



Universidad Autónoma de San Luis Potosí

Facultad de Ciencias

Movimiento activo inducido por campos magnéticos
variables

Tesis presentada a la

Facultad de Ciencias

como requisito parcial para la obtención del grado de

**MAESTRÍA EN CIENCIAS INTERDISCIPLINARIAS (FÍSICA DE
MATERIALES)**

por

María Fernanda Hernández Flores

dirigida por

Dra. Rosario Esperanza Moctezuma Martiñón

22 de octubre de 2026

San Luis Potosí, S.L.P.

Movimiento activo inducido por campos magnéticos variables © 2026 by María Fernanda
Hernández Flores is licensed under CC BY-NC-ND 4.0 

Dedicatoria especial para mi familia que siempre a estado para acompañarme en esta travesía. Soy afortunada de contar con cada uno de ellos. Especialmente a mis abuelos maternos, sin su apoyo nada de esto hubiera sido posible.

Finalmente agradezco a SECIHTI por la beca que me fue otorgada para realizar mis estudios de maestría.

Índice general

1. Marco Teórico	1
1.1. Materia Activa	1
1.2. Movimiento Aleatorio	3
1.3. Origen microscópico: la caminata aleatoria en una dimensión	5
1.4. El salto a la biología y el descubrimiento de la autopropulsión	7
1.5. Desplazamiento cuadrático medio y regímenes de movimiento	8
1.6. Modelo analítico para el DCM en dinámicas activas	11
2. Metodología	13
2.1. Arreglo experimental	13
3. Resultados	19
3.1. Trayectorias de la esfera magnetizada	19
3.2. Desplazamiento cuadrático medio	26
3.2.1. Análisis del Coeficiente de Difusión Efectivo	33
3.3. Modelo teórico del Desplazamiento Cuadrático Medio (MSD)	34
3.4. Conclusiones	40
4. Modelo Teórico	41
4.1. Derivación del Modelo Teórico	41
4.1.1. Péndulo Magnético Paramétricamente Forzado	42
4.2. Dinámica de la esfera y Ecuación de Movimiento	43
4.2.1. Acoplamiento Mecánico y Condición de No Deslizamiento	44
4.2.2. Justificación Teórica y Vínculo con la Materia Activa	46
4.3. Resultados y Discusión	47
4.3.1. Régimen de baja frecuencia	47
4.3.2. Régimen de frecuencia intermedia	47
4.3.3. Régimen de alta frecuencia	48

<i>ÍNDICE GENERAL</i>	III
4.3.4. Dinámica a mayor intensidad del campo magnético	49
4.4. Conclusiones	52
5. Theoretical Model	53
5.1. Derivation of the Theoretical Model	53
5.1.1. Parametrically Driven Magnetic Pendulum	54
5.2. Sphere Dynamics and Equation of Motion	55
5.2.1. Mechanical Coupling and No-Slip Condition	56

Índice de figuras

1.1.	<i>Demostración de un cardumen. Imagen de Fernanda Flores, tomada en el Arrecife Manchones.</i>	1
1.2.	<i>Ilustración de la materia activa natural y artificial.</i>	2
1.3.	Evolución temporal de la distribución de probabilidad para partículas que generan una caminata aleatoria. Al evaluar la solución en los tiempos ($t = 1, 4, 16$), se observa cómo la distribución gaussiana es simétrica respecto al origen. A medida que el tiempo avanza, la amplitud decrece y la varianza aumenta en proporción a la raíz cuadrada del tiempo. Elaboración propia basada en los parámetros teóricos del modelo de Berg [1, 2].	7
1.4.	Clasificación de los distintos regímenes de movimiento según la dependencia temporal del desplazamiento cuadrático. Se representan las trayectorias características y sus respectivas curvas de comportamiento: superdifusivo o balístico en tono naranja ($\beta > 1$); para la difusiva se muestra en negro ($\beta = 1$); subdifusivo en azul ($\beta < 1$); y en estado confinado en morado. Elaboración basada en la representación de Ortega Arroyo [3].	10
1.5.	Trayectoria tridimensional proyectada en un plano que ilustra la caminata aleatoria de una bacteria <i>Escherichia coli</i> (cepa AW405). La motilidad de la célula comprende una velocidad media de 2×10^{-3} cm/s, alternando trayectorias rectilíneas con una duración promedio de un segundo y eventos de reorientación breves. El registro experimental fue adquirido a una temperatura de 32°C en un medio fluido con una viscosidad de 0,027 g/(cm·s). Adaptado de Berg & Brown (1972) [1].	10
2.1.	<i>Esquema representativo del arreglo experimental. Se muestra una esfera bajo un campo magnético alterno. Esta imagen es de carácter ilustrativo y fue generada mediante Inteligencia Artificial utilizando [Chat GPT].</i>	14

2.2. <i>Arreglo experimental real. Cámara Canon CCD configurada a 60 cps para el registro de los experimentos; en la parte inferior se observan un par de bobinas de Helmholtz ubicadas en el centro del arreglo, manteniendo inactivas las bobinas laterales y entre ellas la celda de observación.</i>	15
2.3. <i>Magnetización del balón de acero, sometido a un campo de 70 G.</i>	16
3.1. Trayectorias para los campos 12 G, 30 G y 50 G. Se observa un cambio en la dinámica en función de la frecuencia y la amplitud del campo magnético.	20
3.2. Trayectorias para un campo de 12 G. La dinámica transita desde un movimiento tipo aleatorio hasta seguir con movimientos suaves, para finalmente decaer en una dinámica de baja movilidad al aumentar la frecuencia.	21
3.3. Trayectorias para un campo de 20 G. La dinámica transita desde un movimiento aleatorio hasta curvas amplias, destacando la reaparición de trazos continuos en forma de espiral a los 14 Hz, para finalmente decaer en un estado vibracional.	22
3.4. Trayectorias para un campo de 30 G. La dinámica transita desde un movimiento aleatorio hasta curvas amplias y continuas, destacando un movimiento continuo y extenso a los 16 Hz, para finalmente decaer en una dinámica de baja movilidad al aumentar la frecuencia.	23
3.5. Trayectorias para un campo de 50 G. La dinámica transita desde un movimiento aleatorio hasta formar curvas amplias y circulares que permanecen en un rango de 11 Hz a 20 Hz, para finalmente decaer en una dinámica de baja movilidad.	24
3.6. Trayectorias para un campo de 70 G. El movimiento transita desde desplazamientos cortos hasta trayectorias amplias que aparecen más adelante, concluyendo en un estado vibratorio a altas frecuencias.	25
3.7. Desplazamiento cuadrático medio (DCM) para 12 G. Se muestran tres regímenes de movilidad dependientes de la frecuencia: (a) a bajas frecuencias (1-12 Hz) se observa un incremento progresivo de la movilidad; (b) a frecuencias intermedias (12.5-19 Hz) ocurre una pérdida gradual del desplazamiento tras alcanzar un máximo en 12 Hz; y (c) para altas frecuencias (20-35 Hz) se presenta una caída abrupta de la dinámica, indicando que entra en un estado de confinamiento. Las líneas punteadas muestran las pendientes teóricas para los regímenes balístico (Δt^2) y difusivo ($\Delta t^{1,0}$).	28

- 3.8. **Desplazamiento cuadrático medio (DCM) para 20 G.** Comportamiento dinámico dividido en tres regímenes de frecuencia: (a) a bajas frecuencias (1-14 Hz) la dinámica incrementa progresivamente hasta alcanzar un máximo de propulsión entre 13 y 14 Hz; (b) a frecuencias intermedias (15-20 Hz) se observa una pérdida gradual del movimiento; y (c) a altas frecuencias (21-35 Hz) la movilidad decae abruptamente hacia un estado de confinamiento. En comparación con el campo de 12 G, el acoplamiento óptimo se desplaza ligeramente y se logran desplazamientos de mayor magnitud. Las líneas punteadas indican las pendientes teóricas balística (Δt^2) y difusiva ($\Delta t^{1,0}$). 29
- 3.9. **Desplazamiento cuadrático medio para 30 G.** El comportamiento dinámico se divide en tres intervalos de frecuencia: (a) a bajas frecuencias (1-13 Hz) la movilidad incrementa progresivamente, alcanzando su máxima propulsión en una banda más amplia (9-13 Hz); (b) a frecuencias intermedias (17-23 Hz) el desplazamiento disminuye gradualmente, pero mantiene una tendencia difusiva; y (c) a altas frecuencias (24-35 Hz) la dinámica entra en un estado de confinamiento. Las líneas punteadas muestran las tendencias teóricas balística (Δt^2) y difusiva ($\Delta t^{1,0}$). 30
- 3.10. **Desplazamiento cuadrático medio para 50 G.** El comportamiento dinámico se divide en tres intervalos de frecuencia: (a) a bajas frecuencias (1-10.5 Hz) la movilidad incrementa de forma progresiva; (b) a frecuencias intermedias (11-21 Hz) el régimen balístico se extiende significativamente, registrando los mayores desplazamientos del sistema; y (c) a altas frecuencias (22-35 Hz) la movilidad decae de manera gradual. Las líneas punteadas muestran las tendencias teóricas balística (Δt^2) y difusiva ($\Delta t^{1,0}$). 31
- 3.11. **Desplazamiento cuadrático medio para 70 G.** El comportamiento dinámico se divide en tres intervalos de frecuencia: (a) a bajas frecuencias (1-9.5 Hz) el movimiento incrementa de forma progresiva; (b) a frecuencias intermedias (10-25 Hz) la persistencia del movimiento se mantiene sobre un amplio rango de frecuencias, logrando altos desplazamientos; y (c) a altas frecuencias (27-35 Hz) ocurre una caída de movimiento y el sistema entra en un estado de confinamiento. Las líneas punteadas muestran las tendencias teóricas balística (Δt^2) y difusiva ($\Delta t^{1,0}$). 32

3.12. Coeficiente de difusión efectivo (D_{eff}) en función de la frecuencia para distintas intensidades de campo magnético (12 G, 20 G, 30 G, 50 G y 70 G). Los picos en cada curva indican la frecuencia de resonancia, donde se maximiza el movimiento activo. Se observa que, al aumentar el campo magnético, el valor máximo de difusión incrementa y se desplaza hacia frecuencias mayores.	34
3.13. Desplazamiento cuadrático medio para un campo de 12 G. Las líneas sólidas muestran el modelo teórico para las frecuencias de resonancia de 11 Hz (negro) y 12 Hz (azul), y las líneas punteadas representan los datos experimentales correspondientes.	35
3.14. Desplazamiento cuadrático medio para un campo de 20 G. Las líneas sólidas muestran el modelo teórico para las frecuencias de resonancia de 11.5 Hz (negro) y 14 Hz (azul), y las líneas punteadas representan los datos experimentales correspondientes.	36
3.15. Desplazamiento cuadrático medio para un campo de 30 G. Las líneas sólidas muestran el modelo teórico para las frecuencias de resonancia de 12 Hz (negro) y 13 Hz (azul), y las líneas punteadas representan los datos experimentales correspondientes.	37
3.16. Desplazamiento cuadrático medio para un campo de 50 G. Las líneas sólidas muestran el modelo teórico para las frecuencias de resonancia de 18 Hz (negro) y 19 Hz (azul), y las líneas punteadas representan los datos experimentales correspondientes.	38
3.17. Desplazamiento cuadrático medio para un campo de 70 G. Las líneas sólidas muestran el modelo teórico para las frecuencias de resonancia de 22 Hz (negro) y 25 Hz (azul), y las líneas punteadas representan los datos experimentales correspondientes.	39
4.1. Esquema del péndulo magnético forzado paramétricamente [4]:(A)placa de amortiguamiento de aluminio, (B) imán de herradura controlado por micrómetro, (C) rueda codificadora, (D) módulo del codificador, (E) Bobina de Helmholtz para el componente de corriente eléctrica, (F) Bobina de Helmholtz para el componente de corriente alterna, y (G) imán permanente de barra.	42

4.2. Esquema geométrico fundamental del sistema. Se ilustra una esfera cuyo momento magnético $\vec{\mu}$ (en rojo), libre para rotar, interactúa con un campo magnético externo $\vec{B}_{ext}$ (en morado) que actúa exclusivamente a lo largo de la dirección vertical. El estado de orientación del sistema cambia durante el movimiento, evidenciado por la variación del ángulo instantáneo a medida que la partícula se desplaza sobre el sustrato.	44
4.3. Dinámica del sistema para 12 G para un régimen de baja frecuencia. (a) Oscilaciones de avance y retroceso del ángulo $\alpha(t)$ (morado) respecto al campo externo (rosa). (b) Retrato de fase con orbitas cerradas. En línea roja la señal de $\sin(2\pi ft)$	48
4.4. Dinámica del sistema a 12 G para un régimen de frecuencia intermedia. (a) Evolución divergente de $\alpha(t)$ indicativa de rodamiento continuo. (b) Espacio fase con sesgo rotacional bien definido. En línea roja la señal de $\sin(2\pi ft)$	48
4.5. Dinámica del sistema a 12 G para un régimen de alta frecuencia. (a) Amortiguamiento y fijación del ángulo $\alpha(t)$. (b) Convergencia rápida del sistema hacia una posición de inmovilidad. En línea roja la señal de $\sin(2\pi ft)$	49
4.6. Dinámica del sistema a 20 G para los tres regímenes de frecuencia. Fila superior: Evolución temporal del ángulo $\alpha(t)$. Fila inferior: Retratos de fase correspondientes. Columnas: (a) régimen de baja frecuencia ($f = 0,02\omega_0$), (b) régimen intermedio de movimiento persistente ($f = 0,12\omega_0$) y (c) régimen de alta frecuencia ($f = 0,275\omega_0$).	50
4.7. Dinámica del sistema a 30 G para los tres regímenes de frecuencia. Fila superior: Evolución temporal del ángulo $\alpha(t)$. Fila inferior: Retratos de fase correspondientes. Columnas: (a) régimen de baja frecuencia ($f = 0,02\omega_0$), (b) régimen intermedio de movimiento persistente ($f = 0,12\omega_0$) y (c) régimen de alta frecuencia ($f = 0,275\omega_0$).	50
4.8. Dinámica del sistema a 50 G para los tres regímenes de frecuencia. Fila superior: Evolución temporal del ángulo $\alpha(t)$. Fila inferior: Retratos de fase correspondientes. Columnas: (a) régimen de baja frecuencia ($f = 0,02\omega_0$), (b) régimen intermedio de movimiento persistente ($f = 0,12\omega_0$) y (c) régimen de alta frecuencia ($f = 0,275\omega_0$).	51

4.9. Dinámica del sistema a 70 G. Fila superior: Evolución temporal del ángulo $\alpha(t)$. Fila inferior: Retratos de fase correspondientes. Columnas: (a) régimen de baja frecuencia ($f = 0,02\omega_0$), (b) régimen intermedio de movimiento persistente ($f = 0,12\omega_0$) y (c) el límite de alta frecuencia ($f = 0,275\omega_0$), donde la reducción de fricción provoca sensibilidad caótica a las condiciones iniciales.	52
5.1. Schematic of the parametrically driven magnetic pendulum [4]: (A) aluminum damping plate, (B) micrometer-controlled horseshoe magnet, (C) encoder wheel, (D) encoder module, (E) Helmholtz coil for the electrical current component, (F) Helmholtz coil for the alternating current component, and (G) permanent bar magnet.	54
5.2. Fundamental geometric schematic of the system. A sphere is illustrated whose magnetic moment $\vec{\mu}$ (in red), free to rotate, interacts with an external magnetic field $\vec{B}_{ext}$ (in purple) acting exclusively along the vertical direction. The orientation state of the system changes during motion, evidenced by the variation of the instantaneous angle as the particle moves on the substrate.	56

Capítulo 1

Marco Teórico

1.1. Materia Activa

La *materia activa* es un campo emergente en la física de sistemas fuera del equilibrio que estudia colectivos de entidades capaces de extraer energía de su entorno y transformarla en trabajo mecánico y movimiento [5]. Lo más interesante de este fenómeno es que se presenta a diferentes escalas. Podemos observarlo microscópicamente en bacterias que nadan impulsadas por sus flagelos; y también a nivel macroscópico en bancos de peces nadando sincrónicamente o en parvadas de aves que se mueven de forma coordinada como si fueran un solo ente [6, 7] (Fig. 1.1).



Figura 1.1: *Demostración de un cardumen. Imagen de Fernanda Flores, tomada en el Arrecife Manchones.*

El elemento central de la materia activa son las partículas autopropulsadas, las cuales son capaces de convertir su energía interna o ambiental en energía cinética [5]. Los sistemas vivos se desplazan ya sea por supervivencia, para alimentarse o para migrar de su hábitat [8]. Su dinámica se caracteriza por tener cierta direccionalidad durante un intervalo de tiempo, ausencia de inercia dominante en escalas microscópicas (bajo número de Reynolds) y ruido de orientación [8, 9]. Estas propiedades generan comportamientos colectivos fuera del equilibrio, incluyendo la formación de patrones, la separación de fases inducida por motilidad (MIPS) y fenómenos de transporte anómalos, los cuales no se observan en partículas pasivas [6].

En la actualidad, el uso de tanto organismos biológicos como partículas sintéticas (por ejemplo, partículas de Janus activadas por luz) permite estudiar características propias del movimiento en presencia o ausencia de campos externos, tales como eléctricos o magnéticos [6, 10]. Esto ha consolidado a dichos sistemas como una plataforma experimental clave para explorar los fenómenos propios de la materia activa [10]. Para la física teórica, uno de los principales retos consiste en desarrollar modelos estadísticos capaces de capturar las características esenciales de estas dinámicas [9]. Comprenderlas resulta fundamental no solo desde una perspectiva conceptual, sino también en un contexto aplicado, ya que el estudio de partículas activas en escalas microscópicas y macroscópicas (Fig. 1.2) ofrece un marco comparativo valioso para interpretar fenómenos reales [11]. Este campo de investigación se encuentra en constante expansión y despierta un interés creciente debido a sus posibles aplicaciones en áreas tan diversas como la medicina, la biología y la física de materiales [12, 11].

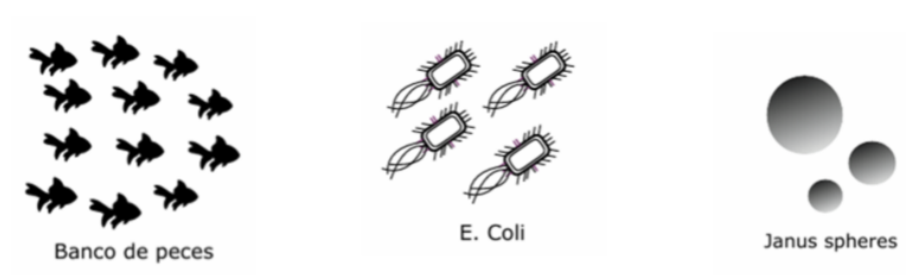


Figura 1.2: *Ilustración de la materia activa natural y artificial.*

En el presente trabajo proponemos un modelo alternativo basado en esferas magnetizadas sometidas a campos magnéticos oscilantes. Aunque estas partículas no son autopropulsadas en sentido estricto, la interacción de su momento magnético con el campo aplicado genera un torque que induce movimiento. Esto permite reproducir dinámicas típicas de la materia activa, como regímenes difusivos, persistentes y vibracionales, bajo condiciones

controladas de frecuencia y amplitud del campo externo [6, 13]. De esta manera, el sistema experimental que aquí se presenta constituye una herramienta macroscópica accesible para investigar las propiedades dinámicas de la materia activa frente a diferentes condiciones externas.

1.2. Movimiento Aleatorio

Una de las características más notables del estudio de las propiedades físicas en la materia activa es su capacidad de describir fenómenos a distintas escalas: desde el nado de bacterias a nivel microscópico, hasta el nado de peces a nivel macroscópico [6, 7]. Sin embargo, para comprender cómo un sistema macroscópico puede exhibir comportamientos estocásticos y de autopropulsión análogos a los de los microorganismos, resulta fundamental describir el desarrollo histórico de estos modelos, cuyas bases teóricas surgieron de la observación del mundo microscópico [5, 14].

La materia activa presenta un movimiento que incorpora un componente estocástico [5, 6]. Históricamente, la aleatoriedad fue observada por primera vez en 1784 por Jan Ingen-Housz al colocar partículas de polvo de carbón sobre un fluido [15]. El fenómeno cobró importancia científica en 1827 por el botánico Robert Brown, quien mediante su microscopio describió que los granos de polen suspendidos en agua exhibían un movimiento caótico y azaroso [2]. Dicho comportamiento fue denominado posteriormente como movimiento browniano. Brown concluyó que: “La materia inanimada se mueve espontáneamente en un líquido, siempre que las partículas de materia sean lo suficientemente pequeñas” [16]. Este hallazgo contribuyó al desarrollo del estudio de los procesos estocásticos, en los que no es posible predecir la posición exacta de una partícula en un instante dado, pero sí se puede describir la probabilidad de que esta se encuentre en cierta posición dentro de una trayectoria [17].

Un avance fundamental para la solución matemática del movimiento browniano ocurrió en 1905 con los trabajos de Albert Einstein, quien en su célebre artículo utilizó este fenómeno para demostrar la existencia de los átomos [18]. Einstein reconoció que este comportamiento era puramente aleatorio y producto de múltiples colisiones microscópicas. En su modelo, planteó tres hipótesis centrales [17]:

- El movimiento es originado por los constantes impactos de las moléculas del líquido sobre las partículas brownianas suspendidas en él. Einstein propuso que dichas moléculas del fluido presentan movimientos incesantes y de muy alta frecuencia debido

a las fluctuaciones térmicas [18].

- Dichos impactos son independientes y, debido a su complejidad, solo pueden describirse de forma estocástica [2].
- El movimiento no posee una direccionalidad preferente, por lo que los valores promedio adquieren mayor relevancia que los valores instantáneos [19].

Einstein propuso además que, a pesar de las fluctuaciones, la fricción impone un límite al movimiento y que, por lo tanto, es más adecuado describir el sistema en términos de promedios, tendencias y desviaciones [18, 2].

La formulación matemática de este fenómeno quedó expresada en la ecuación de difusión unidimensional:

$$\frac{\partial f(x, t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x^2}, \quad (1.1)$$

donde $f(x, t)$ representa la densidad de partículas en función de la posición x y el tiempo t , mientras que D corresponde al coeficiente de difusión. La solución a la Ec. (1.1) es [19]:

$$f(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}}. \quad (1.2)$$

A partir de esta distribución es posible calcular el desplazamiento cuadrático medio (DCM), cuya raíz resulta:

$$\sqrt{\langle x^2 \rangle} = \sqrt{2Dt} \quad (1.3)$$

Esta relación establece que el desplazamiento cuadrático medio es proporcional al intervalo de tiempo, con una pendiente determinada por el coeficiente de difusión D . El valor de D puede expresarse mediante la relación de Stokes-Einstein [18, 2]:

$$D = \frac{k_B T}{6\pi\mu a}, \quad (1.4)$$

donde k_B es la constante de Boltzmann, T la temperatura absoluta, μ la viscosidad dinámica del medio y a el radio de la partícula esférica. En este análisis se asumió que D es constante e independiente de la presencia de otras partículas [2]. Esta expresión clásica también puede verse influenciada por factores adicionales, como la proximidad de otras partículas o el potencial de superficie [1]. El resultado fue crucial, ya que proporcionó una predicción cuantitativa del desplazamiento cuadrático medio y se convirtió en un punto de comparación fundamental frente a los modelos posteriores desarrollados por Langevin y por el propio Einstein [20]. Este marco teórico clásico culminó cuando Jean Perrin verificó experimentalmente estas predicciones a principios del siglo XX, consolidando la mecánica estadística del equilibrio termodinámico [21].

Más adelante, físicos como Leonard Ornstein y George Uhlenbeck extendieron la teoría clásica al incorporar los efectos físicos inerciales en la dinámica de las partículas [22]. Mientras que el modelo de Einstein [18] consideraba un límite donde la fricción dominaba el movimiento, el proceso de Ornstein-Uhlenbeck describe cómo la velocidad de la partícula decae gradualmente en el tiempo debido a la disipación [2, 23]. Este avance fue crucial para entender sistemas físicos donde la masa de la partícula es lo suficientemente grande como para que los efectos inerciales no puedan ser ignorados.

Sin embargo, a diferencia de todos estos modelos que dependen de la viscosidad de un líquido, en nuestro caso abordamos el problema desde una perspectiva macroscópica. Al trabajar sin un fluido circundante, la difusión y la disipación de energía dependen únicamente de la fricción seca con la superficie [13]. Además, en ausencia de colisiones térmicas, en nuestro sistema el movimiento es originado por la interacción entre el momento magnético de la esfera y el campo magnético externo oscilante [13]. Esta interacción genera un comportamiento efectivo que, si bien guarda similitudes matemáticas con la difusión clásica, tiene un origen físico distinto. Esta analogía estadística no solo nos brinda las bases teóricas para analizar nuestros resultados, sino que establece a nuestro modelo experimental como una herramienta macroscópica ideal para comprender la fenomenología de diferentes sistemas físicos, tales como la materia activa.

1.3. Origen microscópico: la caminata aleatoria en una dimensión

Para comprender el origen físico de la difusión, resulta conveniente reducir el problema a su forma más esencial mediante el modelo de caminata aleatoria (del inglés, *random walk*). Consideremos un ensamble de N partículas que inician su movimiento en el origen ($x = 0$) al tiempo $t = 0$ y se desplazan a lo largo del eje x bajo las siguientes premisas teóricas [19, 1]:

1. La partícula se puede desplazar hacia la derecha o la izquierda cada τ segundos recorriendo una distancia $\delta = \pm V_x \tau$, manteniendo una velocidad constante $\pm V_x$ entre pasos [1].
2. La probabilidad de la partícula de moverse en cualquier dirección es exactamente de $1/2$. Las partículas carecen de “memoria”, por lo que cada paso es estadísticamente independiente del anterior, resultando en un movimiento no sesgado [2, 19].

3. Cada partícula se mueve de forma totalmente independiente a las demás [19].

Estas reglas implican que la posición media de las partículas se mantiene en torno al origen y que el desplazamiento cuadrático medio crece linealmente con el tiempo, mientras que su raíz crece proporcionalmente a la raíz cuadrada del tiempo [2, 19]. Bajo este marco estocástico, la posición de la i -ésima partícula tras n pasos se puede definir de forma recursiva como $x_i(n) = x_i(n-1) \pm \delta$ [19, 1]. Al promediar sobre todo el ensamble de partículas, el desplazamiento medio $\langle x(n) \rangle$ es igual a cero. Esto se debe a que las contribuciones espaciales de la mitad de las partículas se cancelan estadísticamente con las de la otra mitad. En consecuencia, la distribución de la concentración se ensancha de manera completamente simétrica respecto al origen (Fig. 1.3).

Para cuantificar este ensanchamiento espacial, resulta fundamental calcular el desplazamiento cuadrático medio (DCM). Elevando al cuadrado la ecuación de posición y promediando para todas las partículas, se obtiene:

$$\langle x^2(n) \rangle = \langle [x_i(n-1) \pm \delta]^2 \rangle = \langle x^2(n-1) \rangle \pm 2\delta \langle x_i(n-1) \rangle + \delta^2 \quad (1.5)$$

Dado que el término central se anula por la simetría del movimiento ($\langle x \rangle = 0$), y sabiendo que en el estado inicial todas las partículas parten del origen ($\langle x^2(0) \rangle = 0$), la varianza crece de forma aditiva. Tras n pasos, la relación se reduce a:

$$\langle x^2(n) \rangle = n\delta^2 \quad (1.6)$$

Para expresar este resultado en términos del tiempo continuo t , notamos que el número de pasos realizados es directamente proporcional al tiempo transcurrido ($n = t/\tau$). Al sustituir esta relación temporal, se obtiene:

$$\langle x^2(t) \rangle = \left(\frac{\delta^2}{\tau} \right) t \quad (1.7)$$

Por conveniencia definimos un coeficiente de difusión, $D = \delta^2/2\tau$ para que coincida con la descripción macroscópica (Ley de Fick). Incorporando esta definición en la ecuación anterior, recuperamos la expresión clásica para la difusión unidimensional:

$$\langle x^2 \rangle = 2Dt \quad (1.8)$$

Este desarrollo demuestra formalmente que, aunque una partícula al azar no va hacia ningún lugar en particular, el desplazamiento cuadrático medio del sistema crece linealmente con el tiempo. Establecer esta relación nos proporciona un puente directo entre el comportamiento estocástico microscópico y la dinámica de difusión macroscópica [1].

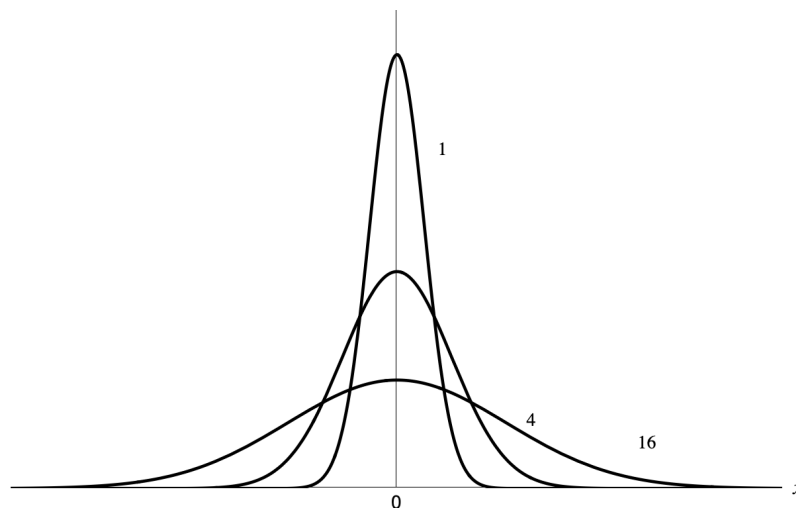


Figura 1.3: Evolución temporal de la distribución de probabilidad para partículas que generan una caminata aleatoria. Al evaluar la solución en los tiempos $(t = 1, 4, 16)$, se observa cómo la distribución gaussiana es simétrica respecto al origen. A medida que el tiempo avanza, la amplitud decrece y la varianza aumenta en proporción a la raíz cuadrada del tiempo. Elaboración propia basada en los parámetros teóricos del modelo de Berg [1, 2].

1.4. El salto a la biología y el descubrimiento de la autopropulsión

El concepto de caminata aleatoria, cuyas bases matemáticas se dedujeron en la sección anterior, fue introducido formalmente hacia 1905 por el matemático Karl Pearson como respuesta a un problema práctico planteado por el médico Ronald Ross, quien buscaba modelar cómo se dispersaban los mosquitos transmisores de la malaria desde sus zonas de cría [24, 25]. Para resolverlo, Pearson publicó una carta abierta en la revista *Nature* solicitando ayuda a la comunidad matemática, incorporando por primera vez el término de *caminata aleatoria* (random walk) [24]. Básicamente, esta herramienta describe la trayectoria que se forma cuando cada paso se da en una dirección completamente al azar [19, 1]. Aunque bajo este modelo es imposible predecir el destino final de un individuo, las matemáticas permiten calcular la probabilidad de encontrarlo en una posición específica después de varios desplazamientos [2, 19]. Sin embargo, al intentar aplicar estas mismas reglas a organismos microscópicos individuales, la teoría se quedó corta [6, 14].

Apenas unos años después, en 1913, Karl Przibram observó protozoarios nadando bajo el microscopio. Aunque a simple vista sus trayectorias parecían igual de erráticas y alea-

torias que las descritas por Pearson, Przibram notó un detalle clave: los microorganismos recorrían distancias mucho mayores en la misma cantidad de tiempo [26, 27]. Su coeficiente de difusión, el parámetro que mide este desplazamiento, era significativamente más alto de lo que dictaba la fórmula clásica de Einstein [18, 21]. Esto demostró que los protozoarios no solo flotaban a la deriva empujados por el agua, sino que empleaban su propia energía para *autopropulsarse*, constituyendo una de las primeras evidencias de lo que hoy conocemos como materia activa [27].

Este hallazgo impulsó a R. Fürth a introducir el concepto de *caminata aleatoria persistente* para describir la direccionalidad intrínseca a tiempos cortos característica de los agentes biológicos [28]. El trabajo de estos pioneros cimentó las bases para el estudio moderno de la motilidad celular y los sistemas fuera del equilibrio [27].

1.5. Desplazamiento cuadrático medio y regímenes de movimiento

En el estudio de materia activa, las trayectorias aparentemente aleatorias que describe una partícula al interactuar con su entorno pueden analizarse a través del desplazamiento cuadrático medio (DCM) [6, 23]. Este parámetro describe cómo evoluciona en promedio la separación de una partícula con respecto a su posición inicial en función del tiempo y constituye una de las herramientas fundamentales para distinguir entre distintos regímenes de movimiento [29].

Consideremos una partícula en movimiento con una posición inicial $\vec{x}_0 = \vec{x}(0)$ y posición en un tiempo t , $\vec{x}(t)$. En cada instante, la partícula puede desplazarse en una dirección aleatoria, y el DCM nos permite capturar estadísticamente esa evolución como la desviación promedio de la partícula respecto a su posición inicial a lo largo del tiempo [2, 19, 30]:

$$\text{DCM}(t) = \langle (\vec{x}(t) - \vec{x}_0)^2 \rangle, \quad (1.9)$$

donde los corchetes angulares indican el promedio tomado de estas posiciones.

En el límite de tiempos largos, el DCM en una dimensión crece linealmente con el tiempo de la forma [18, 2]:

$$\langle x^2(t) \rangle = 2Dt, \quad (1.10)$$

donde D es el coeficiente de difusión. Cuando la dinámica espacial de un sistema cumple esta relación, decimos que se encuentra en un régimen difusivo o browniano [23]. En cambio,

para escalas de tiempo muy cortas, el DCM es consistente con una función cuadrática del tiempo de la forma [6, 31]:

$$\langle x^2(t) \rangle \propto t^2, \quad (1.11)$$

lo que corresponde a un régimen balístico, caracterizado por un movimiento persistente en la dirección inicial [32]. De forma más general, el crecimiento del DCM puede describirse mediante una ley de potencias generalizada [29]:

$$\langle \Delta x^2(t) \rangle = At^\beta. \quad (1.12)$$

donde A es el coeficiente de transporte generalizado y β es el exponente temporal que clasifica el tipo de movimiento en el que se encuentra la partícula [33]:

- $\beta = 1$: Es el régimen difusivo normal (browniano).
- $\beta < 1$: Es el régimen subdifusivo.
- $1 < \beta < 2$: Es el régimen superdifusivo.
- $\beta = 2$: Es el régimen balístico.

Esta clasificación general se ilustra en la Fig. 1.4.

Este marco analítico permite clasificar una amplia variedad de trayectorias observadas en la naturaleza. Por ejemplo, la *subdifusión* es característica del hacinamiento celular, donde las interacciones y la heterogeneidad espacial restringen el movimiento [29]. En contraste, la *superdifusión* surge frecuentemente en procesos de transporte activo, como el desplazamiento de vesículas a lo largo de microtúbulos mediante motores de proteínas como cinesina, dineína y miosina [34], o en las dinámicas de búsqueda tipo caminata de Lévy [14].

Con el fin de aproximar estos procesos estocásticos a sistemas vivos, se han desarrollado modelos para organismos microscópicos, siendo *Escherichia coli* el modelo por excelencia para la materia activa viva [1]. La dinámica de nado de esta bacteria ilustra perfectamente la transición entre regímenes: alterna fases de nado rectilíneo y reorientación aleatoria, generando trayectorias que combinan características balísticas a tiempos cortos y difusivas a tiempos largos [6, 1].

En nuestros experimentos, el análisis del DCM resulta clave porque nos permite comparar las trayectorias registradas con las predicciones teóricas [13]. A través de este enfoque podemos identificar si el sistema se encuentra en un régimen anómalo, ya sea subdifusivo o superdifusivo, lo cual es esencial para interpretar la dinámica de partículas activas

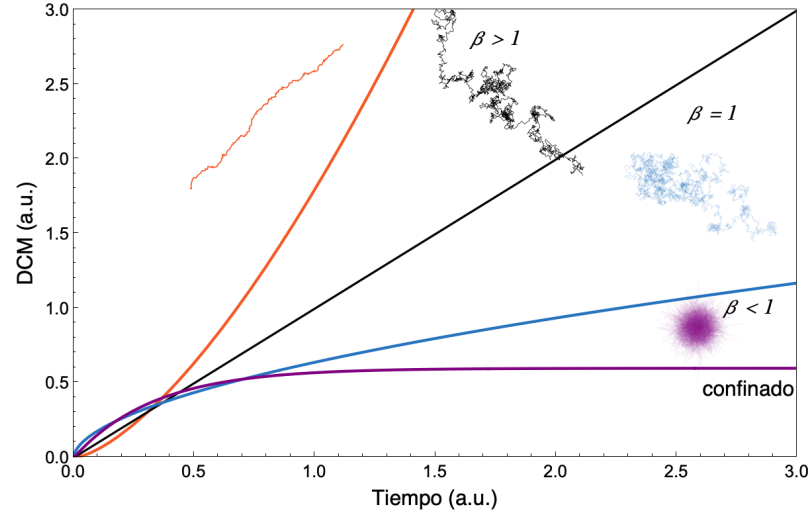


Figura 1.4: Clasificación de los distintos regímenes de movimiento según la dependencia temporal del desplazamiento cuadrático. Se representan las trayectorias características y sus respectivas curvas de comportamiento: superdifusivo o balístico en tono naranja ($\beta > 1$); para la difusiva se muestra en negro ($\beta = 1$); subdifusivo en azul ($\beta < 1$); y en estado confinado en morado. Elaboración basada en la representación de Ortega Arroyo [3].

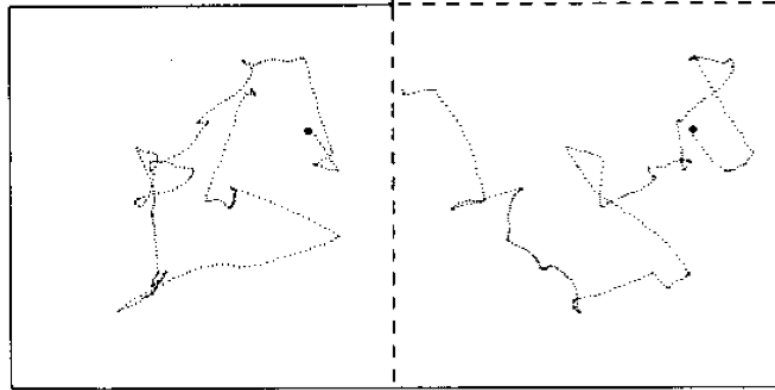


Figura 1.5: Trayectoria tridimensional proyectada en un plano que ilustra la caminata aleatoria de una bacteria *Escherichia coli* (cepa AW405). La motilidad de la célula comprende una velocidad media de 2×10^{-3} cm/s, alternando trayectorias rectilíneas con una duración promedio de un segundo y eventos de reorientación breves. El registro experimental fue adquirido a una temperatura de 32°C en un medio fluido con una viscosidad de 0,027 g/(cm·s). Adaptado de Berg & Brown (1972) [1].

y su relación con fenómenos biológicos y sintéticos [6, 29]. Por ejemplo, en los sistemas reales de materia activa, el DCM exhibe de forma natural una transición desde un régimen inicialmente balístico hacia un comportamiento macroscópico difusivo [6, 31]. Este patrón dinámico es la firma característica que se ha documentado tanto en el nado de microorganismos vivos, como bacterias, como en coloides autopropulsados artificialmente, como las partículas de Janus [6, 31].

1.6. Modelo analítico para el DCM en dinámicas activas

En el estudio de sistemas fuera del equilibrio, particularmente de la materia activa, es fundamental contar con una base teórica capaz de describir la propiedad fundamental que los distingue de los sistemas pasivos: la persistencia direccional [6, 33]. A diferencia de una partícula pasiva, un agente activo es capaz de mantener una dirección de movimiento durante un intervalo de tiempo, conocido también como tiempo de persistencia, expresado como Γ^{-1} [33].

Para modelar de forma cuantitativa este comportamiento en dos dimensiones, en este trabajo se utiliza la expresión analítica exacta reportada por Francisco J. Sevilla [33]. La ventaja de utilizar esta ecuación es que generaliza el transporte de las partículas activas al incorporar tres factores físicos esenciales: una velocidad efectiva de autopropulsión (v_{eff}), la tasa de persistencia (Γ) y, además, de gran relevancia para este sistema, los efectos de un movimiento circular inducido [6, 33, 13, 35]. Este último se expresa a través de un sesgo rotacional o velocidad angular promedio (Ω), el cual permite describir analíticamente la tendencia de la partícula a curvar su camino y formar trayectorias con bucles (*loopy trajectories*) durante su avance [33, 13, 35]:

$$\langle x(t)^2 \rangle = 4 \frac{v_{\text{eff}}^2}{\Gamma^2} \left[\Gamma t - \frac{1-r^2}{1+r^2} (1 - e^{-\Gamma t} \cos \Omega t) - 2 \frac{r}{1+r^2} e^{-\Gamma t} \sin \Omega t \right], \quad (1.13)$$

Donde $r = \Omega/\Gamma$ representa la razón entre la velocidad angular promedio (Ω) y la tasa de persistencia (Γ) [13]. El uso de la Ec. (1.13) resulta ideal para describir la dinámica de las partículas activas por las siguientes razones:

- **Captura de los regímenes de transporte:** Esta expresión tiene la gran ventaja de describir de forma analítica y exacta cómo evoluciona el movimiento a través del tiempo, abarcando toda su transición dinámica, un comportamiento característico en los sistemas de materia activa [6, 33, 13]. A tiempos cortos ($\Gamma t \ll 1$), el sistema exhibe

un comportamiento puramente balístico ($\langle x(t)^2 \rangle \propto t^2$). Físicamente, esto significa que la partícula logra mantener su dirección de forma ininterrumpida y libre de perturbaciones [9, 33, 13]. Por el contrario, a tiempos largos ($\Gamma t \gg 1$), la persistencia inicial se pierde de forma gradual, convergiendo hacia un régimen difusivo, el cual se describe macroscópicamente mediante un coeficiente de difusión efectivo (D_{eff}) [6, 14, 33, 13].

- **Inclusión de movimientos circulares** ($r = \Omega/\Gamma$): A diferencia de los modelos estándar de caminata aleatoria o de movimiento browniano activo [6, 14], el enfoque de Sevilla incorpora un parámetro de sesgo rotacional (Ω) [33]. Esto es crucial para el estudio general de la materia activa, ya que existe una amplia variedad de microorganismos biológicos y partículas autopropulsadas artificiales que presentan irregularidades en su forma o en su interacción con el entorno que inducen naturalmente un nado en trayectorias curvas o en forma de lazo [6, 13, 35, 36].
- **Precisión en el régimen intermedio:** El mayor valor analítico de esta ecuación se encuentra en su precisión para describir el régimen de tiempos intermedios [33, 13]. Es precisamente en esta ventana temporal donde se manifiestan las características específicas del patrón de movimiento activo y los efectos de dispersión angular se vuelven evidentes en la dinámica del sistema [33, 13, 31].

De este modo, el uso de este modelo teórico no solo permite ajustar con alta precisión los datos experimentales del desplazamiento cuadrático medio, sino que otorga un significado físico directo a parámetros clave como la velocidad, la frecuencia de giro y la persistencia temporal de las esferas magnetizadas bajo distintas condiciones de campo [13].

Capítulo 2

Metodología

2.1. Arreglo experimental

Nuestro sistema experimental está conformado por una sola esfera magnetizada de 1 mm de diámetro (σ) y un peso de 4.2 mg (m), colocada sobre una superficie de vidrio delimitada por una cerca circular de 100 mm de diámetro, la cual constituye la celda de observación. Esta celda se encuentra posicionada entre un par de bobinas de Helmholtz que están colocadas verticalmente. La función principal de estas bobinas es generar un campo magnético uniforme perpendicular al plano de movimiento, definido por el vector unitario $\hat{k}$. Las bobinas se encuentran conectadas en serie y son alimentadas por una fuente de poder marca Kepco acoplada a un generador de funciones. Esta configuración permite generar una señal de campo magnético alterno que está descrita por la siguiente expresión matemática [13]:

$$B = B_0 \sin(2\pi ft)\hat{k},$$

donde B_0 es la amplitud del campo magnético y f es la frecuencia de oscilación. La dinámica inducida en la partícula y el campo aplicado se esquematizan en la Fig. 2.1. Durante la evolución temporal del sistema, evaluada entre dos instantes sucesivos t y $t + \Delta t$, la trayectoria de la esfera presenta cambios en su dirección descrita por el ángulo θ [13].

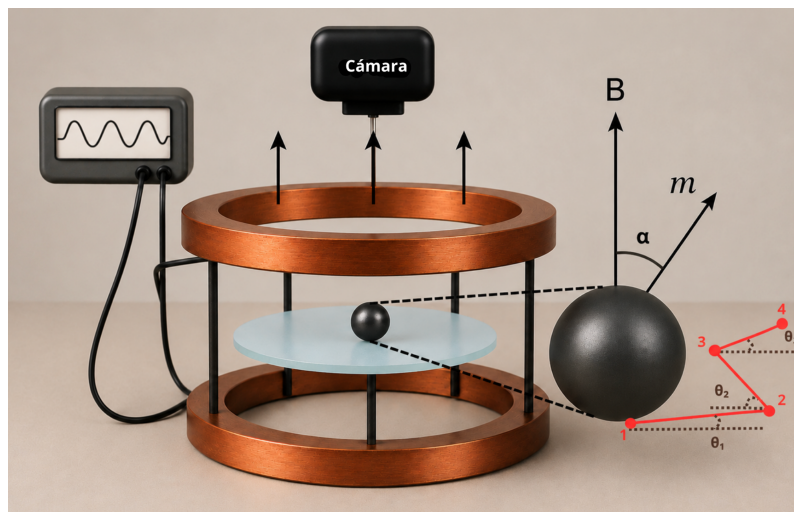


Figura 2.1: *Esquema representativo del arreglo experimental. Se muestra una esfera bajo un campo magnético alterno. Esta imagen es de carácter ilustrativo y fue generada mediante Inteligencia Artificial utilizando [Chat GPT].*

En la Fig. 2.2 se muestra una fotografía del montaje experimental. Se distinguen los pares de bobinas de Helmholtz en posición vertical y, entre ellas, exactamente en su centro geométrico, la base de vidrio que soporta la celda de observación. Para el registro de los experimentos, utilizamos una cámara Canon CCD con una tasa de captura de 60 cuadros por segundo (cps), grabando los videos en formato MOV. Esta cámara se encuentra conectada a un equipo de cómputo, para gestionar los tiempos de grabación y asegurar la calidad de la imagen.

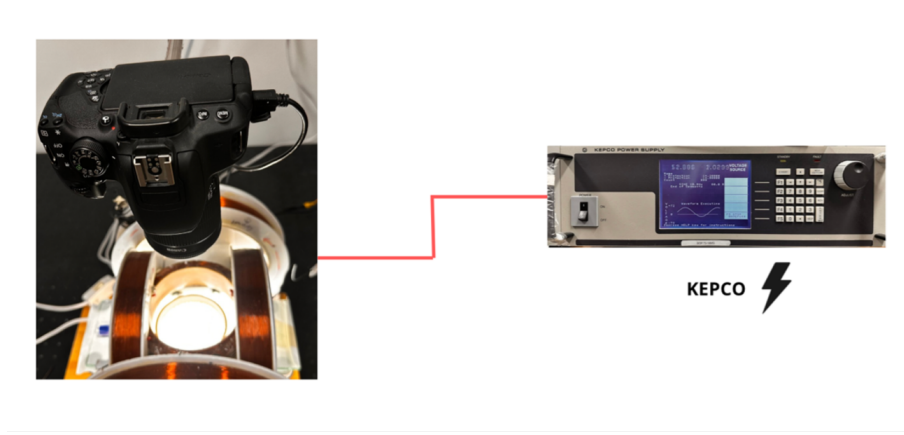


Figura 2.2: *Arreglo experimental real. Cámara Canon CCD configurada a 60 cps para el registro de los experimentos; en la parte inferior se observan un par de bobinas de Helmholtz ubicadas en el centro del arreglo, manteniendo inactivas las bobinas laterales y entre ellas la celda de observación.*

Para que la esfera entre en movimiento, es necesario inducir una magnetización en el balón (véase Fig. 1.3). Para ello, la esfera se expuso durante un lapso de una hora en el centro de la celda a un campo magnético constante que fijamos con una amplitud máxima de 70 G [13]. Con este procedimiento, la esfera adquiere y conserva una magnetización aproximadamente constante durante el desarrollo experimental. El mecanismo que propulsa a la esfera surge del acoplamiento entre su momento magnético y la dirección instantánea del campo oscilante.

Este proceso de alineación está regido por una escala temporal característica $w_0^{-1} = \frac{I}{\mu B_0}$, donde I representa el momento de inercia y μ la magnitud del momento magnético de la esfera. Dado que el campo invierte su polaridad (de $\hat{k}$ a $-\hat{k}$ y viceversa) a una frecuencia f , el momento magnético de la esfera sufre "golpes" sucesivos en cada inversión del campo magnético. Esto se traduce en que la aplicación del torque obliga a la esfera a rodar, sin deslizarse sobre el vidrio. Al mantener constante la intensidad B_0 y variar la frecuencia f , surge una variedad de patrones de movimiento dinámico [13].

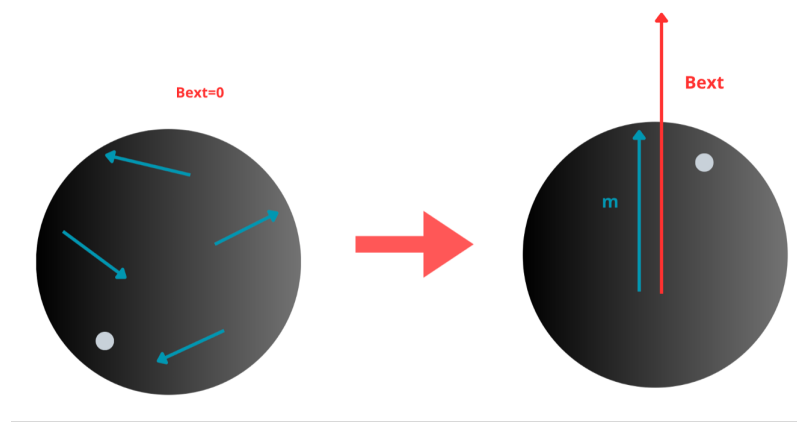


Figura 2.3: *Magnetización del balón de acero, sometido a un campo de 70 G.*

Una vez concluidas las sesiones de grabación, se procedió a la etapa de tratamiento de datos empleando una metodología de análisis de imagen estandarizada. Inicialmente, los archivos de video fueron fragmentados en fotogramas individuales. A continuación, las secuencias de imágenes resultantes fueron sometidas a un procesamiento digital en ImageJ, donde se recortaron y binarizaron para mejorar el contraste de la partícula respecto al fondo, y así poderla seguir.

La reconstrucción de las trayectorias se ejecutó usando la extensión **Mosaic** integrada en ImageJ, la cual da como resultado las coordenadas de la partícula en cada frame, brindando además imagen y video de las trayectorias. Seguido de esto, analizamos los datos en Fortran para calcular el DCM con respecto al tiempo, utilizando la relación $\langle \Delta r^2(t) \rangle = \langle \Delta x^2(t) \rangle + \langle \Delta y^2(t) \rangle$, donde introducimos datos como el diámetro de la esfera en píxeles (8 píxeles), tamaño de imagen y los cps.

Para el caso de los coeficientes de difusión, realizamos un ajuste lineal a los primeros 15 puntos, es decir, un cuarto de segundo para 60 cps. Esto se hizo mediante la relación del DCM con el coeficiente de difusión efectivo.

La ecuación del desplazamiento cuadrático medio está dada por:

$$\langle \Delta r^2(t) \rangle = 2dD_{eff}\Delta t, \quad (2.1)$$

Para 2 dimensiones ($d = 2$), la expresión toma la forma:

$$\langle \Delta r^2(t) \rangle = 4D_{eff}\Delta t, \quad (2.2)$$

Definimos al coeficiente de difusión efectivo como $D_{eff} \simeq \Delta t^{\beta-1}$. Al sustituir obtene-

mos:

$$\langle \Delta r^2(t) \rangle = 4\Delta t^{\beta-1} \Delta t = 4\Delta t^\beta, \quad (2.3)$$

Para identificar el tipo de dinámica, este coeficiente de difusión efectivo se calculó a través de un ajuste lineal del DCM dada la relación $\langle \Delta r^2(t) \rangle = 4D_{eff}\Delta t$, tomando en cuenta los tiempos iniciales de cada trayectoria. Más adelante, clasificamos los valores del exponente β en cuatro regímenes de movimiento [29, 13]: (i) **subdifusivo** ($\beta < 1$), asociado a un desplazamiento tipo confinado; (ii) **difusivo** ($\beta = 1$), característico de dinámicas tipo aleatorias; (iii) **superdifusivo** ($1 < \beta < 2$), relacionado con la presencia de persistencia; y (iv) **balístico** ($\beta \approx 2$), característico de un movimiento en el que la partícula no cambia de dirección, sino que avanza en línea recta manteniendo su velocidad. Estos cuatro comportamientos concuerdan con la física del sistema y son fáciles de identificar al notar cómo cambia la inclinación de las curvas del DCM. Posteriormente, obtuvimos los valores de D_{eff} en función de las frecuencias, para identificar los distintos regímenes de movimiento asociados a cada una de las amplitudes del campo magnético (12 G, 20 G, 30 G, 50 G y 70 G) y determinar las frecuencias de resonancia, las cuales se alcanzan cuando la frecuencia del campo magnético externo se acopla de manera óptima con el momento magnético de la esfera, generando el mayor desplazamiento del sistema y alcanzando el valor máximo del coeficiente de difusión.

Realizamos un análisis del régimen de movimiento persistente para las frecuencias de resonancia. Para ello, empleamos el modelo teórico del desplazamiento cuadrático medio propuesto para este tipo de dinámica [33]:

$$\langle x(t)^2 \rangle = 4 \frac{v_{eff}^2}{\Gamma^2} \left[\Gamma t - \frac{1-r^2}{1+r^2} (1 - e^{-\Gamma t} \cos \Omega t) - 2 \frac{r}{1+r^2} e^{-\Gamma t} \sin \Omega t \right], \quad (2.4)$$

donde $r = \frac{\Omega}{\Gamma}$, v_{eff} es la velocidad efectiva de propulsión, Ω representa la frecuencia angular de rotación y Γ es la tasa asociada a la persistencia, cuyo inverso Γ^{-1} establece el tiempo de persistencia promedio [33].

El procesamiento y ajuste de los datos se llevó a cabo mediante un código desarrollado en *Wolfram Mathematica*. Inicialmente, convertimos a segundos considerando los 60 cps, y los valores del DCM experimental se normalizaron dividiéndolos entre el cuadrado del diámetro de la partícula ($\sigma^2 = 64 \text{ pixeles}^2$), tomando los primeros 8 segundos de cada trayectoria.

Con estos datos normalizados, realizamos una regresión matemática sobre la Ecuación 2.4 para modelar nuestro comportamiento experimental. Esto nos permitió calcular los

valores de v_{eff} , Γ y Ω para cada una de las frecuencias seleccionadas. Finalmente, con los valores teóricos, generamos las gráficas del desplazamiento cuadrático medio, donde validamos los datos experimentales con los teóricos.

Capítulo 3

Resultados

Realizamos un barrido de frecuencias desde 1 Hz hasta 35 Hz para los campos magnéticos de 12 G, 20 G, 30 G, 50 G y 70 G, extrayendo las trayectorias correspondientes para cada intensidad. Posteriormente, calculamos el desplazamiento cuadrático medio y el coeficiente de difusión efectivo para cada caso.

3.1. Trayectorias de la esfera magnetizada

Como primer paso, examinamos el comportamiento general a 12 G, 30 G y 50 G, tal como se ilustra en la 3.1. Para el campo de 12 G, notamos que las frecuencias iniciales inducen desplazamientos tipo difusivos. A medida que la frecuencia aumenta, el movimiento se vuelve progresivamente más suave y persistente, hasta decaer en una dinámica de baja movilidad para altas frecuencias. Por otra parte, los campos magnéticos de 30 G y 50 G mostraron un comportamiento similar: el sistema transita de un régimen aleatorio a uno de movimiento suave, para finalmente colapsar de manera abrupta en trayectorias altamente confinadas. La principal diferencia radica en que, para estos campos más intensos, la transición hacia el movimiento suave ocurre a frecuencias ligeramente mayores que en el caso de 12 G. De manera adicional, identificamos que al incrementar la amplitud del campo magnético B_0 , la banda de frecuencias se desplaza al estado de máxima movilidad.

Con el fin de analizar este comportamiento, realizamos un estudio detallado de las trayectorias para cada valor del campo. En primer lugar, analizamos el campo magnético de 12 G, del cual obtuvimos las trayectorias para cada una de las frecuencias desde 1 Hz hasta 34 Hz (véase la **Fig. 3.2**).

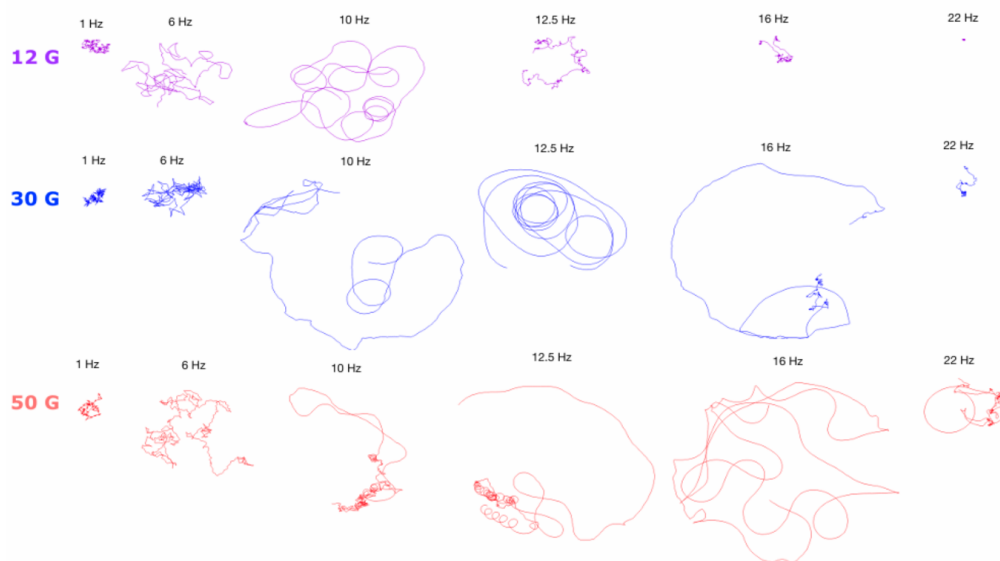


Figura 3.1: **Trayectorias para los campos 12 G, 30 G y 50 G.** Se observa un cambio en la dinámica en función de la frecuencia y la amplitud del campo magnético.

A bajas frecuencias (hasta ≈ 5 Hz), la esfera presenta un movimiento corto y aleatorio, manteniéndose en una región pequeña. Conforme incrementamos la frecuencia, el desplazamiento se hace más prolongado y el tamaño de las trayectorias crece considerablemente. Al acercarnos a los 8 Hz, el movimiento se vuelve más suave, mientras que en el intervalo de 8 Hz a 12 Hz la esfera comienza a describir curvas más amplias y continuas. Es alrededor de 12 Hz donde la esfera alcanza las trayectorias más extensas y definidas. Al rebasar este umbral, la dinámica cambia de forma abrupta: la amplitud de los trazos se reduce drásticamente y reaparece el movimiento corto y aleatorio. Para frecuencias mayores (por encima de los 20 Hz), el movimiento se vuelve puramente vibratorio, manteniendo a la esfera sobre un punto casi fijo. Esta pérdida de movimiento sucede porque la frecuencia del campo es tan alta que la esfera no alcanza a alinear su momento magnético en cada ciclo, lo que impide su desplazamiento.

Al aumentar la magnitud del campo magnético, la esfera va exhibiendo un comportamiento muy similar al caso de 12 G. La principal diferencia respecto a ese caso radica en que tanto la aparición de curvas cada vez más amplias y continuas como el decaimiento de movimiento ocurren a frecuencias cada vez mayores al aumentar el campo. Es decir, estos efectos se van recorriendo hacia la derecha con el incremento del campo, **Fig. 3.3**, **Fig. 3.4**, **Fig. 3.5** y **Fig. 3.6**.

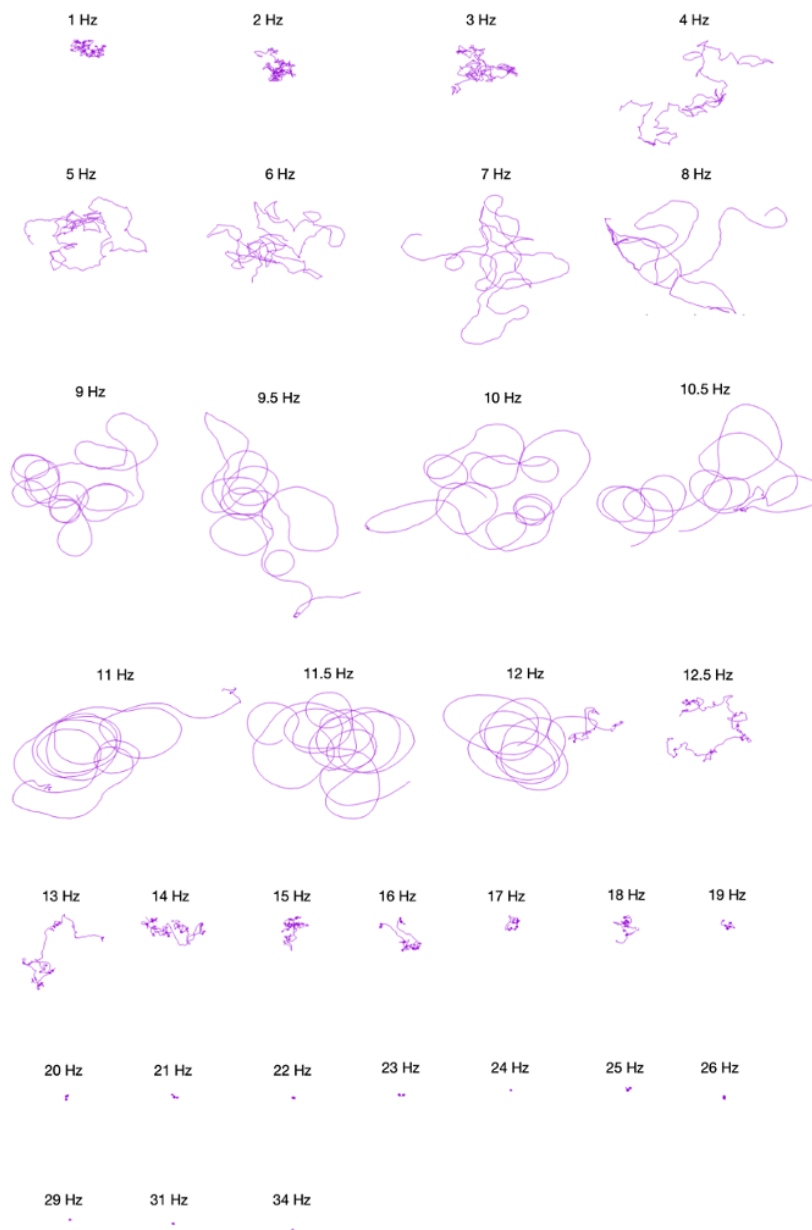


Figura 3.2: **Trayectorias para un campo de 12 G.** La dinámica transita desde un movimiento tipo aleatorio hasta seguir con movimientos suaves, para finalmente decaer en una dinámica de baja movilidad al aumentar la frecuencia.

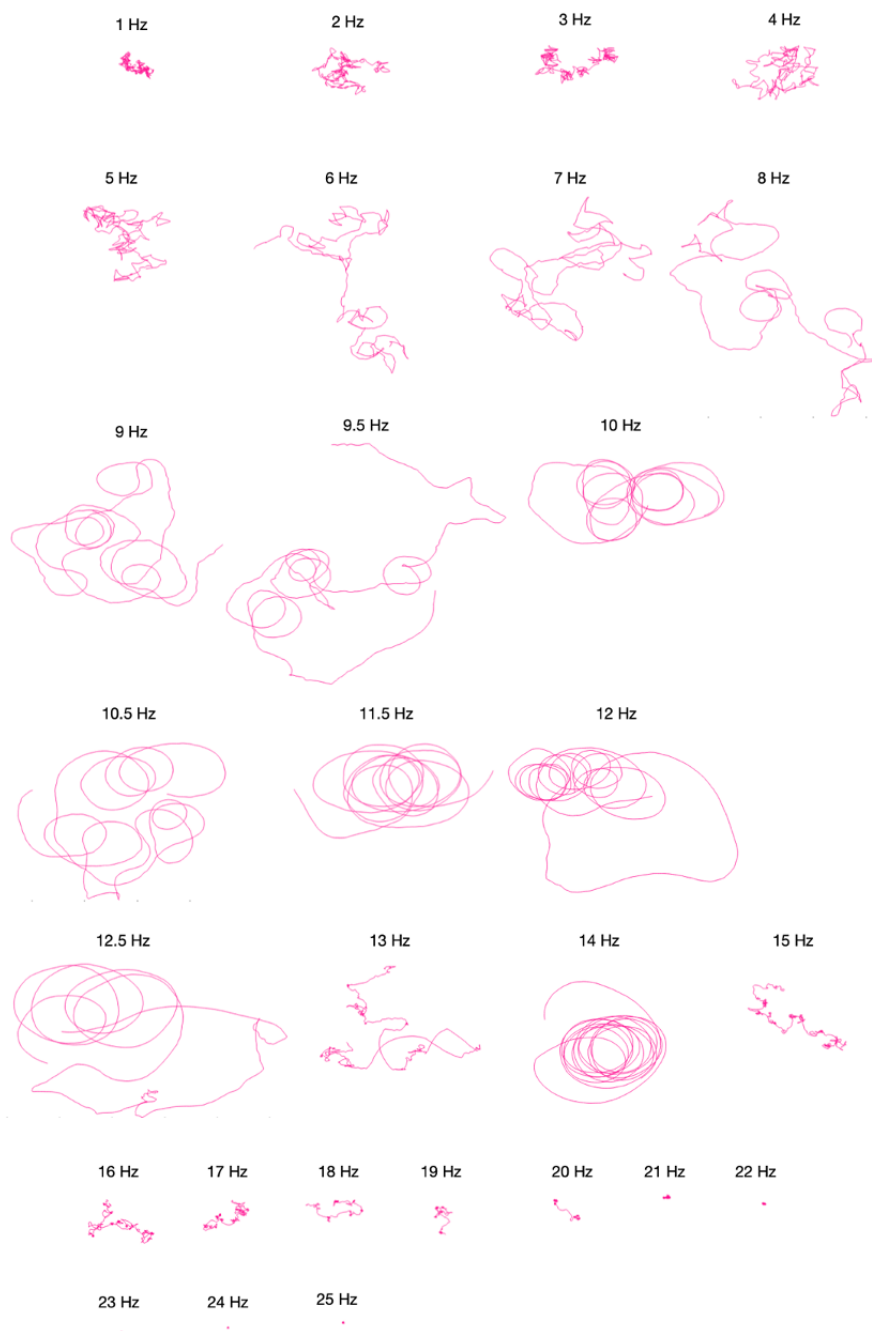


Figura 3.3: **Trayectorias para un campo de 20 G.** La dinámica transita desde un movimiento aleatorio hasta curvas amplias, destacando la reaparición de trazos continuos en forma de espiral a los 14 Hz, para finalmente decaer en un estado vibracional.

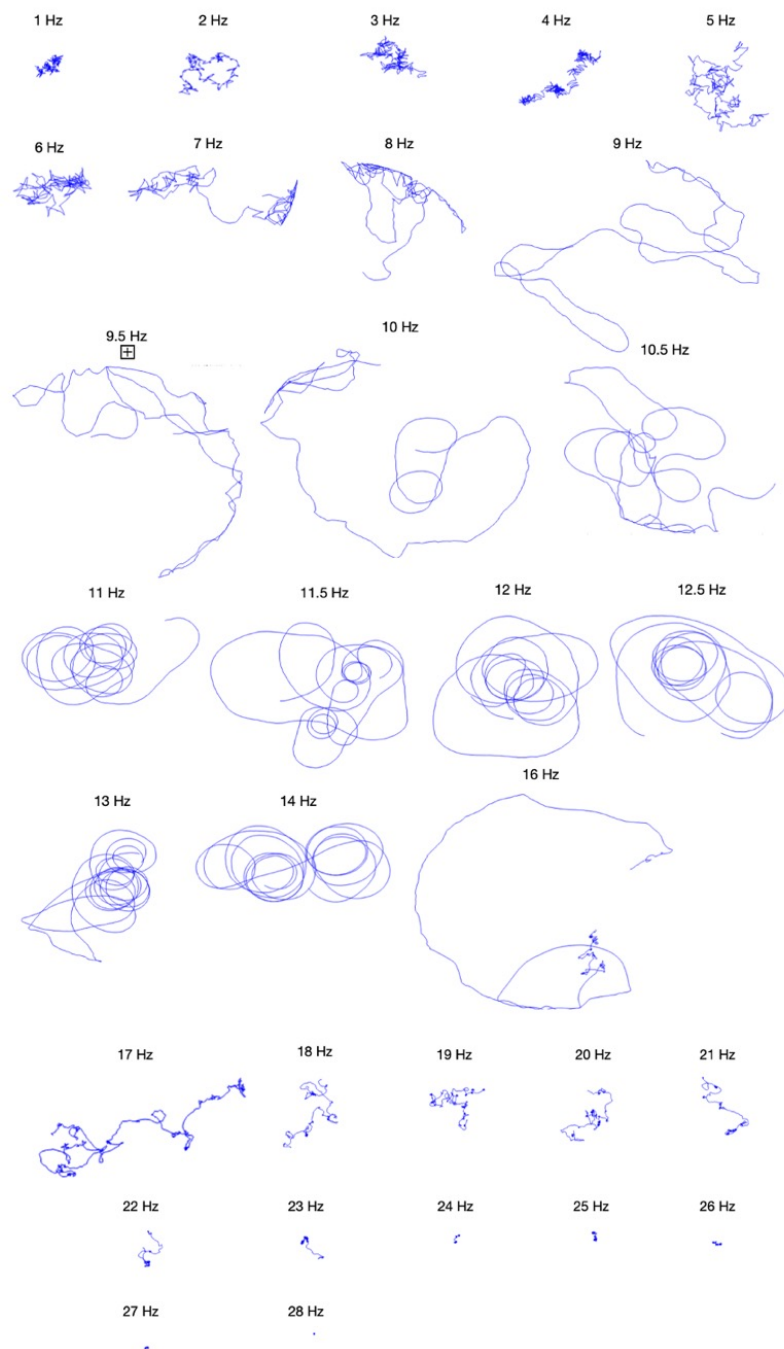


Figura 3.4: **Trayectorias para un campo de 30 G.** La dinámica transita desde un movimiento aleatorio hasta curvas amplias y continuas, destacando un movimiento continuo y extenso a los 16 Hz, para finalmente decaer en una dinámica de baja movilidad al aumentar la frecuencia.

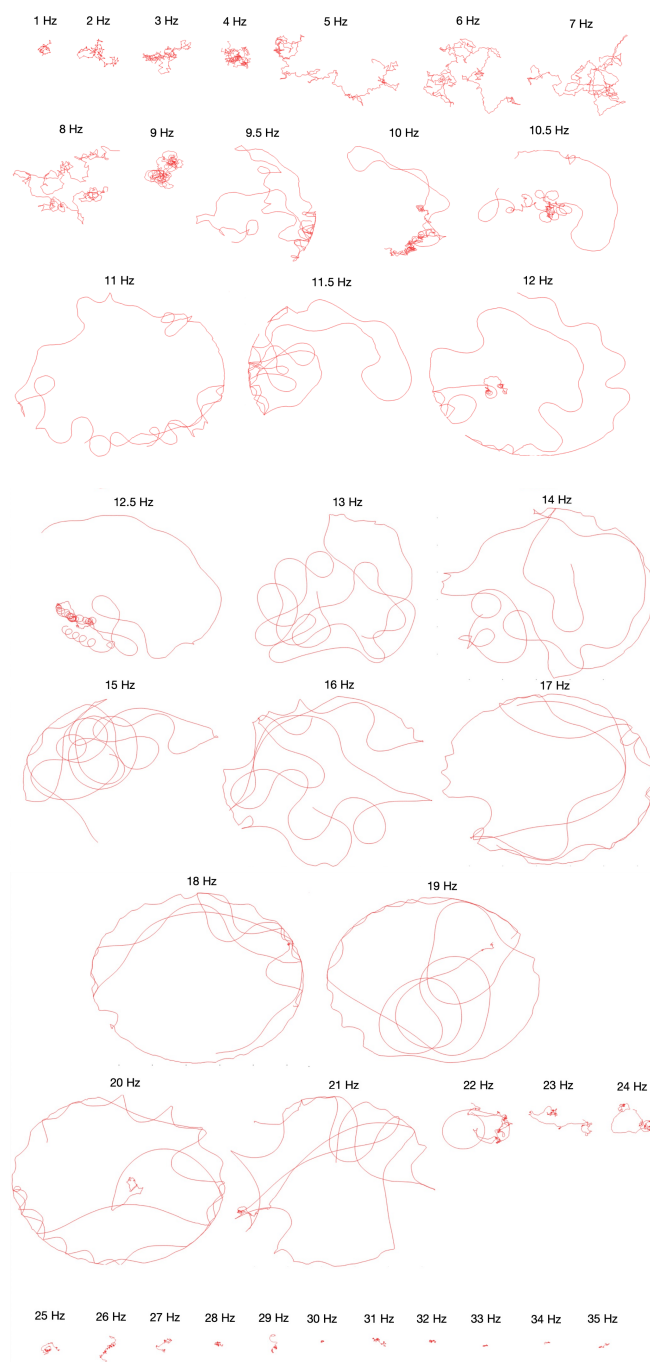


Figura 3.5: **Trayectorias para un campo de 50 G.** La dinámica transita desde un movimiento aleatorio hasta formar curvas amplias y circulares que permanecen en un rango de 11 Hz a 20 Hz, para finalmente decaer en una dinámica de baja movilidad.

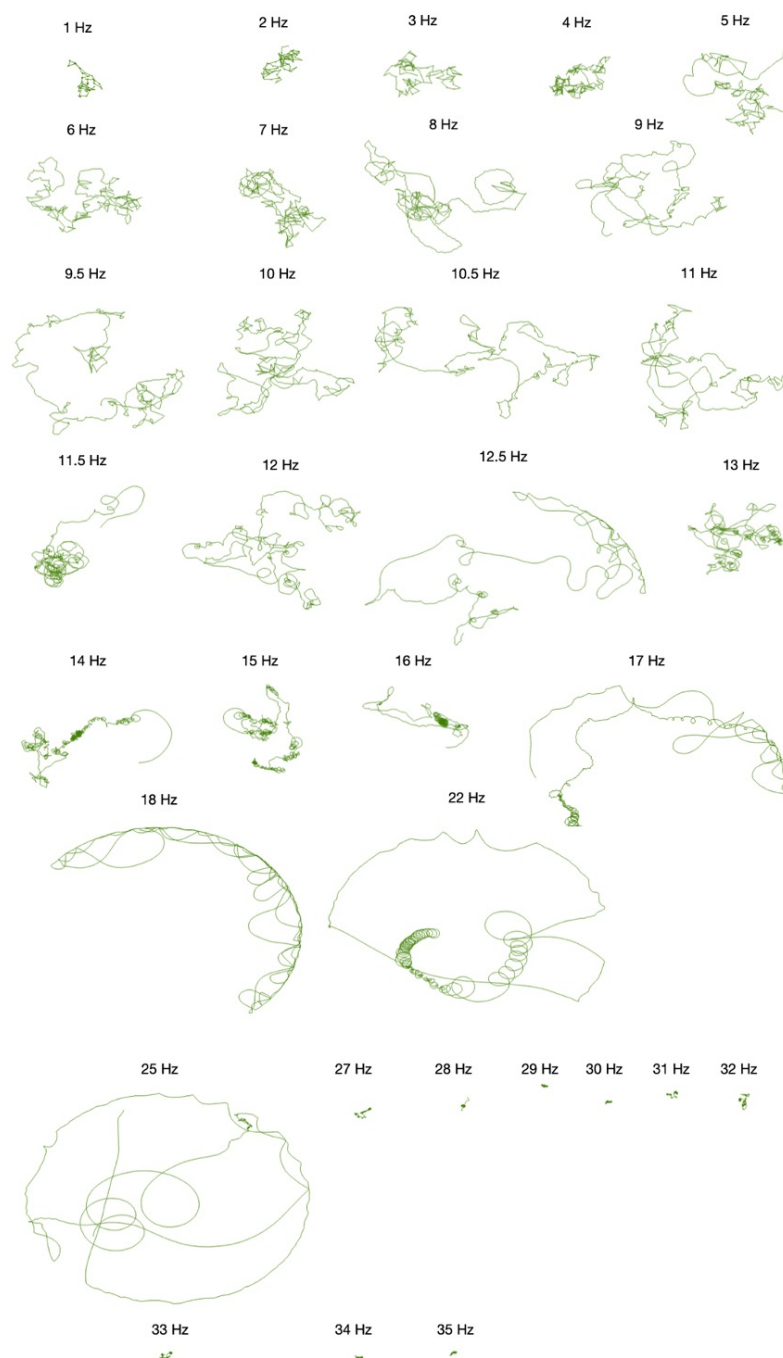


Figura 3.6: **Trayectorias para un campo de 70 G.** El movimiento transita desde desplazamientos cortos hasta trayectorias amplias que aparecen más adelante, concluyendo en un estado vibratorio a altas frecuencias.

3.2. Desplazamiento cuadrático medio

Para describir el comportamiento dinámico de la esfera bajo un campo magnético de 12 G, calculamos el desplazamiento cuadrático medio (DCM) normalizado por el diámetro de la esfera, $\langle \Delta r^2(\Delta t) \rangle / \sigma^2$, en función del intervalo de tiempo Δt (para este análisis, consideramos los primeros 6 segundos). Los resultados de este cálculo se presentan en la Figura 3.7. El análisis se divide en tres intervalos de frecuencia para destacar los cambios dinámicos del sistema: **Bajas frecuencias (1 Hz a 12 Hz)**

- **Transición balística-difusiva:** A tiempos cortos ($\Delta t < 0,1$ s), todas las curvas muestran un comportamiento balístico, siguiendo la pendiente $\langle \Delta r^2(\Delta t) \rangle \propto \Delta t^2$. Conforme avanza el tiempo, el movimiento experimenta una transición hacia el régimen difusivo $\langle \Delta r^2(\Delta t) \rangle \propto \Delta t^{1,0}$.
- **Incremento de la movilidad:** En este rango se observa que la movilidad de la esfera aumenta progresivamente con la frecuencia. Las curvas de 1 Hz y 2 Hz presentan los desplazamientos más bajos, mientras que al acercarse a los 11 Hz y 12 Hz se alcanzan los valores máximos de DCM de todo el experimento. A su vez, a tiempos largos se muestran oscilaciones pronunciadas, lo que sugiere la presencia de trayectorias con ciclos cerrados antes de difundirse completamente.

Frecuencias intermedias (12.5 Hz a 19 Hz)

- **Pérdida gradual de movilidad:** Aunque se conserva la transición de un estado balístico a uno difusivo, la curva de 12.5 Hz marca el punto de máxima movilidad. A partir de esta, cualquier aumento en la frecuencia significa una disminución progresiva del desplazamiento a largo plazo, siendo la curva de 19 Hz la de menor desplazamiento.

Altas frecuencias (20 Hz a 35 Hz)

- **Caída abrupta del desplazamiento:** Ocurre un cambio drástico en la dinámica del sistema. Los valores del DCM caen más de dos órdenes de magnitud respecto a las frecuencias más bajas.
- **Confinamiento y subdifusión:** El régimen balístico a tiempos cortos se vuelve casi imperceptible. A tiempos intermedios se observa un aplanamiento de las curvas (régimen subdifusivo) acompañado de oscilaciones rápidas, lo que indica que la esfera se encuentra fuertemente confinada o vibrando en una región pequeña.

- **Difusión tardía:** Para tiempos mayores a 2 segundos, las curvas comienzan a recuperar levemente una pendiente positiva aproximándose a la línea de $\Delta t^{1,0}$, reflejando una difusión sumamente lenta.

En resumen, para la dinámica de 12 G existe un punto óptimo del acoplamiento magnético alrededor de los 12 Hz donde la partícula logra su máxima propulsión. Al cruzar este punto, hay una pérdida notoria en la dinámica del sistema.

Al incrementar la amplitud del campo magnético, el desplazamiento cuadrático medio presenta una fenomenología similar a la observada a 12 G, aunque con magnitudes significativamente mayores en su régimen de máxima movilidad.

Para un campo de 20 G, el punto óptimo de acoplamiento magnético se amplía ligeramente hacia los 13-14 Hz y genera desplazamientos de mayor alcance en comparación con el campo de 12 G. Sin embargo, al superar los 20 Hz, el sistema vuelve a caer hacia un estado de confinamiento, Figura 3.8. Para el campo de 30 G, el sistema mantiene una alta movilidad en un rango más amplio de frecuencias y los desplazamientos más altos se alcanzan entre los 9 Hz y 13 Hz. La pérdida de movimiento se desplaza para iniciar a partir de los 24 Hz. El estado de confinamiento domina por completo la dinámica únicamente al superar los 25 Hz, Figura 3.9.

Para un campo magnético de 50 G (véase la Figura 3.10), la dinámica observada en los DCM experimenta un cambio importante: los valores máximos de desplazamiento aumentan considerablemente y las frecuencias donde surge el punto máximo de movimiento se desplaza hacia un rango más amplio. En el rango de frecuencias de 11 Hz a 21 Hz, aparece el acoplamiento óptimo del sistema. El movimiento activo domina la dinámica, extendiendo el régimen persistente a tiempos mayores, mientras que la disminución del movimiento se presenta de forma más gradual en comparación con los campos magnéticos anteriores.

Finalmente, al aplicar el campo magnético de mayor intensidad, 70 G (véase la Figura 3.11), la dinámica del sistema mantiene un comportamiento similar al caso de 50 G, pero ocurre la respuesta óptima a frecuencias mayores a las anteriores intensidades. La esfera logra mantener su desplazamiento máximo en un rango de frecuencias mucho más amplio (10-25 Hz). Sin embargo, al cruzar este umbral, el sistema pierde abruptamente su movimiento y regresa a un estado de confinamiento, similar a lo observado en los campos de menor intensidad.

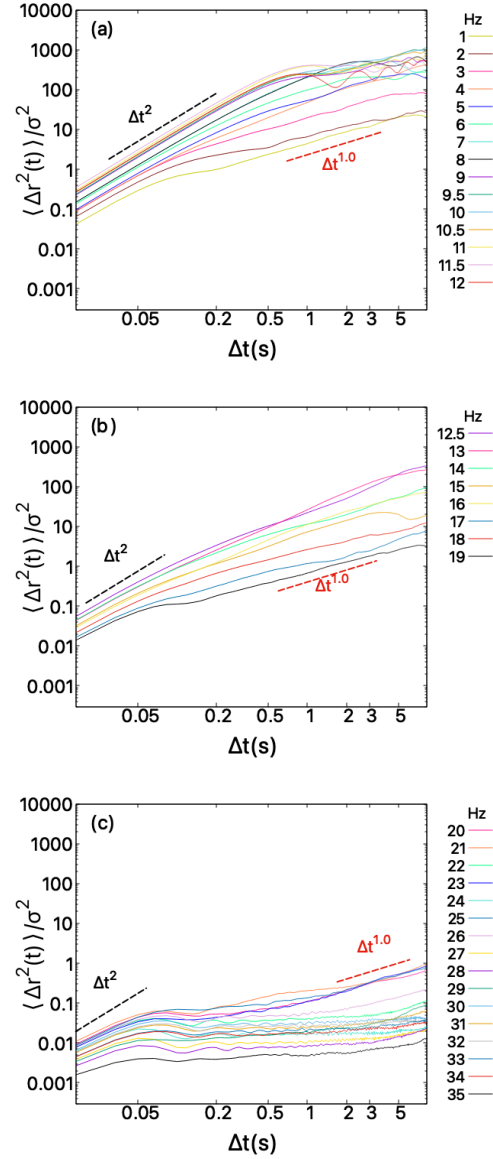


Figura 3.7: **Desplazamiento cuadrático medio (DCM) para 12 G.** Se muestran tres regímenes de movilidad dependientes de la frecuencia: (a) a bajas frecuencias (1-12 Hz) se observa un incremento progresivo de la movilidad; (b) a frecuencias intermedias (12.5-19 Hz) ocurre una pérdida gradual del desplazamiento tras alcanzar un máximo en 12 Hz; y (c) para altas frecuencias (20-35 Hz) se presenta una caída abrupta de la dinámica, indicando que entra en un estado de confinamiento. Las líneas punteadas muestran las pendientes teóricas para los regímenes balístico (Δt^2) y difusivo ($\Delta t^{1.0}$).

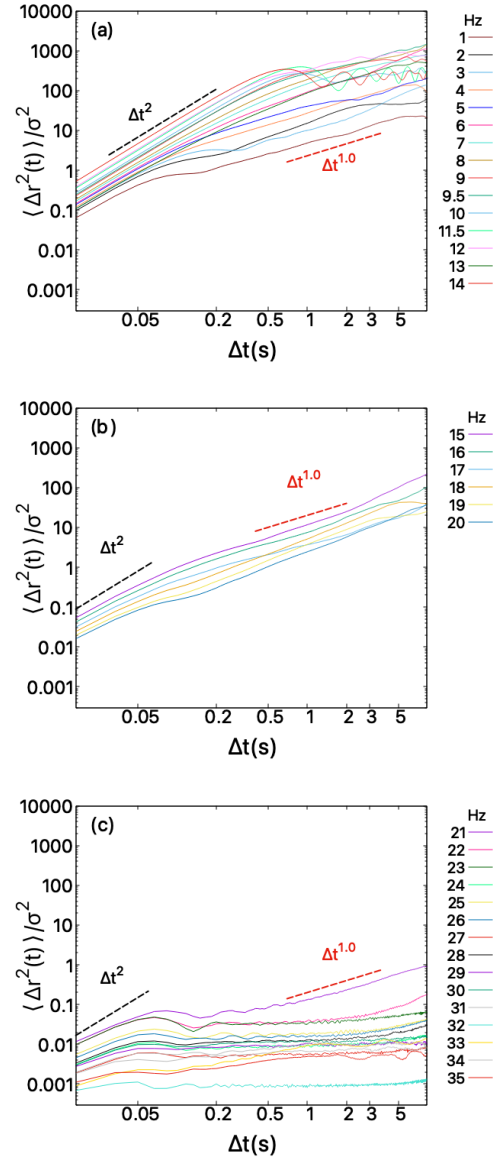


Figura 3.8: **Desplazamiento cuadrático medio (DCM) para 20 G.** Comportamiento dinámico dividido en tres regímenes de frecuencia: (a) a bajas frecuencias (1-14 Hz) la dinámica incrementa progresivamente hasta alcanzar un máximo de propulsión entre 13 y 14 Hz; (b) a frecuencias intermedias (15-20 Hz) se observa una pérdida gradual del movimiento; y (c) a altas frecuencias (21-35 Hz) la movilidad decae abruptamente hacia un estado de confinamiento. En comparación con el campo de 12 G, el acoplamiento óptimo se desplaza ligeramente y se logran desplazamientos de mayor magnitud. Las líneas punteadas indican las pendientes teóricas balística (Δt^2) y difusiva ($\Delta t^{1.0}$).

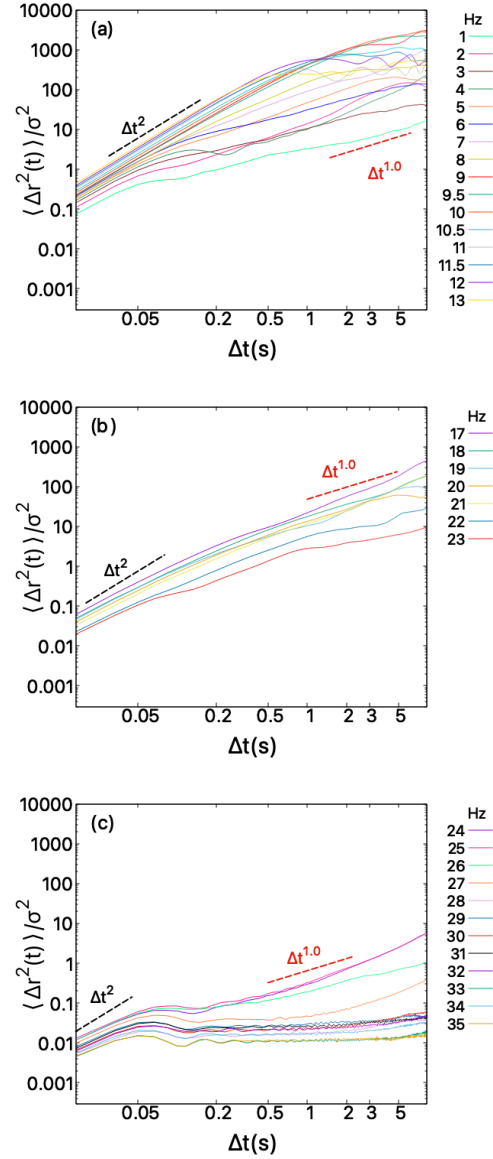


Figura 3.9: **Desplazamiento cuadrático medio para 30 G.** El comportamiento dinámico se divide en tres intervalos de frecuencia: (a) a bajas frecuencias (1-13 Hz) la movilidad incrementa progresivamente, alcanzando su máxima propulsión en una banda más amplia (9-13 Hz); (b) a frecuencias intermedias (17-23 Hz) el desplazamiento disminuye gradualmente, pero mantiene una tendencia difusiva; y (c) a altas frecuencias (24-35 Hz) la dinámica entra en un estado de confinamiento. Las líneas punteadas muestran las tendencias teóricas balística (Δt^2) y difusiva ($\Delta t^{1.0}$).

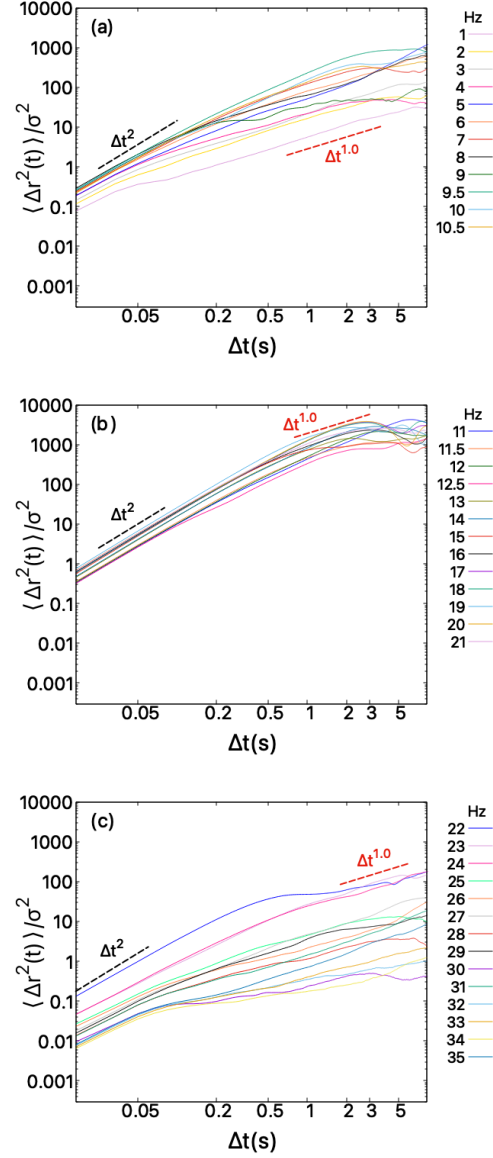


Figura 3.10: **Desplazamiento cuadrático medio para 50 G.** El comportamiento dinámico se divide en tres intervalos de frecuencia: (a) a bajas frecuencias (1-10.5 Hz) la movilidad incrementa de forma progresiva; (b) a frecuencias intermedias (11-21 Hz) el régimen balístico se extiende significativamente, registrando los mayores desplazamientos del sistema; y (c) a altas frecuencias (22-35 Hz) la movilidad decae de manera gradual. Las líneas punteadas muestran las tendencias teóricas balística (Δt^2) y difusiva ($\Delta t^{1,0}$).

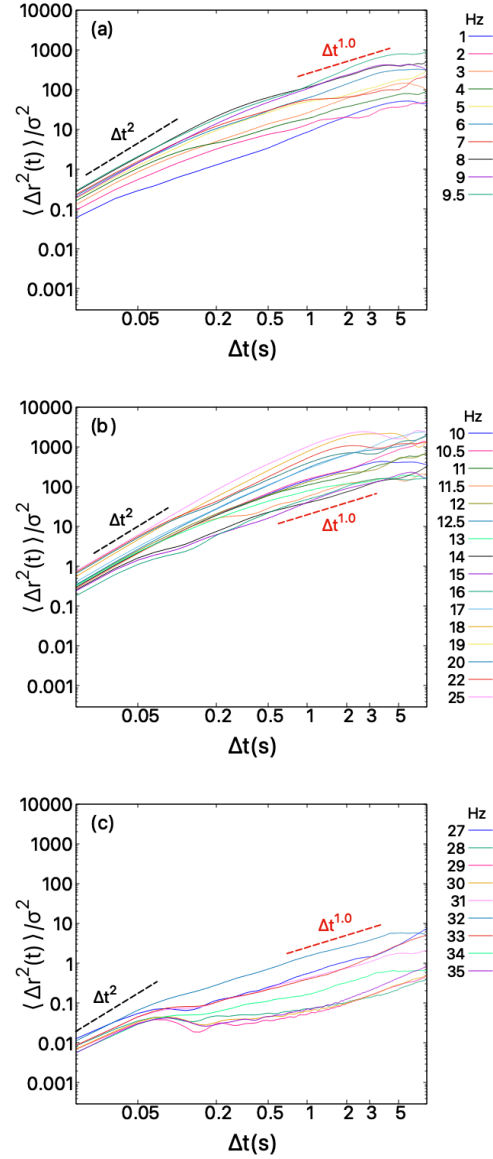


Figura 3.11: **Desplazamiento cuadrático medio para 70 G.** El comportamiento dinámico se divide en tres intervalos de frecuencia: (a) a bajas frecuencias (1-9.5 Hz) el movimiento incrementa de forma progresiva; (b) a frecuencias intermedias (10-25 Hz) la persistencia del movimiento se mantiene sobre un amplio rango de frecuencias, logrando altos desplazamientos; y (c) a altas frecuencias (27-35 Hz) ocurre una caída de movimiento y el sistema entra en un estado de confinamiento. Las líneas punteadas muestran las tendencias teóricas balística (Δt^2) y difusiva ($\Delta t^{1.0}$).

3.2.1. Análisis del Coeficiente de Difusión Efectivo

Para comprender de manera global cómo el campo magnético impulsa a la partícula, analizamos el coeficiente de difusión efectivo (D_{eff}) en función de la frecuencia para todas las intensidades de campo magnético trabajadas (12 G, 20 G, 30 G, 50 G, y 70 G), Figura 3.12). El punto máximo de cada curva representa la **frecuencia de resonancia** del sistema; es decir, la frecuencia exacta donde el acoplamiento entre el campo magnético y la esfera es óptimo, generando el mayor movimiento propulsado. A continuación, describimos el comportamiento de la difusión efectiva para cada uno de los campo magnéticos:

- **Campo de 12 G:** A bajas frecuencias, el coeficiente de difusión comienza con valores muy pequeños, indicando un menor movimiento. Conforme la frecuencia aumenta, el sistema encuentra su frecuencia de resonancia alrededor de los 11 Hz y 12 Hz, donde se alcanza el pico máximo de difusión (con un valor aproximado de 1.25 s^{-1}). En este punto, la partícula experimenta su mayor propulsión. Inmediatamente después de este máximo, al superar los 12 Hz, la curva sufre una caída abrupta y los valores de D_{eff} caen prácticamente a cero, reflejando que el sistema pierde el movimiento y entra en un estado de confinamiento.
- **Campos de 20 G y 30 G:** Al aumentar la intensidad del campo, notamos dos cambios principales. Primero, el valor máximo de difusión se duplica en comparación con 12 G, alcanzando valores cercanos a 2.8 s^{-1} para ambos campos. Segundo, la frecuencia de resonancia se desplaza hacia la derecha dependiendo el campo; para **20 G**, el movimiento propulsado óptimo ocurre entre los 14 Hz, seguido de una caída abrupta de movimiento a partir de los 15 Hz; por su parte, para **30 G**, la resonancia ocurre entre 14 Hz y 15 Hz, y después de los 16 Hz ocurre la caída de movimiento.
- **Campo de 50 G:** Para esta intensidad, la respuesta del sistema se amplifica. El coeficiente de difusión máximo llega a valores cercanos a 3.5 s^{-1} . A diferencia de los campos anteriores, la resonancia no ocurre en un solo punto óptimo, sino que se mantiene constante en un rango de frecuencias que va de los 15 Hz a los 21 Hz. no ocurre una frecuencia de resonancia máxima, sino que abarca más frecuencias. Al superar los 21 Hz, el movimiento disminuye y el sistema cae nuevamente a valores cercanos a cero.
- **Campo de 70 G:** Finalmente, para el campo más intenso, el sistema registra los valores de difusión efectivo más altos de todo el experimento (cercanos a 3.8 s^{-1}). La zona de resonancia y mayor propulsión se desplaza aún más hacia las frecuencias altas,

principalmente alrededor de los 18 Hz y 25 Hz. Al cruzar los 26 Hz, el movimiento se pierde.

En resumen, la Figura 3.12 demuestra una clara tendencia general: a medida que incrementamos la intensidad del campo magnético, el sistema es capaz de generar un movimiento activo mucho mayor (valores más altos de D_{eff}) y, a su vez, la frecuencia de resonancia necesaria para alcanzar esa propulsión óptima se desplaza hacia frecuencias más altas.

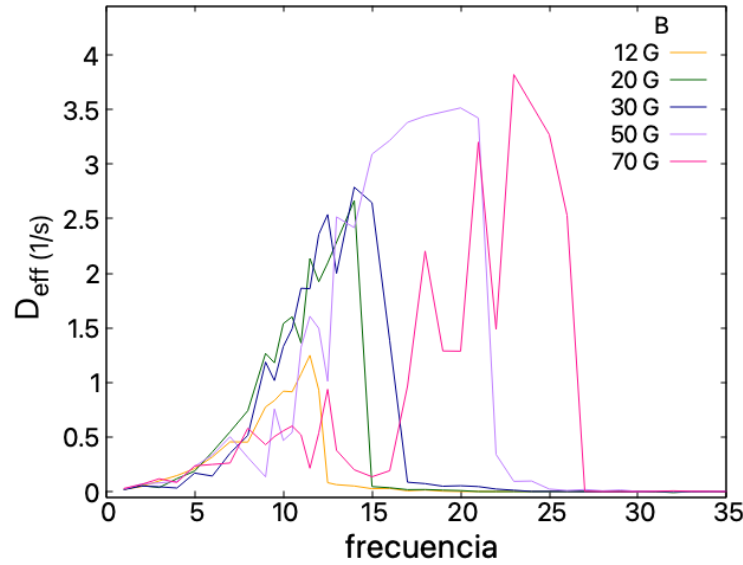


Figura 3.12: Coeficiente de difusión efectivo (D_{eff}) en función de la frecuencia para distintas intensidades de campo magnético (12 G, 20 G, 30 G, 50 G y 70 G). Los picos en cada curva indican la frecuencia de resonancia, donde se maximiza el movimiento activo. Se observa que, al aumentar el campo magnético, el valor máximo de difusión incrementa y se desplaza hacia frecuencias mayores.

3.3. Modelo teórico del Desplazamiento Cuadrático Medio (MSD)

Para analizar si nuestra esfera presentaba movimiento activo, calculamos el desplazamiento cuadrático medio teórico. La elección de estas frecuencias de resonancia se realizó porque corresponden a los puntos de máxima resonancia identificados en las curvas del coeficiente de difusión efectivo. En general, los resultados experimentales coinciden bien con las curvas teóricas de la ecuación del DCM, reflejando una transición desde un régimen

balístico a tiempos cortos seguido de patrones de ondas u oscilaciones determinado por las rotaciones de la esfera a tiempos largos. Resulta fundamental complementar la teoría con los datos experimentales, ya que nos permite validar si el modelo matemático para partículas activas realmente describe nuestro sistema, calculando los siguientes valores: la velocidad efectiva (V_{eff}), tiempo promedio de persistencia (Γ^{-1}), la velocidad angular promedio del movimiento circular (Ω). En particular, para 12 G (evaluando las frecuencias de resonancia de 11 Hz y 12 Hz), el modelo obtuvo los siguientes datos: Para 11 Hz: Calculamos un tiempo de persistencia promedio de ($\Gamma^{-1} \approx 2,6$ s, una velocidad efectiva de propulsión $V_{eff} \approx 23,395$ mm/s y una velocidad angular promedio de $\Omega \approx 3,7875$ rad/s. Estos valores nos indican que, el sistema alcanza su acoplamiento óptimo para estas frecuencias de resonancia, donde la esfera mantiene una persistencia direccional durante varios segundos antes de que la rotación altere su trayectoria. Las oscilaciones observadas a tiempos largos son una consecuencia directa de este movimiento rotatorio combinado con la propulsión activa, lo que confirma que el modelo teórico reproduce adecuadamente la dinámica experimental (véase la Figura 3.13).

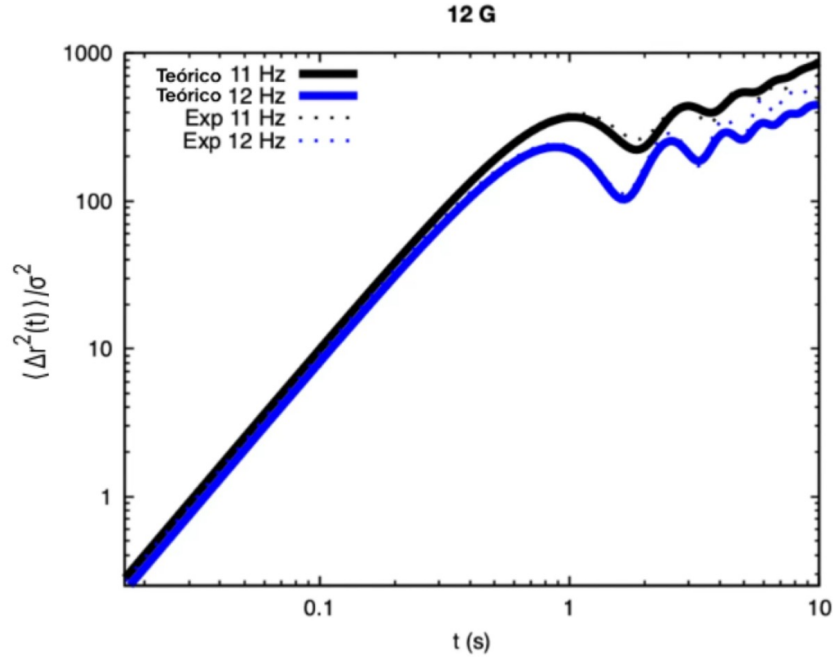


Figura 3.13: **Desplazamiento cuadrático medio para un campo de 12 G.** Las líneas sólidas muestran el modelo teórico para las frecuencias de resonancia de 11 Hz (negro) y 12 Hz (azul), y las líneas punteadas representan los datos experimentales correspondientes.

3.3 Modelo teórico del Desplazamiento Cuadrático Medio (MSD)

Para el caso de 20 G, (evaluando las frecuencias de resonancia de 11.5 Hz y 14 Hz), el modelo teórico describe de forma consistente el comportamiento observado en los datos experimentales. Obtuvimos los siguientes datos: Para 11.5 Hz: Se calcula un tiempo de persistencia promedio de ($\Gamma^{-1} \approx 10,93$ s, una velocidad efectiva de propulsión de $V_{eff} \approx 25,19$ mm/s y una velocidad angular promedio de $\Omega \approx 3,72$ rad/s. Para 14 Hz, obtuvimos un tiempo de persistencia de ($\Gamma^{-1} \approx 7,12$ s, una velocidad efectiva de $V_{eff} \approx 28,70$ mm/s y una velocidad angular de $\Omega \approx 4,81$ rad/s. Estos valores nos indican que, al incrementar la frecuencia a 14 Hz, la partícula experimenta un aumento en su velocidad efectiva y en su velocidad angular, lo que reduce su tiempo de persistencia direccional en comparación con los 11.5 Hz. El desplazamiento cuadrático medio (DCM) muestra la misma transición desde el régimen balístico a tiempos cortos hasta mostrar oscilaciones a tiempos largos, confirmando que el modelo captura la dinámica del sistema (véase la Figura 3.14).

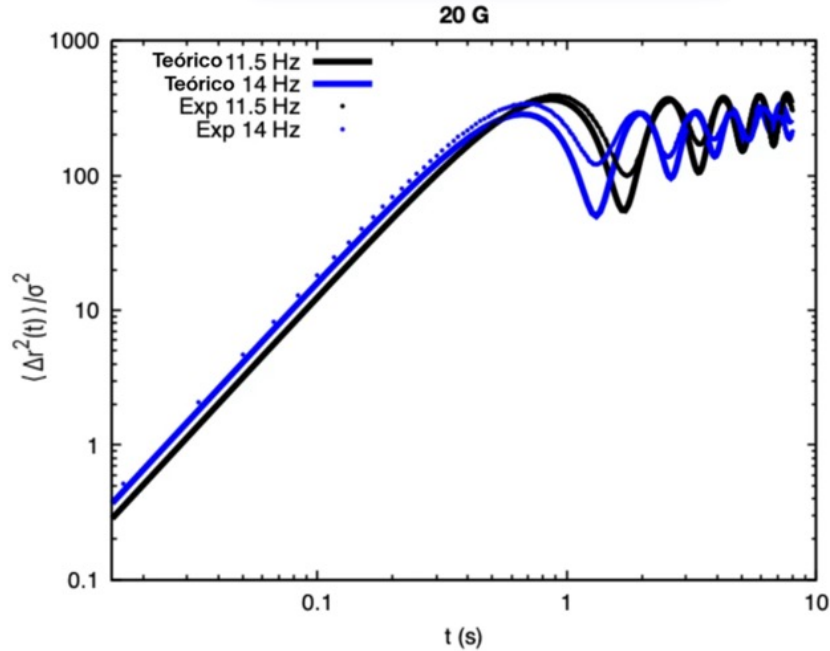


Figura 3.14: **Desplazamiento cuadrático medio para un campo de 20 G.** Las líneas sólidas muestran el modelo teórico para las frecuencias de resonancia de 11.5 Hz (negro) y 14 Hz (azul), y las líneas punteadas representan los datos experimentales correspondientes.

Específicamente, para 30 G (evaluando las frecuencias de resonancia de 12 Hz y 13 Hz), el modelo teórico reproduce el comportamiento general de los datos experimentales. Para 12 Hz, obtuvimos que su tiempo de persistencia promedio es de ($\Gamma^{-1} \approx 7,09$ s, la

velocidad efectiva de propulsión es de $V_{eff} \approx 23,21 \text{ mm/s}$ y la velocidad angular promedio es de $\Omega \approx 2,63 \text{ rad/s}$. Para 13 Hz, obtuvimos un tiempo de persistencia de ($\Gamma^{-1} \approx 3,51 \text{ s}$), una velocidad efectiva de $V_{eff} \approx 21,47 \text{ mm/s}$ y una velocidad angular de $\Omega \approx 3,52 \text{ rad/s}$. Estos valores nos indican que, al pasar de 12 Hz a 13 Hz, la velocidad angular del movimiento circular aumenta, lo que reduce el tiempo de persistencia direccional de la partícula. Ocurre una transición de un movimiento activo a tiempos cortos hasta mostrar oscilaciones a tiempos largos (véase la Figura 3.15).

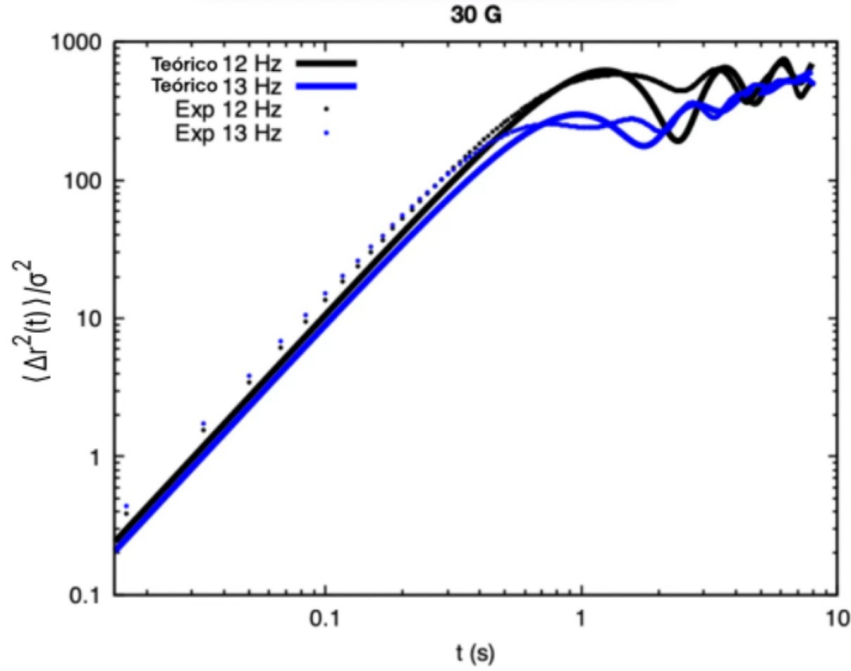


Figura 3.15: **Desplazamiento cuadrático medio para un campo de 30 G.** Las líneas sólidas muestran el modelo teórico para las frecuencias de resonancia de 12 Hz (negro) y 13 Hz (azul), y las líneas punteadas representan los datos experimentales correspondientes.

En particular, para 50 G (evaluando las frecuencias de resonancia para 18 Hz y 19 Hz), el modelo teórico describe la tendencia observada en los datos experimentales. Obtuvimos que, para 18 Hz se calcula un tiempo de persistencia promedio de ($\Gamma^{-1} \approx 8,19 \text{ s}$), la velocidad efectiva de propulsión es de $V_{eff} \approx 25,36 \text{ mm/s}$ y la velocidad angular promedio es de $\Omega \approx 1,21 \text{ rad/s}$. Para 19 Hz, obtuvimos un tiempo de persistencia de ($\Gamma^{-1} \approx 9,99 \text{ s}$), una velocidad efectiva de $V_{eff} \approx 32,50 \text{ mm/s}$ y una velocidad angular de $\Omega \approx 1,72 \text{ rad/s}$. Los datos muestran que, al incrementar la intensidad del campo magnético con una frecuencia de 19 Hz, la esfera experimenta un incremento tanto en su velocidad efectiva de

3.3 Modelo teórico del Desplazamiento Cuadrático Medio (MSD)

propulsión como en su tiempo de persistencia direccional respecto a los 18 Hz. Nuevamente se reproduce la transición de un régimen balístico hasta alcanzar un movimiento rotatorio a tiempos largos (véase la Figura 3.16).

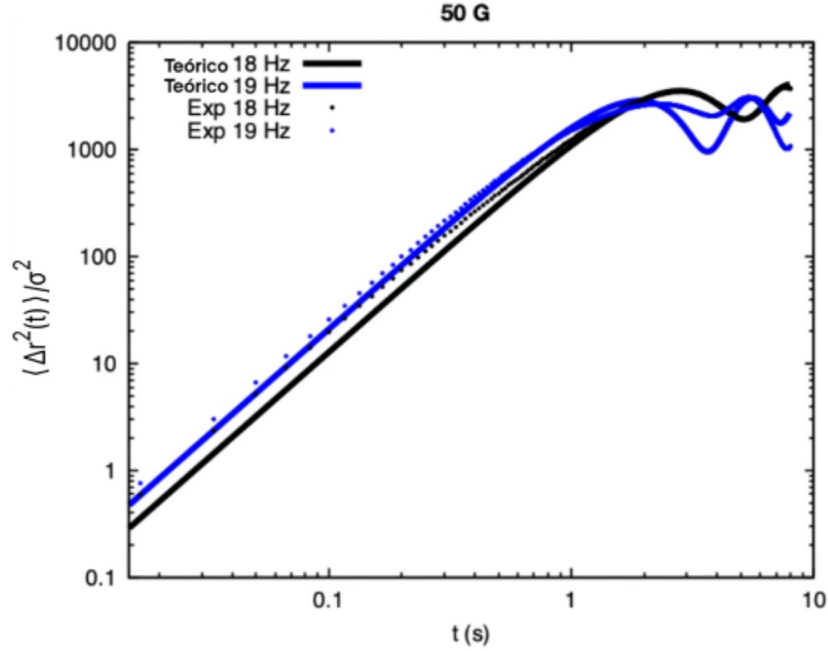


Figura 3.16: **Desplazamiento cuadrático medio para un campo de 50 G.** Las líneas sólidas muestran el modelo teórico para las frecuencias de resonancia de 18 Hz (negro) y 19 Hz (azul), y las líneas punteadas representan los datos experimentales correspondientes.

Finalmente, para 70 G evaluamos las frecuencias de resonancia de 22 Hz y 25 Hz, el modelo teórico describe la transición general de la dinámica del sistema, aunque se aprecian algunas desviaciones ligeras a tiempos cortos entre los datos experimentales y las curvas teóricas. Para 22 Hz calculamos un tiempo de persistencia promedio de $(\Gamma^{-1} \approx 3,97 \text{ s})$, una velocidad efectiva de propulsión de $V_{eff} \approx 19,03 \text{ mm/s}$ y una velocidad angular promedio de $\Omega \approx 1,70 \text{ rad/s}$. Para 25 Hz, obtuvimos un tiempo de persistencia de $(\Gamma^{-1} \approx 6,66 \text{ s})$, una velocidad efectiva de $V_{eff} \approx 21,48 \text{ mm/s}$ y una velocidad angular de $\Omega \approx 1,26 \text{ rad/s}$. Estos valores muestran que el aumento en la frecuencia de 22 Hz a 25 Hz incrementa tanto la velocidad efectiva como el tiempo de persistencia de la esfera. A pesar de las pequeñas diferencias observadas en el régimen balístico inicial debido a fluctuaciones experimentales a altas frecuencias, el modelo reproduce la dinámica general del sistema como en los campos anteriores (véase la Figura 3.17).

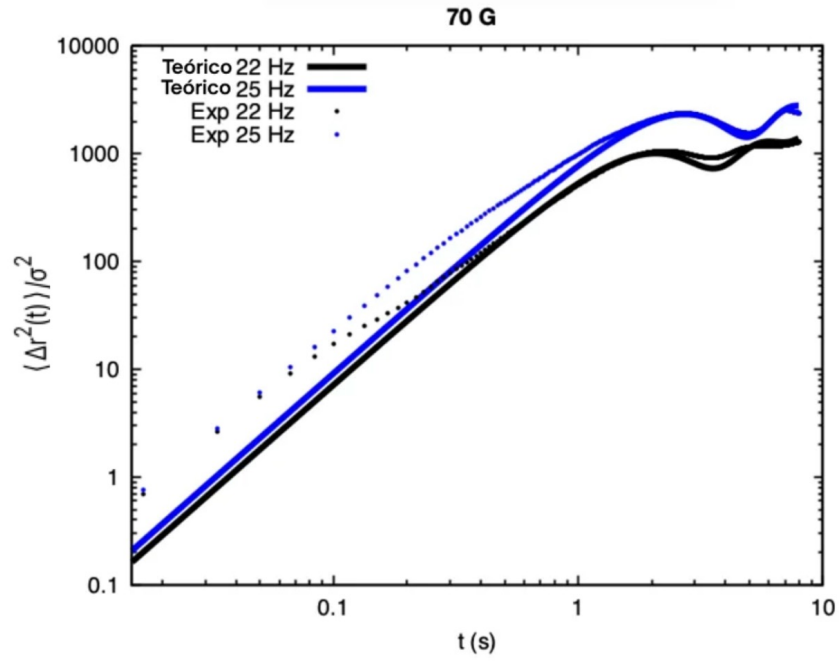


Figura 3.17: **Desplazamiento cuadrático medio para un campo de 70 G.** Las líneas sólidas muestran el modelo teórico para las frecuencias de resonancia de 22 Hz (negro) y 25 Hz (azul), y las líneas punteadas representan los datos experimentales correspondientes.

3.4. Conclusiones

Analizamos la dinámica de una esfera magnética bajo la acción de campos magnéticos oscilantes con magnitudes de 12 G, 20 G, 30 G, 50 G y 70 G, y para frecuencias de 1 Hz a 35 Hz. Identificamos claramente tres regímenes de movimiento: régimen de bajas frecuencias en el que el movimiento de la esfera se caracteriza por desplazamientos de pequeña amplitud debidos al rodamiento hacia adelante y hacia atrás que ocurre con cada inversión del campo. Un régimen de frecuencias intermedias en el que la esfera presenta un movimiento persistente debido a que los impulsos que recibe del campo se vuelven más frecuentes. Y por último un régimen de altas frecuencias en donde el cambio de sentido del campo es tan rápido que no le da tiempo al momento magnético de responder. Estos tres regímenes se pueden distinguir tanto en las trayectorias como en el desplazamiento cuadrático medio. Un hallazgo importante es que existen frecuencias específicas, a las que llamamos frecuencias de resonancia, que inducen el movimiento persistente. Estas frecuencias se recorren a valores mayores al incrementar la magnitud del campo magnético. El desplazamiento cuadrático medio experimental correspondiente a estas frecuencias de resonancia fueron comparadas con la expresión teórica para una partícula activa, resultando en una buena coincidencia.

Capítulo 4

Modelo Teórico

4.1. Derivación del Modelo Teórico

El objetivo principal de este modelo es describir la dinámica de una esfera de acero magnetizada que se encuentra sometida a un campo magnético externo que oscila en el tiempo. Para fundamentar este comportamiento, partimos de una analogía esencial en la física clásica: *el péndulo simple* [37]. En su forma más básica, una masa oscila alrededor de un punto de equilibrio debido a la fuerza restauradora de la gravedad, cuya ecuación está dada por:

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin \phi = 0 \quad (4.1)$$

donde ϕ es el ángulo de deflexión, g es la aceleración de la gravedad y l es la longitud de la cuerda. Sin embargo, en cualquier sistema físico existe disipación de energía, típicamente dada por la fricción con el medio [38]. Al incorporar este amortiguamiento, la ecuación se vuelve dependiente de la velocidad angular, mediada por un coeficiente de fricción γ :

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} + \gamma \frac{d\phi}{dt} + \frac{g}{l} \sin \phi = 0 \quad (4.2)$$

Si este sistema no oscila libremente, sino que es perturbado al hacer oscilar verticalmente su punto de suspensión, la acción externa no actúa como un empuje directo sobre la masa. En su lugar, provoca que el parámetro de gravedad efectiva cambie periódicamente en el tiempo. Esto lo convierte en un **péndulo forzado paramétricamente** [39]:

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} + \gamma \frac{d\phi}{dt} + A \sin(\Omega t) \sin \phi = 0 \quad (4.3)$$

4.1.1. Péndulo Magnético Paramétricamente Forzado

Para trasladar el concepto mecánico descrito en la Ecuación 5.3 al contexto de nuestro trabajo, recurrimos al modelo del péndulo magnético desarrollado por Kim *et al.* [4]. Experimentalmente, este sistema consiste en un imán permanente de barra coaxialmente unido a su eje de rotación y suspendido en el centro de dos pares de Bobinas de Helmholtz que producen un campo magnético como se muestra en la Figura 5.1 Cuando un momento

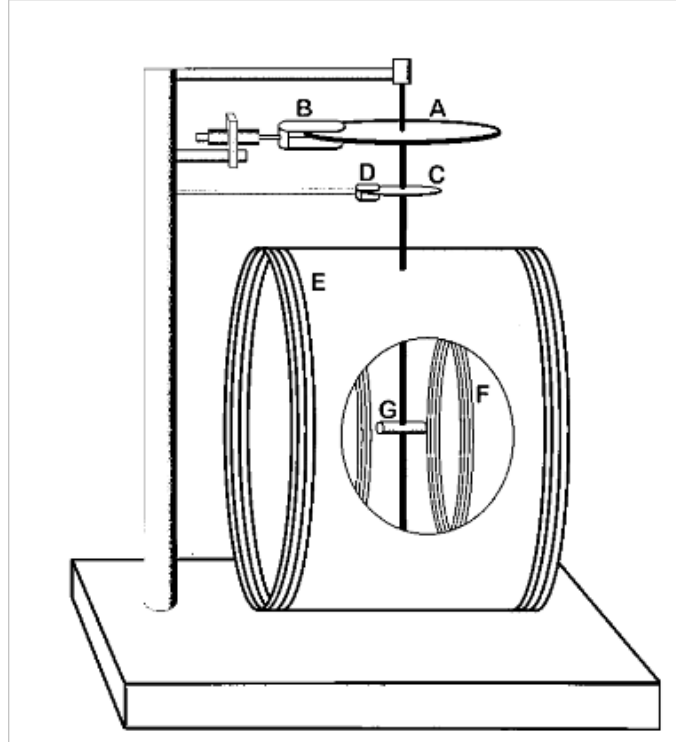


Figura 4.1: Esquema del péndulo magnético forzado paramétricamente [4]:(A)placa de amortiguamiento de aluminio, (B) imán de herradura controlado por micrómetro, (C) rueda codificadora, (D) módulo del codificador, (E) Bobina de Helmholtz para el componente de corriente eléctrica, (F) Bobina de Helmholtz para el componente de corriente alterna, y (G) imán permanente de barra.

magnético se encuentra inmerso en un campo oscilante, se comporta matemáticamente como un péndulo donde la fuerza restauradora no es constante, sino que depende de manera directa de los parámetros de amplitud y frecuencia del campo externo [13]. La ecuación de movimiento que rige a este oscilador magnético se expresa como [4]:

$$\ddot{x} + 2\pi\gamma\dot{x} + 2\pi(\Omega^2 + A \sin 2\pi t) \sin 2\pi x = 0 \quad (4.4)$$

donde γ representa el parámetro de amortiguamiento, Ω es la frecuencia natural del sistema y A es la amplitud de la fuerza impulsora [4], donde el soporte o suspensión del sistema oscila verticalmente constituyendo la parte paramétrica de la ecuación [4]. El análisis de este sistema demuestra que, al variar la frecuencia (Ω) y la amplitud (A) del campo, el péndulo exhibe una dinámica no lineal [40, 4]. Para valores pequeños de amplitud, la partícula se mantiene en un estado de equilibrio estable, correspondiente a su punto estacionario normal [40]. Sin embargo, conforme la amplitud del campo magnético supera un umbral crítico, el sistema pierde su estabilidad abruptamente [40, 4]. Cuando el campo magnético es débil, el imán se encuentra en un estado de equilibrio estático. Pero si aumentamos la fuerza del campo externo superando cierto límite, ese estado cambia y el movimiento se vuelve más complejo, oscilando de un lado a otro en ciclos que se van repitiendo de manera cada vez más compleja. Si seguimos subiendo la intensidad del campo, estas modificaciones se multiplican en cadena hasta convertirse en *caos determinista* [40, 4]. Esto resume el mecanismo fundamental de la inestabilidad y respuesta dinámica del sistema. Su validez teórica está respaldada por la literatura sobre sistemas dinámicos, donde este tipo de osciladores no lineales se ha estudiado para entender cómo se originan los cambios de comportamiento y cómo conducen al caos [39, 41, 42, 43, 40]. Asimismo, esta formulación concuerda con los principios de la materia activa: el sistema extrae energía del campo externo y la transforma en movimiento direccional, disipando el resto al medio [44, 9]. En este contexto, la relevancia fenomenológica del modelo para nuestro trabajo radica precisamente en su mapa de estabilidad: nos provee el mecanismo teórico para entender cómo y por qué la esfera deja de estar en reposo para comenzar a rotar u oscilar. De este modo, en nuestro arreglo experimental, aprovechamos de manera directa estas inestabilidades inducidas paramétricamente para desencadenar la resonancia que da origen al movimiento activo [13, 9].

4.2. Dinámica de la esfera y Ecuación de Movimiento

Para describir matemáticamente cómo se originan las inestabilidades descritas en la sección anterior, es fundamental trasladar estos conceptos teóricos a nuestro sistema experimental. Consideremos el modelo básico de nuestro sistema: una esfera magnética aislada. Esta partícula interactúa con un campo magnético externo espacialmente uniforme y oscilante en el tiempo, aplicado a lo largo del eje vertical. Este campo se define como $\vec{B}_{ext}(t) = B_0 \sin(2\pi ft)\hat{k}$, donde B_0 es la amplitud máxima, f es la frecuencia de oscilación y $\hat{k}$ indica la dirección vertical. Como se ilustra en la Figura 5.2, la partícula se caracteriza por tener un momento magnético, denotado por el vector $\vec{\mu}$, el cual tiene la libertad de

orientarse en cualquier dirección espacial. Cuando esta esfera se encuentra bajo la influencia de un campo magnético externo, $\vec{B}_{ext}$, aplicado a lo largo del eje vertical, la interacción entre ambos vectores genera un torque magnético ($\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}_{ext}$) que busca alinear el momento de la partícula con la dirección del campo.

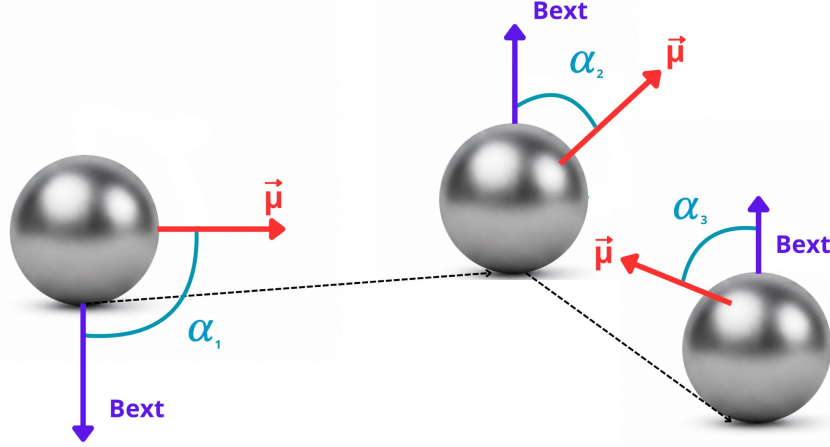


Figura 4.2: Esquema geométrico fundamental del sistema. Se ilustra una esfera cuyo momento magnético $\vec{\mu}$ (en rojo), libre para rotar, interactúa con un campo magnético externo $\vec{B}_{ext}$ (en morado) que actúa exclusivamente a lo largo de la dirección vertical. El estado de orientación del sistema cambia durante el movimiento, evidenciado por la variación del ángulo instantáneo a medida que la partícula se desplaza sobre el sustrato.

Como se observa en el esquema, el estado de la esfera queda definido por el ángulo α . Al estudiar la evolución temporal de este ángulo mediante el balance de torques, podemos construir la ecuación de movimiento que predecirá el comportamiento de la esfera: si permanece alineada con el campo o si rompe el equilibrio para comenzar su movimiento.

4.2.1. Acoplamiento Mecánico y Condición de No Deslizamiento

A partir del esquema anterior, es evidente que el campo magnético genera una dinámica rotacional: el torque busca alinear el momento magnético, ocasionando que la esfera oscile o rote. Este comportamiento guarda una analogía matemática directa con el modelo del péndulo forzado de la Ecuación 5.4. En nuestro sistema, el torque depende de la desalineación angular mediante el término $\sin \alpha(t)$. Consecuentemente, el campo magnético alterno asume el papel de “gravedad” efectiva que impulsa y modula paraméricamente al sistema a través de la componente $\sin(2\pi ft)$. Para resumir y formalizar esta equivalencia, la Tabla 5.1 presenta la correspondencia directa entre los elementos físicos de ambos sistemas. Una

Elemento	Péndulo Forzado Paramétricamente	Péndulo Magnético
Variable de estado	Ángulo de deflexión ϕ	Ángulo α entre el dipolo $\vec{\mu}$ y el campo $\vec{B}$
Inercia	Masa del péndulo y longitud de la cuerda	Momento de inercia I de la esfera de acero
Disipación	Fricción del aire o en el pivote	Fricción rotacional por contacto con el vidrio (medio seco)
Fuerza Restauradora	Gravedad	Torque magnético inducido por el campo alterno $\vec{B}(t)$
Origen del Forzamiento Paramétrico	Movimiento vertical del soporte (parámetro variable)	Oscilación del campo magnético

Cuadro 4.1: Analogía física y matemática entre los componentes del péndulo clásico forzado paramétricamente y el sistema magnético rotacional empleado en este trabajo.

vez establecida esta dinámica, el paso crucial para que la rotación se convierta en una traslación efectiva recae en el sustrato. La energía magnética suministrada se transforma primero en energía cinética rotacional. Sin embargo, debido a la fricción generada por el contacto directo de la esfera con la placa de vidrio (en ausencia de un medio fluido), el sistema queda sujeto a una **condición de no deslizamiento**. Es precisamente esta restricción cinemática la que acopla la velocidad angular $\omega = d\alpha/dt$ con la velocidad traslacional v de la esfera de radio R mediante la relación intrínseca $v = \omega R$. Gracias a este mecanismo, una fracción de la energía rotacional se transfiere para lograr la propulsión de la partícula. Al integrar el torque magnético, el momento de inercia y el término de disipación asociado a esta fricción, establecemos la **ecuación de movimiento** no lineal que rige la evolución temporal de $\alpha(t)$:

$$\frac{d^2\alpha(t)}{dt^2} + \beta \frac{d\alpha(t)}{dt} + \omega_0^2 \sin(2\pi ft) \sin \alpha(t) = 0 \quad (4.5)$$

donde $\beta > 0$ representa el parámetro de disipación lineal producto de la fricción con la placa de vidrio y $\omega_0^2 = \mu B_0/I$ define la frecuencia característica del sistema, dictada por la magnitud del acoplamiento entre el momento magnético y la amplitud del campo externo [13].

4.2.2. Justificación Teórica y Vínculo con la Materia Activa

La Ecuación 4.5 representa la base analítica para entender la autopropulsión de nuestro sistema. Desde la perspectiva de los sistemas dinámicos, se ha demostrado que este tipo de ecuaciones no lineales (que dependen de α , $\dot{\alpha}$ y el tiempo t) originan dinámicas de alta complejidad y caos determinista [45, 41, 40, 4, 46].

Físicamente, este comportamiento matemático concuerda con los principios fundamentales de la materia activa. Tal como se estableció en las secciones previas, la esfera extrae energía del campo magnético y disipa una parte mediante la fricción con el sustrato. Este balance es el mecanismo que permite generar y mantener el trabajo direccional característico de los sistemas autopropulsados [14, 27, 6].

Dentro de nuestra ecuación, la no linealidad introducida por el término $\sin \alpha(t)$ juega un papel crucial: es el factor que rompe la simetría del sistema y da origen al transporte [47, 48]. A nivel macroscópico, este caos determinista se traduce visualmente en un distintos tipos de movimiento; browniano, persistente o vibratorio [33]. De esta manera, nuestra esfera logra explorar su entorno de forma análoga a la dinámica de los sistemas activos microscópicos.

4.3. Resultados y Discusión

El objetivo de esta sección es contrastar el comportamiento experimental de la esfera magnética con las predicciones teóricas derivadas del modelo de acoplamiento paramétrico. A partir de la dinámica descrita por la Ecuación 4.5, el análisis se centra en caracterizar la transición del sistema desde un estado de reposo acoplado hacia un régimen de transporte activo.

De acuerdo con el modelo del péndulo magnético forzado, la esfera requiere superar un umbral crítico de energía para romper su simetría inicial y salir del estado de equilibrio. Para evaluar experimentalmente esta inestabilidad, variamos los dos parámetros fundamentales del campo magnético externo: la amplitud máxima B_0 y la frecuencia de oscilación f .

El comportamiento de la esfera magnetizada exhibe una fuerte dependencia a la oscilación del campo externo. Al analizar la ecuación de movimiento, es posible distinguir tres estados dinámicos fundamentales, definidos por la magnitud de la frecuencia aplicada f en comparación con la frecuencia natural del sistema ω_0 [13].

4.3.1. Régimen de baja frecuencia

En el límite donde $2\pi f \ll \omega_0$, el campo magnético alterna de manera pausada. Esta lentitud otorga el tiempo necesario para que el dipolo de la esfera persiga continuamente la orientación de la fuerza externa antes de que ocurra la siguiente inversión direccional [13]. Como evidencia la Figura 4.3, esta dinámica obliga al ángulo $\alpha(t)$ a ejecutar oscilaciones confinadas de avance y retroceso formando semiciclos. El retrato de fase corrobora esta restricción espacial mediante la formación de órbitas limitadas y cerradas, lo que se traduce en una movilidad en general muy reducida. Debido a esto, las componentes positivas y negativas de la velocidad rotacional se anulan al ser evaluadas en el tiempo, resultando en un promedio de desplazamiento nulo [13].

4.3.2. Régimen de frecuencia intermedia

Cuando la frecuencia se ajusta a un nivel intermedio ($2\pi f \sim \omega_0$), los cambios del campo externo ocurren lo suficientemente rápido como para evitar que la esfera regrese al reposo entre cada impulso [13]. La Figura 4.4 muestra cómo el ángulo $\alpha(t)$ se sincroniza con estas inversiones magnéticas y comienza a crecer de manera continua [13]. Físicamente,

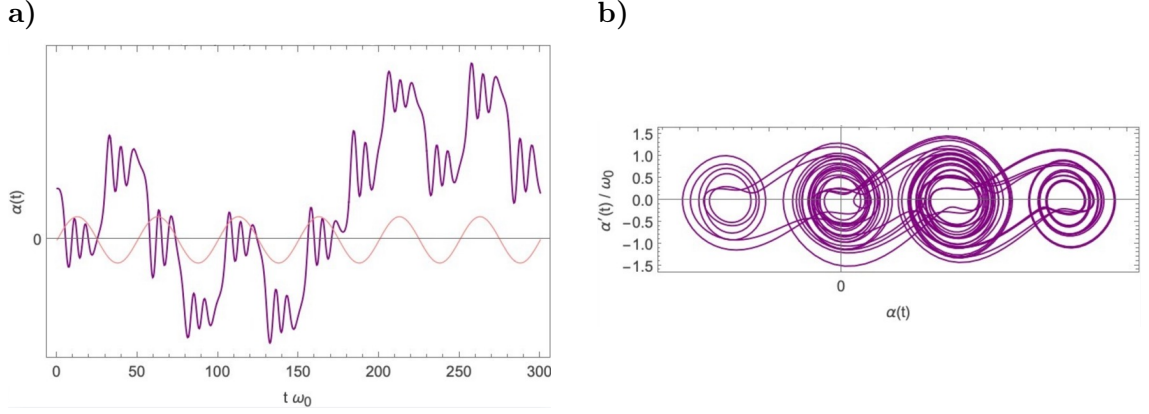


Figura 4.3: Dinámica del sistema para 12 G para un régimen de baja frecuencia. (a) Oscilaciones de avance y retroceso del ángulo $\alpha(t)$ (morado) respecto al campo externo (rosa). (b) Retrato de fase con orbitas cerradas. En línea roja la señal de $\sin(2\pi f t)$.

esto significa que la partícula es obligada a rodar sin detenerse, logrando una trayectoria persistente [13]. El retrato de fase confirma este comportamiento: la rotación de la esfera toma una dirección definida, de modo que el promedio temporal de la velocidad angular ya no es cero [13].

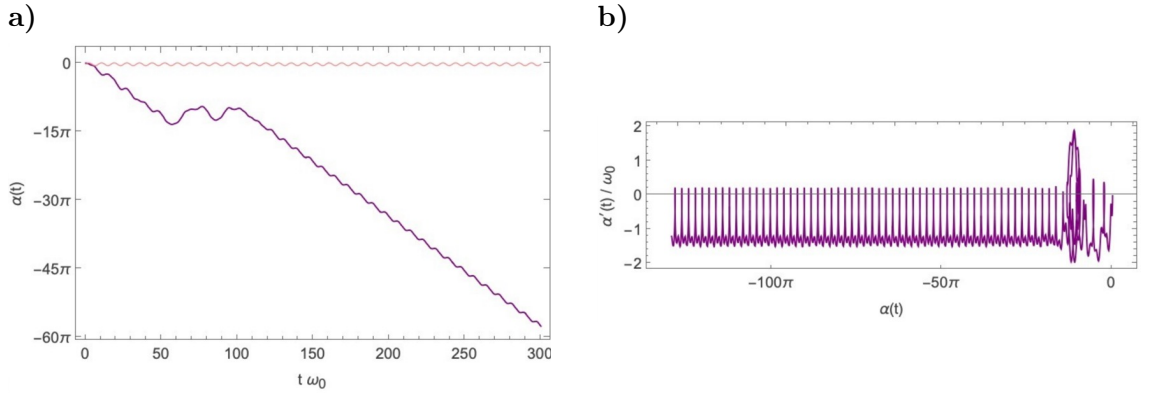


Figura 4.4: Dinámica del sistema a 12 G para un régimen de frecuencia intermedia. (a) Evolución divergente de $\alpha(t)$ indicativa de rodamiento continuo. (b) Espacio fase con sesgo rotacional bien definido. En línea roja la señal de $\sin(2\pi f t)$.

4.3.3. Régimen de alta frecuencia

Cuando el campo externo oscila muy rápido ($2\pi f \geq \omega_0$), la inercia de la esfera le impide reaccionar a los constantes cambios de polaridad [13]. Como se observa en la Figura 4.5,

cualquier movimiento inicial se atenúa rápidamente hasta que el ángulo $\alpha(t)$ se estabiliza en una posición fija [13]. Después de este breve periodo de ajuste, el retrato de fase muestra que la rotación se detiene por completo, por lo que el promedio de la velocidad angular vuelve a ser cero [13].

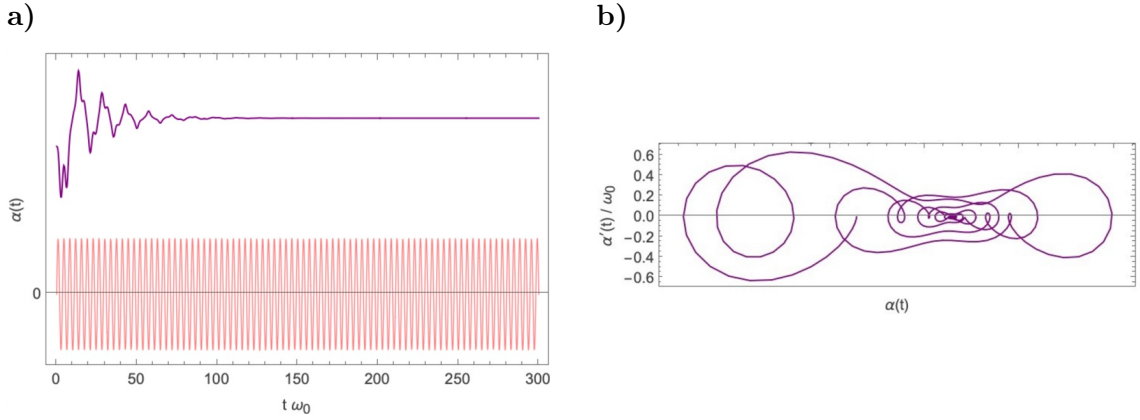


Figura 4.5: Dinámica del sistema a 12 G para un régimen de alta frecuencia. (a) Amortiguamiento y fijación del ángulo $\alpha(t)$. (b) Convergencia rápida del sistema hacia una posición de inmovilidad. En línea roja la señal de $\sin(2\pi ft)$.

Para comprobar la validez general del modelo teórico, extendimos el análisis a campos magnéticos de mayor intensidad (20 G, 30 G, 50 G y 70 G). Al aumentar la amplitud B_0 , la frecuencia natural del sistema ω_0 cambia y la fricción efectiva disminuye proporcionalmente. Sin embargo, los resultados confirman que la transición entre los tres regímenes dinámicos se mantiene intacta, lo que demuestra que el transporte activo es una característica fundamental del sistema.

4.3.4. Dinámica a mayor intensidad del campo magnético

Para amplitudes mayores a 12 G, el sistema reproduce las mismas etapas de movimiento. En el régimen de baja frecuencia ($f = 0,02\omega_0$), la partícula permanece atrapada en una región local, lo que se refleja en oscilaciones confinadas de $\alpha(t)$ y en un retrato de fase con órbitas cerradas sin desplazamiento neto. Al incrementar la oscilación a un nivel intermedio ($0,12\omega_0$), se muestra el cambio hacia el transporte activo: el ángulo crece formando una línea recta y constante. Al mismo tiempo, el retrato de fase confirma que la velocidad de giro se estabiliza en una sola dirección, lo que garantiza que la esfera rueda sin detenerse. Finalmente, cuando la frecuencia es alta ($0,275\omega_0$), los cambios en el campo magnético

son tan rápidos que la esfera no puede seguirlos; su movimiento disminuye hasta quedar completamente fija. En las Figuras 4.6, 4.7, 4.8 y 4.9 se muestra la dinámica del sistema para los campos de 20 G, 30 G, 50 G y 70 G respectivamente, para los tres regímenes de movimiento.

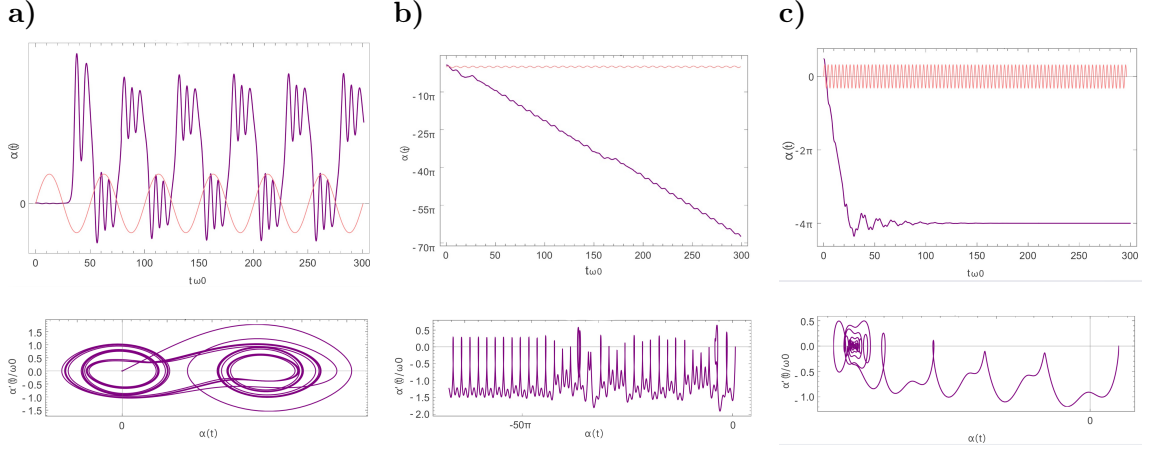


Figura 4.6: Dinámica del sistema a 20 G para los tres regímenes de frecuencia. Fila superior: Evolución temporal del ángulo $\alpha(t)$. Fila inferior: Retratos de fase correspondientes. Columnas: (a) régimen de baja frecuencia ($f = 0,02\omega_0$), (b) régimen intermedio de movimiento persistente ($f = 0,12\omega_0$) y (c) régimen de alta frecuencia ($f = 0,275\omega_0$).

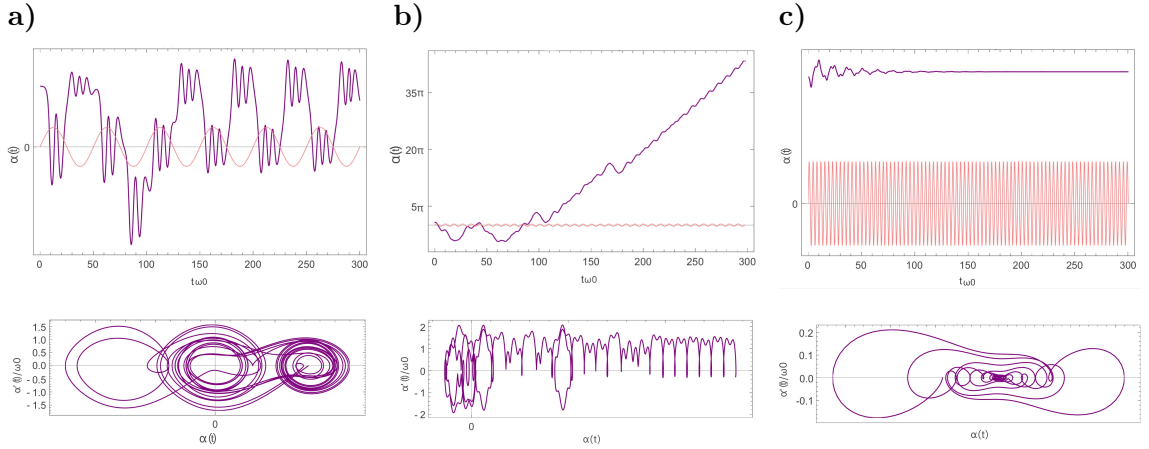


Figura 4.7: Dinámica del sistema a 30 G para los tres regímenes de frecuencia. Fila superior: Evolución temporal del ángulo $\alpha(t)$. Fila inferior: Retratos de fase correspondientes. Columnas: (a) régimen de baja frecuencia ($f = 0,02\omega_0$), (b) régimen intermedio de movimiento persistente ($f = 0,12\omega_0$) y (c) régimen de alta frecuencia ($f = 0,275\omega_0$).

A pesar de que el patrón de comportamiento se mantiene para todas las magnitudes

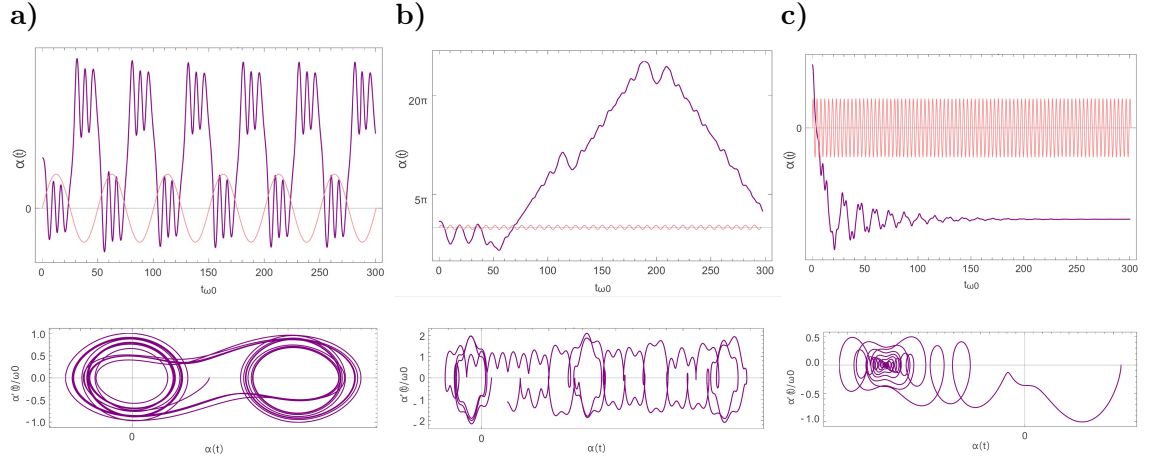


Figura 4.8: Dinámica del sistema a 50 G para los tres regímenes de frecuencia. Fila superior: Evolución temporal del ángulo $\alpha(t)$. Fila inferior: Retratos de fase correspondientes. Columnas: (a) régimen de baja frecuencia ($f = 0,02\omega_0$), (b) régimen intermedio de movimiento persistente ($f = 0,12\omega_0$) y (c) régimen de alta frecuencia ($f = 0,275\omega_0$).

de los campos magnéticos que aquí se estudiaron, el caso de 70 G presenta un escenario particularmente diferente (Figura 4.9). En este caso, debido a que la fricción efectiva disminuye considerablemente por la intensidad del campo, la frontera entre rodar y detenerse se vuelve inestable. Para condiciones idénticas de campo y frecuencia, ocurren minúsculas variaciones en la posición inicial de la esfera sobre la superficie que deciden su destino final: puede atraparse de inmediato, o puede dar varias vueltas antes de caer en una posición de reposo definitivo. Esta impredecibilidad matemática refleja con exactitud la naturaleza del experimento real, donde la mínima rugosidad del vidrio o una pequeña variación en la distribución del momento magnético en la esfera basta para definir si la esfera logra moverse o se queda vibrando en una misma posición.

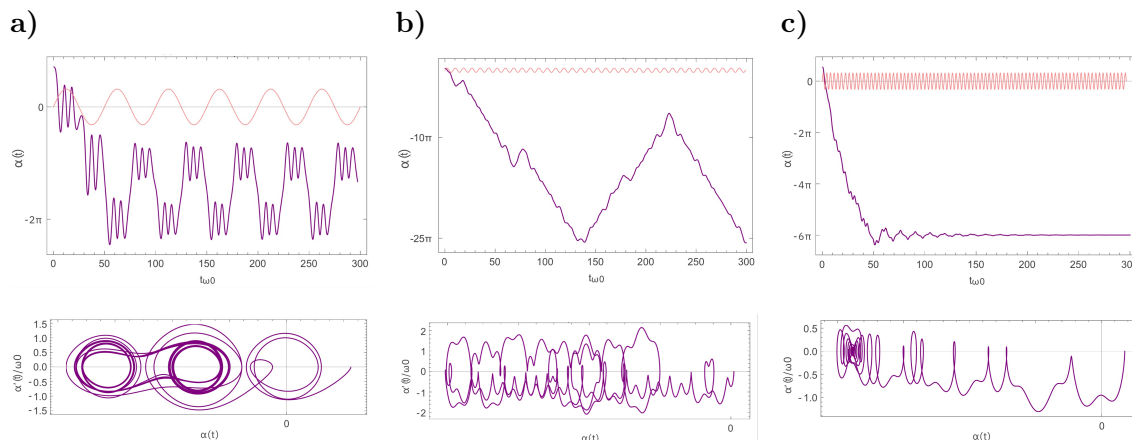


Figura 4.9: Dinámica del sistema a 70 G. Fila superior: Evolución temporal del ángulo $\alpha(t)$. Fila inferior: Retratos de fase correspondientes. Columnas: (a) régimen de baja frecuencia ($f = 0,02\omega_0$), (b) régimen intermedio de movimiento persistente ($f = 0,12\omega_0$) y (c) el límite de alta frecuencia ($f = 0,275\omega_0$), donde la reducción de fricción provoca sensibilidad caótica a las condiciones iniciales.

4.4. Conclusiones

En este capítulo presentamos un modelo teórico que describe la dinámica de la esfera magnética en los tres distintos regímenes que observamos en el capítulo anterior. Demostramos que dicho modelo captura fielmente el comportamiento observado experimentalmente, y que el sistema sigue este modelo teórico incluso al aumentar la intensidad del campo. Esencialmente, encontramos que en el régimen de frecuencias bajas, la esfera se queda moviéndose en un mismo lugar sin avanzar, dibujando oscilaciones repetitivas y órbitas cerradas en el espacio fase. Al pasar a la frecuencia intermedia, la partícula logra sincronizarse y rueda de forma continua, lo cual se comprueba al ver cómo el ángulo crece en una línea constante y su velocidad de giro se estabiliza en una sola dirección. Finalmente, para unas oscilaciones más altas, el movimiento disminuye rápidamente y la esfera se queda quieta en una región, siendo incapaz de seguir la intensidad del campo. Particularmente, encontramos que para la magnitud mayor que aquí trabajamos (70 G), el comportamiento se vuelve mucho más sensible a las condiciones iniciales, lo que lleva a que la dinámica se vuelva menos predecible.

Capítulo 5

Theoretical Model

5.1. Derivation of the Theoretical Model

The main objective of this model is to describe the dynamics of a magnetized steel sphere subjected to a time-oscillating external magnetic field. To substantiate this behavior, we start from an essential analogy in classical physics: *the simple pendulum* [37]. In its most basic form, a mass oscillates around an equilibrium point due to the restoring force of gravity, whose equation is given by:

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin \phi = 0 \quad (5.1)$$

where ϕ is the deflection angle, g is the acceleration of gravity, and l is the length of the string. However, in any physical system, there is energy dissipation, typically given by friction with the medium [38]. By incorporating this damping, the equation becomes dependent on the angular velocity, mediated by a friction coefficient :

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} + \gamma \frac{d\phi}{dt} + \frac{g}{l} \sin \phi = 0 \quad (5.2)$$

If this system does not oscillate freely but is perturbed by vertically oscillating its suspension point, the external action does not act as a direct push on the mass. Instead, it causes the effective gravity parameter to change periodically in time. This makes it a **parametrically driven pendulum** [39]:

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} + \gamma \frac{d\phi}{dt} + A \sin(\Omega t) \sin \phi = 0 \quad (5.3)$$

5.1.1. Parametrically Driven Magnetic Pendulum

To transfer the mechanical concept described in Equation 5.3 to the context of our work, we resort to the magnetic pendulum model developed by Kim *et al.* [4]. Experimentally, this system consists of a permanent bar magnet coaxially attached to its rotation axis and suspended in the center of two pairs of Helmholtz coils that produce a magnetic field as shown in Figure 5.1. When a magnetic moment is immersed in an oscillating field, it

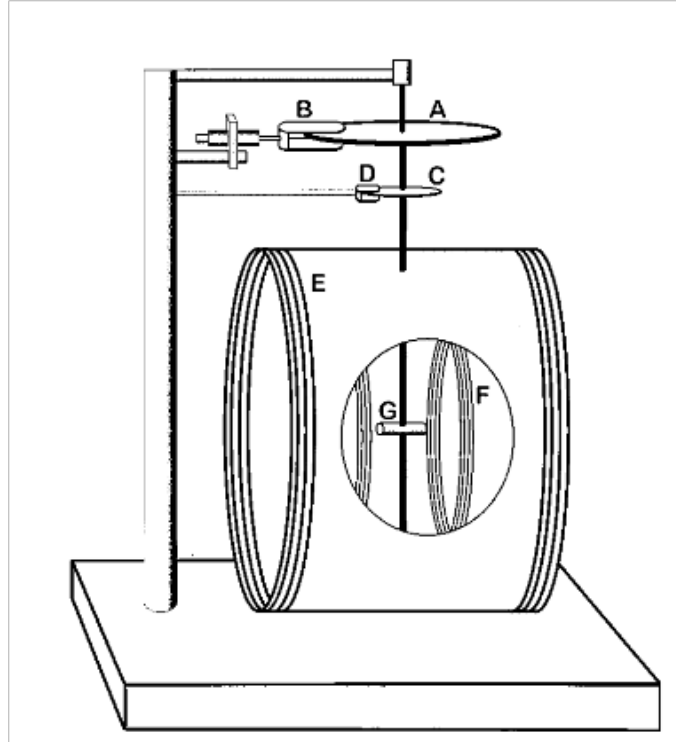


Figura 5.1: Schematic of the parametrically driven magnetic pendulum [4]: (A) aluminum damping plate, (B) micrometer-controlled horseshoe magnet, (C) encoder wheel, (D) encoder module, (E) Helmholtz coil for the electrical current component, (F) Helmholtz coil for the alternating current component, and (G) permanent bar magnet.

behaves mathematically as a pendulum where the restoring force is not constant, but directly depends on the amplitude and frequency parameters of the external field [13]. The equation of motion governing this magnetic oscillator is expressed as [4]:

$$\ddot{x} + 2\pi\gamma\dot{x} + 2\pi(\Omega^2 + A \sin 2\pi t) \sin 2\pi x = 0 \quad (5.4)$$

where γ represents the damping parameter, Ω is the natural frequency of the system and A is the amplitude of the driving force [4], where the support or suspension of the system

oscillates vertically constituting the parametric part of the equation [4]. The analysis of this system demonstrates that, by varying the frequency (ω) and amplitude (A) of the field, the pendulum exhibits non-linear dynamics [40, 4]. For small values of amplitude, the particle remains in a stable equilibrium state, corresponding to its normal stationary point [40]. However, as the amplitude of the magnetic field exceeds a critical threshold, the system abruptly loses its stability [40, 4]. When the magnetic field is weak, the magnet is in a static equilibrium state. But if we increase the strength of the external field beyond a certain limit, that state changes and the motion becomes more complex, oscillating from side to side in cycles that repeat in increasingly complex ways. If we continue to increase the field intensity, these modifications multiply in a chain reaction until they become *deterministic chaos* [40, 4]. This summarizes the fundamental mechanism of the instability and dynamic response of the system. Its theoretical validity is supported by the literature on dynamical systems, where this type of non-linear oscillator has been studied to understand how behavioral changes originate and how they lead to chaos [39, 41, 42, 43, 40]. Likewise, this formulation agrees with the principles of active matter: the system extracts energy from the external field and transforms it into directional motion, dissipating the rest to the medium [44, 9]. In this context, the phenomenological relevance of the model for our work lies precisely in its stability map: it provides us with the theoretical mechanism to understand how and why the sphere stops being at rest to begin rotating or oscillating. Thus, in our experimental setup, we directly take advantage of these parametrically induced instabilities to trigger the resonance that gives rise to active motion [13, 9].

5.2. Sphere Dynamics and Equation of Motion

To mathematically describe how the instabilities described in the previous section originate, it is fundamental to transfer these theoretical concepts to our experimental system. Let us consider the basic model of our system: an isolated magnetic sphere. This particle interacts with a spatially uniform and time-oscillating external magnetic field, applied along the vertical axis. This field is defined as $\vec{B}_{ext}(t) = B_0 \sin(2\pi f t) \hat{k}$, where B_0 is the maximum amplitude, f is the oscillation frequency, and $\hat{k}$ indicates the vertical direction. As illustrated in Figure 5.2, the particle is characterized by having a magnetic moment, denoted by the vector $\vec{\mu}$, which is free to orient itself in any spatial direction. When this sphere is under the influence of an external magnetic field, $\vec{B}_{ext}$, applied along the vertical axis, the interaction between both vectors generates a magnetic torque ($\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}_{ext}$) that seeks to align the particle's moment with the direction of the field. As observed in the schematic, the state of the sphere is defined by the angle θ . By studying the temporal

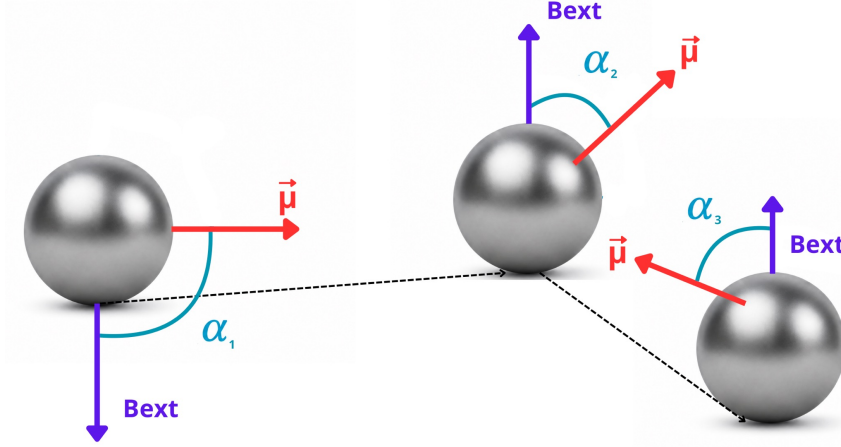


Figura 5.2: Fundamental geometric schematic of the system. A sphere is illustrated whose magnetic moment $\vec{\mu}$ (in red), free to rotate, interacts with an external magnetic field $\vec{B}_{ext}$ (in purple) acting exclusively along the vertical direction. The orientation state of the system changes during motion, evidenced by the variation of the instantaneous angle as the particle moves on the substrate.

evolution of this angle through torque balance, we can construct the equation of motion that will predict the sphere's behavior: whether it remains aligned with the field or breaks equilibrium to begin its motion.

5.2.1. Mechanical Coupling and No-Slip Condition

From the previous schematic, it is evident that the magnetic field generates rotational dynamics: the torque seeks to align the magnetic moment, causing the sphere to oscillate or rotate. This behavior holds a direct mathematical analogy with the driven pendulum model of Equation 5.4. In our system, the torque depends on the angular misalignment through the $\sin \alpha(t)$ term. Consequently, the alternating magnetic field assumes the role of an effective "gravity" that drives and parametrically modulates the system through the $\sin(2\pi ft)$ component.

To summarize and formalize this equivalence, Table 5.1 presents the direct correspondence between the physical elements of both systems.

Element	Parametrically Driven Pendulum	Magnetic Pendulum State variable
Deflection angle ϕ	Angle α between the dipole $\vec{\mu}$ and the field $\vec{B}$	
Inertia	Mass of the pendulum and string length	Moment of inertia I of the steel sphere
Dissipation	Air or pivot friction	Rotational friction due to contact with the glass (dry medium)
Restoring Force	Gravity	Magnetic torque induced by the alternating field $\vec{B}(t)$
Origin of Parametric Forcing	Vertical movement of the support (variable parameter)	Oscillation of the magnetic field

Cuadro 5.1: Physical and mathematical analogy between the components of the classical parametrically driven pendulum and the rotational magnetic system employed in this work.

Conclusiones

En este trabajo de tesis se logró establecer y validar con éxito un marco teórico y experimental para comprender el movimiento de una esfera magnética impulsada por un campo magnético externo oscilante. A través de la analogía con un péndulo magnético forzado paramétricamente, demostramos que la autopropulsión de la partícula no requiere de mecanismos internos complejos, sino que surge de manera natural por la interacción continua entre el momento magnético de la esfera y las inversiones constantes del campo externo.

Una de las aportaciones más importantes de este análisis es la confirmación de que la fricción con la placa de vidrio, lejos de ser un simple freno que disipa energía, actúa como el mecanismo acoplador clave. Gracias a la condición de no deslizamiento, esta fricción es la responsable de transformar la oscilación rotacional de la esfera magnética en un desplazamiento de traslación real sobre la superficie.

Al resolver la ecuación de movimiento y contrastarla con los datos experimentales para diferentes intensidades de campo magnético (desde 12 G hasta 70 G), comprobamos que la dinámica de la esfera obedece a tres regímenes bien definidos, los cuales dependen estrictamente de la relación entre la frecuencia del campo (f) y la frecuencia natural del sistema (ω_0). En el régimen de bajas frecuencias, la esfera tiene tiempo suficiente para seguir los cambios del campo, lo que la obliga a quedarse atrapada en un espacio local sin lograr un avance neto. En el régimen de frecuencias intermedias (movimiento persistente), el sistema entra en resonancia. Se rompe el equilibrio y la esfera es forzada a rodar de manera continua en una dirección definida, logrando un transporte activo persistente. Finalmente, en el régimen de altas frecuencias, la inercia domina la dinámica. Los cambios del campo son tan rápidos que la esfera no tiene tiempo de responder, lo que disminuye su movimiento hasta dejarla completamente estática.

La extensión del modelo a campos magnéticos más intensos (20 G, 30 G, 50 G y 70 G) comprobó que este mecanismo es consistente y generalizable. Los resultados demostraron

que para lograr el movimiento activo no basta con incrementar la magnitud del campo magnético; es absolutamente indispensable encontrar el ritmo de oscilación adecuado que conecte con la resonancia de la esfera.

Finalmente, el análisis a 70 G nos permitió revelar un aspecto fascinante de la dinámica no lineal del sistema: al disminuir la fricción efectiva por la alta intensidad del campo, el modelo exhibe una sensibilidad extrema a las condiciones iniciales. Este comportamiento de caos determinista explica matemáticamente de forma impecable lo que observamos cómo variaciones microscópicas, como una mínima rugosidad en el vidrio, son suficientes para decidir el destino de la esfera, determinando si logra desplazarse de forma continua o si se queda vibrando en su lugar.

En conjunto, estos hallazgos confirman que la dinámica impulsada paramétricamente permite que la esfera extraiga energía del medio oscilante y la transforme en un movimiento direccional. Esto valida que nuestro sistema macroscópico reproduce exitosamente las características fundamentales de una partícula de materia activa.

Bibliografía

- [1] H. C. Berg. *Random Walks in Biology*. Princeton University Press, 1993.
- [2] N. G. van Kampen. *Stochastic Processes in Physics and Chemistry*. Elsevier, 3rd edition, 2007.
- [3] J. O. Arroyo. Anomalous diffusion due to interleaflet coupling and molecular pinning. In *Springer Theses*, pages 59–79. 2018.
- [4] Sang-Yoon Kim, Seung-Ho Shin, Jaichul Yi, and Chi-Woong Jang. Bifurcations in a parametrically forced magnetic pendulum. *Physical Review E*, 56(6):6613–6619, 1997.
- [5] Sriram Ramaswamy. The mechanics and statistics of active matter. *Annual Review of Condensed Matter Physics*, 1(1):323–345, 2010.
- [6] Clemens Bechinger, Roberto Di Leonardo, Hartmut Löwen, Charles Reichhardt, Giorgio Volpe, and Giovanni Volpe. Active particles in complex and crowded environments. *Reviews of Modern Physics*, 88(4):045006, 2016.
- [7] Michael E. Cates and Julien Tailleur. Motility-induced phase separation. *Annual Review of Condensed Matter Physics*, 6:219–244, 2015.
- [8] Federico Toschi and Marcello Sega. *Flowing Matter*. Soft and Biological Matter. Springer, 1st edition, 2019.
- [9] M. C. Marchetti, J. F. Joanny, S. Ramaswamy, T. B. Liverpool, J. Prost, Madan Rao, and R. Aditi Simha. Hydrodynamics of soft active matter. *Reviews of Modern Physics*, 85(3):1143, 2013.
- [10] Jeremie Palacci, Stefano Sacanna, Asher P. Steinberg, David J. Pine, and Paul M. Chaikin. Living crystals of light-activated colloidal surfers. *Science*, 339(6122):936–940, 2013.

- [11] W. Andrä, U. Häfeli, R. Hergt, and R. Misri. *Application of Magnetic Particles in Medicine and Biology. Handbook of Magnetism and Advanced Magnetic Materials*. 2007.
- [12] Nathan J. Sniadecki. A tiny touch: activation of cell signaling pathways with magnetic nanoparticles. *Endocrinology*, 2010.
- [13] R. E. Moctezuma, F. H. Flores, F. Donado, and F. J. Sevilla. Dry-active motion induced by resonant dynamics through an alternating magnetic field. *Physica Scripta*, 100:055231, 2025.
- [14] Frank Schweitzer. *Brownian Agents to Active Particles: Complex Systems in Biology and Physics*. Springer-Verlag, 2003.
- [15] P. W. van der Pas. The discovery of the brownian motion. *Scientiarum Historia*, 13:27–35, 1971.
- [16] Robert Brown. *Miscellaneous Botanical Works*. Robert Hardwicke, 1866.
- [17] A. P. Phillipse. *Brownian Motion: Elements of Colloid Dynamics*. Springer, 2018.
- [18] Albert Einstein. Zur theorie der brownschen bewegung. *Annalen der Physik*, 19:371–381, 1906.
- [19] F. Reif. *Fundamentals of Statistical and Thermal Physics*. Waveland Press, 1965.
- [20] Don S. Lemons and Anthony Gythiel. Paul langevin’s 1908 paper “on the theory of brownian motion”. *American Journal of Physics*, 65(11):1079–1081, 1997.
- [21] Ronald Newburgh, Joseph Peidle, and Wolfgang Rueckner. Einstein, perrin, and the reality of atoms: 1905 revisited. *American Journal of Physics*, 74(6):478–481, 2006.
- [22] G. E. Uhlenbeck and L. S. Ornstein. On the theory of the brownian motion. *Physical Review*, 36(5):823–841, 1930.
- [23] R. Kubo, M. Toda, and N. Hashitsume. *Statistical Physics II: Nonequilibrium Statistical Mechanics*. Springer-Verlag, 1991.
- [24] Karl Pearson. The problem of the random walk. *Nature*, 72:294, 1905.
- [25] Edward A. Codling, Michael J. Plank, and Simon Benhamou. Random walk models in biology. *Journal of the Royal Society Interface*, 5(25):813–834, 2008.

- [26] Karl Przibram. Über die ungeordnete bewegung niederer tere. *Pflügers Archiv für die gesamte Physiologie des Menschen und der Tiere*, 153(8):401–405, 1913.
- [27] Pawel Romanczuk, Markus Bär, Werner Ebeling, Benjamin Lindner, and Lutz Schimansky-Geier. Active brownian particles: From individual to collective stochastic dynamics. *The European Physical Journal Special Topics*, 202(1):1–162, 2012.
- [28] Reinhold Fürth. Die brownsche bewegung bei berücksichtigung einer persistenz der bewegungsrichtung. mit anwendungen auf die bewegung der infusorien. *Zeitschrift für Physik*, 2(3):244–256, 1920.
- [29] Ralf Metzler and Joseph Klafter. The random walk’s guide to anomalous diffusion: a fractional dynamics approach. *Physics Reports*, 339(1):1–77, 2000.
- [30] Rob Phillips, Jane Kondev, Julie Theriot, and Hernan Garcia. *Physical Biology of the Cell*. Garland Science, 2nd edition, 2012.
- [31] Jonathan R. Howse, Richard A. L. Jones, Anthony J. Ryan, Tim Gough, Reza Vafabakhsh, and Ramin Golestanian. Self-motile colloidal particles: from directed propulsion to random walk. *Physical Review Letters*, 99(4):048102, 2007.
- [32] Robert M. Mazo. *Brownian Motion: Fluctuations, Dynamics, and Applications*. Oxford University Press, 2002.
- [33] Francisco J. Sevilla. Two-dimensional active motion. *Physical Review E*, 101(2):022608, 2020.
- [34] Helge Ewers et al. Gm1 structure determines sv40-induced membrane invagination and infection. *Nature Cell Biology*, 12(1):11–18, 2010.
- [35] Hartmut Löwen. Chiral active matter. *Journal of Chemical Physics*, 144(17):170901, 2016.
- [36] Veronika Magdanz, M. Stürmer, M. Böttcher, A. Hösel, J. Mikhael, H. Kadiri, and Oliver G. Schmidt. Smart magnetic micro- and nanorobots. *Advanced Materials*, 25(45):6581–6588, 2013.
- [37] John R. Taylor. *Classical Mechanics*. University Science Books, 2005.
- [38] Stephen T. Thornton and Jerry B. Marion. *Classical Dynamics of Particles and Systems*. Cengage Learning, 2013.
- [39] Moshe Gitterman. *The Chaotic Pendulum*. World Scientific, 2010.

- [40] Sang-Yoon Kim and Kijin Lee. Multiple transitions to chaos in a damped parametrically forced pendulum. *Physical Review E*, 53(2):1579–1586, 1996.
- [41] R. W. Leven and B. P. Koch. Chaotic behaviour of a parametrically excited damped pendulum. *Physics Letters A*, 86(2):71–74, 1981.
- [42] B. P. Koch, R. W. Leven, B. Pompe, and C. Wilke. Experimental evidence for chaotic behaviour of a parametrically forced pendulum. *Physics Letters A*, 96(5):219–224, 1983.
- [43] Anastasia Sofroniou and Steven Bishop. Dynamics of a parametrically excited system with two forcing terms. *Mathematics*, 2:172–195, 2014.
- [44] Frank Schweitzer, Werner Ebeling, and Benno Tilch. Statistical mechanics of canonical-dissipative systems and applications to swarm dynamics. *Physical Review E*, 64(2):021110, 2001.
- [45] John B. McLaughlin. Period-doubling bifurcations and chaotic motion for a parametrically forced pendulum. *Journal of Statistical Physics*, 24(2):375–388, 1981.
- [46] Eugene I. Butikov. Subharmonic resonances of the parametrically driven pendulum. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 35(29):6209–6231, 2002.
- [47] José L. Mateos. Chaotic ratchets: The origin of directed transport. *Physical Review Letters*, 84(2):258–261, 2000.
- [48] Peter Reimann. Brownian motors: noisy transport far from equilibrium. *Physics Reports*, 361(2-4):57–265, 2002.