



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE SAN LUIS POTOSÍ
FACULTAD DE CIENCIAS



INERCIA EN LA CONVECCIÓN
GRANULAR.

TESIS PROFESIONAL

para obtener el título de

LICENCIADO EN FÍSICA

Presenta:

GUSTAVO MANUEL RODRÍGUEZ LIÑÁN

Asesor de Tesis: DR. YURI NAHMAD MOLINARI

SAN LUIS POTOSÍ, S. L. P.



Índice general

Agradecimientos	v
1. Introducción.	1
1.1. ¿Qué es la materia granular?	1
1.2. Importancia del estudio de la materia granular y sus implicaciones.	2
1.3. Historia del estudio de los materiales granulares.	3
1.4. Arqueo y formación de cadenas	5
1.5. Convección de un fluido simple y convección granular	5
1.5.1. Convección en fluidos simples.	5
1.5.2. Convección en medios granulados	6
1.6. El problema de las nueces del Brasil y la segregación granular.	8
2. Desarrollo de los experimentos.	13
2.1. Velocidad de convección.	14
2.2. Tiempos de vuelo.	16
2.3. Fricción con las paredes, alto y ancho de la columna.	18
3. Resultados experimentales.	19
3.1. Velocidad de convección.	19
3.2. Tiempos de vuelo.	22
3.3. Fricción con las paredes.	27
3.4. Altura de la columna.	28
3.5. Ancho del recipiente.	29
4. Análisis y discusión de los resultados	33
4.1. Marco teórico	33
4.1.1. Ecuaciones de movimiento.	33
4.1.2. Tiempo de vuelo.	37
4.2. Análisis de los resultados.	39

ÍNDICE GENERAL

4.2.1. Resultados para la velocidad de convección	39
4.2.2. Resultados para tiempos de vuelo	43
4.2.3. Resultados para fricción con las paredes, ancho y alto de la columna.	44
Conclusiones	47
Trabajo a futuro.	49
Bibliografía	51

Agradecimientos

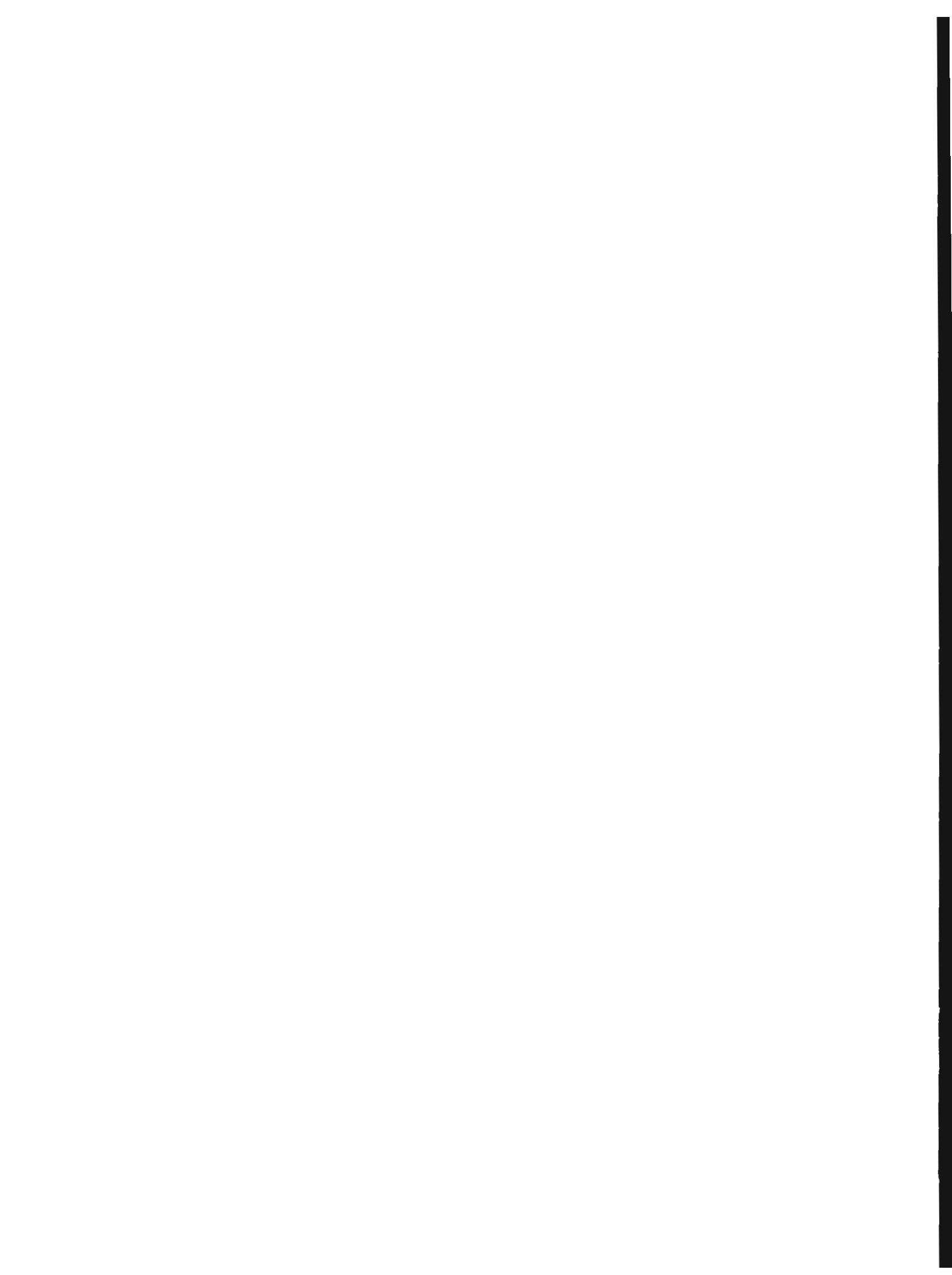
A mis padres y mi familia que me apoyaron durante todo el transcurso de mi educación.

A mi asesor de tesis, el Dr. Yuri Nahmad, sin el cual, haber realizado este trabajo de tesis habría sido imposible.

Al proyecto PROMEP PTC-15013 y a los fondos C03-FAI-11-12.47 del Fondo de apoyo a la Investigación que hicieron posible este trabajo de tesis por el financiamiento y la beca otorgados.

A todos aquellos que me ayudaron aunque sea un poco a sacar adelante este trabajo: Dr. Armando Encinas Oropesa, Mónica Soto Tapiz, Nayeli Maira López Alanís, Joel y Edgar Briones Hernández, Dr. José Elías Pérez López, Ing. María de Lourdes González González, Jorge Luis Menchaca Arredondo, Mary Carmen Peña Gomar, Ferdinando Tristán López, Dr. Jürgen Engelfried, Dr. Antonio Morelos Pineda, Luz del Carmen Nuche Garza, Ericka Reyes Sánchez, Clifford Benjamín Compeán Jasso, Eric Vázquez Jáuregui, Dr. Miguel Ángel Ojeda López, Araceli Solís Gómez, Dr. Bernardo José Luis Arauz Lara, Ma. de los Ángeles Ramírez Saito, Efrén Alberto Andablo Reyes, Andrés García Castillo, Dr. Juan Martín Montejano Carrizales, Dr. Pedro Villaseñor González, Dr. Felipe de Jesús Rábago Bernal, Dr. Enrique González Tovar, Pedro Ezequiel Ramírez González, Pablo Guillermo Nieto Delgado, Rigoberto Juárez Maldonado, Abraham de la Cruz Martínez, a la administración del Instituto de Física (Araceli Cortez, Araceli Becerra, Ma. de Jesús Segura, Elsa Cabrera, Yureyda Camacho.) y a todos los que no recuerdo en este momento pero que les agradezco sinceramente.

Un especial agradecimiento a Ángel Garcimartín, Diego Maza, Martín Pastor, Iker Zuriguel, Alberto, Cristian, Sergio, etc. por su hospitalidad en Pamplona.



Capítulo 1

Introducción.

1.1. ¿Qué es la materia granular?

Se conoce como materia granular a las grandes conglomeraciones de partículas macroscópicas sólidas, en contacto unas con otras. Generalmente no existe cohesión entre ellas, y las fuerzas que sienten mutuamente son esencialmente sólo repulsivas de tal manera que la forma del material es determinado únicamente por los límites externos y por la gravedad.

Aun a pesar de esta aparente simplicidad, los materiales granulares se comportan de diferente manera que cualquier otra forma común de materia; ya que, bajo ciertas condiciones, su comportamiento semeja ya sea a los sólidos, a los líquidos o a los gases. Veremos que al estudiar este singular comportamiento que los caracteriza, existen tres aspectos importantes a considerar: la existencia de fricción estática, el hecho de que la temperatura efectiva es cero y la naturaleza inelástica de las colisiones que sufren las diferentes partículas entre ellas.

Es importante darse cuenta desde el principio que en la física que rige a esta clase de medios la definición de *temperatura granular* no tiene que ver en absoluto con la noción de temperatura como usualmente la entendemos en termodinámica, ya que, esta última suele referirse a la velocidad cuadrática media de las partículas de un sistema en equilibrio, en tanto que en la materia granular tendríamos que usar termodinámica para sistemas fuera de equilibrio. Para apreciar esto, sólo tenemos que calcular la energía cinética T de un pequeño grano de sílice. La física de la materia granular del tipo en que estamos interesados involucra cuerpos que son típicamente del orden de 100 micras de diámetro o mayores. Para las velocidades comunes de traslación en esta clase de materiales, que son del orden de 1 cm/s, encontramos

que $T = \frac{1}{2}mv^2 \approx 10^{-12}$ Joules. Si esta energía cinética se debiera solamente a la agitación térmica, correspondería a una temperatura de 10^{11} K.[1]

Los más claros ejemplos de materiales granulares son la arena, presente en todas las playas y desiertos del mundo; las semillas, las acumulaciones de nieve, etc.

1.2. Importancia del estudio de la materia granular y sus implicaciones.

El estudio de la materia granular tiene una gran trascendencia en nuestra vida actual, ya que juega un papel de gran importancia en muchas de las industrias, tales como minería, agricultura e industria farmacéutica. Prácticamente todos los productos alimenticios que conocemos provienen de formas granulares. La producción anual de granos y agregados de diversos tipos es gigantesca, alcanzando aproximadamente diez mil millones de toneladas métricas. La industria del carbón contribuye con alrededor de 3 500 millones de toneladas del total; el cemento y los materiales para la construcción con cerca de mil millones, a lo cual le podemos añadir cantidades similares en lo que se refiere a la arena y la grava. Éstos constituyen lo que generalmente es conocido como materia prima de bajo costo. El procesamiento de los materiales granulares y agregados consume un 10 % aproximadamente de toda la energía producida en el planeta, lo que convierte a este tipo de materiales en el segundo en importancia en la escala de prioridades humanas, superado solamente por el agua.

Los flujos granulares tienen un sinnúmero de propiedades que dan lugar a numerosos problemas en la industria. Se puede aprender mucho observando el flujo de los granos en un reloj ordinario de arena. Contrario a lo que pasa en los relojes de arena sellados del tipo que alguna vez se usó para medir el tiempo, el flujo de arena en embudos cónicos por lo general no es suave. Sabemos de la experiencia que el atascamiento entre las partículas puede causar eventos intermitentes que imparten al flujo del material un carácter discontinuo (véase más adelante *Arqueo y formación de cadenas*, Sec. 1.4). Otro problema, que será el que veremos más concretamente en secciones posteriores, es el de la segregación granular que consiste en la separación física de dos o más componentes de una mezcla granular debido a vibraciones ejercidas sobre ésta.

Además, hay otra razón vitalmente importante para la reciente actividad en este campo: muchas de las industrias dependen del transporte y almacenamiento de los materiales granulares. Ciertos procesos de manufactura, por

ejemplo, en la industria automotriz, requieren para la transportación de grandes piezas de metal que éstas estén empacadas cuidadosamente en lechos de arena. Incluso la tecnología para manejar y controlar las sustancias granulares está muy escasamente desarrollada. Las estimaciones muestran que se desperdicia un 60 % de la capacidad de muchas plantas industriales debido a problemas relacionados con el transporte de esta clase de materiales de una fábrica a otra.

Debido a todo lo que se ha mencionado anteriormente, cualquier avance en el entendimiento de la física que se halla detrás de la materia granular implicaría un profundo impacto económico de manera positiva para la industria.

1.3. Historia del estudio de los materiales granulares.

En el pasado, la física de la materia granular recibía mucha menos atención de parte de los investigadores que muchas otras áreas de la física. Inclusive ahora es, en un sentido, admirable y de destacar, que muy pocos científicos se dediquen a indagar en los fascinantes aspectos del comportamiento de este tipo de materiales.

La primera mención a los flujos granulares que se tiene registrada fue hecha por Lucrecio (98-55 a. C.), el famoso poeta y filósofo de la antigua Roma. Él escribió hacia el año 55 a. C.: «Uno puede recoger semillas de amapola con un cucharón tan fácilmente como si fuesen agua, y cuando se inclina el cucharón, las semillas fluyen en un flujo continuo.»

Durante el renacimiento, Leonardo da Vinci (1452-1519) fue el primero en realizar un simple y convincente experimento que demostraba las leyes de la fricción en seco. Él y otros fueron capaces de hacer algunos postulados acerca de pilas de arena. Sin embargo, no fue sino hasta finales del siglo XVIII, que Charles de Coulomb (1736-1806) escribió un artículo, que todavía es citado muy frecuentemente [2], titulado «Ensayo sobre las reglas de máximos y mínimos aplicado a algunos problemas de equilibrio relacionados con la arquitectura». Dicho artículo está basado en ciertas observaciones experimentales del equilibrio de terraplenes, estabilidad de estructuras de roca y otras edificaciones. En él establece la física de materia granular en un fundamento que es difícil de rebatir aun en la actualidad.

En 1780, Ernst Chladni (1756-1827) notó ciertas diferencias interesantes (que aun hoy continúan siendo un enigma) entre el comportamiento de materiales granulares ligeros (como crines de caballo pulverizadas) y ma-

teriales más burdos y pesados (como arena). Él observó lo que ahora es conocido como figuras complementarias de Chladni, las cuales fueron usadas posteriormente por Félix Savart, en 1827, para estudiar las frecuencias y longitudes de onda de ondas sonoras. Sus observaciones fueron confirmadas un poco más tarde por Christian Ørsted (1777-1851).

Michael Faraday (1791-1867) tuvo gran interés en cómo las vibraciones producen formación de pilas de arena [3]. Este fenómeno, estrechamente relacionado con los experimentos hechos por Chladni, permaneció siendo un misterio hasta fechas recientes. El problema era descubrir el papel que juega el aire mientras la arena se aglomera formando patrones regulares.

William Rankine (1820-1872) examinó las implicaciones teóricas de la fricción en materiales granulares [4]. Partiendo de las ideas de Coulomb, estableció principios que siguen siendo válidos en nuestros días. Definió lo que ahora se conoce como los estados activos de Rankine.

El problema de la distribución de equilibrio de fuerzas en un silo fue estudiado por varios investigadores, quienes publicaron el resultado de sus trabajos. En 1884, I. Roberts notó que en una estructura cuyas paredes son paralelas, la presión ejercida por los granos almacenados sobre la base deja de incrementarse cuando la estructura es llenada a una altura mayor que el doble del diámetro de la base [5]. Unos años más tarde, H. Janssen propuso un modelo basado en un coeficiente que describía el cambio de dirección de las fuerzas hacia la pared [6]. Sustancialmente la misma idea inspiró el trabajo de John Strutt [7] (1842-1919, mejor conocido como Lord Rayleigh, premio Nóbel de física en 1904), quien sugirió un interesante analogía entre este problema y la forma en que una cuerda enroscada alrededor de un poste resiste la tracción.

A finales del siglo XIX, Osborne Reynolds (1842-1912) hizo contribuciones fundamentales a la teoría de la materia granular alrededor del 1885. Algunos conceptos que él desarrolló [8] y sus análisis continúan estando en lo más alto de las listas de los tópicos modernos de investigación.

El número de científicos que han dedicado sus talentos a esta disciplina ha crecido de manera importante durante el siglo XX, particularmente desde la década de los 50. Un nombre que merece especial atención es el de Ralph A. Bagnold. Entre los años de 1940 y 1970 realizó muchas observaciones importantes y escribió un libro acerca de arenas del desierto [9] que se ha convertido ahora en un clásico. Desde entonces hasta la fecha, el número de publicaciones científicas en este rubro ha crecido de forma sustancial. [10]

1.4. Arqueo y formación de cadenas

Para un sistema granular que se encuentra en reposo y sobre el cual se aplica una presión desde la superficie se forman cadenas aleatorias de estrés cuya forma depende de los puntos de contacto entre las partículas. Además, si el estrés se incrementa y las partículas comienzan a deformarse, se crean nuevos contactos y, por ende, nuevas cadenas de estrés. Se ha demostrado a través de algunos experimentos (fig. 1.1) que la tensión dentro de un material granular tiende a dirigirse perpendicularmente hacia las paredes de su contenedor. Aun cuando la gravedad es la única fuerza que actúa, esta propiedad da lugar al interesante efecto conocido como **arqueo**.

Estos arcos que se forman son similares a los usados en arquitectura para soportar el peso de un edificio y, en los medios granulados, soportan el peso de un objeto que se halle en la superficie de los mismos, además son los que provocan atascamientos del flujo granular en conductos más o menos estrechos, por ejemplo, en embudos.

1.5. Convección de un fluido simple y convección granular

1.5.1. Convección en fluidos simples.

Empíricamente sabemos que la densidad en un punto de un fluido depende, entre otros factores, de la temperatura de dicho punto, y que al aumentar la temperatura disminuye la densidad. Cuando en un fluido existe un gradiente de temperaturas de modo tal que la parte inferior del fluido tiene una mayor temperatura que la parte superior, y consecuentemente, la parte inferior posee una densidad menor a la parte superior, por acción de la gravedad y para minimizar la energía potencial del fluido, se establecerá un movimiento de tal manera que la parte más caliente del fluido tenderá a ascender y la de menor temperatura descenderá. Este fenómeno es conocido como **convección** y a los patrones circulares de flujo que se establecen como resultado de dicho gradiente de temperaturas se les conoce como **celdas de Rayleigh-Bénard**, [12], [13] las cuales nos son ampliamente familiares ya que están presentes en un sinnúmero de situaciones de nuestra vida cotidiana, por ejemplo, las corrientes de aire en la atmósfera debidas al calentamiento del suelo a causa del sol entre muchas otras; por lo que no es necesario entrar en más detalles.

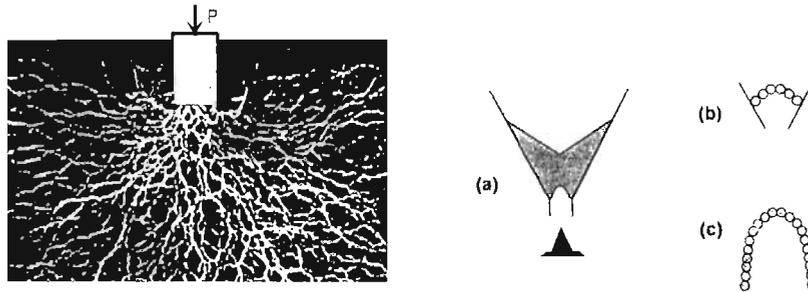


Figura 1.1: Patrones de tensión observados en un medio granular bidimensional sometido a compresión [11]. A la derecha: Los diagramas (a) y (b) muestran las obstrucciones del flujo granular debidas a la formación de arcos cerca del orificio de un embudo. El diagrama (c) muestra la estructura de un arco con máxima estabilidad (catenaria invertida).[10]

1.5.2. Convección en medios granulados

Algunos resultados experimentales han demostrado que materiales granulares sujetos a agitaciones verticales presentan fenómenos de convección parecidos a los que se observan en los fluidos simples. Hace más de un siglo, Michael Faraday descubrió que la vibración puede producir una convección a gran escala en este tipo de medios [3]. Al igual que las moléculas de un líquido calentado desde el fondo, los granos contenidos en un recipiente que sufre vibraciones circulan entre el fondo y la parte superior de su contenedor. Sin embargo, los mecanismos que causan este singular comportamiento están, muy pobremente entendidos hasta ahora. Gran parte de esta falta de comprensión se debe a que no es posible observar el movimiento de las partículas que se encuentran en el interior, por lo que los investigadores deben contentarse con la observación del comportamiento externo. No obstante, se han hecho intentos de estudiar los fenómenos que ocurren dentro del sistema con técnicas como resonancia magnética, la cual ha ayudado enormemente a conocer la dinámica interna, mas no tanto las causas del fenómeno de convección.

Intentando establecer una analogía entre los fluidos simples y los medios granulados se ha propuesto que un «gradiente de temperaturas granulares» [15] es el que produce la convección granular. Sin embargo el comportamiento de los medios granulares presenta dos regímenes, el primero de los cuales se presenta cuando el sistema es sometido a sacudidas de baja amplitud y frecuencia (conocidas en la literatura como *tapping*), y bajo el cual el com-

portamiento del sistema es cuasiestático, es decir, durante la estimulación, que dura sólo un breve instante si lo comparamos con el período de oscilación, los granos se mueven como las moléculas de un fluido y después existe un tiempo de relajación en el que se forman los arcos. El segundo régimen se da cuando las vibraciones poseen un alta amplitud o frecuencia y los tiempos de relajación no son lo suficientemente largos como para que pueda existir el fenómeno de arqueo; en este régimen se dice que el sistema está **fluidizado**.

Además de lo anterior, se han hecho otras varias propuestas para explicar este comportamiento, entre ellas, la más importante es la que asegura que es la fricción entre las paredes del recipiente y el granulado la que da lugar a la inestabilidad convectiva, donde por inestabilidad nos referimos a la competencia de fuerzas que se encuentran fuera de equilibrio, en este caso la fricción, la fuerza gravitatoria y las fuerzas inerciales derivadas de la agitación que sufre el sistema granular. De acuerdo con esta propuesta, al estar el granulado sometido a una oscilación vertical, las partículas que se encuentran en contacto inmediato con las paredes se ven rebasadas por las partículas más internas debido a que estas últimas no sienten una fuerza de fricción estática como lo hacen las externas, esto provoca una acumulación de material en la parte superior que empuja a las partículas exteriores hacia abajo.

Es de suma importancia señalar que, a pesar de las propuestas anteriores, no existe una teoría que describa analíticamente la convección granular ni ninguno de los fenómenos que acontecen en los medios granulares. Hasta ahora ninguna hipótesis es capaz de predecir el comportamiento de un material granulado ante cualquier circunstancia, por ello es de gran importancia investigar este tipo de materia tan relevante en nuestra vida diaria. La razón de que no existan teorías que expliquen los comportamientos granulares se debe, en gran medida, a la complejidad que presentan estos sistemas dado que están compuestos de una gran cantidad de partículas por lo cual no es posible describirlos con facilidad en términos de la mecánica clásica. Cualquier variación en las condiciones en las que estos medios se encuentran puede hacer que su comportamiento cambie completamente; por ejemplo, en la convección, lo ideal sería encontrar un movimiento de las partículas en forma toroidal y completamente simétrico, sin embargo, al presentarse cualquier irregularidad en las oscilaciones a las que se somete el sistema se puede llegar muy fácilmente a una celda convectiva asimétrica o inclusive la celda puede cambiar totalmente su geometría. Para facilitar el estudio de la materia granular se han establecido analogías con otro tipo de sistemas, como los fluidos; sin embargo esto no implica que los sistemas granulares no deban ser tratados como sistemas clásicos.

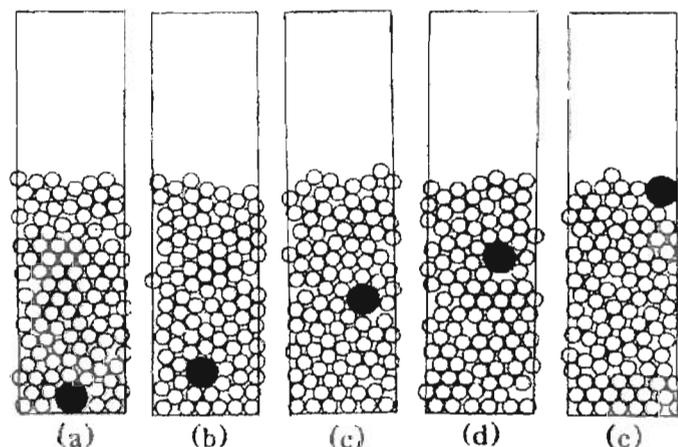


Figura 1.2: Simulación de Monte Carlo que muestra el BNE, la partícula más oscura es la que se conoce como *intrusa*. [Rosato et al., *Phys. Rev Lett.* **58**, 1038 (1987).]

Esta tesis estará enfocada a analizar este peculiar comportamiento que presenta la materia granular y que da lugar a otros fenómenos como el que describiremos en la siguiente sección.

1.6. El problema de las nueces del Brasil y la segregación granular.

Todos los campesinos pueden confirmar el curioso hecho de que después de la siembra aparecen, inesperadamente, piedras sobre la superficie del suelo. El sentido común asegura que al aflojar la tierra para la siembra, los granos más pequeños pueden deslizarse debajo de las rocas de mayor tamaño, mas no en sentido contrario. A este fenómeno se le conoce como el **efecto de las nueces del Brasil** (BNE por sus siglas en inglés), llamado así por el hecho de que, en un recipiente que contiene una mezcla de diferentes tipos de nueces, las nueces del Brasil son siempre las que parecen ascender a la superficie (fig 1.2). Debido a procesos y efectos similares que ocurren en la manufactura de productos farmacéuticos, químicos y alimenticios, el problema de la segregación granular ha captado una seria atención por parte de los investigadores.

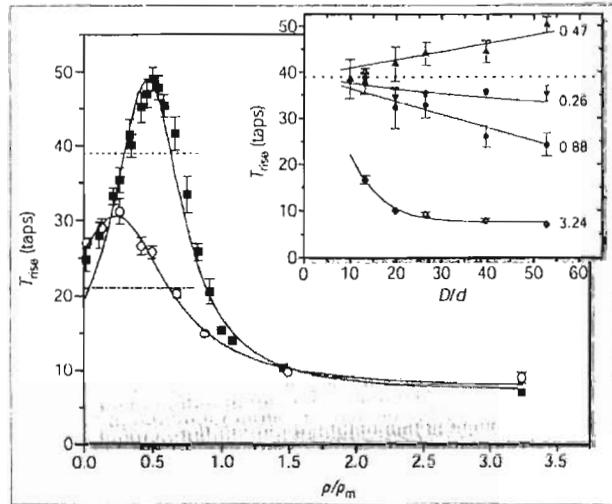


Figura 1.3: En la gráfica se muestra el tiempo de ascenso de intrusos de diferentes densidades ρ ; ρ_m es la densidad de las partículas del medio granular. En la inserción: tiempos de ascenso contra diámetro D de partícula; d es el diámetro de las partículas del medio [Möbius M., Lauderdale B., Nagel S. & Jaeger H. *Nature* 414 270 (2001)]

La primera complicación a la imagen simple de los granos resbalando debajo de los guijarros (hecho al que se le llama **percolado** o más correctamente **infiltración**) fue la demostración de la existencia de convección bajo vibración en un lecho de granos: una gran cantidad de éstos suben por el centro del recipiente en tanto que los que se localizan en los márgenes descienden. De acuerdo con esta idea de convección, grandes partículas *intrusas* ascienden con el granulado que los rodea y se hallan ellas mismas incapaces de caber en los estrechos márgenes descendientes. Este mecanismo ha sido confirmado por experimentos en los cuales se invierte el sentido de los rollos convectivos y, como se había predicho, las partículas de mayores dimensiones migran hacia el fondo del granulado. Confirmaciones posteriores obtenidas a partir de resonancia magnética y meticulosas simulaciones computacionales han revelado que la convección es dominante frente a la percolación al producir la segregación en granulados profundos.

Sin embargo, una nueva complicación surgió para la teoría de la convección. En 2001, Matthias Möbius y colaboradores de la Universidad de

Chicago, al medir el tiempo que tardan diferentes partículas intrusas de diferentes densidades en ascender desde una profundidad determinada dentro del granulado hasta la superficie de éste, encuentran un extraño fenómeno (Fig. 1.3). el tiempo de ascenso crece como función de la densidad de los intrusos, hasta alcanzar un nivel máximo cuando la densidad de la partícula intrusa es igual a la densidad del medio granulado en que ésta se encuentra; a partir de ahí los tiempos de ascenso se van haciendo cada vez más cortos conforme la densidad del intruso aumenta. Este hecho fue confirmado posteriormente por otros investigadores. Los anteriores resultados indican que la sola convección del granulado no es suficiente para explicar el efecto de las nueces del Brasil. Otros factores adicionales deben estar involucrados.

Una nueva hipótesis emergió para tratar de explicar el efecto de las nueces del Brasil. En 2003 Y. Nahmad Molinari, G. Canul Chay y J. C. Ruiz Suárez del Departamento de Física Aplicada del CINVESTAV-IPN en Mérida, Yucatán sugieren que es la inercia del intruso la que da lugar al BNE. [17] De acuerdo con su propuesta, las vibraciones a las que se somete el granulado transfieren energía cinética a cada partícula del sistema, incluyendo al intruso. No obstante, la energía cinética que recibirá una partícula dependerá de la masa que ésta tenga, recordando la definición de energía cinética: $T = \frac{1}{2}mv^2$. Haciendo un simple balance de energía cinética y el trabajo que un intruso hace en contra de la fuerza de fricción se tiene la siguiente relación:

$$\frac{1}{2}mv^2 = \beta L_p + mgL_p \quad (1.1)$$

Donde β es la fuerza de fricción que siente la partícula y L_p es la longitud de penetración de la misma, es decir, la profundidad a la que el intruso logrará introducirse dentro del medio en cada «sacudida». El segundo término de la ecuación se puede despreciar debido a que, siendo la longitud de penetración muy pequeña el cambio en la energía potencial en cada ciclo es mínimo. Al obtener mayor energía cinética, una partícula es capaz de penetrar más profundamente dentro del granulado; sin embargo, este proceso no puede darse en ambos sentidos, dado que cuando una partícula trata de penetrar el granulado hacia abajo, aparece una fuerza derivada de la formación de arcos de partículas que se opone al movimiento en sentido descendente (fenómeno que evita que una persona que permanece de pie sobre un medio granular, por ejemplo la arena, se hunda dentro de éste.). En el movimiento hacia arriba también existe ese fenómeno, con la diferencia de que no hay un fondo que soporte dichos arcos, los cuales solamente se pueden soportar por la fricción con las paredes del recipiente; por lo cual el movimiento del intruso se realiza solamente hacia arriba. (Al proceso en el cual se tiene movimiento en un

1.6. El problema de las nueces del Brasil y la segregación granular. 11

sentido pero no es posible tenerlo en el otro se conoce como *ratcheting*, del inglés *ratchet* que significa *trinquete*.) Al tener un intruso una mayor masa, y por lo tanto, al adquirir una mayor energía cinética, éste requiere de un tiempo menor para ascender hasta la superficie, debido a que en cada ciclo recorre una distancia mayor.

Capítulo 2

Desarrollo de los experimentos.

En este capítulo describiremos la forma en que fueron realizados los experimentos que dieron lugar a los resultados que presentaremos en esta tesis. El objetivo de estos experimentos es analizar el comportamiento de la convección granular ante diferentes condiciones.

Para comenzar, nos va a ser útil exponer el significado de algunos términos que usaremos en este capítulo y en los siguientes. Llamaremos **velocidad de convección** a la rapidez con que se mueven las partículas que componen el granulado sujetas al movimiento de convección derivado de las oscilaciones a las que el sistema está sujeto. Asimismo, definimos **tiempo de vuelo** al tiempo en que el granulado permanece como conjunto separado del fondo de su contenedor, es decir, desde el momento en que, debido a las oscilaciones a las que está sometido, despega, hasta el instante en que retorna al fondo del recipiente.

Explicaremos primeramente la forma en que se midió la velocidad de convección y el tiempo en que el granulado permanece en el aire al modificar la amplitud y la frecuencia de oscilación, además expondremos cómo se midió esta velocidad de convección al modificar otros parámetros como el ancho del recipiente, la fricción de las paredes del recipiente y la profundidad del granulado.

Todos estos experimentos que mencionaremos fueron llevados a cabo entre junio y diciembre de 2004 en el laboratorio de materia granular del Instituto de Física de la Universidad Autónoma de San Luis Potosí.



Figura 2.1: Se muestra en esta imagen el experimento con todos sus componentes. Se puede ver a la izquierda la cámara digital y, frente a ella, el recipiente que contiene el granulado. A la derecha podemos ver el láser usado para medir la amplitud y la lente para amplificar el haz. En el fondo se puede apreciar un dispositivo piezoeléctrico del cual hablaremos en secciones posteriores.

2.1. Velocidad de convección.

El experimento consiste en un recipiente cilíndrico de plástico transparente de 8.4 cm de diámetro lleno con esferas de tapioca hasta una altura de 7 cm. Una parte de dichas esferas fue teñida con tinta negra de manera que pudieran distinguirse de las demás. A estas esferas teñidas, de ahora en adelante las llamaremos **trazadoras**. La razón de este nombre es porque nos permitirán medir la velocidad de la celda convectiva con facilidad sin confundirlas con el resto de las partículas, que son de color blanco.

El fondo del recipiente fue horadado con pequeños agujeros y cubierto por una malla metálica. Dichos agujeros fueron hechos con el fin de permitir que el aire ingresara por debajo de la celda y así evitar que el granulado hiciera

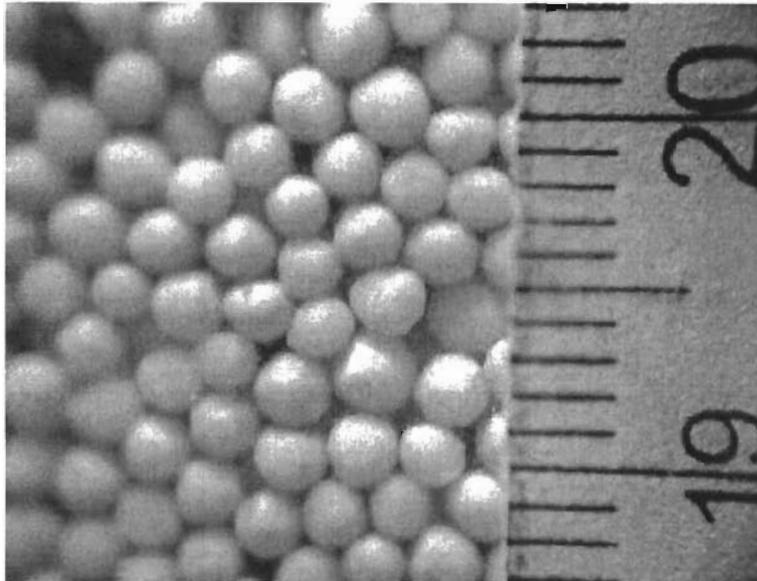


Figura 2.2: Imagen del granulado tomada por la cámara digital. Podemos apreciar que, en este caso, el cuadro mide 16 mm. En la esquina superior izquierda de la imagen vemos una partícula trazadora.

un trabajo extra contra la presión atmosférica. La malla fue colocada para evitar que las partículas escaparan por los agujeros. En seguida, el recipiente fue colocado y fijado sobre una hoja de acrílico que a su vez se fijó sobre una bocina subwoofer Xplod XS-L151P5 (fig. 3.1), la cual se alimentó con un generador de funciones Agilent 33120A a través de un amplificador. Se mandó a la bocina una señal senoidal previamente amplificada. Para medir la velocidad de convección justo en las paredes del contenedor colocamos frente al recipiente una cámara digital conectada a una computadora, en donde podíamos observar a las partículas descendiendo. Frente al campo de visión de la cámara colocamos una escala graduada en milímetros, con la que lográbamos medir la distancia recorrida por las partículas trazadoras. Con la imagen obtenida en la computadora (fig. 3.2) medimos el tiempo que tardaba una partícula en cruzar el cuadro y, calculando la altura que éste tenía, pudimos conocer la velocidad. Tomamos varias medidas a fin de obtener datos estadísticos e incertidumbre.

La respuesta en amplitud de esta bocina no es lineal con el voltaje que

se le alimenta. Para conocer la amplitud de las oscilaciones de la bocina instalamos sobre ésta un láser, cuyo haz se hacía pasar a través de una serie de franjas impresas en una hoja de acetato y después, dicho haz era amplificado por una lente y proyectado en una pared al extremo opuesto del laboratorio. El ancho de una franja es de 0.48 mm de tal manera que bastó con contar el número de franja proyectadas por el láser en el muro y multiplicar por este factor de escala para obtener la amplitud de oscilación.

Se comenzaron a tomar medidas a diferentes amplitudes, desde que se detectaba movimiento en la imagen (una amplitud un poco mayor a la amplitud crítica), hasta un poco antes de ingresar al régimen de fluidización (todas las medidas se hicieron en el régimen de *tapping*). También se tomaron medidas a diferentes frecuencias, desde 6 hasta 15 Hz.

2.2. Tiempos de vuelo.

Para medir los tiempos de vuelo del granulado, se procedió de una manera similar a la anterior, con el mismo sistema, usando las mismas condiciones de ancho del recipiente y altura de la columna. En este caso se colocaron dos dispositivos piezoeléctricos, uno fuera del recipiente y otro en el interior de éste. Ambos dispositivos se conectaron a un osciloscopio para analizar la señal que producían. Sobre el dispositivo exterior se colocó una bola de acero de 6 mm de diámetro (Fig. 3.1) y el piezoeléctrico, a su vez se colocó sobre un cilindro hueco, de tal forma que el peso de la masa sobre él provocara deformaciones al oscilar la bocina, y nosotros pudiéramos observar así la respuesta de ésta (fig 3.3). El piezoeléctrico interno se fijó al fondo del recipiente, de tal manera que pudiera detectar la caída del granulado y el momento en que éste se separara del plato. En la señal de este último dispositivo se producía un lapso en que la señal se recortaba y se volvía plana como una meseta (fig 3.4), lo cual interpretamos como el intervalo en el que las partículas se separaban del fondo del recipiente, y por tanto, del piezoeléctrico. Al final de esta meseta se presentaba una señal de ruido que presumíamos que era la caída del granulado, ya que este ruido apareció sólo a amplitudes a las cuales el granulado se despegaba del plato, y además era detectado por el otro piezoeléctrico por la vibraciones enviadas a través de la hoja de acrílico sobre la cual estaba montado el experimento. Midiendo este intervalo de tiempo, fuimos capaces de calcular los tiempos de vuelo de las partículas.

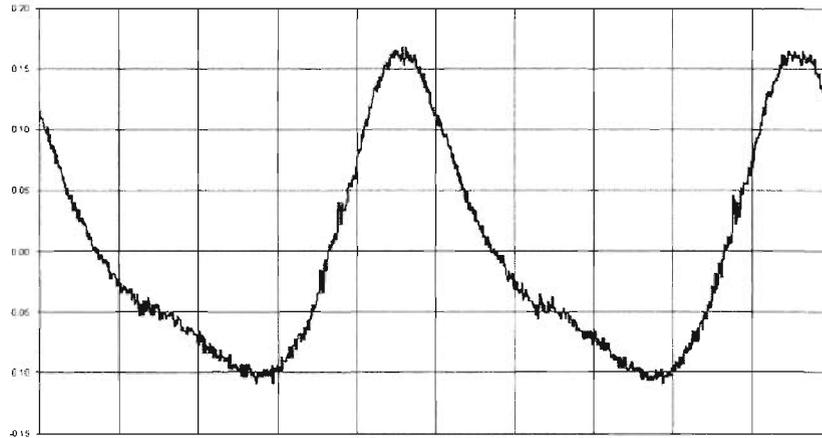


Figura 2.3: Respuesta de la bocina a una frecuencia de 10 hz obtenida con el piezoeléctrico exterior. Debido a razones físicas la respuesta no es exactamente cosenoidal como la señal que recibe del generador de funciones.

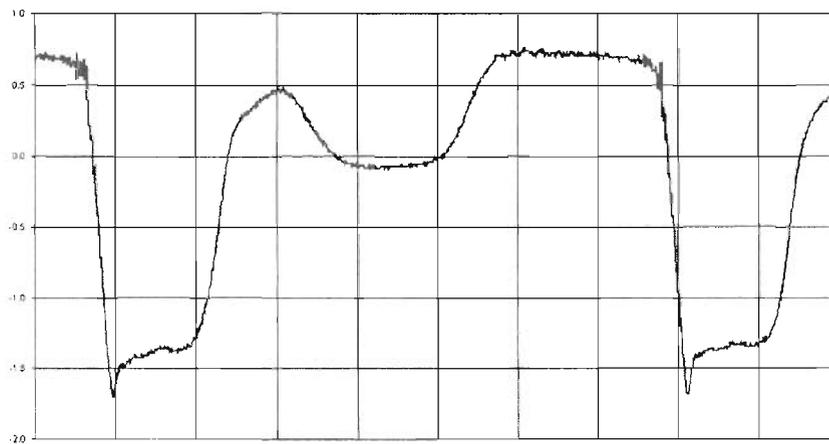


Figura 2.4: Gráfico obtenido con el piezoeléctrico interno. Podemos observar aquí el recorte de la señal. El ruido que se ve al final de la meseta corresponde a la caída del material sobre el piezoeléctrico.

2.3. Fricción con las paredes, alto y ancho de la columna.

Además de lo que hemos mencionado en apartados anteriores, nos dimos a la tarea de medir la velocidad de convección variando la fricción con las paredes, a una amplitud y frecuencia fija. Para esto colocamos papeles de lija de diferentes rugosidades en las paredes interiores del contenedor, dejando una ventana estrecha para poder observar con la cámara digital el movimiento de las partículas. Para este caso utilizamos las mismas condiciones de altura de la columna y ancho del recipiente que en los experimentos anteriores.

También decidimos calcular la amplitud crítica del sistema para diferentes frecuencias con distintas alturas del granulado, usando el mismo recipiente de 8.4 cm de diámetro. Para poder medir esta amplitud crítica, alimentamos la bocina con un voltaje muy bajo, de tal manera que el material no tuviera oportunidad de separarse del plato oscilante y, en seguida, fuimos incrementando paulatinamente el voltaje hasta que comenzamos a oír el golpeteo de las partículas. Debemos aclarar que esta amplitud crítica es ligeramente diferente a la que definimos en el capítulo 3, ya que aquella estaba definida para el caso ideal en que no hay fricción, mientras que en esta última la fricción sí está presente, por lo que necesitamos una amplitud mayor a la amplitud crítica ideal para lograr que el sistema comience a moverse.

Con respecto a los anchos de columna, escogimos dos recipientes con diferentes anchuras, preparados de la misma manera que en los casos anteriores y horadados por el fondo, en los cuales, medimos de forma similar a la descrita anteriormente la velocidad de convección, para comprobar cuál sería el efecto de la diferencia en la separación de las paredes del recipiente. El primer recipiente medía 6.6 cm de diámetro y el segundo poseía una anchura de 8.4 cm. Para ambos casos usamos una altura del granulado de 7 cm.

Los resultados obtenidos de los experimentos que han sido descritos en párrafos anteriores, serán presentados en el capítulo a continuación.

Capítulo 3

Resultados experimentales.

Pasaremos ahora, en este capítulo, a mostrar los resultados que hemos obtenido a partir de extensas sesiones de experimentos y cuyo desarrollo hemos descrito en el capítulo anterior.

3.1. Velocidad de convección.

En el experimento en el cual medimos la velocidad de convección del sistema usamos las frecuencias de 6, 8, 10, 12, 14 y 15 Hz. En todas ellas obtuvimos que la velocidad en función de la amplitud obedece un comportamiento cuadrático (Fig. 3.1, fig. 3.2). Ajustamos a nuestros datos experimentales una función polinomial de segundo orden.

El hecho de que la velocidad sea proporcional a una función cuadrática en la amplitud nos hace suponer que la energía cinética que recibe el sistema granular a través de la fricción con las paredes está involucrada en el fenómeno de la convección; sin embargo, como mostraremos más adelante, son otros los parámetros que toman parte en la convección granular.

Decidimos calcular la amplitud crítica, A_c , donde esta se define como la amplitud de oscilación mínima que se necesita para que el sistema comience a moverse, para cada una de estas frecuencias y en seguida graficamos la velocidad de convección contra $(A - A_c)^2$ y obtuvimos la gráfica que mostramos en la figura 3.3. Todas las curvas para todas las frecuencias se vuelven rectas.

Además de lo anterior graficamos las pendientes de las rectas de la fig. 3.3. En general, dichas pendientes se comportan de manera normal, excepto en 14 Hz, donde encontramos un pico (fig. 3.4). Este pico, en un principio supusimos que se podía deber a una resonancia del sistema, para

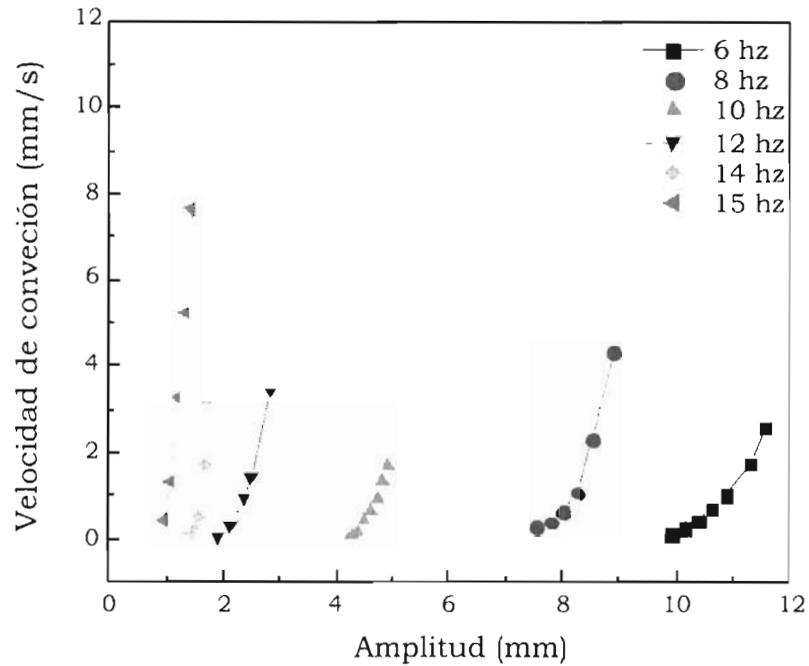


Figura 3.1: Resultados para todas las frecuencias de oscilación utilizadas en el experimento.

lo cual, colocamos un soporte debajo de la hoja de acrílico que sostiene al sistema para modificar su frecuencia natural de oscilación. Tomamos nuevas mediciones y, sin embargo, el pico no desapareció. Por tal motivo, decidimos medir el tiempo de vuelo del sistema, para observar si existía un acoplamiento del tiempo de vuelo con el periodo de las oscilaciones que pudiera provocar una resonancia de tal clase.

En principio el valor de la pendiente de estas rectas debería ser proporcional a la dependencia de la velocidad de convección con la frecuencia angular de oscilación para una amplitud de oscilación fija. No obstante, esto es algo que no podemos corroborar, ya que, como se observa en la figura 3.1, es prácticamente imposible variar la frecuencia de oscilación manteniendo un

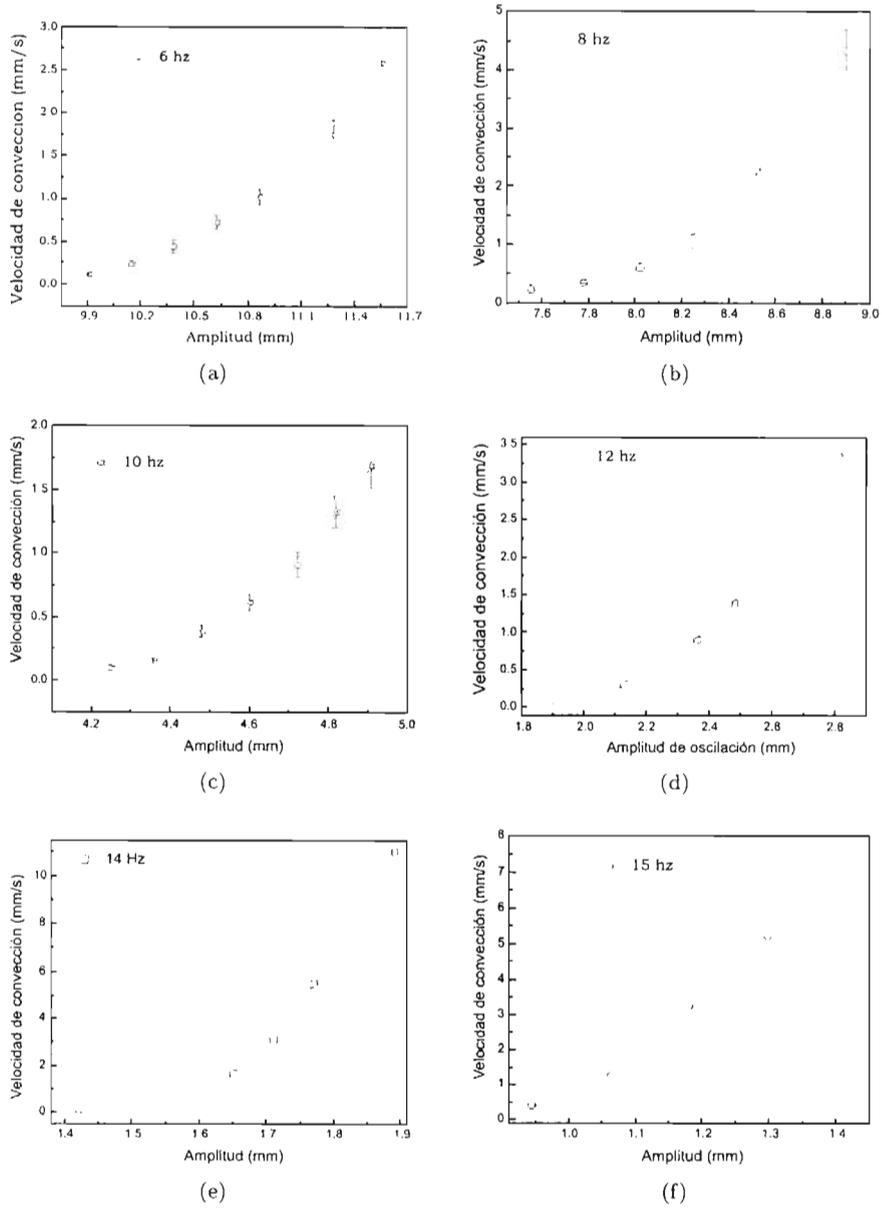


Figura 3.2: Resultados a a) 6 hz, b) 8 hz, c) 10 hz, d) 12 hz, e) 14 hz y f) 15 Hz.

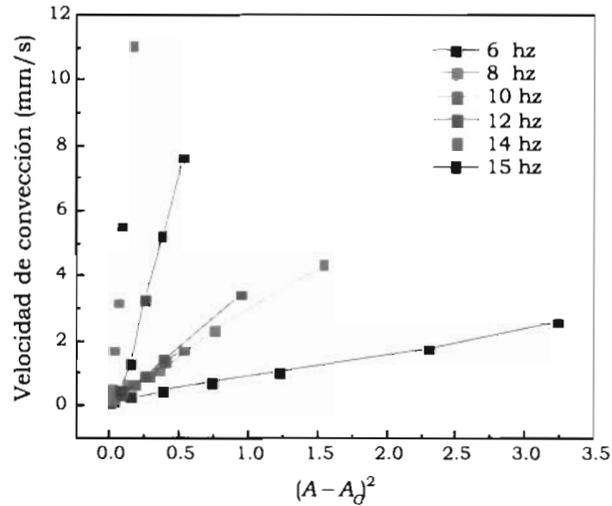


Figura 3.3: Velocidad de la celda convectiva graficada contra $(A - A_c)^2$. Se puede ver que todas las curvas se han convertido en rectas.

amplitud fija. Por ejemplo, para la curva de 6 Hz, el rango de amplitudes está entre los 10 y los 12 mm, mientras que para 8 Hz este rango se encuentra entre los 7 y los 9 milímetros. Esto es debido a la respuesta de la bocina que usamos para el experimento.

3.2. Tiempos de vuelo.

A continuación se presentan los resultados obtenidos después de medir el tiempo de vuelo del sistema. Para presentar nuestros resultados, nosotros decidimos tomar solamente los primeros puntos experimentales para ajustar a ellos una recta y observar así la tasa de crecimiento del tiempo de vuelo en función de la frecuencia. Para este caso medimos a frecuencias de 7, 9, 11, 13, 14 y 15 Hz, obteniendo los resultados mostrados en la figura 3.5. También presentamos los datos experimentales hasta antes del momento en que el tiempo de vuelo iguala al periodo de oscilación (figura 3.6).

Al igual que en la sección anterior, graficamos las pendientes de las rectas, y volvimos a obtener un máximo en la frecuencia de 14 Hz (Fig. 3.7). En este caso el máximo no es tan acusado como en el anterior. No obstante, no parece

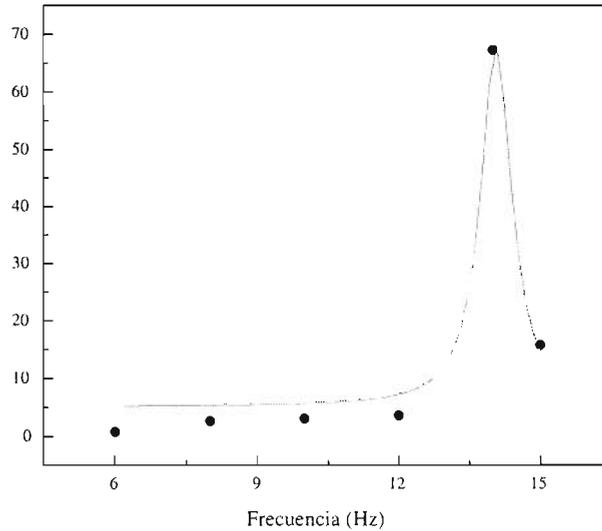
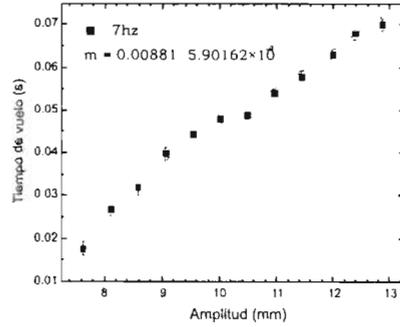


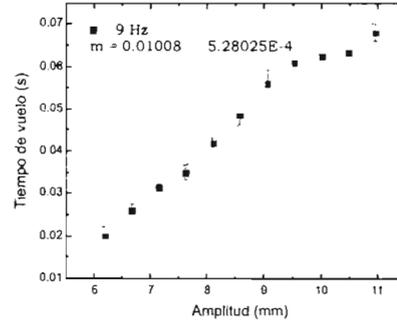
Figura 3.4: Pendientes de las rectas obtenidas a partir de los ajustes experimentales para velocidad de convección.

probable que este pico se deba a un acoplamiento de los tiempos de vuelo ni a una resonancia. Hasta el momento no podemos explicar a qué pueda deberse este resultado que encontramos por ambas vías. Podemos pensar que se debe a una modificación de la geometría de la celda convectiva, es decir, que a partir de los 14 Hz se la forma de la celda se vuelva asimétrica, cargada hacia un lado, sin embargo esto es algo que no hemos podido corroborar.

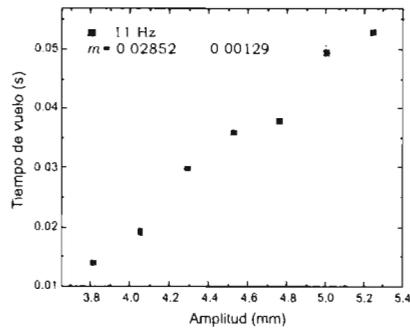
Otro resultado que vale la pena mencionar es el que obtuvimos con el mismo método en el régimen de fluidización. Según investigaciones hechas por otros investigadores que han estudiado el movimiento de las partículas con acelerómetros de alta precisión, [21] el comportamiento del tiempo de vuelo de las partículas presenta una **bifurcación**, es decir, a ciertas condiciones de amplitud y frecuencia existen dos tiempos de vuelo: uno corto seguido de uno largo. Usando un método mucho más simple que el que otros investigadores han usado, nosotros hemos encontrado el mismo comportamiento, el cual mostramos en la figura 3.8. La señal procedente del dispositivo pie-



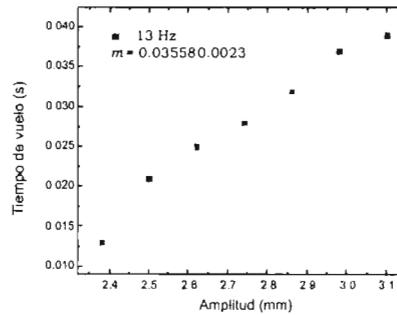
(a)



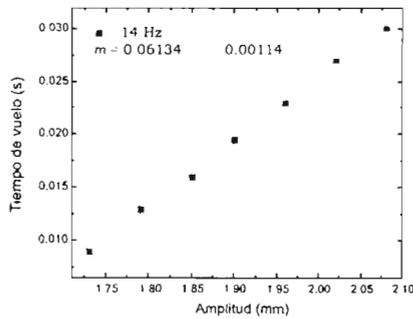
(b)



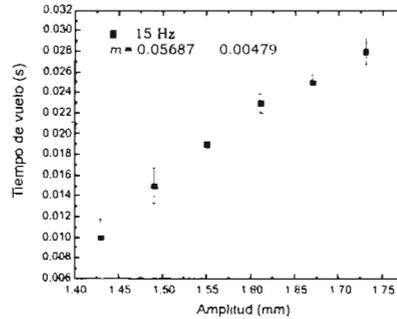
(c)



(d)



(e)



(f)

Figura 3.5: Resultados de tiempos de vuelo obtenidos a 7 hz a), 9 hz b), 11 hz c) 13 hz d), 14 hz e) y 15 hz. El número m en las gráficas es la pendiente de la recta ajustada a los datos, y el número contiguo a ésta es el error derivado del ajuste.

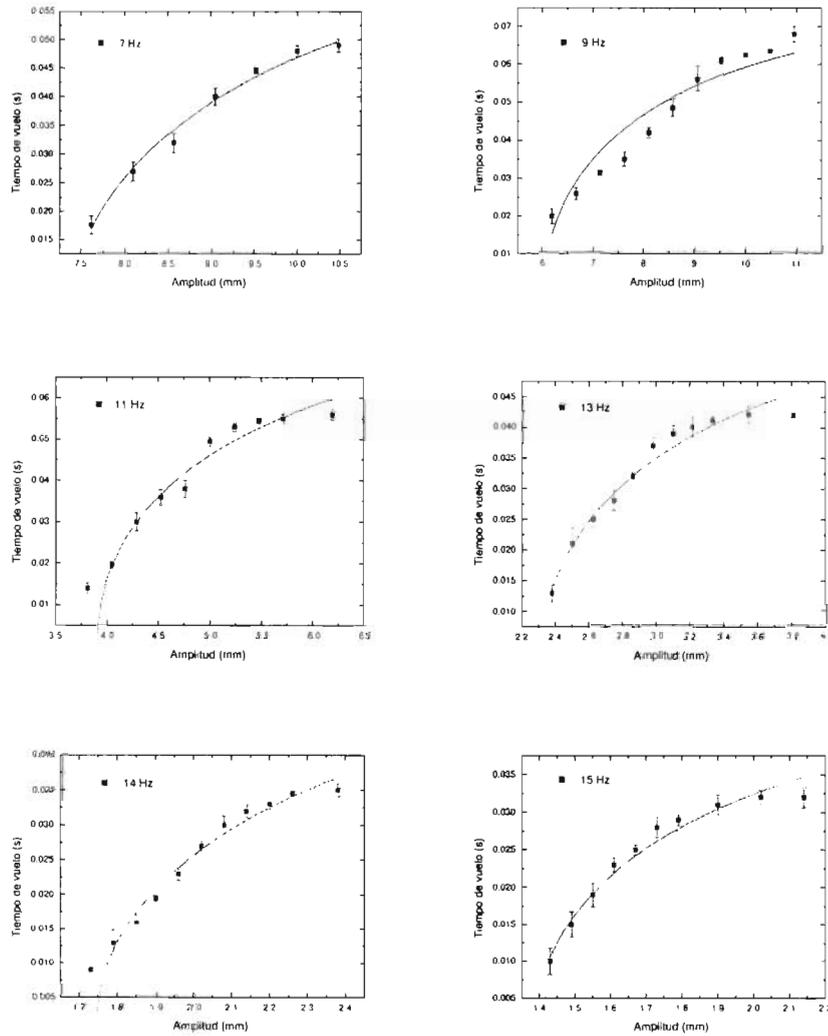


Figura 3.6: Resultados de tiempos de vuelo extendiendo los datos a más altas amplitudes que en las figuras anteriores

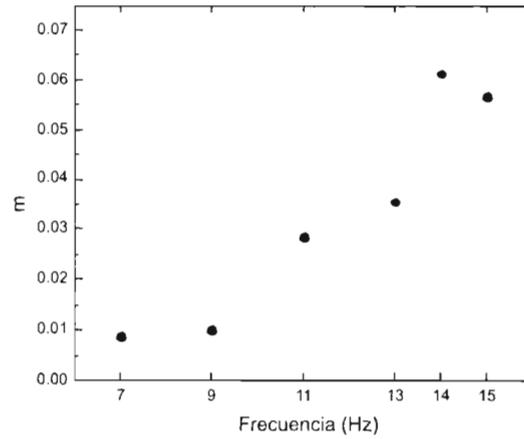


Figura 3.7: Pendiente de las rectas ajustadas a los datos de tiempo de vuelo. Aunque en este caso el pico no es tan remarcado, es de notarse que la pendiente de las rectas retrocede después de los 14 Hz.

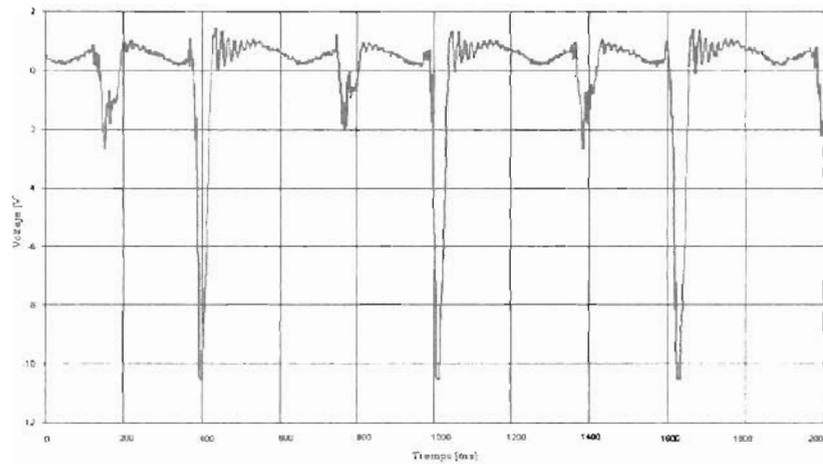


Figura 3.8: Bifurcación en los tiempos de vuelo. Nótese aquí la aparición de dos picos, a los cuales les sigue un intervalo largo y uno corto.

zoeléctrico es mucho más ruidosa en este caso, debido a la alta velocidad a la que el sistema está sometido. En este caso la frecuencia es de 25 Hz. Las pequeñas oscilaciones que se observan después del golpe se deben a las caídas consecutivas de las capas del material granular, a esto se conoce como ondas de densidad

3.3. Fricción con las paredes.

Los resultados que obtuvimos al medir la velocidad de la celda convectiva variando el coeficiente de fricción de las paredes del recipiente se muestran en la figura 3.9.

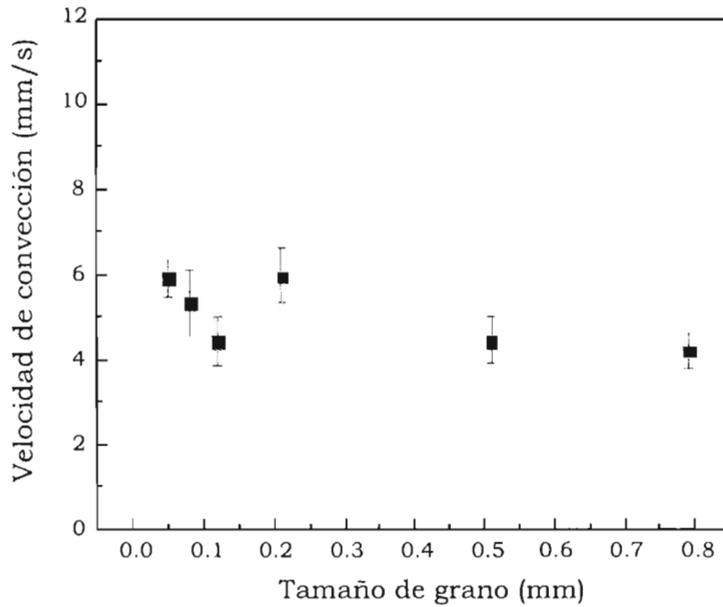


Figura 3.9: Velocidad de convección graficada contra diferentes rugosidades de las paredes. El tamaño de grano se calculó a partir de la densidad de puntos en las especificaciones del papel de lija.

Como se puede ver, estos datos no parecen guardar ninguna relación unos con otros y la diferencia entre unos y otros es más o menos del orden del tamaño de las barras de error. La explicación que podemos dar es que

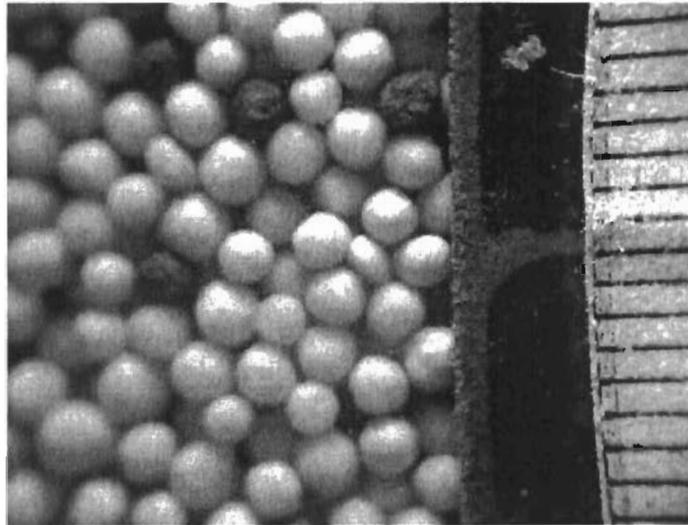


Figura 3.10: Imagen del granulado a través de la ventana abierta en la lija que se fijó en las paredes. Se puede apreciar la orilla de la lija detrás de la escala.

entre los distintos tipos de lija no existe una gran diferencia en el tamaño de grano de la lija respecto al tamaño de los granos de tapioca. Otro argumento puede ser que la ventana hecha para poder observar el movimiento de las partículas (Fig. 3.10) modifica la forma de la celda convectiva la cual da lugar a resultados inesperados. De hecho, la celda que observamos al realizar los experimentos no parecía una celda toroidal, sino que aparecía con su centro más cargado hacia la ventana.

3.4. Altura de la columna.

Con respecto a los experimentos en que medimos la amplitud crítica del sistema a diferentes alturas de la columna granular, los resultados arrojados se muestran en la figura 4.10. Para este caso tomamos los valores de 6 a 15 Hz incrementando el valor de la frecuencia cada vez en 1 Hz.

Vemos que los resultados son lo que esperaríamos obtener: la amplitud crítica aumenta al incrementar el peso de la columna granular. El parámetro A_c que aparece en nuestra gráfica proviene de la extrapolación de los resul-

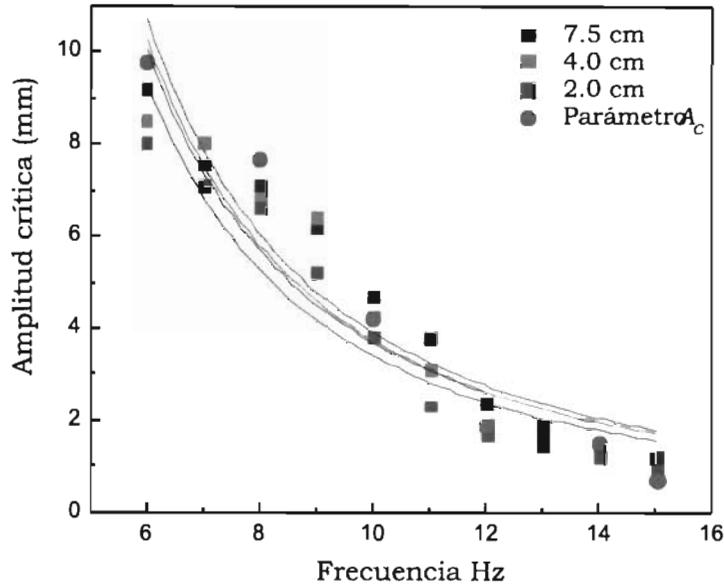


Figura 3.11: Amplitud crítica del sistema como función de la frecuencia de oscilación. para diferentes alturas del granulado. El parámetro A_c que tenemos aquí se refiere a la amplitud crítica obtenida a partir de la extrapolación de los datos de la velocidad contra amplitud de la sección 4.1.

tados obtenidos al medir la velocidad convección en función de la amplitud cuando la velocidad alcanza el valor de cero. Es por eso que para este parámetro sólo tenemos datos de 6, 8, 10, 12, 14 y 15 Hz. Sobre los datos que obtuvimos hicimos un ajuste de una función inversa con el cuadrado de la frecuencia, y observamos que todos los resultados encajan en este ajuste.

3.5. Ancho del recipiente.

Medimos la velocidad de convección utilizando dos diferentes anchuras de columna, de manera muy similar a las mediciones anteriores. Para simplificar el experimento usamos recipientes cuyos fondos no estaban horadados, a diferencia de los usados anteriormente. Posteriormente, en uno de estos recipientes decidimos hacer agujeros para mostrar la diferencia en la velocidad de convección cuando existe presión del aire sobre la columna y

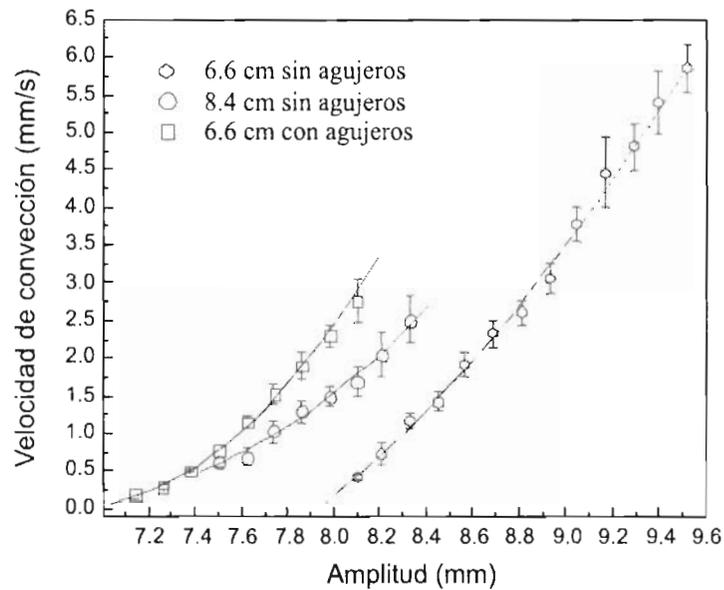


Figura 3.12: Velocidad de convección a diferentes anchuras de columna. Las dos primeras curvas se cortan antes que la última, debido a que en estos casos el sistema entra más rápidamente en el régimen de fluidización.

cuando no existe. Los resultados obtenidos se muestran en la figura 3.12.

Los resultados obtenidos son los siguientes: a una mayor anchura de la columna, la velocidad de convección es mayor. Nótese que, cuando se elimina la presión del aire, la velocidad de convección es más grande incluso que en el caso de la columna más ancha y además, como se puede ver claramente, crece a un ritmo mucho mayor, de comportarse ambos de una manera muy similar al principio, se van separando cada vez más. Esta fue una de las razones por las que decidimos eliminar la presión del aire haciendo agujeros; como se puede notar de la curva de la derecha en la figura 3.12, si hubiéramos hecho el experimento con el recipiente de 6.6 cm sin agujeros, apenas habríamos podido observar el comportamiento cuadrático de la velocidad de convección, aunque no lo sabíamos *a priori*, si habíamos intuido que algo así sucedería.

No obstante, con presión del aire o sin ella, los resultados siguen mostrando, aunque más leve, esa tendencia parabólica.

Para hacer una interpretación de todos los resultados que han sido mostrados en este capítulo se hará una discusión de ellos en el capítulo siguiente y, con esta interpretación, se podrán conocer cuáles son los parámetros que juegan un papel más importante en el fenómeno de la convección granular.



Capítulo 4

Análisis y discusión de los resultados

En este capítulo se presentará una discusión de los resultados mostrados en el capítulo anterior. De igual forma se establecerá un marco teórico dentro del cual se pueda dar una interpretación a estos resultados obtenidos.

4.1. Marco teórico

4.1.1. Ecuaciones de movimiento.

Analicemos primeramente como se comporta un sistema granulado contenido dentro de un recipiente que se encuentra sujeto a una agitación vertical. El modo más simple en que a un sistema como éste se le puede imprimir una oscilación vertical es aquel en el que la posición del sistema como conjunto es una función cosenoidal en el tiempo

$$z_0 = A \cos \omega t. \quad (4.1)$$

Donde z_0 es la posición vertical del recipiente en cualquier instante, A es la amplitud de oscilación, ω es la frecuencia angular de oscilación y t es el tiempo transcurrido. Para calcular la velocidad y la aceleración del sistema para cualquier tiempo solamente basta derivar la ecuación anterior con respecto al tiempo:

$$\dot{z}_0 = -A\omega \operatorname{sen} \omega t, \quad (4.2)$$

$$\ddot{z}_0 = -A\omega^2 \cos \omega t. \quad (4.3)$$

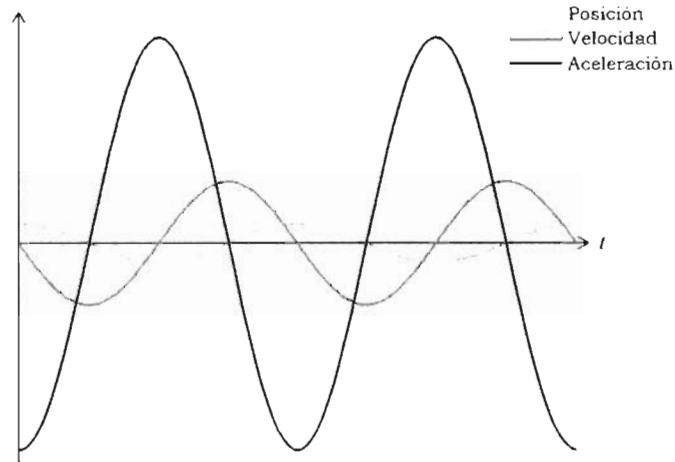


Figura 4.1: Posición, velocidad y aceleración del sistema granulado desde el marco de referencia inercial.

Aquí \dot{z}_0 y \ddot{z}_0 son la velocidad y la aceleración del recipiente respectivamente (Figura 4.1.1). Debido a las oscilaciones a las que está sujeto, el granulado sufre un movimiento con respecto al recipiente, sin embargo, este movimiento no aparecerá sino hasta que la aceleración del sistema sea mayor a la aceleración de la gravedad. La amplitud mínima a la cual la aceleración iguala a la gravedad se denomina **amplitud crítica** (A_c). Para calcular A_c necesitamos igualar la ecuación (4.3) a la gravedad g y tomar el tiempo en el que el coseno se vuelve máximo, con lo que tenemos que la amplitud crítica es

$$A_c = \frac{g}{\omega^2} \quad (4.4)$$

A la diferencia entre la amplitud de oscilación y la amplitud crítica la llamaremos **amplitud en exceso** y la denotaremos por A_e (Fig. 4.2).

$$A_e = A - A_c \quad (4.5)$$

Para facilitar los cálculos, calcularemos cuál es la posición, velocidad y aceleración de un punto cualquiera desde el marco de referencia del recipiente que contiene a las partículas. Para ello debemos de hacer una transformación de Galileo a las ecuaciones (4.1), (4.2) y (4.3), con lo que tenemos lo siguiente.

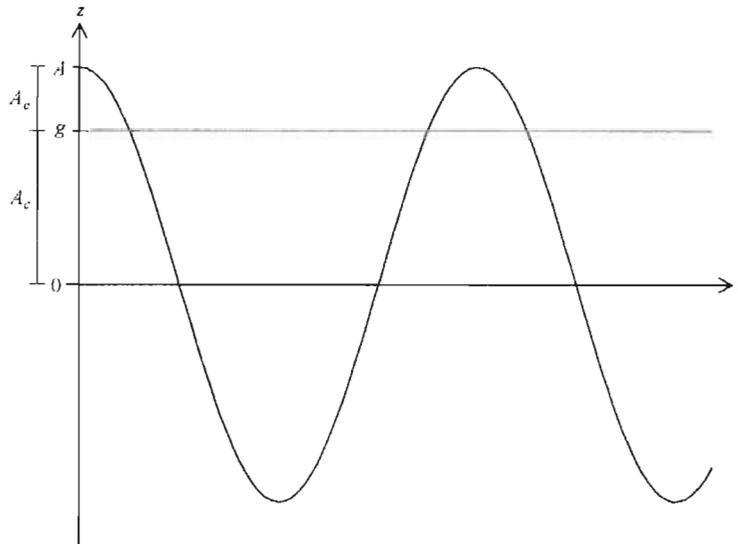


Figura 4.2: Amplitud crítica y amplitud en exceso del sistema. La dirección creciente de \ddot{z} es hacia abajo.

$$z' = z - z_0 = z - A \cos \omega t. \quad (4.6)$$

$$\dot{z}' = \dot{z} - \dot{z}_0 = \dot{z} + A\omega \sin \omega t. \quad (4.7)$$

$$\ddot{z}' = \ddot{z} - \ddot{z}_0 = \ddot{z} + A\omega^2 \cos \omega t \quad (4.8)$$

En este caso z , \dot{z} y \ddot{z} son una posición, velocidad y aceleración medidas en el sistema inercial y z' , \dot{z}' y \ddot{z}' son posición, velocidad y aceleración medidas desde el sistema oscilante. En el sistema del laboratorio, la única aceleración que existe es la gravedad. Por lo tanto la ecuación (4.8) se convierte en

$$\ddot{z}' = -g + A\omega^2 \cos \omega t. \quad (4.9)$$

Y, por lo tanto la ecuaciones para la velocidad de una partícula que se encuentra sobre el plato oscilante sin que actúe sobre ella ninguna fuerza a excepción de la gravedad y las fuerzas inerciales derivadas del movimiento del recipiente es, integrando la ecuación anterior:

$$\dot{z}' = -g(t - t_*) + A\omega \operatorname{sen} \omega t + C_1. \quad (4.10)$$

Entonces, su posición en cualquier instante está dada por

$$z' = -\frac{1}{2}g(t - t_*)^2 - A \cos \omega t + C_1(t - t_*) + C_2. \quad (4.11)$$

Se añadió el parámetro t_* porque éste representa el instante en que las partículas despegan. Antes de este tiempo no se puede considerar la acción de la gravedad, ya que, en ese momento la aceleración en el sistema de referencia del recipiente es negativa y, puesto que las partículas están en contacto con el fondo, no puede haber movimiento hacia abajo. El movimiento sólo puede existir cuando la aceleración es positiva o cuando las partículas no están en contacto con el suelo.

Para conocer el valor de las constantes de integración en las ecuaciones (4.10) y (4.11) debemos analizar las condiciones iniciales del sistema al tiempo t_* , pero, para eso necesitamos primeramente conocer esta última, lo cual se logra igualando la ecuación (4.9) a cero y despejando para t . Haciendo eso se obtiene

$$t_* = \frac{1}{\omega} \cos^{-1} \left(\frac{g}{A\omega^2} \right). \quad (4.12)$$

Para (4.10), al tiempo t_* la velocidad relativa al fondo del recipiente es cero, ya que a instantes anteriores el granulado permanecía en contacto con el fondo. Por lo tanto, el valor de la constante de integración de esta ecuación es $C_1 = -A\omega \operatorname{sen} \omega t_*$. La ecuación queda como

$$\dot{z}' = -g(t - t_*) + A\omega \operatorname{sen} \omega t - A\omega \operatorname{sen} \left[\cos^{-1} \left(\frac{g}{A\omega^2} \right) \right]. \quad (4.13)$$

Donde el seno en el tercer término del lado derecho se puede escribir como $\sqrt{1 - (A_c/A)^2}$, con lo cual, la ecuación anterior queda, al sustituir este término, de la siguiente manera

$$\dot{z}' = -g(t - t_*) + A\omega \operatorname{sen} \omega t - A\omega \sqrt{1 - \left(\frac{A_c}{A} \right)^2}. \quad (4.14)$$

Para la ecuación (4.11) tenemos que al tiempo $t = t_*$ la posición relativa del granulado respecto al fondo del recipiente es cero por lo tanto la constante C_2 vale g/ω^2 , es decir, A_c . Entonces (4.11) nos queda de la siguiente forma.

$$z' = -\frac{1}{2}g(t - t_*)^2 - A \cos \omega t + A\omega \sqrt{1 - \left(\frac{A_c}{A}\right)^2} (t - t_*) + A_c. \quad (4.15)$$

Con esta ecuación podemos conocer la posición del granulado en cualquier instante. Cabe señalar que esta ecuación sólo es válida para el intervalo que va desde t_* hasta el momento en que las partículas aterrizan, ya que la colisión de estas con el suelo es inelástica y, cuando retornan al fondo del recipiente casi instantáneamente adquieren la velocidad que éste último posee.

4.1.2. Tiempo de vuelo.

Para calcular el tiempo en el que el granulado permanece sin hacer contacto con el fondo del recipiente necesitamos conocer el momento en el cual las partículas regresan al suelo después de haber despegado. Denotaremos al tiempo de aterrizaje por t_a . En este momento la posición relativa del granulado al fondo del recipiente es, después de haber realizado su trayectoria en el aire, nuevamente cero. Entonces, para poder conocer cuál es este tiempo de aterrizaje, necesitamos encontrar los ceros de la ecuación (4.15). El primer cero ya lo conocemos; ocurre cuando en el momento en el que el tiempo es igual a t_* . Por lo tanto, para conocer el tiempo de vuelo necesitamos encontrar el tiempo al que ocurre el siguiente cero de la ecuación y, a este tiempo, restarle el valor de t_* . Para ello, es necesario hacer una aproximación en serie de Taylor del coseno: $\cos \omega t \approx 1 - (\omega t)^2/2! + \dots$ con lo cual la ecuación (4.15) queda expresada de la siguiente manera.

$$z' = -\frac{1}{2}g(t - t_*)^2 - A \left(1 - \frac{\omega^2 t^2}{2}\right) + A\omega \sqrt{1 - \left(\frac{A_c}{A}\right)^2} (t - t_*) + A_c. \quad (4.16)$$

Ordenando los términos de la ecuación e igualando ésta a cero tenemos entonces lo siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{\omega^2}{2}(A - A_c)t^2 + \left[gt_* + A\omega \sqrt{1 - \left(\frac{A_c}{A}\right)^2}\right] t - \frac{1}{2}gt_* \\ - (A - A_c) - A\omega \sqrt{1 - \left(\frac{A_c}{A}\right)^2} t_* = 0 \quad (4.17) \end{aligned}$$

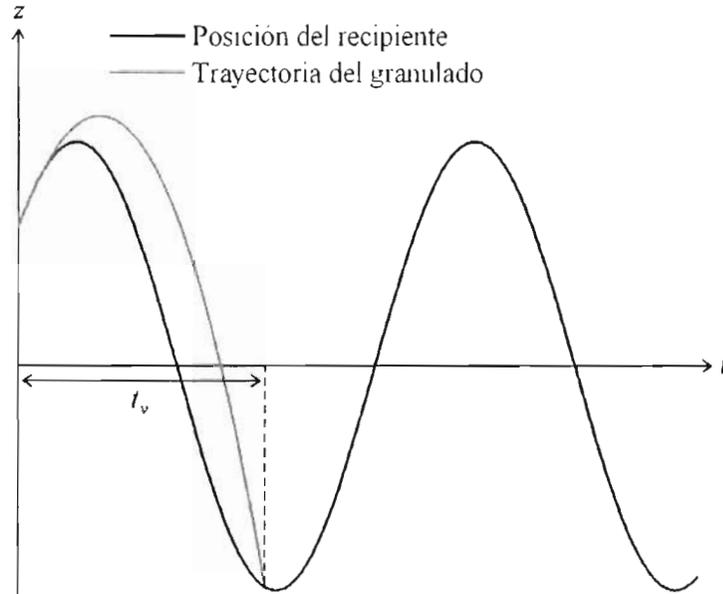


Figura 4.3: Esquema que muestra la trayectoria del granulado después de despegarse del plato oscilante. Se ha recorrido el coseno de modo que éste comience en t_* .

Si identificamos los diferentes términos de la ecuación anterior de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 a &= \frac{\omega^2}{2}(A - A_c), \\
 b &= gt_* + A\omega\sqrt{1 - \left(\frac{A_c}{A}\right)^2} \text{ y} \\
 c &= \frac{1}{2}gt_* - (A - A_c) - A\omega\sqrt{1 - \left(\frac{A_c}{A}\right)^2},
 \end{aligned}$$

entonces la solución de la ecuación (4.16) se encuentra usando la fórmula general para resolver ecuaciones cuadráticas. Esta ecuación tiene dos soluciones. Una de ellas es aproximadamente igual a t_* (debido a que hicimos una aproximación en serie de Taylor para poderla resolver). En consecuencia debemos tomar la segunda solución y restar ambas para obtener el tiempo de vuelo.

$$t_v = t_a - t_* \quad (4.18)$$

4.2. Análisis de los resultados.

4.2.1. Resultados para la velocidad de convección

Para interpretar los resultados obtenidos en los experimentos donde se midió la velocidad de convección se buscó hacer una aproximación en la ecuación (4.10) para tratar de escribir la velocidad del granulado respectiva al plato oscilante en términos puramente de $A - A_c$. La razón de hacer esto es que, a primera vista, el hecho de que experimentalmente se obtenga que la velocidad de convección es proporcional a la amplitud en exceso al cuadrado hace suponer que ésta es proporcional a la energía cinética de recibe el granulado de parte de las oscilaciones. Dado que la energía cinética está definida como $E_k = 1/2 mv^2$ la energía cinética media en un ciclo en un movimiento armónico simple es

$$\bar{E}_k = \frac{1}{2} mA^2 \omega^2. \quad (4.19)$$

Por este motivo no es difícil pensar que una dependencia en $(A - A_c)^2$ sea en realidad una dependencia en la energía cinética. No obstante, dado que la expresión (4.10) es una ecuación trascendente, resulta prácticamente imposible hacer, algebraicamente, una aproximación tal que dicha ecuación quedara expresada en términos de A_e . Por esta razón decidimos hacer esta aproximación numéricamente, basándonos en los datos que teníamos para las amplitudes y vaciándolos en la ecuación (4.10), la cual se integró en el tiempo para calcular la velocidad promedio durante el ascenso de las partículas.

$$\dot{z}' = \frac{1}{t_s - t_*} \int_{t_*}^{t_s} \left[-g(t - t_*) + A\omega \sin \omega t - A\omega \sqrt{1 - \left(\frac{A_c}{A}\right)^2} \right] dt. \quad (4.20)$$

El parámetro t_s es el momento en el cual el granulado alcanza la una separación máxima con respecto al fondo del recipiente. Este parámetro fue calculado numéricamente. El porqué de haber integrado hasta t_s en vez de integrar hasta el tiempo en que el granulado regresa al fondo del plato oscilante es porque, de acuerdo a experimentos reportados por otros autores [18] (Figura 4.4), en el granulado se presenta el fenómeno de arqueo y existe una fuerza en contra de las paredes que origina que éstas se opongan al

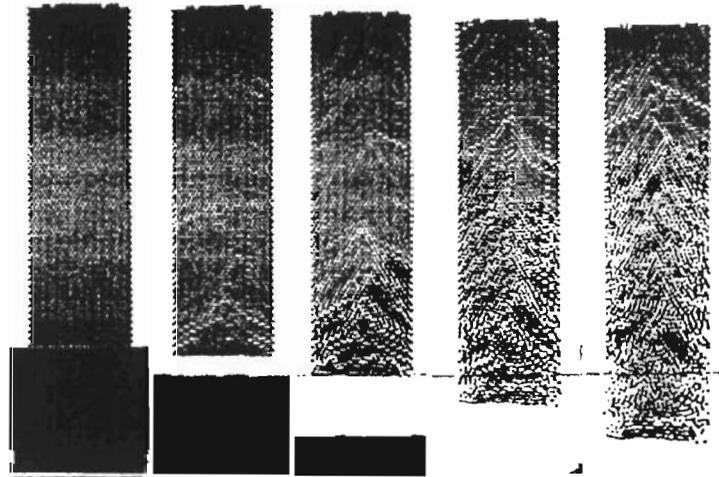


Figura 4.4: Serie de imágenes que representa la caída de un material granular contenido en un tubo al quitar el fondo que lo soportaba. Puede apreciarse la descompactación. *Phys Rev E* **53**, 1923 (1996): «Discontinuous decompaction of a falling sandpile.»

movimiento del granulado y lo retrasen en la parte que se encuentra cerca de ellas, originando la convección. Sin embargo, existe un fenómeno llamado **descompactación** que ocurre durante todo el tiempo en que el sistema se encuentra separado del fondo del recipiente pero, al comenzar el descenso esta descompactación se vuelve más importante, lo cual produce que la fuerza de fricción con las paredes se vuelva mínima y, por ende, cualquier trabajo que esta fuerza haga en contra del movimiento del material es despreciable.

Una vez que se obtuvieron los valores de \bar{z}' a partir de esta integral para las amplitudes utilizadas en el experimento, graficamos estos valores contra el parámetro $A - A_c$ para observar si existía alguna relación entre la velocidad media del granulado y este parámetro. Los resultados de este cálculo son bastante interesantes: la velocidad media resulta ser una función cuadrática con la amplitud en exceso, en vez de ser una función lineal. Decidimos entonces graficar \bar{z}' contra $(A - A_c)^2$. Todas las curvas en las gráficas se convirtieron en rectas.

El hecho de que la velocidad media que posee el granulado sea propor-

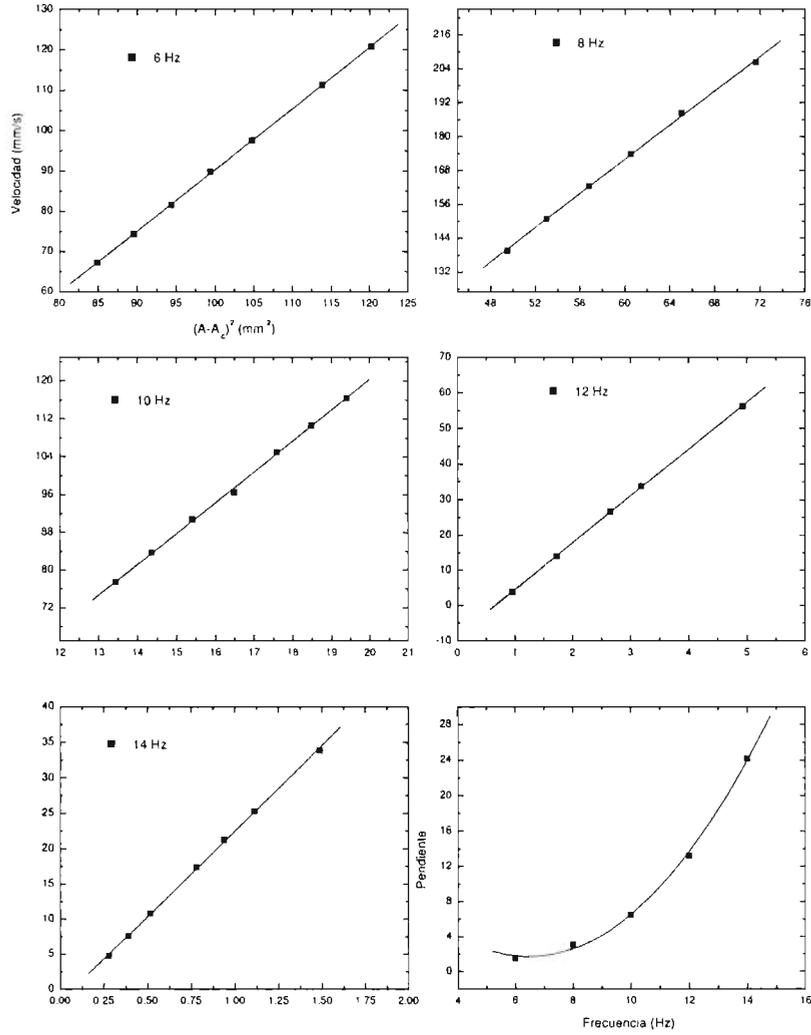


Figura 4.5: Resultados del cálculo numérico para todas las frecuencias. También se incluyen las pendientes de las rectas a las cuales se les ajusto una función cuadrática.

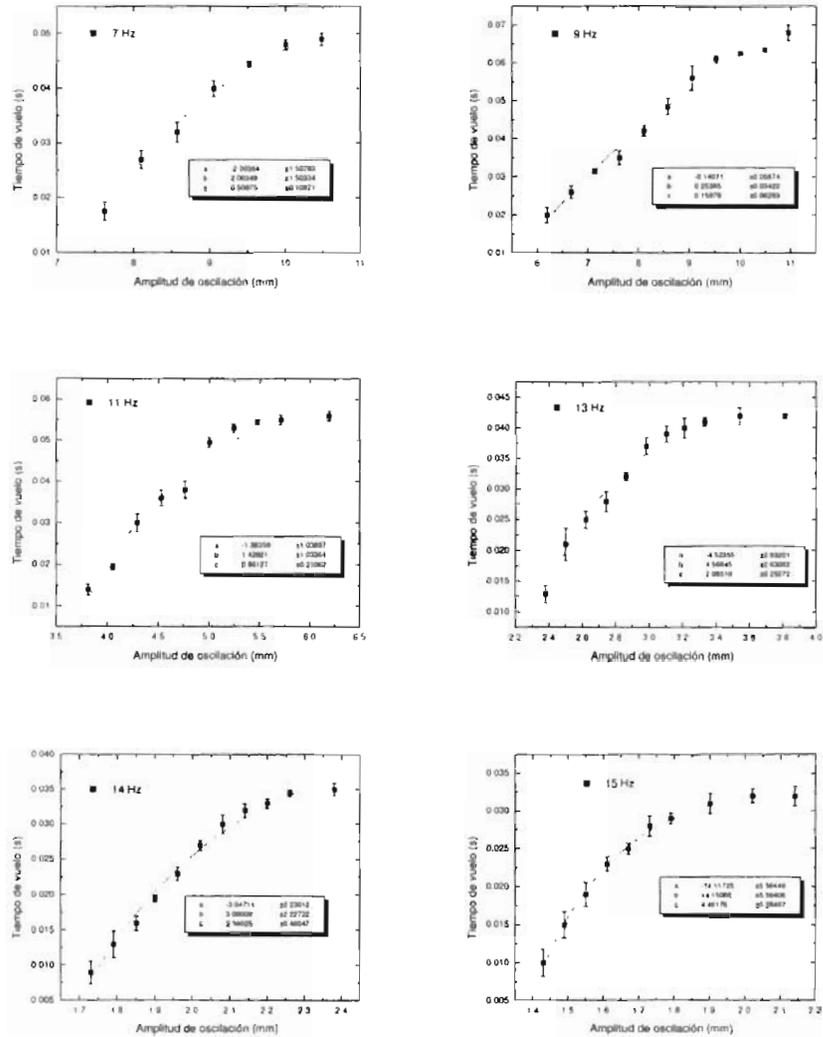


Figura 4.6: Ajustes hechos a los datos experimentales de tiempos de vuelo. En cada gráfica se muestran los valores obtenidos para a , b y c , los cuales se pueden apreciar mejor en el cuadro 4.1.

ω (hz)	a	b	c
7	-2.00364	2.06349	0.50975
9	-0.14071	0.25385	0.15979
11	-1.36359	1.42921	0.86127
13	-4.52355	4.56845	2.08519
14	-3.04711	3.09009	2.59025
15	-14.11725	14.15086	4.46176

Cuadro 4.1: Parámetros obtenidos tras ajustar la ecuación (4.21) a los datos experimentales de tiempos de vuelo.

cional a la amplitud en exceso al cuadrado implica, de los resultados experimentales, que la velocidad de convección es directamente proporcional al momento que éste adquiere de las oscilaciones. *Este es un resultado sumamente importante que no está reportado, hasta ahora, en la literatura referente a convección granular.* La dependencia de la velocidad de convección con la velocidad media del granulado durante la oscilación indica que el material siente una fuerza viscosa similar a la que se encuentra en los fluidos.

Con respecto al pico que se muestra en la figura 3.4, que se encontró en los experimentos, no podemos decir a que se deba este comportamiento, sin embargo esto es algo que ya ha sido reportado con anterioridad en la literatura [22] sin que se dé tampoco una explicación del mismo.

4.2.2. Resultados para tiempos de vuelo

En el caso de los resultados obtenidos para las mediciones de tiempos de vuelo buscamos, a través de cálculos numéricos, una curva que se ajustara mejor a nuestros datos experimentales. Buscamos la solución para la ecuación (4.15) para diferentes amplitudes y graficamos usando diferentes escalas. Al usar una escala semilogarítmica (Fig. 4.7) nuestros datos se convirtieron en una recta, lo cual sugería que se trataba de una exponencial. Se encontró que la función que presentaba un mejor ajuste a los datos fue la siguiente:

$$t_v = a + b(1 - e^{-cA}), \quad (4.21)$$

donde a , b y c son constantes a determinar a partir de los ajustes hechos a los datos experimentales. Presentamos en la figura 4.6 dichos ajustes y, dentro de cada gráfica, los valores correspondientes de a , b y c .

Se hizo lo anterior debido a que la ecuación que describe el tiempo de vuelo como función de la amplitud es demasiado complicada para poder

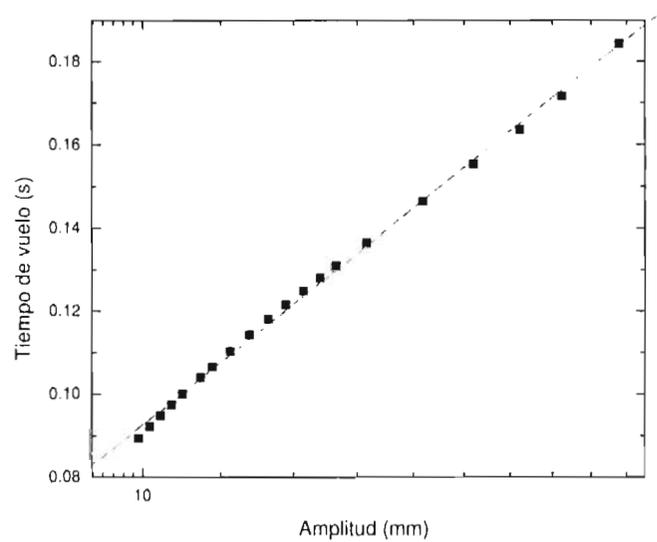


Figura 4.7: Cálculos numéricos para tiempos de vuelo a diferentes amplitudes. Al usar una escala logarítmica en el eje de las abscisas y lineal en el de las ordenadas los datos se convierten aproximadamente en una recta.

ajustarla a los datos. Por lo tanto creemos que la función exponencial es una buena aproximación.

Este ajuste hecho a los tiempos de vuelo debe guiar a la búsqueda de parámetros dinámicos en trabajos futuros.

4.2.3. Resultados para fricción con las paredes, ancho y alto de la columna.

Para los resultados obtenidos en el caso en el que se modificó el coeficiente de fricción de las paredes del recipiente no encontramos ningún resultado significativo. Esto, suponemos que es debido a que el tamaño de grano de las lijas usadas en el experimento no es comparable con el tamaño de las partículas. Además, la ventana hecha a un costado del recipiente para poder observar el movimiento de los granos provocaba una modificación significativa

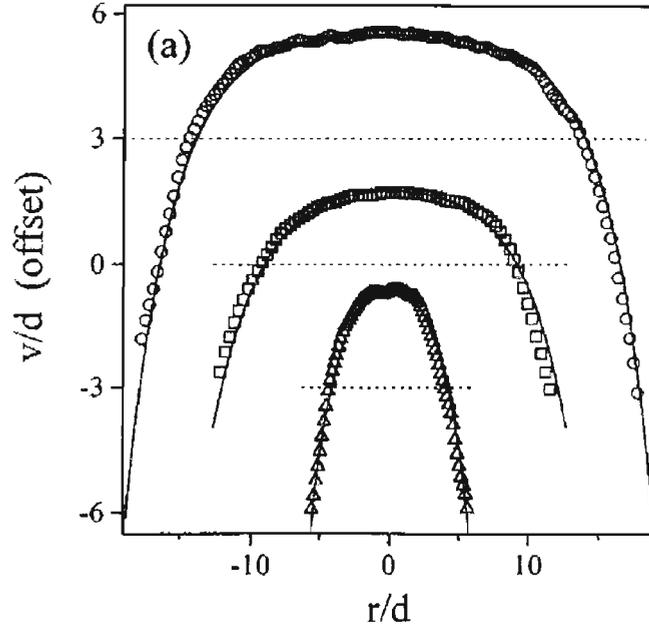


Figura 4.8: Velocidad de las partículas (en unidades de diámetro de partícula por ciclo) graficada contra la posición radial medida desde el centro del recipiente (adimensional). Las líneas continuas son ajustes a la ecuación (4.22) y las líneas punteadas indican el valor de $v(z, r)/d = 0$ para cada curva. [19]

en la geometría de la celda convectiva, por lo que no podemos comparar los resultados obtenidos en este caso con los que se obtuvieron para el caso en que no existían estas lijas sobre las paredes.

Para el caso en que se varió el ancho del recipiente, a mayor anchura del recipiente la velocidad de convección resulta ser mayor. Este resultado concuerda con el obtenido por J. B. Knight y colaboradores [19] al medir la velocidad de convección de las partículas de un material granular usando resonancia magnética para poder observar el campo de velocidades completo. Ellos reportan que la velocidad de convección como función de la distancia desde el centro del recipiente tiene el siguiente comportamiento:

$$v(r) = v_c + B \left[1 - I_0 \left(\frac{r}{r_c} \right) \right], \quad (4.22)$$

siendo r la distancia desde el centro del recipiente, v_c , B y r_c parámetros ajustables, e I_0 una ecuación modificada de Bessel de orden cero, que satisface la ecuación diferencial

$$\frac{d^2 v(\rho)}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dv(\rho)}{d\rho} - v(\rho) = 0, \quad (4.23)$$

con $\rho = r/r_c$. Esto se muestra en la figura 4.8, en la cual se muestran las velocidades de convección para diferentes anchos de columna, cuyo cero ha sido desplazado para poder apreciarse mejor. Para este caso ellos usaron radios adimensionales R/d (donde d es el diámetro de las partículas) de 6.35 (triángulos), 12.7 (cuadrados) y 19.05 (círculos). Se puede apreciar que para el ancho de mayor valor, la velocidad de convección en cerca de las paredes (que es la que nosotros medimos) es mayor (en valor absoluto). Para el ancho menor la velocidad de convección es de alrededor de -3 , en tanto que para el ancho mayor la velocidad de convección tiene un valor de -6 .

Para el caso en que se utilizaron diferentes alturas de columna (Fig. 3.4), es lógico pensar que la amplitud a la cual el granulado comienza a moverse sea mayor al incrementar el peso del material y, en consecuencia, la fuerza ejercida por el granulado sobre las paredes del recipiente, lo cual da lugar a que aumente la fuerza de fricción. Por lo tanto, una mayor fuerza en contra de las paredes implica que el sistema granular necesitará de una mayor velocidad inicial —la cual es proporcional a la amplitud de oscilación— para poder vencer la fuerza de fricción estática y comenzar a moverse.

Conclusiones

La contribución original más importante de este trabajo es el haber demostrado que la velocidad de convección es proporcional a la velocidad relativa media entre el granulado y el plato. Esto se puede interpretar como la acción de un esfuerzo cortante que crece linealmente con la velocidad relativa (similar al arrastre ejercido por una pared sobre un fluido viscoso) retrasando a las partículas cercanas a la pared con respecto a las que están más cercanas al centro del recipiente.

- Los cálculos numéricos muestran que la velocidad del granulado relativa al recipiente que lo contiene es proporcional a la amplitud en exceso al cuadrado.
- De los resultados experimentales, la velocidad de convección cerca de las paredes es directamente proporcional al cuadrado de la amplitud de oscilación en exceso y, por lo tanto, es directamente proporcional al momento relativo que adquiere el granulado durante cada oscilación.
- El hecho de que la velocidad de convección crezca linealmente con A_e^2 implica que la fuerza de arrastre que sufre el material granular es proporcional a la velocidad relativa media.
- La amplitud mínima necesaria para que el sistema comience a presentar convección es inversamente proporcional al cuadrado de la frecuencia de oscilación y depende de las fuerzas de fricción presentes dentro del sistema, así como de la anchura y la altura de la columna granular.
- El tiempo de vuelo del material granular se puede aproximar como una función exponencial descrita por la ecuación (4.21). Esta función, que ajusta bien a todos los resultados experimentales, es sugerida por cálculos numéricos preliminares.

- Se corrobora que los tiempos de vuelo de las partículas del sistema sufren una bifurcación en su comportamiento al pasar del régimen de bajas frecuencias o *tapping* al régimen de fluidización.
- Modificar otros parámetros presentes en la convección, tales como, la altura de la columna granular, el ancho de dicha columna y la fricción con las paredes no altera el hecho de que la inercia rige el fenómeno de la convección. Bajo las condiciones experimentales usadas estos parámetros no tuvieron mayor influencia en los resultados.

Trabajo a futuro.

- Es necesario buscar parámetros cinemáticos que puedan describir el tiempo de vuelo del granulado.
- Hacer experimentos que puedan ayudar a encontrar bifurcaciones más allá de la primera que se ha encontrado hasta ahora.
- Establecer un parámetro con el cual se pueda caracterizar la fluidización del sistema granular.
- Realizar experimentos con paredes de mayor rugosidad de tal manera que se pueda analizar la dependencia de la fricción de las paredes en la velocidad de convección.
- Identificar el origen de la resonancia encontrada para las medidas de velocidad de convección a 14 hz.



Bibliografía

- [1] Extraído de la página web:
<http://jfi.uchicago.edu/~jaeger/granular2/>
- [2] C. A. Coulomb, *Acad. R. Sci. Mem. Mat. Phys. par Divers Savants*, **7** 343 (1773).
- [3] Faraday, M. «On a peculiar class of acoustic figures; and on certain forms assumed by groups of particles upon vibrating elastic surfaces.» *Philos. Trans. R. Soc. London* **52**, 299 (1831).
- [4] W. J. W. Rankine, *Phil. Trans. Roy. Soc.*, **147**, 9 (1857).
- [5] I. Roberts, *Proc. Roy. Soc.*, **147**, 9 (1857).
- [6] H. A. Janssen, *Z. Vereins Deutsch Ing.* **39(35)**, 1045 (1895).
- [7] Lord Rayleigh, *Phil. Mag. S.6.* **16**, **61** 129 (1906).
- [8] O. Reynolds, *Philos. Mag. Ser. 5*, **50**, 469 (1885).
- [9] R. A. Bagnold. *Proc. R. Soc. London Ser. A*, **225**, 49 (1954).
- [10] Jacques Duran. «Sables, poudres et grains: Introduction à la physique des milieux granulaires», *Éditions Eyrolles Sciences*.
- [11] P. Dantu. In *Proc. Of the 4th International Conf. On Soil Mech. and Food Eng.*, volume 1, page 144 (London, 1957) .
- [12] H. Bénard, «Les tourbillons cellulaires dans une nappe liquide», *Rev. Gén. Sciences Pure Appl.* **11(23)**, 1261-1271 **11(24)**, 1309-1328 (1900).
- [13] Lord Rayleigh, «On convection currents in a horizontal layer of fluid, when the higher temperature is on the under side», *Phil. Mag.*, ser. 6, **32(192)**, 529-546 (1916).

- [14] Rosato et al., *Phys. Rev Lett.* **58**, 1038 (1987).
- [15] Wildman, R. D., Huntley, J. M. & Dave R. *Phys. Rev. Lett.* **68**, 1422.
- [16] Möbius M., Lauderdale B., Nagel S. & Jaeger H. *Nature* **414** 270 (2001)
- [17] Y. Nahmad-Molinari, G. Canul-Chay, and J. C. Ruiz-Suárez *Phys. Rev. E* **68**, 041301 (2003)
- [18] J. Duran, T. Mazozi, S. Luding, E. Clément and J. Rajchenbach, *Phys. Rev. E*, **53**, 1923, (1996)
- [19] James B. Knight et al. *Phys. Rev. E* **54**, 5726.
- [20] R. Ramírez, D. Risso, and P. Cordero, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 1230 (2000).
- [21] A. Garcimartín, I. Zuriguel, D. Maza, J. M. Pastor and J.-F. Boudet *arXiv:cond-mat* **0402040** v1 2 Feb 2004.
- [22] J. A. C. Gallas, H. J. Herrmann, and S. Sokolowski, *Phys. Rev. Lett.* **69** 1371 (1992).
- [23] M. Möbius et al. *Pyhs. Rev. Lett.* **93**, 198001 (2004)
- [24] D. A. Huerta and J. C. Ruiz-Suárez, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 114301 (2004)