l [l(l+1) B_{lm} \psi_l(k_{ext} r) Y_{lm}(\theta, \phi)], \quad (\text{A.24})$$

$$H_{\theta}^{(i)} = \frac{1}{r} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left(k_{ext} B_{lm} \psi_{lm}'(k_{ext} r) \frac{\partial Y_{lm}(\theta, \phi)}{\partial \theta} - im k_{ext}^I A_{lm} \psi_l(k_{ext} r) \frac{Y_{lm}(\theta, \psi)}{\sin \theta} \right) \quad (\text{A.25})$$

y

$$H_{\phi}^{(i)} = \frac{1}{r} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left(k_{ext}^I A_{lm} \psi_l(k_{ext} r) \frac{\partial Y_{lm}(\theta, \phi)}{\partial \theta} + im k_{ext} B_{lm} \psi_l(k_{ext} r) \frac{Y_{lm}(\theta, \psi)}{\sin \theta} \right). \quad (\text{A.26})$$

Campo dispersado

$$H_r^{(s)} = \frac{1}{r^2} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l [l(l+1) b_{lm} \xi_l^{(1)}(k_{ext} r) Y_{lm}(\theta, \phi)], \quad (\text{A.27})$$

$$H_{\theta}^{(s)} = \frac{1}{r} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left(k_{ext} b_{lm} \xi_l^{(1)'}(k_{ext} r) \frac{\partial Y_{lm}(\theta, \phi)}{\partial \theta} - im k_{ext}^I a_{lm} \xi_l^{(1)}(k_{ext} r) \frac{Y_{lm}(\theta, \psi)}{\sin \theta} \right) \quad (\text{A.28})$$

y

$$H_{\phi}^{(s)} = \frac{1}{r} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left(imk_{ext} b_{lm} \xi_l^{(1)'}(k_{ext}r) \frac{Y_{lm}(\theta, \phi)}{\sin \theta} + k_{ext}^I a_{lm} \xi_l^{(1)}(k_{ext}r) \frac{\partial Y_{lm}(\theta, \phi)}{\partial \theta} \right). \quad (\text{A.29})$$

Campo interno

$$H_r^{(w)} = \frac{1}{r^2} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l [l(l+1) d_{lm} \psi_l(k_{int}r) Y_{lm}(\theta, \phi)], \quad (\text{A.30})$$

$$H_{\theta}^{(w)} = \frac{1}{r} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left(k_{int} d_{lm} \psi_l'(k_{int}r) \frac{\partial Y_{lm}(\theta, \phi)}{\partial \theta} - imk_{int}^I c_{lm} \psi_l(k_{int}r) \frac{Y_{lm}(\theta, \phi)}{\sin \theta} \right) \quad (\text{A.31})$$

y

$$H_{\phi}^{(w)} = \frac{1}{r} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left(imk_{int} d_{lm} \psi_l'(k_{int}r) \frac{Y_{lm}(\theta, \phi)}{\sin \theta} + k_{int}^I c_{lm} \psi_l(k_{int}r) \frac{\partial Y_{lm}(\theta, \phi)}{\partial \theta} \right). \quad (\text{A.32})$$

Aquí, el superíndice prima se refiere a la derivada de la función con respecto a su argumento. Los coeficientes que describen el campo dispersado, a_{lm} y b_{lm} , e interno, c_{lm} y d_{lm} , pueden ser relacionados con los coeficientes del campo incidente A_{lm} y B_{lm} , aplicando las condiciones de frontera, esto es, la continuidad de las componentes tangenciales de los campos eléctrico y magnético en la superficie de la partícula. De las ecuaciones (A.2), (A.3), (A.5) y (A.7) se puede observar que las condiciones de frontera serán satisfechas si

$$k^I r^e \Pi, k^{II} r^m \Pi, \frac{\partial(r^e \Pi)}{\partial r} \text{ y } \frac{\partial(r^m \Pi)}{\partial r}$$

son continuas en la superficie de la partícula. De la linealidad de las ecuaciones de Maxwell se puede construir un potencial externo total como la suma de los potenciales incidente y dispersado, esto es, $\Pi_{ext} = \Pi^i + \Pi^s$ y $\Pi_{int} = \Pi^w$. Sustituyendo las condiciones de frontera en las ecuaciones (A.9)-(A.14), resultan cuatro ecuaciones algebraicas que relacionan los coeficientes a_{lm} , b_{lm} , c_{lm} ,

y d_{lm} con A_{lm} y B_{lm} .

Por lo tanto, basta con determinar A_{lm} y B_{lm} para tener la solución a las ecuaciones de Maxwell. Expresando el campo incidente en armónicos esféricos tenemos

$$E_r^i = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l e_{lm} Y_{lm}(\theta, \phi), \quad (\text{A.33})$$

donde

$$e_{lm} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sin \theta E_r^i(a, \theta, \phi) Y_{lm}^*(\theta, \phi) d\theta d\phi. \quad (\text{A.34})$$

Ahora, evaluando la ecuación (A.34) en $r = a$ con la ecuación (A.33) se tiene

$$\frac{l(l+1)}{a^2} A_{lm} \psi_l(k_{ext}a) = e_{lm}. \quad (\text{A.35})$$

Por lo tanto

$$A_{lm} = \frac{a^2}{l(l+1)\psi_l(k_{ext}a)} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sin \theta E_r^i(a, \theta, \phi) Y_{lm}^*(\theta, \phi) d\theta d\phi. \quad (\text{A.36})$$

Similarmente, para el campo magnético,

$$B_{lm} = \frac{a^2}{l(l+1)\psi_l(k_{ext}a)} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sin \theta H_r^i(a, \theta, \phi) Y_{lm}^*(\theta, \phi) d\theta d\phi. \quad (\text{A.37})$$

De esta manera, los coeficientes A_{lm} y B_{lm} pueden ser calculados y los campos dispersados están completamente caracterizados conociendo la forma del campo incidente.

Apéndice B

Solución de la ecuación de Langevin...

El siguiente cálculo fue tomado de la cita [13].

En la presencia de una campo de fuerza armónico externo, la ecuación de Langevin en una dimensión se escribe como

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \beta \frac{dx}{dt} + A(t) + \omega^2 x = a(t). \quad (\text{B.1})$$

Lo que buscamos de esta ecuación son, por supuesto, las distribuciones de probabilidad $W(x, t; x_0, u_0)$, $W(u, t; x_0, u_0)$ y $W(x, u, t; x_0, u_0)$. Para obtener estas distribuciones, primero resolveremos la ecuación (B.1), considerada como una ecuación diferencial ordinaria. El método de solución más apropiado para nuestros propósitos es el de variación de parámetros. Aplicando este método expresamos la solución en términos de la ecuación homogénea:

$$x = c_1 \exp(\mu_1 t) + c_2 \exp(\mu_2 t), \quad (\text{B.2})$$

donde μ_1 y μ_2 son las raíces de

$$\mu^2 + \beta\mu + \omega^2 = 0; \quad (\text{B.3})$$

es decir

$$\mu_1 = -\frac{\beta}{2} + \left(\frac{1}{4}\beta^2 - \omega^2\right)^{\frac{1}{2}}; \quad \mu_2 = -\frac{\beta}{2} - \left(\frac{1}{4}\beta^2 - \omega^2\right)^{\frac{1}{2}}. \quad (\text{B.4})$$

Supondremos que la solución de la ecuación (B.1) es de la forma (B.2), donde c_1 y c_2 son funciones del tiempo, restringidas a satisfacer la ecuación

$$\exp(\mu_1 t) \frac{dc_1}{dt} + \exp(\mu_2 t) \frac{dc_2}{dt} = 0. \quad (\text{B.5})$$

De la ecuación (B.1) derivamos la relación

$$\mu_1 \exp(\mu_1 t) \left(\frac{dc_1}{dt} \right) + \mu_2 \exp(\mu_2 t) \left(\frac{dc_2}{dt} \right) = c_1(t), \quad (\text{B.6})$$

resolviendo las ecuaciones (B.5) y (B.6) obtenemos las integrales

$$c_1 = \frac{1}{\mu_1 - \mu_2} \int_0^t \exp(-\mu_1 \xi) a(\xi) d\xi + c_{10} \quad (\text{B.7})$$

y

$$c_2 = \frac{1}{\mu_1 - \mu_2} \int_0^t \exp(-\mu_2 \xi) a(\xi) d\xi + c_{20}, \quad (\text{B.8})$$

donde c_{10} y c_{20} son constantes. Sustituyendo c_1 y c_2 en (B.2) tenemos la solución

$$\begin{aligned} x = & \frac{1}{\mu_1 - \mu_2} \left(\exp(\mu_1 t) \int_0^t \exp(-\mu_1 \xi) a(\xi) d\xi - \right. \\ & \left. \exp(\mu_2 t) \int_0^t \exp(-\mu_2 \xi) a(\xi) d\xi \right) + c_{10} \exp(\mu_1 t) + \\ & c_{20} \exp(\mu_2 t). \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

Derivando la ecuación anterior respecto al tiempo obtenemos la velocidad, dada por

$$\begin{aligned} u = & \frac{1}{\mu_1 - \mu_2} \left(\mu_1 \exp(\mu_1 t) \int_0^t \exp(-\mu_1 \xi) a(\xi) d\xi - \right. \\ & \left. \mu_2 \exp(\mu_2 t) \int_0^t \exp(-\mu_2 \xi) a(\xi) d\xi \right) + c_{10} \exp(\mu_1 t) + \\ & c_{20} \exp(\mu_2 t). \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

Las constantes c_{10} y c_{20} pueden ser determinadas de las condiciones $x = x_0$ y $u = u_0$ en $t=0$. De esta manera, se obtiene que

$$c_{10} = -\frac{x_0 \mu_2 - u_0}{\mu_1 - \mu_2} \quad \text{y} \quad c_{20} = \frac{x_0 \mu_1 - u_0}{\mu_1 - \mu_2}. \quad (\text{B.11})$$

Sustituyendo (B.11) en (B.9) y (B.10) tenemos

$$\begin{aligned} x + \frac{1}{\mu_1 - \mu_2} [(x_0 \mu_2 - u_0) \exp(\mu_1 t) - \\ (x_0 \mu_1 - u_0) \exp(\mu_2 t)] = \int_0^t a(\xi) \psi(\xi) \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

y

$$u + \frac{1}{\mu_1 - \mu_2} [\mu_1(x_0\mu_2 - u_0) \exp(\mu_1 t) - \mu_2(x_0\mu_1 - \mu_2) \exp(\mu_2 t)] = \int_0^t a(\xi) \phi(\xi) d\xi, \quad (\text{B.13})$$

donde se ha escrito

$$\psi(\xi) = \frac{1}{\mu_1 - \mu_2} [\exp(\mu_1(t - \xi)) - \exp(\mu_2(t - \xi))] \quad (\text{B.14})$$

$$\phi(\xi) = \frac{1}{\mu_1 - \mu_2} [\mu_1 \exp(\mu_1(t - \xi)) - \mu_2 \exp(\mu_2(t - \xi))]. \quad (\text{B.15})$$

De (B.9) y (B.10) se observa que la posición y la velocidad quedan determinadas si se conocen las expresiones integrales de cada una de ellas, pero esto es imposible dado el carácter aleatorio de la función $a(t)$, de aquí que sólo podamos determinar las funciones de distribución de x y u . Para obtener estas distribuciones, se hace uso de los siguientes lemas [13]:

Lema I. Sea

$$R = \int_0^t \psi(\xi) a(\xi) d\xi. \quad (\text{B.16})$$

Entonces, la distribución de probabilidad de R esta dada por

$$W(R) = \frac{1}{[4\pi \int_0^t \psi^2(\xi) d\xi]^{\frac{1}{2}}} \exp\left(-|R^2|/4q \int_0^t \psi^2(\xi) d\xi\right). \quad (\text{B.17})$$

Lema II. Sea

$$R = \int_0^t \psi(\xi) a(\xi) d\xi \quad (\text{B.18})$$

y

$$S = \int_0^t \phi(\xi) a(\xi) d\xi, \quad (\text{B.19})$$

entonces, la distribución de probabilidad bivariada de R y S está dada por

$$W(R, S) = \frac{1}{8\pi^2(FG - H^2)^{\frac{1}{2}}} \exp[-(G|R|^2 - 2HR \cdot S + F|S|^2)/2(FG - H^2)], \quad (\text{B.20})$$

donde

$$F = 2q \int_0^t \psi^2(\xi) d\xi; \quad G = 2q \int_0^t \phi^2(\xi) d\xi \quad \text{y} \quad H = 2q \int_0^t \phi(\xi) \psi(\xi) d\xi. \quad (\text{B.21})$$

Aquí, q es una función que depende del comportamiento de $W(R)$. En nuestro caso, q es tal que para $t \rightarrow \infty$ la función de distribución de velocidades $W(u, t; x_0, u_0)$ coincide con la función de distribución de velocidades de Maxwell para $t \rightarrow \infty$, y su valor es el siguiente,

$$q = \beta \frac{KT}{m}. \quad (\text{B.22})$$

Entonces, para determinar las distribuciones $W(x, t, x_0, t_0)$, $W(u, t, u_0, t_0)$ y $W(x, u, t, x_0, u_0)$ se deben encontrar las expresiones de

$$\int_0^t \psi^2(\xi) d\xi; \int_0^t \phi^2(\xi) d\xi \text{ y } \int_0^t \psi(\xi) \phi(\xi) d\xi. \quad (\text{B.23})$$

Con $\psi(\xi)$ y $\phi(\xi)$ definidos como en las ecuaciones (B.14) y (B.15) se tiene que

$$\int_0^t \psi^2(\xi) \xi = \frac{1}{(\mu_1 - \mu_2)^2} \left[\frac{1}{2\mu_1\mu_2} (\mu_2 \exp(2\mu_1 t) + \mu_1 \exp(2\mu_2 t)) - \frac{2}{\mu_1 + \mu_2} (\exp[(\mu_1 + \mu_2)t] - 1) - \frac{\mu_1 + \mu_2}{2\mu_1\mu_2} \right], \quad (\text{B.24})$$

$$\int_0^t \psi^2(\xi) \xi = \frac{1}{(\mu_1 - \mu_2)^2} \left[\frac{1}{2} (\mu_1 \exp(2\mu_1 t) + \mu_2 \exp(2\mu_2 t)) - \frac{2\mu_1\mu_2}{\mu_1 - \mu_2} (\exp[(\mu_1 + \mu_2)t] - 1) - \frac{\mu_1 + \mu_2}{2} \right], \quad (\text{B.25})$$

y

$$\int_0^t \psi(\xi) \phi(\xi) = \frac{1}{2(\mu_1 - \mu_2)^2} (\exp(\mu_1 t) - \exp(\mu_2 t))^2. \quad (\text{B.26})$$

En este punto, es conveniente introducir en las expresiones anteriores los valores de μ_1 y μ_2 explícitamente. Según la ecuación (B.5), encontramos que las cantidades del lado izquierdo de las ecuaciones (B.9) y (B.10) se convierten, respectivamente, en

$$x - x_0 e^{-\beta t/2} \cosh\left(\frac{1}{2}\beta_{1x} t\right) - \frac{x_0 \beta + 2\mu_0}{\beta_{1x}} e^{-\beta t/2} \sinh\left(\frac{1}{2}\beta_{1x} t\right) \quad (\text{B.27})$$

y

$$u - u_0 e^{-\beta t/2} \cosh\left(\frac{1}{2}\beta_{1x} t\right) + \frac{2x_0 \omega^2 + \beta u_0}{\beta_{1x}} e^{-\beta t/2} \sinh\left(\frac{1}{2}\beta_{1x} t\right) \quad (\text{B.28})$$

donde hemos introducido la cantidad β_{1x} definida por

$$\beta_{1x} = (\beta^2 - 4\omega^2)^{\frac{1}{2}}. \quad (\text{B.29})$$

Similarmente, para (B.23) se encuentra que

$$\int_0^t \psi^2(\xi) d\xi = \frac{1}{2\omega^2} - \frac{e^{-\beta t}}{2\omega^2 \beta_{1x}^2 \beta} (2\beta^2 \sinh^2(\frac{1}{2}\beta_{1x}t) + \beta \beta_{1x} \sinh(\beta_{1x}t) + \beta^2), \quad (\text{B.30})$$

$$\int_0^t \phi^2(\xi) d\xi = \frac{1}{2\beta} - \frac{e^{-\beta t}}{2\beta_{1x}^2 \beta} (2\beta^2 \sinh^2(\frac{1}{2}\beta_{1x}t) - \beta \beta_{1x} \sinh(\beta_{1x}t) + \beta^2), \quad (\text{B.31})$$

y

$$\int_0^t \psi(\xi)\phi(\xi) = 2\beta_{1x}^{-2} e^{\beta t} \sinh(\frac{1}{2}\beta_{1x}t). \quad (\text{B.32})$$

Las expresiones anteriores permanecen finitas y reales aun cuando β_{1x} es cero o imaginario. Así, mientras todas las expresiones permanecen válidas para el caso *sobreamortiguado* (β_{1x} real), la fórmula apropiada para los caso periódico (β_{1x} imaginario) y aperiódico (β_{1x} cero) pueden ser fácilmente encontrados sólo reemplazando

$$\cosh(\frac{1}{2}\beta_{1x}t), \beta_{1x}^{-1} \sinh(\frac{1}{2}\beta_{1x}t) \text{ y } \beta_{1x}^{-1} \sin(\beta_{1x}t), \quad (\text{B.33})$$

respectivamente, por

$$\cos(\omega_1 t), \frac{1}{2\omega_1} \sin(\omega_1 t) \text{ y } \frac{1}{2\omega_1} \sin(2\omega_1 t), \quad (\text{B.34})$$

donde

$$\omega_1 = (\omega^2 - \frac{1}{4}\beta^2) \quad (\text{B.35})$$

en el caso periódico, y por

$$1, \frac{1}{2}t \text{ y } t \quad (\text{B.36})$$

en el caso aperiódico.

Como ya se ha remarcado, podemos inmediatamente escribir las funciones de distribución para las cantidades al lado izquierdo de las ecuaciones (B.12) y (B.13) (es decir las cantidades (B.27) (B.28)) de acuerdo a los lemas I y II. La función de distribución para x es como sigue

$$W(x, t; x_0, u_0) = \left[\frac{m}{4\pi\beta KT \int_0^t \psi^2(\xi) d\xi} \right]^{\frac{1}{2}} \times \quad (\text{B.37})$$

$$\exp \frac{- \left[x - x_0 e^{-\frac{\beta t}{2}} \left(\cosh \frac{1}{2} \beta_{1x} t + \frac{\beta}{\beta_{1x}} \sinh \frac{1}{2} \beta_{1x} t \right) - \frac{2u_0}{\beta_{1x}} \exp \frac{\beta t}{2} \right]^2}{\frac{2KT}{m\omega_x^2} \left\{ 1 - \exp -\beta t \left(\frac{2\beta^2}{\beta_{1x}^2} \sinh^2 \frac{1}{2} \beta_{1x} t + \frac{\beta}{\beta_{1x}} \sinh \beta_{1x} t + 1 \right) \right\}}. \quad (\text{B.38})$$

Se obtienen también expresiones similares para $W(u, t; x_0, u_0)$ y $W(x, u, t; x_0, u_0)$, pero sólo daremos la expresión para los desplazamientos. La razón es que esta función es la que nos interesa, porque es precisamente de aquí que obtendremos el desplazamiento cuadrático medio, y de este, el coeficiente de autodifusión.

Las cantidades de más interés son los momentos $\langle x \rangle$, $\langle u \rangle$, $\langle x^2 \rangle$, $\langle u^2 \rangle$ y $\langle xu \rangle$, cuya expresión es

$$\begin{aligned} \langle x \rangle &= x_0 \exp\left(-\frac{\beta t}{2}\right) \left(\cosh \frac{1}{2} \beta_{1x} t + \frac{\beta}{\beta_{1x}} \sinh \frac{1}{2} \beta_{1x} t \right) + \\ &\quad \frac{2u_0}{\beta_{1x}} e^{(-\beta t/2)} \sinh \frac{1}{2} \beta_{1x} t, \end{aligned} \quad (\text{B.39})$$

$$\begin{aligned} \langle u \rangle &= u_0 \exp -\frac{\beta t}{2} \left(\cosh \frac{1}{2} \beta_{1x} t - \frac{\beta}{\beta_{1x}} \sinh \frac{1}{2} \beta_{1x} t \right) - \\ &\quad \frac{2x_0 \omega^2}{\beta_{1x}} \exp^{-\frac{\beta t}{2}} \sinh \frac{1}{2} \beta_{1x} t, \end{aligned} \quad (\text{B.40})$$

$$\begin{aligned} \langle x^2 \rangle &= \langle x \rangle^2 + \frac{KT}{m\omega_x^2} \left\{ 1 - \exp^{-\beta t} \left(2 \frac{\beta^2}{\beta_{1x}^2} \sinh^2 \frac{1}{2} \beta_{1x} t + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \frac{\beta}{\beta_{1x}} \sinh \beta_{1x} t + 1 \right) \right\} \end{aligned} \quad (\text{B.41})$$

$$\begin{aligned} \langle u^2 \rangle &= \langle u \rangle^2 + \frac{KT}{m} \left\{ 1 - \exp^{-\beta t} \left(2 \frac{\beta^2}{\beta_{1x}^2} \sinh^2 \beta_{1x} t - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \frac{\beta}{\beta_{1x}} \sinh \beta_{1x} t + 1 \right) \right\}. \end{aligned} \quad (\text{B.42})$$

y

$$\langle xu \rangle = \langle x \rangle_{av} \langle u \rangle_{av} + \frac{4\beta KT}{\beta_{1x}^2 m} + e^{-\beta t} \sinh^2 \frac{1}{2} \beta_{1x} t. \quad (\text{B.43})$$

Las expresiones anteriores son los valores promedio de cantidades en el tiempo t con valores asignados de x y u (normalmente x_0 y u_0) al tiempo $t = 0$. Se puede ver que

$$\left. \begin{aligned} \langle x \rangle &\rightarrow 0; \langle u \rangle \rightarrow 0; \langle xu \rangle \rightarrow 0, \\ \langle x^2 \rangle &\rightarrow KT/m\omega^2; \langle u^2 \rangle = KT/m. \end{aligned} \right\} t \rightarrow \infty$$

Promediando los momentos sobre todos los valores de u_0 y recordando que

$$\langle u_0 \rangle = 0; \quad \text{y} \quad \langle u^2 \rangle = KT/m, \quad (\text{B.44})$$

se obtienen las ecuaciones

$$\langle\langle x \rangle\rangle = x_0 \exp^{-\frac{\beta t}{2}} \left(\cosh \frac{1}{2} \beta_{1x} t + \frac{\beta}{\beta_{1x}} \sinh \frac{1}{2} \beta_{1x} t \right), \quad (\text{B.45})$$

$$\langle\langle u \rangle\rangle = -\frac{2x_0\omega^2}{\beta_{1x}} e^{-\frac{\beta t}{2}} \sinh \frac{1}{2} \beta_{1x} t, \quad (\text{B.46})$$

$$\langle\langle x^2 \rangle\rangle = \frac{KT}{m\omega^2} + \left(x_0^2 - \frac{KT}{m\omega^2} \right) \exp -\beta t \left(\cosh \frac{1}{2} \beta_{1x} t + \frac{\beta}{\beta_{1x}} \sinh \frac{1}{2} \beta_{1x} t \right) \quad (\text{B.47})$$

$$\langle\langle u^2 \rangle\rangle = \frac{KT}{m} + \frac{4\omega}{\beta_{1x}^2} \left(x_0^2 - \frac{KT}{m\omega^2} \right) e^{-\beta t} \sinh^2 \frac{1}{2} \beta_{1x} t, \quad (\text{B.48})$$

$$\langle\langle xu \rangle\rangle = \frac{2\omega^2}{\beta_{1x}} \left(\frac{KT}{m\omega^2} - x_0^2 \right) e^{\beta t} \sinh \frac{1}{2} \beta_{1x} t \left(\cosh \frac{1}{2} \beta_{1x} t + \frac{\beta}{\beta_{1x}} \sinh \frac{1}{2} \beta t \right). \quad (\text{B.49})$$

Con estas expresiones realizamos los cálculos en las secciones 4.5.3 y 4.5.4.

Bibliografía

- [1] A. Ashkin Phys. Rev. Lett. **24**, 156 (1970).
- [2] Steven Chu Scientific American., 48 (February, 1992).
- [3] C. C. Bradley, C. A. Sacket, J. J Tollet y R. G Hulet, Phys. Rev. Lett. **75** (2), 1687 (1995).
- [4] J. P. Barton, D. R. Alexander y S. A. Shaub, Appl. Phys. **64** (4), 1632 (1988).
- [5] J. P. Barton, D. R. Alexander y S. A. Shaub, Appl.Phys. **65** (8), 2900 (1988).
- [6] J. P. Barton, D. R. Alexander y S. A. Shaub, Appl. Phys. **66** (7), 2800 (1989).
- [7] J. P. Barton, D. R. Alexander y S. A. Shaub, Appl. Phys. **66** (10), 4594 (1989).
- [8] A. Ashkin y J. M. Dziedzic, Appl. Phys. Lett. **24** (7), 586 (1974).
- [9] John C. Crocker y David G. Grier Phys. Rev. Lett. **73** (2), 352 (1994).
- [10] Shinya Inoué, Video Microscopy, (cuarta ed. Plenum Press New York 1994).
- [11] J. D. Jackson, Clasical Electrodynamics, (2nd ed. Wiley, New York 1975).
- [12] L. W. Davies, Phys. Rev. A. **19** (3), 1177 (1979).
- [13] S. Chandrasekhar, Reviews of Modern Physics, **15** (1), 1 (1943).

- [14] Rafael Gonzales C. y Richard E. Woods, Digital Image Processing, Reading Mass. Addison Wesley. 1992.
- [15] M. Doi y S. F. Edwards. The Theory of Polymer Dynamics, Clarendon Press-Oxford 1986.
- [16] Craig F. Bohren, Donald R. Huffman Absorption and Scattering of Light by Small Particles, (John Wiley, 1983).